Capítulo 6

Lógica de Keisler

6.1 Introdução

A lógica da quantificação não-enumerável, que chamaremos aqui de lógica de Keisler, foi apresentada pela primeira vez em 1970 [Keisler1970], num artigo contendo um sistema dedutivo axiomático. Em [Ebbinghaus1994] foi apresentada uma versão em cálculo de seqüentes. Porém, nenhuma discussão do ponto de vista da teoria da prova foi feita até hoje.

A lógica de Keisler consiste em uma extensão da lógica clássica na qual acrescentou-se um quantificador, que notaremos Q, cuja intenção é expressar que uma quantidade não enumerável de valores satisfaz uma certa propriedade. Mais precisamente, usa-se $Qx\varphi(x)$ para expressar que o conjunto $\{a|a \in |\mathfrak{A}| \ e \ \varphi(a)\}$ tem cardinalidade $\aleph_1$ pelo menos.

Associada a essa lógica tem-se a seguinte axiomatização correta e completa [Keisler1970] (que deve ser acrescentada a uma axiomatização para a lógica clássica de 1a ordem):

$\neg Qx(x = y \vee x = z)$

$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (Qx\varphi \rightarrow Qx\psi)$

$Qx\varphi(x, ...) \leftrightarrow Qy\varphi(y, ...)$

$Qy\exists x\varphi \rightarrow \exists xQy\varphi \vee Qx\exists y\varphi$

6.2 O sistema ND_Q

Apresentamos a seguir o sistema ND_Q (Dedução Natural para lógica de Keisler). Por simplicidade os termos da linguagem serão variáveis ou constantes. Quanto aos símbolos lógicos, serão usados $\perp$, $\rightarrow$, $\vee$, $\exists$ e Q. O símbolo $\forall$ poderá ser usado também como abreviação: $\forall x$ abrevia $\neg\exists x\neg$, onde $\neg\varphi$ abrevia $\varphi \rightarrow \bot$.

Rótulos

Nesse sistema teremos um rótulo associado às fórmulas, sendo que as variáveis desse rótulo podem ser não marcadas, como x, y,..., ou marcadas, como x^*, y^*,...

Variáveis não marcadas terão uma extensão ao menos unitária (existencial) enquanto que as marcadas terão uma extensão não enumerável.

O rótulo deve ser visto como uma lista ordenada, ou seja, a ordem na qual as variáveis ocorrem é relevante.

Formalmente, tem-se a seguinte definição para rótulo:

Definição

A lista vazia, notada $<>$, é um rótulo.

Se L é um rótulo e r é uma variável, que pode ser marcada ou não, então L, r é um rótulo, que consiste na lista cujo último elemento é r e os elementos anteriores são os elementos de L, na mesma ordem em que aparecem em L.

O sistema desenvolvido manipula então fórmulas rotuladas.

Obtém-se então o seguinte conjunto de regras:

$$\dfrac{}{\neg Qx(x = y \vee x = z)}\ Axioma(1)$$

$$\dfrac{\varphi^{L,x}}{\exists x\varphi^{L}}\ \exists I\ (2) \qquad \dfrac{\exists x\varphi^{L}}{\varphi^{<L,x>}}\ \exists E\ (3)$$

$$\dfrac{\varphi^{L,x^*}}{Qy\varphi(y)^{L}}\ QI\ (4) \qquad \dfrac{Qx\varphi^{L}}{\varphi^{<L,x^*>}}\ QE\ (5)$$

$$\dfrac{\varphi^{L} \qquad \dfrac{\Pi}{\varphi \rightarrow \psi}}{\psi^{L}} \rightarrow E\ (6) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\varphi^{L}\\ \vdots \\ \psi^{L}\end{matrix}}{(\varphi \rightarrow \psi)^{L}} \rightarrow I\ (7)$$

$$\dfrac{\varphi \vee \psi^{L} \qquad \begin{matrix}\varphi^{L}\\ \vdots \\ \gamma^{L'}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\psi^{L}\\ \vdots \\ \gamma^{L'}\end{matrix}}{\gamma^{L'}}\ \vee E\ (8)$$

$$\dfrac{\psi^{L}}{\psi \vee \varphi^{L}}\ \vee I\ (9) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\varphi \rightarrow \bot^{L}]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi^{K}}\ RAA\ (10)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[Qx\exists y\varphi]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix} \qquad \varphi^{L,y^*,x}}{\varphi^{L,x,y^*}}\ \aleph\ (11) \qquad \dfrac{\varphi^{L} \quad \begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\psi^{L}} *\ (12)$$

Com as seguintes restrições:

(6) as variáveis livres de L não ocorrem livres nas hipóteses de Π.

