



**Christian Jacques Rentería**

**Uma abordagem geral para quantificadores  
em dedução natural**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação  
em Informática da PUC-Rio como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor em Ciências - Informática.

Orientador: Edward Hermann Haeusler

Rio de Janeiro, abril de 2004



**Christian Jacques Rentería**

**Uma abordagem geral para quantificadores  
em dedução natural**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Informática do Departamento de Informática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Edward Hermann Haeusler

Orientador

Departamento de Informática - PUC-Rio

Prof. Paulo Augusto Silva Veloso

Departamento de Informática - PUC-Rio

Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira

Departamento de Filosofia - PUC-Rio

Prof. Mario Roberto Folhadela Benevides

COPPE/UFRJ

Prof. Roberto Lins de Carvalho

LNCC

Prof. Ruy José Guerra Barretto de Queiroz

Departamento de Informática - UFPE

Prof. Marcelo da Silva Corrêa

Instituto de Matemática - UFF

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico

Rio de Janeiro, 5 de abril de 2004

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

### **Christian Jacques Rentería**

Graduado em Engenharia de Computação pela Pontifícia Universidade Católica - Rio de Janeiro, obteve mestrado em Informática (Teoria da Computação) também pela PUC-Rio, em 2000. Atualmente professor do departamento de Informática da PUC-Rio.

#### Ficha Catalográfica

Rentería, Christian Jacques

Uma abordagem geral para quantificadores em dedução natural / Christian Jacques Rentería; orientador: Edward Hermann Haeusler. - Rio de Janeiro : PUC, Departamento de Informática, 2004.

147 f. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Informática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Informática - Teses. 2. Lógica. 3. Dedução natural. 4. Normalização. 5. Rótulo. 6. Quantificadores. 7. CTL. 8. Ultrafiltros. 9. Keisler. 10. Teoria da prova. I. Haeusler, Edward Hermann. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Informática. III. Título.

CDD: 004

À minha mãe, e à minha avó.

Hermann, por tudo. Ou seja, em resumo, pela orientação, pela ajuda, pelas idéias, pela tolerância, pelo zelo, pela preocupação. Não agradeço a amizade porque não acredito que se deva agradecer amizades.

Lins, pelo velho incentivo, e pela honra. Obrigado por participar da minha banca.

Professor Marcelo Corrêa, por fazer parte da minha banca.

Professor Sérgio Lifschitz por aceitar participar da minha banca.

Professor Paulo Veloso, por toda troca de informação. Pra ser mais exato: por todas as informações e idéias que me passou.

Professor Ruy de Queiroz, por participar da minha banca.

Professor Mario Benevides, por participar da minha banca.

Professor Luiz Carlos Pereira, pelas idéias que me deu e pela ajuda.

Professor Moisés Szwarcman, pelo exemplo.

Professor Celso Ribeiro, pelo apoio.

Estela, pelo cuidado com a apresentação.

Enrique, pela ajuda na revisão do inglês.

Fatinha, pela ajuda em diversos pontos.

Davi, por estar sempre disposto a ler minha tese.

Pelos amigos Geiza, Basílio, Fernando e Vaston por terem a gentileza de assistirem minha defesa, e especialmente Geiza, pelas ajudas de última hora.

PUC, por ser a instituição que é, e em especial aos professores do Departamento de Informática por me aceitarem no programa de pós-graduação da PUC.

ao suporte parcial do CNPQ.

À minha mãe Monique, meu pai Enrique e meu irmão Sacha, por comparecerem.

## Resumo

Existem diferentes estilos de cálculos dedutivos, usados para derivar os teoremas de uma lógica. Os mais habituais são os sistemas axiomáticos; mas, do ponto de vista da teoria da prova, os sistemas em dedução natural parecem ser mais interessantes. Essa é a motivação que leva ao desenvolvimento de técnicas que visam a facilitar a transformação de um cálculo dedutivo para o estilo em dedução natural. Esse trabalho se concentra no aspecto de modelar regras para os quantificadores da linguagem considerada e, para isso, faz uso de rótulos. Após uma apresentação intuitiva da técnica desenvolvida, passa-se à exposição de sistemas lógicos tratados pelo método: lógica de ultrafiltros, lógica de filtros, CTL, lógica de Keisler e CTL\*. Em cada caso, analisam-se aspectos de teoria da prova.

## Palavras-chave

Lógica; Dedução natural; Normalização; Rótulo; Quantificadores; CTL; Ultrafiltros; Filtros; CTL\*; CTL estrela; Keisler; Teoria da prova.

## Abstract

There are many kinds of deductive calculus. The axiomatic ones are the more usual. However, from the point of view of proof theory, Natural Deduction systems seem to be more interesting. This is the motivation for developing a technique that aims to ease the transformation from deductive calculus to Natural Deduction style. This work concentrates on the aspect of modeling the rules for the quantifiers of the logic considered, and, for this purpose, labels are used. After an intuitive presentation of the technique developed, some logical systems are treated by the method: ultrafilter logic, filter logic, CTL, Keisler's logic and CTL\*. For each one of them proof-theoretical aspects are analysed.

