Capítulo 2

Logica clássica de 1a ordem

2.1 Motivação

A existência de um sistema de dedução natural para lógica clássica de 1a ordem é algo antigo e conhecido. O que se pretende aqui é abordar o caso clássico para ilustrar a técnica. Pode-se ver assim que não há apenas uma maneira de abordar uma lógica para adaptá-la. Abordar o caso clássico também tem o intuito de mostrar a abrangência deste método, mesmo que o resultado obtido não seja obrigatoriamente melhor do que os sistemas já existentes para lógica clássica de 1a ordem. A idéia de um sistema em dedução natural é bem antiga e data provavelmente de 1926, por Lukasiewicz, concretizada mais tarde por Jáskowski. Mas se nos concentrarmos em sistemas parecidos com os atuais, o primeiro pode ser o de Gentzen em 1933 [Gentzen1969]. O sistema é basicamente o descrito a seguir:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge - I \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge - E \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge - E$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee - I \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee - I \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \vee - E$$

$$\frac{\varphi(a)}{\forall x \varphi(x)} \forall - I \qquad \frac{\forall x \varphi(x)}{\varphi(a)} \forall - E \qquad \frac{\varphi(a)}{\exists x \varphi(x)} \exists - I$$

$$\dfrac{\exists x\varphi(x) \quad \begin{matrix}[\varphi(a)]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \exists - E \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B} \rightarrow -I \qquad \dfrac{A \quad A \rightarrow B}{B} \rightarrow -E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ \neg - I \qquad \dfrac{A \quad \neg A}{\bot}\ \neg - E \qquad \dfrac{\bot}{A}\ \neg - E$$

com as restrições:
$\forall - I$: o parâmetro a não ocorre em $\forall x\varphi(x)$ nem nas hipóteses.
$\exists - E$: o parâmetro a não ocorre em $\exists x\varphi(x)$, nem em C, nem nas hipóteses das quais C depende, com exceção da fórmula $\varphi(a)$.

Interessantes também são as variações que foram desenvolvidas em cima da regra de eliminação do $\exists$. É comum encontrarmos então sistemas onde a regra $\exists E$ foi substituída por uma regra de "instanciação existencial", como por exemplo em [Quine1950] ou [Copi1954]. Em [Copi1954] temos uma regra do tipo $\dfrac{\exists x\varphi(x)}{\varphi(c)}\ EI$ onde c é uma constante nova tal que a prova possa ser colocada em formato linear sem que a constante c ocorra antes da instanciação indicada.

Assim vemos que a idéia de sistema em dedução natural nunca subentendeu que houvesse apenas uma maneira de formular tal sistema para a lógica clássica. Esses exemplos citados são apenas uma parte dos sistemas que foram criados ao longo do tempo.

Além de sistema em dedução natural, a lógica clássica aceita obviamente sistemas dedutivos que não são do estilo natural, como o axiomático por exemplo. Exemplos desse tipo são interessantes pois sugerem versões diferentes de sistemas em dedução natural.

2.2 Primeira Versão

No sistema axiomático de Shoenfield [Shoenfield1967], a linguagem contém apenas o quantificador existencial. Mais precisamente, temos a seguinte sintaxe para a linguagem:

Termos:

1) toda variável é um termo.

2) se $t_1, ..., t_n$ são termos e f é n-ária, então $ft_1...t_n$ é um termo.

Fórmulas:

1) se $t_1, ..., t_n$ são termos e p é n-ário, então $pt_1...t_n$ é uma fórmula.

2) se u é fórmula então $\neg u$ é fórmula.

3) se u e v são fórmulas, então $u \vee v$ é fórmula.

4) se u é fórmula então $\exists xu$ é fórmula.