(7) L não contém variável marcada.

(10) L não contém variável marcada e $K \subseteq L$

(12) as variáveis de L não ocorrem livre em nenhuma hipótese da qual ψ dependa, com exceção de φ

6.2.1 Exemplo

Damos a seguir um exemplo de prova realizada em ND_Q.

$$\dfrac{\dfrac{[Qx((x=y\vee x=z)\vee x=w)]^3}{(x=y\vee x=z)\vee x=w^{x^*}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg Qx(x=y\vee x=z)} \quad \dfrac{[x=y\vee x=z^{x^*}]^1}{Qx(x=y\vee x=z)}}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg Qx(x=w\vee x=k)} \quad \dfrac{\dfrac{[x=w^{x^*}]^2}{x=w\vee x=k^{x^*}}}{Qx(x=w\vee x=k)}}{\bot}}{\dfrac{\bot}{\neg Qx((x=y\vee x=z)\vee x=w)}\;3}\;1,2$$

6.3 Correção

Semântica

A noção de satisfação para fórmulas rotuladas pode ser definida em relação à noção usual de satisfação para a lógica de Keisler, bastando para isso associar a cada fórmula rotulada, uma fórmula não rotulada equivalente. A associação é bem simples: basta considerar o rótulo como uma lista de quantificadores, existenciais ou não enumeráveis, que deve ser colocada na frente da fórmula. Ou seja, por exemplo, a fórmula $\varphi^{y^*,x}$ é equivalente à fórmula $Qy\exists x\varphi$. Formalmente, $\varphi^{L,x}$ está relacionada com $\exists x\varphi^L$, e φ^{L,x^*} está relacionada com $Qx\varphi^L$. Logo, considerando o fecho transitivo dessa relação, para toda fórmula rotulada φ^L existe uma única fórmula não rotulada ψ tal que φ^L e ψ são relacionadas. Definimos então que φ^L e ψ são equivalentes.

Podemos então enunciar as seguintes propriedades:

O sistema ND_Q é correto.

Ou seja, se $\Gamma \vdash_{ND_Q} \varphi$ então $\Gamma \models \varphi$.

Prova: a prova é feita mostrando que as regras, uma a uma, e o axioma são corretos.

- Axioma: o axioma é obviamente correto uma vez que é o mesmo do sistema original.

- $\dfrac{\varphi^{L,x}}{\exists x\varphi^L}$, $\dfrac{\exists x\varphi^L}{\varphi^{L,x}}$, $\dfrac{Qx\varphi^L}{\varphi^{L,x^*}}$ são obviamente corretas pois a fórmula de cima e a de baixo representam a mesma fórmula não rotulada.

- $\dfrac{\varphi^{L,x^*}}{Qy\varphi(y)^L}$ é equivalente a $\dfrac{Qx\varphi^L}{Qy\varphi(y)^L}$, que é correta (pois decorre diretamente do axioma original $Qx\varphi(x,...) \leftrightarrow Qy\varphi(y,...)$).

- $$\dfrac{\varphi^L \qquad \dfrac{\Pi}{\varphi \to \psi}}{\psi^L}$$

Como as variáveis de L não ocorrem livres nas hipóteses de Π, podemos obter o fecho universal de $\varphi \to \psi$ para as variáveis de L. Dessa forma, se φ é verdadeira no domínio definido por L, então ψ também é.

- $$\frac{\begin{array}{c}\varphi^{L}\\ \vdots\\ \psi^{L}\end{array}}{\varphi \to \psi^{L}}$$

L tem um valor puramente existencial. Se $\mathfrak{A} \models H$ (onde H representa as outras hipóteses) mas $\mathfrak{A} \not\models \varphi \to \psi^{L}$, então $\mathfrak{A} \models \neg(\varphi \to \psi)[a_1, ...a_n]$ para todo $a_1, ..., a_n$, onde os $a_1, ..., a_n$ estão atribuidos às variáveis de L. Logo $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ e $\mathfrak{A} \not\models \psi[a_1, ..., a_n]$ para todo $a_1, ..., a_n$. Logo $\mathfrak{A} \models \varphi^{L}$ e $\mathfrak{A} \not\models \psi^{L}$, o que contradiz a hipótese de indução.

