Capítulo 3

Lógica de ultrafiltros

3.1 Introdução

Apesar de Dedução Natural ser o estilo de sistema dedutivo que talvez mais se aproxime dos raciocínios feitos diariamente por pessoas de todas as áreas, não é o mais usado na formalização de novos sistemas. Isso talvez porque ao criar um novo sistema o autor o caracterize por certas propriedades que se transformam facilmente em axiomas. Obtém-se então um sistema axiomático o qual vemos prontamente que possui as propriedades que desejavamos para o sistema criado.

Porém tais sistemas costumam ser muito difíceis de manipular, isso é, costuma ser difícil produzir provas usando tal sistema. Para contornar tais dificuldades (além de permitir outros estudos que têm interesse por si só, como teoria da prova, ou até reduzir complexidade de provadores de teorema por exemplo), podemos usar um sistema em dedução natural. O objetivo deste artigo é então apresentar um sistema em dedução natural para a Lógica de ultrafiltros.

A lógica de ultrafiltros é uma extensão da lógica clássica que tenta capturar uma noção de “quase todo”. Por exemplo, é verdade que quase toda ave pode voar; mas há exceções. Assim se o universo da variável x é o conjunto de todas as aves e $V(x)$ representa “x pode voar”gostariamos de poder dizer que “para quase todo x, $V(x)$”.

3.1.1 Lógica de ultrafiltros

Mais formalmente, a lógica de ultrafiltros é uma lógica que usa um novo quantificador para representar a noção de “quase todo”. Quando uma propriedade $\varphi(x)$ é partilhada por quase todos os elementos do universo considerado, essa lógica tenta expressar este fato pela fórmula $\nabla x\varphi(x)$, que pode ser lida: *para quase todo x,* $\varphi(x)$. Em [Veloso1999b] encontramos uma explicação da motivação para usar ultrafiltros para capturar o sentido de "quase todo".

A Lógica de ultrafiltros é obtida pelo acrescimo do quantificador ∇ à Lógica clássica de primeira ordem, com semântica dada por:

$(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \models \nabla x\varphi$ sse a extensão de φ em $(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ pertence a $\mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro definido sobre o universo da estrutura $\mathfrak{A}$.

Um filtro sobre um conjunto I é um conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ tal que: $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ implica $A \cap B \in \mathcal{F}$, e, $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$ implica $B \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ é próprio se $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Um ultrafiltro é um filtro próprio tal que para todo $A \in I$, $A \in \mathcal{F}$ ou $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

Exemplos podem ser encontrados em [Goldblatt1998].

3.1.2 Linguagem

A linguagem $\mathfrak{L}$ que será usada para a Lógica de ultrafiltros é definida da seguinte maneira:

Seja V um conjunto enumerável de variáveis que notamos $x_0, x_1, ..$ ou x, y, z, e $\overline{V}$ o conjunto que contém as variáveis de V, marcadas, e que notamos $\overline{x}$, $\overline{y}$,...

Seja C um conjunto de constantes.

Um termo de $\mathfrak{L}$ pode ser uma variável (marcada ou não) ou uma constante.

As formulas são então definidas da maneira usual usando apenas os símbolos $\wedge, \rightarrow, \perp, \forall$ e ∇, considerando então as seguintes abreviações:

$\neg\varphi$ é $\varphi \rightarrow \perp$

$\varphi \vee \psi$ é $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$\exists x$ é $\neg\forall x\neg$

3.1.3 Axiomatização

Já existem sistemas axiomáticos para a Lógica de ultrafiltros. Em [Veloso1999a] é apresentado um conjunto de axiomas para estender a lógica clássica de primeira ordem, que é provado correto e completo em relação às propriedades dos ultrafiltros. São 4 esquemas de axiomas:

$\nabla xA \rightarrow \exists xA$

$\neg\nabla xA \rightarrow \nabla x\neg A$
$\nabla xA \wedge \nabla xB \rightarrow \nabla x(A \wedge B)$
$\nabla xA \rightarrow \nabla yA[x \leftarrow y], y \notin VAR(A)$

Além desses axiomas são introduzidas as *generalizações* desses axiomas. É considerada generalização de uma fórmula φ, toda fórmula formada de uma série de quantificadores universais, seguida da fórmula φ em questão, ou seja, toda fórmula da forma $\forall x_1 ... \forall x_n \varphi$.

Para termos uma axiomatização completa para a Lógica de ultrafiltros, é necessário acrescentar esses axiomas a um sistema dedutivo para Lógica clássica, que contenha Modus Ponens, como o de [Enderton1972].

Alguns exemplos de teoremas:
$\forall xA \rightarrow \nabla xA$
$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\nabla xA \rightarrow \nabla xB)$
$\nabla\neg A \rightarrow \neg\nabla xA$
$\nabla x(A \vee B) \rightarrow (\nabla xA \vee \nabla xB)$

3.2 Sistema em dedução natural

Apresentamos aqui um sistema em dedução natural para a Lógica de ultrafiltros.