## Keywords

Logic; Natural deduction; Normalization; Label; Quantifiers; CTL; Ultrafilter; Filter; CTL\*; CTL star; Keisler; Proof-theory.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Logica clássica de 1a ordem</b>	<b>18</b>
2.1	Motivação . . . . .	18
2.2	Primeira Versão . . . . .	19
2.2.1	Tradução . . . . .	20
2.2.2	Dedução natural . . . . .	21
2.3	Versão alternativa . . . . .	21
2.3.1	Regras . . . . .	23
2.3.2	Correção e completude . . . . .	24
2.4	Conclusão . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Lógica de ultrafiltros</b>	<b>26</b>
3.1	Introdução . . . . .	26
3.1.1	Lógica de ultrafiltros . . . . .	26
3.1.2	Linguagem . . . . .	27
3.1.3	Axiomatização . . . . .	27
3.2	Sistema em dedução natural . . . . .	28
3.2.1	Regras $\forall I$ e $\forall E$ . . . . .	29
3.2.2	Regras $\nabla I$ e $\nabla E$ . . . . .	30
3.2.3	Regras $\wedge I$ e $\wedge E$ . . . . .	30
3.2.4	Regra $\perp$ . . . . .	31
3.2.5	Regras $\rightarrow I$ e $\rightarrow E$ . . . . .	31
3.2.6	Regra X . . . . .	31
3.3	Correção . . . . .	32
3.4	Completude . . . . .	37
3.4.1	Axiomas clássicos . . . . .	38
3.4.2	Axiomas não clássicos . . . . .	39
3.4.3	generalização . . . . .	40
3.5	Normalização . . . . .	41



3.5.1	Preliminares . . . . .	41
3.5.2	Reduções . . . . .	43
3.6	Conclusão . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Lógica de Filtros</b>	<b>46</b>
4.1	Axiomatização . . . . .	46
4.2	Sintaxe e Semântica . . . . .	47
4.3	Regras . . . . .	47
4.4	Correção . . . . .	48
4.5	Completude . . . . .	48
4.6	Normalização . . . . .	48
<b>5</b>	<b>CTL</b>	<b>50</b>
5.1	Introdução . . . . .	50
5.2	Computation Tree Logic (CTL) . . . . .	53
5.2.1	Sintaxe . . . . .	53
5.2.2	Semântica . . . . .	54
5.2.3	Axiomas . . . . .	55
5.3	Sistemas de Dedução Natural para Lógica Modal . . . . .	55
5.3.1	Fórmulas rotuladas . . . . .	56
5.3.2	Substituições . . . . .	57
5.4	O sistema $\mathcal{CN}$ . . . . .	58
5.4.1	Sintaxe . . . . .	59
5.4.2	Semântica . . . . .	59
5.4.3	Sistema dedutivo . . . . .	59
5.4.4	Comentários . . . . .	64
5.4.5	Algumas provas . . . . .	67
5.5	Completude . . . . .	68
5.5.1	Abreviações . . . . .	69
5.5.2	Axiomas . . . . .	71
5.5.3	Regras de inferência . . . . .	82
5.6	Correção . . . . .	86
5.6.1	Definições e lemas . . . . .	87
5.6.2	Prova . . . . .	88
5.7	Normalização . . . . .	96
5.7.1	Noções de Teoria da Prova . . . . .	96
5.7.2	Investigando $\mathcal{CN}$ . . . . .	97
5.7.3	Reduções . . . . .	99

5.8	Conclusão . . . . .	109
5.8.1	Cálculo de seqüentes . . . . .	109
5.8.2	Considerações sobre o sistema $\mathcal{CN}$ . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Lógica de Keisler</b>	<b>112</b>
6.1	Introdução . . . . .	112
6.2	O sistema $ND_Q$ . . . . .	112
6.2.1	Exemplo . . . . .	115
6.3	Correção . . . . .	115
6.4	Completude . . . . .	118
6.5	Normalização . . . . .	119
<b>7</b>	<b>CTL*</b>	<b>122</b>
7.1	Sintaxe . . . . .	122
7.2	Semântica . . . . .	122
7.3	Dedução natural . . . . .	123
7.4	Rótulos . . . . .	124
7.5	Regras . . . . .	125
7.6	Completude . . . . .	127
7.6.1	Axiomas . . . . .	128
7.6.2	Regras . . . . .	136
7.7	Correção . . . . .	137
7.8	Normalização . . . . .	142
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>144</b>

# Lista de Figuras

5.1	Dois programas concorrentes . . . . .	50
5.2	Árvore de possíveis execuções . . . . .	51