Seu cálculo dedutivo é axiomático e contém os seguintes axiomas e regras:

Axiomas:

$\neg A \vee A$

$A[x \leftarrow t] \rightarrow \exists xA$

Regras:

$$\frac{A}{B \vee A} \qquad \frac{A \vee A}{A} \qquad \frac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$$

$$\frac{A \vee B \quad \neg A \vee C}{B \vee C} \qquad \frac{A \rightarrow B}{\exists xA \rightarrow B}\ \textit{se x não é livre em B}$$

2.2.1 Tradução

Adaptando para os conectivos $\rightarrow$, $\perp$ e $\exists$, podemos ter os seguintes axiomas e regras:

Axiomas:

$\neg\neg A \rightarrow A$

$A[x \leftarrow t] \rightarrow \exists xA$

Regras:

$$\frac{A}{\neg B \rightarrow A} \qquad \frac{\neg A \rightarrow A}{A} \qquad \frac{\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)}{\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C}$$

$$\frac{\neg A \rightarrow B \quad \neg\neg A \rightarrow C}{\neg B \rightarrow C} \qquad \frac{A \rightarrow B}{\exists xA \rightarrow B}\ \textit{se x não é livre em B}$$

A partir desse sistema podemos desenvolver a seguinte versão em dedução natural, que usa rótulos.

2.2.2 Dedução natural

Antes de expormos as regras devemos descrever os rótulos usados. Esses rótulos terão variáveis de apenas um tipo. A intuição por trás dessas variáveis será basicamente que a presença de uma variável no rótulo indica a existência de um valor que torna a fórmula verdadeira quando atribuído à variável em questão.

$$\frac{\begin{array}{c} A^L \\ \vdots \\ B^K \end{array}}{A \to B^K} \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg A^L \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{A^K}\ K \subseteq L \qquad \frac{A(y)^y}{\exists x A(x)}$$

$$\frac{\exists x A(x)}{A(x)^x} \qquad \frac{A^L \quad A \to B^K}{B^W}\ se\ (L = \emptyset\ ou\ K = \emptyset)\ e\ W = L \cup K$$

As restrições na última regra são para garantir que uma das duas premissas tenha uma validade universal.

Além das regras, o sistema requer que toda hipótese introduzida tenha um rótulo contendo todas as variáveis livres da fórmula correspondente, garantindo assim que as variáveis livres das hipóteses tenham interpretação existencial.

2.3 Versão alternativa

Como último exemplo, podemos considerar a versão apresentada por Van Dalen em *Logic and Structures* [VanDalen1994]. Sua versão, que já está no estilo natural, tem as seguintes características:

Linguagem:

A definição usual de linguagens, com variáveis, constantes e funções, e sem uso de parâmetros.

Regras:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge - I \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge - E \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge - E$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee - I \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee - I \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \vee - E$$

$$\frac{\varphi(x)}{\forall x \varphi(x)} \forall - I \qquad \frac{\forall x \varphi(x)}{\varphi(t)} \forall - E \qquad \frac{\varphi(t)}{\exists x \varphi(x)} \exists - I$$

$$\frac{\exists x \varphi(x) \quad \begin{array}{c}[\varphi(x)]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \exists - E \qquad \frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow -I \qquad \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \rightarrow -E$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A} RAA \qquad \frac{\bot}{A} \bot$$

com as restrições:
$\forall - I$: a variável x não ocorre livre nas hipóteses.
$\exists - E$: a variável x não ocorre livre em C nem nas hipóteses das quais C depende, com exceção da fórmula $\varphi(x)$.

Para esse sistema podemos propor a seguinte solução alternativa que tenta simplesmente usar as listas de variáveis para fazer certas verificações, as quais são feitas em dedução natural habitual sem o uso de listas. Basicamente o que é feito normalmente é: verificar as variáveis que ocorrem livres nas hipóteses para saber se o quantificador universal pode ser introduzido (não estamos citando o quantificador existencial porque vamos apresentar uma versão para os conectivos $\forall$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\bot$). O uso de listas permite que isso seja feito sem percorrer as hipóteses: as listas podem ser usadas simplesmente para indicar quais as variáveis que ocorrem livremente nas hipóteses. Isso torna obrigatória a seguinte convenção: sempre que uma hipótese for introduzida, ela deve possuir um rótulo que contenha a lista das variáveis que ocorrem livre nessa hipótese. Dessa maneira temos o seguinte cálculo dedutivo:

2.3.1 Regras

$$\frac{\varphi^u}{\forall x \varphi^u}\,\forall I \quad (1) \qquad \frac{\forall x \varphi^u}{\varphi[x \leftarrow t]^u}\,\forall E \ (2) \qquad \frac{\varphi^u \quad \psi^v}{\varphi \wedge \psi^w}\,\wedge I \ (3)$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi^u}{\varphi^u}\,\wedge E \ (4) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi^u}{\psi^u}\,\wedge E \ (5) \qquad \begin{array}{c} [\neg\varphi^u] \\ \vdots \\ \dfrac{\bot^v}{\varphi^w}\,\bot \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{c} [\varphi^u] \\ \vdots \\ \dfrac{\psi^v}{\varphi \rightarrow \psi^w} \rightarrow I \end{array} \quad (7) \qquad \frac{\varphi^u \quad \varphi \rightarrow \psi^v}{\psi^w} \rightarrow E \ (8)$$

com as seguintes condições:

(1): a variável x não ocorre em u.

(2): t é livre para x em φ.

(3) e (8): w é a "soma" de u e v.

(6) e (7): w é v "subtraído" de u.

onde "soma" e "subtraído" têm o sentido usual de quando se está operando sobre multiconjuntos, ou seja:

onde a palavra "soma" usada acima tem o seguinte sentido: w deve conter todas as variáveis de u e todas as variáveis de v, sem identificação de variáveis idênticas. Ou seja: se a variável x ocorrer 2 vezes em u e 3 vezes em v, ela deverá ocorrer 5 vezes em w.

O termo "subtraído" é usado de forma semelhante, ou seja, para cada variável x ocorrendo uma vez em u, devemos tirar uma ocorrência de x em v. Observa-se que a ordem das variáveis em um rótulo é irrelevante, embora não se possa assemelhar um rótulo a um conjunto porque o número de ocorrências de uma variável é relevante. Ou seja, o rótulo tem a estrutura de um multiconjunto.

2.3.2 Correção e completude

Para mostrar a correção e a completude do sistema, basta mostrar que essas regras reproduzem exatamente o comportamento das regras tradicionais. Isso é obvio para todas elas com exceção talvez das regras 1 e 2 pois são as únicas que têm restrições. A regra 2 tem a mesma restrição do caso tradicional ([VanDalen1994]). Quanto à regra 1, para provar que ela é equivalente à regra tradicional, basta mostrar que o rótulo carrega sempre uma lista das variáveis que ocorrem livre nas hipóteses.

A prova é feita por indução no tamanho da prova:
Observe que o passo base é óbvio, uma vez que definimos que toda hipótese deve possuir um rótulo com a lista de suas variáveis livres. Os passos indutivos também são simples uma vez que as restrições sobre os rótulos visam exatamente manter no rótulo uma lista das variáveis livres: quando há fusão entre duas árvores ($\wedge - I$), as listas são "somadas"; quando uma hipótese é cancelada, suas variáveis são "subtraídas"da lista, e nos outros casos a lista é preservada.

2.4 Conclusão

Nesses dois capítulos foi ilustrado o uso de rótulos para condicionar o uso de regras em um sistema em dedução natural. Com isso esperou-se mostrar que esse uso pode ser simples e variado, levando a sistemas corretos e completos, e até mesmo normalizáveis.

Porém, o caso tratado foi o caso clássico para o qual já se tem soluções muito satisfatórias. Tentaremos, a seguir, ilustrar o uso dessa técnica em lógicas menos usuais, para as quais não se tem sequer um sistema em dedução natural, pois esse é o primeiro objetivo da técnica: encontrar versões em dedução natural quando nenhuma existe.

Analisaremos então 5 (cinco) lógicas distintas, para as quais não se tem um sistema em dedução natural. Começaremos pela lógica de ultrafiltros [Rentería2003], pois sua adaptação para dedução natural foi muito bem sucedida, uma vez que conseguimos um sistema correto, completo, normalizável, e que satisfaz a propriedade da subfórmula. Em seguida veremos a lógica de filtros. A próxima será a lógica CTL [Rentería2002] (Computation Tree Logic), que embora seja uma lógica proposicional, apresenta quantificação sobre os possíveis caminhos de uma computação. É provavelmente por esse motivo que seus rótulos apresentam uma estrutura bem diferente daquela usada para as outras lógicas. Em seguida, abordaremos a lógica de Keisler, que é uma lógica que permite expressar a existência de um número não enumerável de valores satisfazendo uma propriedade. E por fim abordaremos CTL*, uma lógica que pode ser vista como uma extensão de CTL.