Esse sistema trabalha com fórmulas rotuladas. Usaremos freqüentemente os símbolos '<' e '>', antes e depois de um rótulo, apenas para destacar o fato de estarmos nos referindo a um rótulo. Um rótulo é uma lista ordenada de variáveis, que notamos $< v >$ ou $x_1, ..., x_n$. As variáveis podem ser não marcadas, como x por exemplo, ou marcadas, como $\overline{x}$ por exemplo.

Uma fórmula rotulada é então uma fórmula associada a um rótulo, que notamos $\phi^{<u>}$. Algumas restrições se aplicam a essas fórmulas rotuladas:
- cada variável ocorre no máximo uma vez, seja marcada seja não marcada.
- toda variável que ocorre na lista deve ter ocorrência livre na fórmula associada.

Informalmente podemos dizer que a lista serve para registrar a ordem na qual os quantificadores foram eliminados, e as marcas na variáveis servem para distingüir as que provêm da eliminação de $\forall$ das que provêm da eliminação de ∇ (adiante veremos as respectivas regras de introdução e eliminação). Isso permite que os quantificadores sejam então reintroduzidos na ordem certa. Essa idéia de usar marcas nas variáveis para distingüir o tipo de quantificação que elas permitem foi usado primeiramente numa versão de lógica clássica linear que contém um quantificador universal multiplicativo [Haeusler1999].

A semântica destas fórmula rotuladas será dada na seção seguinte. Apresentamos aqui as regras do sistema dedutivo $\mathcal{NUL}$.

São 16 regras.

Usamos aqui a versão de dedução natural mais tradicional (ver [Prawitz1965] e [VanDalen1994]). Por exemplo, quando em uma prova queremos dizer que a conclusão não depende mais de uma hipótese que foi usada na prova, dizemos que a hipótese foi cancelada (ou descarregada).

3.2.1 Regras $\forall I$ e $\forall E$

$$\frac{A^{<u>,x}}{\forall x A^{<u>}}\ \forall I \quad (1) \qquad\qquad \frac{A^{<u>}}{\forall x A^{<u>}}\ \forall I \quad (2)$$

$$\frac{\forall x A^{<u>}}{A^{<u>}}\ \forall E \quad (3) \qquad\qquad \frac{\forall x A^{<u>}}{A[x \leftarrow c]^{<u>}}\ \forall E \quad (4)$$

$$\frac{\forall x A^{<u>}}{A(y)^{<u>,y}}\ \forall E \quad (5) \qquad\qquad \frac{\forall x A^{<u>}}{A(y)^{<u>,\overline{y}}}\ \forall E \quad (6)$$

Com as seguintes condições:

(1): onde a variável x não ocorre livre em nenhuma das hipóteses não canceladas das quais depende $A^{<u>,x}$.

(2): se x não ocorre livre em A.

(3): sem condições necessárias.

(4): onde $A[x \leftarrow c]$ é o resultado de substituir as ocorrências livres de x por c em A.

(5): se x ocorre livre em A.

(6): se x ocorre livre em A.

3.2.2 Regras ∇I e ∇E

$$\frac{A^{<u>,\overline{x}}}{\nabla x A^{<u>}}\,\nabla I \quad (7) \qquad\qquad \frac{A^{<u>}}{\nabla x A^{<u>}}\,\nabla I \quad (8)$$

$$\frac{\nabla x A^{<u>}}{A(y)^{<u>,\overline{y}}}\,\nabla E \quad (9) \qquad\qquad \frac{\nabla x A^{<u>}}{A^{<u>}}\,\nabla E \quad (10)$$

Com as seguintes condições:
(7): não há condições necessárias
(8): se x não ocorre livre em A
(9): não há condições necessárias
(10): se x não ocorre livre em A

3.2.3 Regras $\wedge I$ e $\wedge E$

$$\frac{A^{<u>} \quad B^{<v>}}{A \wedge B^{<w>}}\,\wedge I \quad (11) \qquad\qquad \frac{A \wedge B^{<w>}}{A^{<u>}}\,\wedge E \quad (12)$$

$$\frac{A \wedge B^{<w>}}{B^{<u>}}\,\wedge E \quad (13)$$

Com as seguintes condições:

(11): onde $< w >$ é um "merge"[1] de $< u >$ e $< v >$ respeitando o seguinte:

- Todo termo de $< w >$ está em $< u >$ ou $< v >$.
- Todos os termos de $< u >$ e $< v >$ estão em $< w >$.
- Se y_0 e y_1 são duas variáveis de $< u >$ (ou $< v >$) tais que y_0 ocorre antes de y_1 na lista $< u >$ (ou $< v >$), ou seja, tais que $y_0 <_u y_1$ (ou $y_0 <_v y_1$), então $y_0 <_w y_1$ (y_0 ocorre antes de y_1 na lista $< w >$).
- Se $x \in FV(A) \cap FV(B)$ (x variável livre de A e B) então ($x \in < u >$ sse $x \in < v >$), (ou seja, não pode pertencer a uma das listas sem pertencer à outra).