- $$\frac{\varphi \vee \psi^{L} \qquad \begin{array}{c}\varphi^{L}\\ \vdots\\ \gamma^{L'}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\psi^{L}\\ \vdots\\ \gamma^{L'}\end{array}}{\gamma^{L'}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\psi^{L}}{\psi \vee \varphi^{L}}$$

Decorrem diretamente da lógica clássica e dos fatos que a união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável, e qualquer superconjunto de um conjunto não enumerável também é não enumerável.

- $$\frac{\begin{array}{c}[\varphi \to \bot^{L}]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi^{K}}$$

Como L tem uma valor existencial, a fórmula superior está associada a $\exists x_1 ... \exists x_n \neg\varphi$. Como $\bot$ foi obtida, por hipótese de indução tem-se $H \models \neg\exists x_1 ... \exists x_n \neg\varphi$, onde H representa as outras hipóteses da prova. Logo $H \models \varphi^{K}$.

- $$\frac{\begin{array}{c}[Qx\exists y\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{array} \qquad \varphi^{L,y^*,x}}{\varphi^{L,x,y^*}}$$

Observando as fórmulas não rotuladas representadas pelas fórmulas dessa regra, vemos que a regra decorre diretamente do axioma $Qy\exists x\varphi \to \exists xQy\varphi \vee Qx\exists y\varphi$.

- $$\dfrac{\varphi^L \quad \begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\psi^L}\,*$$

Como as variáveis de L não ocorrem livre em nenhuma hipótese fora φ, a correção dessa regra decorre diretamente da correção da regra $\to E$.

6.4 Completude

O sistema ND_Q é completo em relação à lógica de Keisler.

Ou seja, para fórmulas não rotuladas, se $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash_{ND_Q} \varphi$.

Prova: podemos reproduzir os axiomas da lógica de Keisler (incluindo os da lógica clássica) como mostrado a seguir para os axiomas não clássicos.

- $\neg Qx(x = y \vee x = z)$

O axioma é o mesmo nos dois sistemas.

- $\forall x(\varphi \to \psi) \to (Qx\varphi \to Qx\psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Qx\varphi}{\varphi^{x^*}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \to \psi)^x]}{\exists x\neg(\varphi \to \psi)} \qquad \neg\exists x\neg(\varphi \to \psi)}{\bot}}{\varphi \to \psi}\,RAA}{\psi^{x^*}}}{Qx\psi}}{Qx\varphi \to Qx\psi}$$

- $Qx\varphi(x,...) \leftrightarrow Qy\varphi(y,...)$

$$\dfrac{\dfrac{Qx\varphi(x)}{\varphi(x)^{<x^*>}}\,QE}{Qy\varphi(y)}\,QI$$

- $Qy\exists x\varphi \rightarrow \exists xQy\varphi \vee Qx\exists y\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{}{Qx\exists y\varphi(x,y) \vee \neg Qx\exists y\varphi(x,y)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Qx\exists y\varphi(x,y)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{Qy\exists x\varphi}{\exists x\varphi^{<y^*>}}\,QE}{\varphi(x,y)^{<x,y^*>}}\,\exists E}{\varphi(x,y)^{<y^*,x>}}\,\aleph}{Qy\varphi(x,y)^{<x>}}\,QI}{\exists xQy\varphi(x,y)}\,\exists I}{\exists xQy\varphi(x,y) \vee Qx\exists y\varphi(x,y)} \qquad \dfrac{[Qx\exists y\varphi(x,y)]^2}{\exists xQy\varphi(x,y) \vee Qx\exists y\varphi(x,y)}}{\exists xQy\varphi(x,y) \vee Qx\exists y\varphi(x,y)}\,{}^{1,2}$$