[1] Usamos o termo merge para representar um tipo de fusão entre as duas listas. As características dessa fusão estão descritas na seqüência do texto.

(12): onde $< u >$ contem exatamente as variáveis de $< w >$ que ocorrem livre em A, na mesma ordem em que ocorrem em $< w >$.

(13): onde $< u >$ contém exatamente as variáveis de $< w >$ que ocorrem livre em B, na mesma ordem em que ocorrem em $< w >$.

3.2.4 Regra $\perp$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A^{<u>}]\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{A^{<u>}}\perp \qquad (14)$$

3.2.5 Regras $\rightarrow I$ e $\rightarrow E$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A^{<u>}]\\ \vdots\\ B^{<v>}\end{array}}{A \rightarrow B^{<w>}}\rightarrow I \qquad (15) \qquad\qquad \dfrac{A^{<u>} \quad A \rightarrow B^{<w>}}{B^{<v>}}\rightarrow E \quad (16)$$

Com as seguintes condições:

(15): onde $< w >$ é um merge de $< u >$ e $< v >$ respeitando o seguinte:

- Todo termo de $< w >$ está em $< u >$ ou $< v >$.
- Todos os termos de $< u >$ e $< v >$ estão em $< w >$.
- Se $y_0 <_u y_1$ ou $y_0 <_v y_1$, então $y_0 <_w y_1$.
- Se $x \in FV(A) \cap FV(B)$ então ($x \in < u >$ sse $x \in < v >$).

(16): onde $< u >$ contém exatamente as variáveis de $< w >$ que ocorrem livre em A, na mesma ordem em que ocorrem em $< w >$, e $< v >$ contem exatamente as variáveis de $< w >$ que ocorrem livre em B, na mesma ordem em que ocorrem em $< w >$.

3.2.6 Regra X

Essa regra é estrutural. Não introduz ou elimina conectivo. Ela permite uma rearrumação das variáveis da lista. Simplesmente ela permite que qualquer variável não marcada seja deslocada arbitrariamente para a esquerda.

$$\frac{A^{<u><v>x<w>}}{A^{<u>x<v><w>}} X \quad (17)$$

onde $< u >< v > x < w >$ é uma lista formada pela concatenação de $< u >$, $< v >$, x e $< w >$, sendo que $< u >$ e $< w >$ são listas que podem ser vazias, e x é uma variável não marcada.

3.3 Correção

Teorema 1

O sistema $\mathcal{NUL}$ é correto em relação à Lógica de ultrafiltros.

Antes de tudo é necessário definir uma semântica para as fórmulas rotuladas. Para isso definimos:

$(\mathfrak{A}, \mathcal{F}, v, \rho) \models A^{<u>}$

onde v é uma função de V em $|\mathfrak{A}|$ e ρ é uma família de funções ρ_i de $\overline{V}^i$ em $\mathcal{F}$.

Ao invés de $(\mathfrak{A}, \mathcal{F}, v, \rho) \models A^{<u>}$ usa-se a abreviação $\mathcal{K} \models A^{<u>}$.

A definição pode ser dada por indução no comprimento da lista.

Para a lista de comprimento zero, $(\mathfrak{A}, \mathcal{F}, v, \rho) \models A$ sse $(\mathfrak{A}, \mathcal{F}, v) \models A$

Para simplificar a formulação, a linguagem é estendida com constantes c_a para cada $a \in |\mathfrak{A}|$.

Caso base:

Se rótulo=x ou rótulo=$\overline{x}$

$\mathcal{K} \models \varphi^x \Leftrightarrow \mathcal{K} \models \varphi[x \leftarrow c_{v(x)}]$

$\mathcal{K} \models \varphi^{\overline{x}} \Leftrightarrow \forall a \in \rho_0, \mathcal{K} \models \varphi[x \leftarrow c_a]$

Caso indutivo:

se rótulo=$< u >, x$

Supondo que $\mathcal{K} \models \varphi^{<u>} \Leftrightarrow Q, \mathcal{K} \models E$, temos então que

$\mathcal{K} \models \varphi^{<u>,x} \Leftrightarrow Q, \mathcal{K} \models E[x \leftarrow c_{v(x)}]$

se rótulo=$< u >, \overline{x}$

Supondo que $\mathcal{K} \models \varphi^{<u>} \Leftrightarrow Q, \mathcal{K} \models E$, temos então que

$\mathcal{K} \models \varphi^{<u>,\overline{x}} \Leftrightarrow Q, \forall a' \in \rho_i(vect), \mathcal{K} \models E[x \leftarrow c_{a'}]$

onde i é o comprimento da lista $< u >$, *vect* é um vetor que *contém os valores atribuidos às variáveis anteriores da lista*, ou seja, às variáveis de

$< u >$, e a' é uma variável nova, que não ocorre em Q. Observe que estamos aqui na meta linguagem e assim essas variáveis não têm nada a ver com as variáveis de V.

Para que essa definição fique mais clara damos aqui alguns exemplos:

$$\mathcal{K} \models \varphi^{x,y} \Leftrightarrow \mathcal{K} \models \varphi[x \leftarrow c_{v(x)}, y \leftarrow c_{v(y)}]$$
$$\mathcal{K} \models \varphi^{\overline{x},y} \Leftrightarrow \forall a \in \rho_0, \mathcal{K} \models \varphi[x \leftarrow c_a, y \leftarrow c_{v(y)}]$$
$$\mathcal{K} \models \varphi^{x,\overline{y}} \Leftrightarrow \forall a \in \rho_1(v(x)), \mathcal{K} \models \varphi[x \leftarrow c_{v(x)}, y \leftarrow c_a]$$
$$\mathcal{K} \models \varphi^{\overline{x},\overline{y}} \Leftrightarrow \forall a \in \rho_0, \forall b \in \rho_1(a), \mathcal{K} \models \varphi[x \leftarrow c_a, y \leftarrow c_b]$$

A correção das provas é estabelecida provando que se $\Gamma \vdash \varphi$ é uma prova em $\mathcal{NUL}$ então:

$\exists \rho, \forall v[\mathcal{K} \models \Gamma \implies \mathcal{K} \models \varphi]$.

(Observe que se nenhuma das fórmulas de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ contém rótulo, então este critério se identifica com aquele usado para provas em lógica clássica).

A prova é feita por indução no tamanho da prova. Seja então D uma prova de $\Gamma \vdash \varphi$.

Caso atômico: se D é uma única fórmula $A^{<u>}$, então devemos provar que $\mathcal{K} \models A^{<u>} \implies \mathcal{K} \models A^{<u>}$. Trivial.

Segue então cada uma das 17 regras, considerando o caso onde ela foi a última regra usada na prova, e supondo que a prova sem a aplicação dessa última regra é correta.

$$\frac{\varphi^{<u>,x}}{\forall x \varphi^{<u>}} \forall I \quad (1)$$

Pela H.I., $\exists \rho, \forall v[\mathcal{K} \models \Gamma \implies \mathcal{K} \models A^{<u>,x}]$. Como a variável x não é marcada, o valor atribuido por $\mathcal{K}$ a x é simplesmente $v(x)$. Como x não ocorre livre em Γ, a verdade ou falsidade de $\mathcal{K} \models \Gamma$ não depende de $v(x)$. Assim, se tivermos $\mathcal{K} \models \Gamma$ para algum v, teremos então $\forall v \mathcal{K} \models \Gamma$. Logo, $\forall v, \mathcal{K} \models \forall^{<u>,x}$. Logo, $\forall v, \mathcal{K} \models \forall x A^{<u>}$, que nos dá a implicação que queremos provar. Também obtemos esta implicação se $\forall v, \mathcal{K} \not\models \Gamma$.

$$\frac{\varphi^{<u>}}{\forall x \varphi^{<u>}} \forall I \quad (2)$$

Trivial.

$$\frac{\forall x \varphi^{<u>}}{\varphi^{<u>}}\, \forall E \quad (3)$$

Trivial.

$$\frac{\forall x \varphi^{<u>}}{\varphi[x \leftarrow c]^{<u>}}\, \forall E \quad (4)$$

Decorre diretamente de $\mathcal{K} \not\models \varphi[x \leftarrow c]^{<u>} \implies \mathcal{K} \not\models \forall x \varphi^{<u>}$.

$$\frac{\forall x \varphi^{<u>}}{\varphi(y)^{<u>,y}}\, \forall E \quad (5)$$

Trivial.

$$\frac{\forall x \varphi^{<u>}}{\varphi(y)^{<u>,\overline{y}}}\, \forall E \quad (6)$$

Decorre diretamente de $|\mathfrak{A}| \in \mathcal{F}$.

$$\frac{\varphi^{<u>,\overline{x}}}{\nabla x \varphi^{<u>}}\, \nabla I \quad (7)$$

Se $\mathcal{K} \models \varphi^{<u>,\overline{x}}$ então por definição $\forall a \in \rho(\overline{x}), \mathcal{K} \models \varphi^{<u>}[\overline{x} \leftarrow a]$. Como $\rho(\overline{x}) \in \mathcal{F}$, temos $\mathcal{K} \models \nabla x \varphi^{<u>}$.

$$\frac{\varphi^{<u>}}{\nabla x \varphi^{<u>}}\, \nabla I \quad (8)$$

Trivial.

$$\frac{\nabla x \varphi^{<u>}}{\varphi(y)^{<u>,\overline{y}}}\, \nabla E \quad (9)$$

Em relação a $\nabla x \varphi^{<u>}$, $\rho(\overline{y})$ é irrelevante. Logo em $\varphi(y)^{<u>,\overline{y}}$ podemos escolher $\rho(\overline{y}) = \{x : \mathcal{K} \models \varphi^{<u>}\} \in \mathcal{F}$.

$$\frac{\nabla x \varphi^{<u>}}{\varphi^{<u>}} \nabla E \quad (10)$$

Trivial.

$$\frac{\varphi^{<u>} \quad \psi^{<v>}}{\varphi \wedge \psi^{<w>}} \wedge I \quad (11)$$

Devemos redefinir ρ para estar de acordo com $< w >$. Isso é feito mantendo a escolha para as variáveis que ocorrem unicamente em $< u >$ ou unicamente em $< v >$. Observe que se por exemplo $\overline{x}$ só ocorre em $< u >$, então a escolha do novo $\rho(\overline{x})$ só considera as variáveis de $< w >$ que já estavam em $< u >$ sendo então constante em relação às outras.