6.5 Normalização

Analisa-se aqui a questão da normalização das provas obtidas nesse sistema. Para isso, procura-se eliminar fórmulas máximas de uma prova (tradicionalmente uma fórmula é considerada máxima quando ela é conclusão de uma regra de introdução e premissa maior de uma regra de eliminação). Isso é feito através de "reduções"na prova, ou seja, transformações aplicáveis à prova que permitem eliminar uma fórmula máxima. Idealmente tem-se uma redução para cada tipo de fórmula máxima:

$$\dfrac{\Pi}{\dfrac{\dfrac{\varphi(x)^{L,x^*}}{Qy\varphi(y)^{L}}\,QI}{\varphi(y)^{L,y^*}}\,QE} \quad \text{se reduz a} \quad \dfrac{\Pi[x \leftarrow y]}{\varphi(y)^{L,y^*}}$$

A prova de que a redução indicada gera realmente uma prova requer alguns cuidados como aqueles usados em lógica clássica para separar variáveis livres de variáveis ligadas (ver [Prawitz1965] e [VanDalen1994]).

$$\dfrac{\dfrac{\varphi^{L,x}}{\exists\varphi^{L}}\,\exists I}{\varphi^{L,x}}\,\exists E \quad \text{se reduz a} \quad \varphi^{L,x}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\to I \qquad \varphi^{K}}{\psi^{K}}\to E \qquad \text{se reduz a} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \psi\end{array} \quad \varphi^{K}}{\psi^{K}}\,*$$

Essa redução é correta porque as condições sobre a aplicação de $\to I$ na derivação da esquerda leva às condições exigidas para uma aplicação correta da regra $*$ na derivação da direita.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi^{L}}{\varphi\vee\psi^{L}}\vee I \quad \begin{array}{c}[\varphi^{L}]\\ \vdots\\ \gamma^{K}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi^{L}]\\ \vdots\\ \gamma^{K}\end{array}}{\gamma^{K}}\vee E \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{array}{c}\varphi^{L}\\ \vdots\\ \gamma^{K}\end{array}$$

O exemplo a seguir tenta ilustrar um possível caso de fórmula máxima que não pode ser eliminada com uma redução:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[Qx\exists yA(x,y)]\\ \vdots\\ \bot\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{Qy\exists xA(x,y)}{\exists xA(x,y)^{<y^{*}>}}}{A(x,y)^{y^{*},x}}}{A(x,y)^{x,y^{*}}}}{QyA(x,y)^{<x>}}}{\exists xQyA(x,y)}$$

A possível fórmula máxima é a hipótese $Qx\exists yA(x,y)$ que foi eliminada e que talvez não seja subfórmula de nenhuma das hipóteses restantes.

O que se deseja então é uma propriedade que permita evitar essa situação.

Considere então a seguinte propriedade, relativa às provas de ND_Q:

se $H, Qx\exists yA(x,y) \vdash \perp$ *então* $Qx\exists yA(x,y)$ *é subfórmula de* H*, ou,* $A(x,y) \vdash \perp$

e chame essa propriedade de P.

Teorema:
Se P for verdadeira então o sistema ND_Q é normalizável.

Prova:
Considere a seguinte aplicação da regra $\aleph$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[Qx\exists yA(x,y)] \\ \vdots \\ \perp\end{array} \qquad A(x,y)^{<x,y^*>}}{A(x,y)^{<y^*,x>}}\ \aleph$$

Seja H o conjunto das hipóteses que, com $Qx\exists yA(x,y)$, levam a $\perp$.
Logo, por P, temos dois casos:
(1) $Qx\exists yA(x,y)$ é subfórmula de alguma fórmula de H:
então a eliminação de $Qx\exists yA(x,y)$ não interfere com a propriedade da subfórmula.
(2) $A(x,y) \vdash \perp$:
nesse caso a derivação acima pode se reduzir a

$$\dfrac{\begin{array}{c}A(x,y)^{x,y^*} \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{A(x,y)^{y^*,x}}$$

Uma vez que temos reduções para todos os possíveis casos de fórmula máxima, as provas são normalizáveis.

Deve se observar porém, que a propriedade P não foi provada.
Ainda assim, mesmo que P não seja verdadeira, tem-se um certo "bom comportamento" do sistema, do ponto de vista da teoria da prova: ao realizar uma prova $\Gamma \vdash \varphi$, se não for possível respeitar a propriedade da subfórmula (pelo motivo citado acima), observa-se porém que as únicas fórmulas envolvidas na prova serão subfórmulas de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, ou subfórmulas nas quais permutou-se a ordem de dois quantificadores.