Quanto às variáveis marcadas que ocorrem em $< u >$ e $< v >$, a escolha do novo ρ é feita tomando a interseção das escolhas em relação a $< u >$ e em relação a $< v >$. Como $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro, a interseção de dois elementos de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.

$$\frac{\varphi \wedge \psi^{<w>}}{\varphi^{<u>}} \wedge E \quad (12)$$

Trivial

$$\frac{\varphi \wedge \psi^{<w>}}{\psi^{<u>}} \wedge E \quad (13)$$

Trivial

$$\begin{array}{c} [\neg \varphi^{<u>}] \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{\varphi^{<u>}} \bot \end{array} \quad (14)$$

Provar a correção dessa regra requer provar que $\neg \nabla x_1 ... \nabla x_n \neg \varphi$ sse $\nabla x_n \varphi$.

Ora isso decorre de $\mathcal{F}$ ser um ultrafiltro e assim para todo conjunto S, $S \in \mathcal{F}$ sse $S^c \notin \mathcal{F}$, onde S^c é o complemento de S em relação ao universo sobre o qual foi definido $\mathcal{F}$.

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi^{<u>}]\\ \vdots \\ \psi^{<v>}\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi^{<w>}} \rightarrow I \qquad (15)$$

Requer provar que $[\nabla x_1...\nabla x_n\varphi \rightarrow \nabla y_1...\nabla y_m\psi] \implies [\nabla z_1...\nabla z_k(\varphi \rightarrow \psi)]$ onde $< z_1...z_k >$ é um merge de $< x_1...x_n >$ e $< y_1...y_m >$. Ora isso decorre de $\mathcal{F}$ ser um ultrafiltro.

$$\frac{\varphi^{<u>} \quad \varphi \rightarrow \psi^{<w>}}{\psi^{<v>}} \rightarrow E \qquad (16)$$

Requer provar que $[\nabla x_1...\nabla x_n\varphi \wedge \nabla z_1...\nabla z_k(\varphi \rightarrow \psi)] \implies \nabla y_1...\nabla y_n\psi$, que é uma propriedade dos ultrafiltros.

$$\frac{\varphi^{<u><v>x<w>}}{\varphi^{<u>x<v><w>}} X \qquad (17)$$

Requer provar implicações da forma $Q_1x_1...Q_kx_k\forall x...Q_nx_n\varphi \rightarrow Q_1x_1...\forall xQ_kx_k...Q_nx_n\varphi$ (onde Q_i é $\forall$ ou ∇), que são uma propriedade de ultrafiltros.

Formulação Alternativa

Note que a indução usada aqui não é das mais óbvias, pois considera o comprimento das descrições da meta-linguagem que traduzem semanticamente a fórmula.

Por esse motivo, apresentamos uma formulação alternativa apresentada em [Rentería2003] que talvez esteja mais de acordo com o gosto da maioria.

A idéia é introduzir a notação $\mathcal{K}[a]$ para representar o mesmo que $\mathcal{K}$, com exceção da lista ρ de funções, que é substituida pela lista $\rho[a]$ onde $\rho[a]_0 = \rho_1[a]$, $\rho[a]_1 = \lambda x_2\rho_2(a, x_2), ..., \rho[a]_i = \lambda x_2\lambda x_3...\lambda x_{i+1}\rho_{i+1}(a, x_2, ..., x_i, x_{i+1}), ...$

Com essa formulação, a prova da regra 7, por exemplo, ficaria assim:

$$\frac{\varphi^{<u>,\overline{x}}}{\nabla x\varphi^{<u>}}\nabla I \quad (7)$$

Se $\mathcal{K} \models \varphi^{<u>,\overline{x}}$, então, por definição, $\forall a_{i_1} \in \rho_{i_1}(k_{i_1}), \forall a_{i_2} \in \rho_{i_2}(k_{i_2}), ..., \forall a_{i_n} \in \rho_{i_n}(k_{i_n}), \mathcal{K} \models \varphi[\overline{s}][x \leftarrow a_{i_n}]$, onde os k_i's são vetores e $\overline{s}$ é uma lista de substituições. Como $\rho_{i_n}(k_{i_n})$ é um elemento do ultrafiltro, temos $\forall a_{i_1} \in \rho_{i_1}(k_{i_1}), \forall a_{i_2} \in \rho_{i_2}(k_{i_2}), ..., \forall a_{i_{n-1}} \in \rho_{i_{n-1}}(k_{i_{n-1}}), \mathcal{K} \models \nabla x\varphi[\overline{s}]$, que é a definição exata de $\mathcal{K} \models \nabla x\varphi^{<u>}$.

3.4 Completude

Teorema 2

O sistema $\mathcal{NUL}$ é completo em relação à Lógica de ultrafiltros.

A prova da completude de $\mathcal{NUL}$ é obtida provando cada um dos axiomas de um sistema dedutivo cuja completude já foi previamente provada [Veloso1999a].

Precisamos de um sistema dedutivo para a parte clássica. Podemos usar por exemplo [Enderton1972]:

A generalização dos seguintes axiomas:
$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$
$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$
$\forall x\varphi \rightarrow \varphi[x \leftarrow t]$ onde t é um termo substituível para x em φ
$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$
$\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ se x não ocorre livre em φ.

Além da parte clássica do sistema, são necessários os seguintes axiomas:
$\nabla xA \rightarrow \exists xA$
$\neg\nabla xA \rightarrow \nabla x\neg A$
$\nabla xA \wedge \nabla xB \rightarrow \nabla x(A \wedge B)$
$\nabla xA \rightarrow \nabla yA[x \leftarrow y], y \notin VAR(A)$

Seguem então as provas desses axiomas.

3.4.1 Axiomas clássicos

$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta))]^3 \qquad [\varphi]^1}{(\psi \rightarrow \theta)} \rightarrow E \qquad \dfrac{[\varphi \rightarrow \psi]^2 \qquad [\varphi]^1}{\psi} \rightarrow E}{\theta} \rightarrow E}{\varphi \rightarrow \theta} \rightarrow I_1}{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta)} \rightarrow I_2}{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))} \rightarrow I_3$$

$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1}{\psi \rightarrow \varphi} \rightarrow I}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)} \rightarrow I_1$$

$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi]^2 \qquad [\neg\varphi]^1}{\bot} \rightarrow E}{\varphi} \bot_1}{\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi} \rightarrow I_2$$

$\forall x\varphi \rightarrow \varphi[x \leftarrow t]$ onde t é um termo substituível para x em φ

$$\dfrac{\dfrac{[\forall x\varphi]^1}{\varphi[x \leftarrow t]} \forall E}{\forall x\varphi \rightarrow \varphi[x \leftarrow t]} \rightarrow I_1$$

$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi \rightarrow \psi)]^2}{(\varphi \rightarrow \psi)^x} \forall E \qquad \dfrac{[\forall x\varphi]^1}{\varphi^x} \forall E}{\psi^x} \rightarrow E}{\forall x\psi} \forall I}{\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi} \rightarrow I_1}{\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)} \rightarrow I_2$$

$\varphi \to \forall x\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1}{\forall x\phi}\,\forall I}{\varphi \to \forall x\varphi}\,\to I_1$$

3.4.2 Axiomas não clássicos

$\nabla xA \to \exists xA$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\nabla xA]^2}{A^{\overline{x}}}\,\nabla E \qquad \dfrac{[\forall x\neg A]^1}{\neg A^{\overline{x}}}\,\forall E}{\bot}\,\to E}{\neg\forall x\neg A}\,\to I_1}{\nabla xA \to \neg\forall x\neg A}\,\to I_2$$

$\neg\nabla xA \to \nabla x\neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A^{\overline{x}}]^1}{\nabla xA}\,\nabla I \qquad [\neg\nabla xA]^2}{\bot}\,\to E}{\neg A^{\overline{x}}}\,\to I_1}{\nabla x\neg A}\,\nabla I}{\neg\nabla xA \to \nabla x\neg A}\,\to I_2$$

$\nabla x\phi \wedge \nabla x\psi \to \nabla x(\phi \wedge \psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\nabla x\phi \wedge \nabla x\psi]^1}{\nabla x\phi}}{A^{\overline{x}}}\,\nabla E \qquad \dfrac{\dfrac{[\nabla x\phi \wedge \nabla x\psi]^1}{\nabla x\psi}}{\psi^{\overline{x}}}\,\nabla E}{\phi \wedge \psi^{\overline{x}}}\,\wedge I}{\nabla(\phi \wedge \psi)}\,\nabla I}{\nabla x\phi \wedge \nabla x\psi \to \nabla(\phi \wedge \psi)}\,\to I_1$$

$\nabla xA \to \nabla yA[x \leftarrow y], y \notin VAR(A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\nabla x A]^1}{A[x \leftarrow y]^{\overline{y}}}\,\nabla E}{\nabla y A[x \leftarrow y]}\,\nabla I}{\nabla x A \rightarrow \nabla y A[x \leftarrow y]}\rightarrow I_1$$

3.4.3 generalização

Como foi comentado, além dos axiomas mencionados é necessário obter as generalizações de cada um deles. Assim, se para um axioma φ queremos obter a generalização $\forall x_1, ..., \forall x_n \varphi$, a prova acima deve ser alterada associando o rótulo $< x_1, ..., x_n >$ a cada uma das fórmulas que iniciam a prova. Ao final da prova, como não há hipótese não cancelada e como a conclusão está rotulada com $< x_1, ..., x_n >$, podemos introduzir sucessivamente os quantificadores $\forall x_1, ..., \forall x_n$.

Por exemplo, para obter a prova de $\forall x_1, ..., \forall x_n [\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)]$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi \rightarrow \psi)^{<x_1,...x_n>}]^2}{(\varphi \rightarrow \psi)^{<x_1,...,x_n>,x}}\,\forall E \quad \dfrac{[\forall x \varphi^{<x_1,...x_n>}]^1}{\varphi^{<x_1,...,x_n>,x}}\,\forall E}{\psi^{<x_1,...,x_n>,x}}\rightarrow E}{\forall x \psi^{<x_1,...,x_n>}}\,\forall I}{\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi^{<x_1,...x_n>}}\rightarrow I_1}{\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)^{<x_1,...x_n>}}\rightarrow I_2}{\forall x_n[\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)]^{<x_1,...,x_{n-1}>}}\,\forall I$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\forall x_2 ... \forall x_n[\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)]^{x_1}}{\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n[\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)]}\,\forall I$$

O mesmo procedimento é aplicável a todas as provas usadas para provar a completude.

3.5 Normalização

Dado um conjunto Γ e uma fórmula φ, vemos que podem existir várias provas de $\Gamma \vdash \varphi$. Algumas são "essencialmente"diferentes, ou seja, não são "equivalentes" [Prawitz1971], enquanto outras são equivalentes e só diferem por causa de "desvios"na prova. O objetivo deste capítulo é mostrar que para toda prova existe uma prova associada que não possui desvios.
Exemplos de desvios se encontram na seção 5.2

3.5.1 Preliminares

Formalmente chamamos esses desvios de *cortes*[Enderton1972] ou *fórmulas máximas*[Prawitz1965].

Definição 1

Chamamos de rank de uma fórmula φ, notado $rank(\varphi)$, a profundidade da árvore que representa a formação de φ pelas regras de formação de fórmula. Mais precisamente podemos definir o rank indutivamente:
Se φ é atômica, $rank(\varphi) = 0$;
Se φ é da forma $\Box x\psi$, então $rank(\varphi) = rank(\psi) + 1$, onde $\Box$ representa ∇ ou $\forall$.
Se φ é da forma $\alpha\Box\beta$, então $rank(\varphi) = max\{rank(\alpha), rank(\beta)\} + 1$, onde $\Box$ representa $\wedge$ ou $\rightarrow$.

Definição 2

Chamamos de premissa maior, a premissa de uma regra de eliminação que contém o conectivo sendo eliminado.

Esta definição poderia ser mais explícita: basta dizer que para toda regra de eliminação com uma só premissa, a premissa em questão é chamada de premissa maior; e para o caso da regra $\rightarrow E$, a premissa maior é aquela que tem a forma $\varphi \rightarrow \psi$.

Definição 3

Uma fórmula que é a conclusão de uma regra de introdução ou da regra $\perp$, e premissa maior de uma regra de eliminação, é chamada de corte.

Observe que um corte tem um rank maior do que o rank das fórmulas que estão imediatamente em volta dele, justificando o nome também usado para corte: fórmula máxima.

Definimos então o rank de uma prova:

Definição 4

O par de inteiros (r, n) é chamado de rank da prova D se r for o rank máximo de todos os cortes contidos em D, e n for o número de ocorrências de cortes em D com rank r.

Usamos a ordem lexicográfica para definir $(r_1, n_1) < (r_2, n_2)$.

Segue o lema mais importante da prova de normalização:

Lema 1

Se D é uma prova de $\Gamma \vdash \varphi$ tal que $rank(D) > (0, 0)$, então existe uma prova D' de $\Gamma \vdash \varphi$ tal que $rank(D') < rank(D)$.

A prova consiste em duas etapas:

• Mostrar que toda aplicação da regra $\bot$ pode ser restrita a fórmulas atômicas.

• Expor uma série de transformações que permitem eliminar cortes de uma prova.

Quanto à restrição da regra $\bot$ a fórmulas atômicas, podemos ver o caso dos conectivos clássicos em [VanDalen1994] por exemplo. Segue então o caso do quantificador ∇.

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\nabla x\phi]^1\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\nabla x\phi}\,\bot_1 \qquad\longrightarrow\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{[\neg\phi^{\overline{x}}]^2 \qquad \dfrac{[\nabla x\phi]^1}{\phi^{\overline{x}}}\,\nabla E}{\bot}\,\to E}{\neg\nabla x\phi}\,\to I_1\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\phi^{\overline{x}}}\,\bot_2}{\nabla x\phi}\,\nabla I$$

As derivações acima mostram como passar de uma aplicação de $\perp$ a uma fórmula $\nabla\varphi$, para uma aplicação de $\perp$ a uma fórmula de rank menor, φ.

Usando então sucessivamente a transformação acima e as transformações semelhantes para os outros conectivos conseguimos reduzir as aplicações da regra $\perp$ a fórmulas atômicas.

Temos então o seguinte lema:

Lema 2

No sistema $\mathcal{NUL}$, podemos restringir a aplicação da regra $\perp$ a fórmulas atômicas, sem afetar a completude do sistema.

3.5.2 Reduções

Apresentamos agora as reduções que permitem eliminar os cortes. Apresentamos uma redução para cada tipo de corte, isso é, de acordo com o par de regras Introdução-Eliminação que define o corte.

- $$\dfrac{\dfrac{\varphi^{<u>} \quad \psi^{<v>}}{\varphi \wedge \psi^{<w>}}\wedge I}{\varphi^{<u'>}}\wedge E \qquad \text{se reduz a} \qquad \varphi^{<u>}$$

Note que precisamos mostrar que $< u >=< u' >$. Prova: se $x \in< u >$, então x é livre em φ e assim sendo pertence a $< w >$. Logo $x \in< u' >$. Se $x \in< u' >$ então $x \in< w >$ e é livre em φ. Logo $x \in< u >$. Precisamos mostrar que as variáveis ocorrem na mesma ordem em $< u >$ e $< u' >$. Se $x <_u y$ então x e y pertencem a $< w >$ na mesma ordem. Como estão livres em φ, temos $x <_{u'} y$.

- $$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi(x)^{<u>,\overline{x}} \end{matrix}}{\nabla x\varphi(x)^{<u>}}\nabla I}{\varphi(y)^{<u>,\overline{y}}}\nabla E \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{matrix} D[x \leftarrow y, \overline{x} \leftarrow \overline{y}] \\ \varphi(y)^{<u>,\overline{y}} \end{matrix}$$

- $$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \varphi^{<u'>}\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi^{<u>}]^1\\ \vdots \\ \psi^{<v>}\end{array}}{\varphi\to\psi^{<w>}}\to I_1}{\psi^{<v'>}}\to E \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{array}{c}\Pi\\ \varphi^{<u>}\\ \vdots\\ \psi^{<v>}\end{array}$$

Note que precisamos mostrar que $< u >=< u' >$ e $< v >=< v' >$, que é mostrado de maneira semelhante à que foi usada acima para mostrar que $< u >=< u' >$.

- $$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \varphi(x)^{<u>,x}\end{array}}{\forall x\varphi(x)^{<u>}}\forall I}{\varphi(y)^{<u>,y}}\forall E \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{array}{c}D[x\leftarrow y]\\ \varphi(y)^{<u>,y}\end{array}$$

- $$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \varphi(x)^{<u>,x}\end{array}}{\forall x\varphi(x)^{<u>}}\forall I}{\varphi(y)^{<u>,\overline{y}}}\nabla E \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{array}{c}D[x\leftarrow y, < x >\leftarrow < \overline{y} >]\\ \varphi(y)^{<u>,\overline{y}}\end{array}$$

Observe que na notação da substituição acima queremos indicar que as variáveis livres x que ocorrem nas fórmulas devem ser substituidas por y, enquanto que aquelas que ocorrem nos rótulos devem ser substituidas por $\overline{y}$.

Nas reduções acima usam-se substituições nas provas: $D[x \leftarrow y, \overline{x} \leftarrow \overline{y}]$, $D[x \leftarrow y]$ e $D[x \leftarrow y, < x >\leftarrow < \overline{y} >]$. É necessário mostrar então que se D é uma prova em $\mathcal{NUL}$ então as substituições citadas também são. Isto é provado por indução no tamanho da prova.

Observe então que dada uma prova D, se escolhermos uma fórmula máxima tal que não haja nehuma outra fórmula máxima acima dela e aplicarmos a redução apropriada, obteremos uma prova de rank menor. Com isso temos uma prova do Lema 1.

Emfim, como a ordem lexicográfica é uma boa ordem, podemos concluir que um número finito de aplicações das reduções nos levará a uma prova de rank igual a (0,0), ou seja, que não possui fórmulas máximas. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 3

Em $\mathcal{NUL}$, toda prova de $\Gamma \vdash \varphi$ pode ser transformada numa prova normal de $\Gamma \vdash \varphi$.

3.6 Conclusão

Mostramos uma versão de lógica de ultrafiltros em dedução natural. Com isso esperamos tornar o uso desta lógica mais "natural": além de as provas serem mais intuitivas, a existência de regras de introdução e eliminação para um conectivo (quantificador) nos permite perceber melhor o significado desse conectivo. Vemos por exemplo quais as condições necessárias para se concluir uma fórmula com tal conectivo, e o que podemos concluir a partir de tal fórmula [Prawitz1977]. Esperamos também contribuir de alguma forma para a prova automática de teoremas, uma vez que vários provadores se baseiam em sistemas de dedução natural.