Referências

[1] Schofield and I. Oppenheim, Physica A **196**, 209 (1993).

[2] O. Reynolds, On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, Philos. Mag. Ser. 5469 (1885) 20-50.

[3] J.J.Alonso, J. P. Hovi, e H. J. Hermann Phys. Rev. E **58** 672 (1998).

[4] P. K. Haff, J. Fluid Mech. **134** (1983) 401.

[5] Florence Rouyer and Narayan Menon, Phys. Rev. Lett. **85**, 3676 (2000)

[6] S. McNamara and W.R. Young, Phys. Rev. E **53**, 5089 (1996); S. McNamara, Physics of Fluids A **5**, 3056 (1993).

[7] I. Goldhirsch and G. Zanetti, Phys. Rev. Lett. **70**, 1619 (1993).

[8] H.J. Herrmann, Physica A **313** (2002) 188.

[9] S. Luding and H. J. Herrmann, Chaos **9**, 673 (1999).

[10] R. Cafiero and S. Luding and H. J. Herrmann, Phys. Rev. Lett. **84**, 6014(2000).

[11] N.V. Brilliantov and T. Pöschel, Phys. Rev. E **61**, 5573 (2000); N.V. Brilliantov and T. Pöschel, Phys. Rev. E **67**, 061304 (2003).

[12] R.C.Proleon and W.A.Morgado, Brazilian journal of Physics, vol. **34**, no. **3**, September, 2004.

[13] A.Goldshtein and M. Shapiro, J. Fluid Mech. (1995), vol 282, pp 75-114.

[14] T.P.C. Van Noije, and M.H. Ernst, Granular Matter **1**, 57 (1998).

[15] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, and T. Pöschel, Phys. Rev. E **53**, 5382 (1996).

[16] N. V. Brilliantov, F. Spahn J. M. Hertzch and T. Pöschel, Phys. Rev. E **53**, 5382 (1996).

[17] W. A. Morgado and I. Oppenheim, Phys. Rev. E **55**(1997).

[18] Thomas Schwager and Thorsten Pöschel Phys. Rev. E **57**, 650 (1998).

[19] Granular Gases the early stage, Nicolai V. Brilliantov and Thorsten Pöschel, cond-mat/0203401.

[20] W.A.M. Morgado, I. Oppenheim, Phys. Rev. E **55** (1997) 1940.

[21] W.A.M. Morgado and E.R. Mucciolo, Physica A **311** (2002) 150.

[22] N.V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, T. Pöschel, Phys. Rev. E **53** (1996) 5382.

[23] G. Kuwabara, K. Kono, Jpn. J. Appl. Phys. 26 (1987) 1230.

[24] H. Risken *The Fokker-Plank Equation*, Springer-Verlag, 1989. Pag. 70

[25] I. Oppenheim, and N.G. van Kampen, Physica A **196**, 231 (1996).

[26] N.G. van Kampen, Phys. Rep. **124**, 69 (1985).

[27] S.Chapman and T.G.Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.

[28] G. Sandri, Ann. Phys. 24 (1963)332; Ann. Phys. 24 (1963) 380.

[29] W.A.M. Morgado and I. Oppenheim, Physica A **246**, 547 (1997); W.A.M. Morgado and I. Oppenheim, Physica A **252**, 308 (1998).

[30] V. Garzó and J. Dufty, Phys. Rev. E **60** (1999) 5706; T. Pöschel, N.V. Brilliantov and T. Schwager, Physica A **325**, 274 (2003).

[31] J.J. Brey, J.W. Dufty, C.S. Kim, and A. Santos, Phys. Rev. E **58**, (1998) 4638; J. M. Pasini and P. Cordero, Phys. Rev. E **63** (2001) 041302.

[32] T. Schwager and T. Pöschel, Phys. Rev. E **61**, 1716 (2000).

A
Apêndices

A.1 Eliminação das variáveis rápidas

Seja a seguinte equação

$$\frac{\partial\rho(x,\tau)}{\partial\tau} = \mathrm{L}(\varepsilon)\,\rho(\mathrm{x},\tau) = \left(\mathrm{L}^{(0)} + \varepsilon\mathrm{L}^{(1)}\right)\rho(\mathrm{x},\tau) \tag{A.1}$$

onde consideramos L um operador e ρ um vetor cujas componentes se definem pelo índice x. Precisamos separar $\rho(x,\tau)$ em suas componentes lentas e rápidas. Definimos as variáveis lentas como as que se tornam constantes de movimento da equação não perturbada, ou seja , da equação (A.1) quando $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\partial\rho(x,\tau)}{\partial\tau} = \mathrm{L}^{(0)}\,\rho(\mathrm{x},\tau). \tag{A.2}$$

Para isso definimos o operador de projeção $\mathcal{P}$ tal que satisfaça

$$\mathcal{P}\mathrm{L}^{(0)} = 0 \qquad \mathrm{e} \qquad \mathrm{L}^{(0)}\,\mathcal{P} = 0. \tag{A.3}$$

Assim multiplicando pela direita a equação não perturbada pelo operador $\mathcal{P}$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}\rho(x,\tau) = \mathcal{P}\mathrm{L}^{(0)}\,\rho(\mathrm{x},\tau) = 0, \tag{A.4}$$

onde vemos claramente que as variáveis lentas

$$y = \mathcal{P}\rho(x,\tau) \tag{A.5}$$

são as constantes de movimento da equação não perturbada e portanto representam as variáveis lentas do sistema. As variáveis rápidas são então

$$z = \rho(x,\tau) - \mathcal{P}\rho(x,\tau), \tag{A.6}$$

definindo o operador $\mathcal{Q}$ de maneira que se satisfaça

$$\rho(x,\tau) = \mathcal{P}\rho(x,\tau) + \mathcal{Q}\,\rho(x,\tau), \tag{A.7}$$

temos que

$$z = \mathcal{Q}\rho(x,\tau). \tag{A.8}$$

Vamos separar a equação (A.1) em duas, uma para as variáveis rápidas e outra para as variáveis lentas.

Multiplicando a equação (A.1) pela esquerda por $\mathcal{P}$ e por $\mathcal{Q}$ obtemos respectivamente

$$\partial_t \mathcal{P}\rho = \varepsilon \mathcal{P}\mathrm{L}^{(1)}\mathcal{P}\rho + \varepsilon \mathcal{P}\mathrm{L}^{(1)}\mathcal{Q}\rho \tag{A.9}$$

$$\partial_t \mathcal{Q}\rho = \mathcal{Q}\mathrm{L}^{(0)}\mathcal{Q}\rho + \varepsilon \mathcal{Q}\mathrm{L}^{(1)}\mathcal{P}\rho + \varepsilon \mathcal{Q}\mathrm{L}^{(1)}\mathcal{Q}\rho. \tag{A.10}$$

Usando o fato de que, por definição, os operadores satisfazem

$$\mathcal{P}^2 \equiv \mathcal{P} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{Q}^2 \equiv \mathcal{Q},$$

podemos escrever

$$\partial_t y = \varepsilon A y + \varepsilon B z, \tag{A.11}$$

$$\partial_t z = E z + \varepsilon C y + \varepsilon D z, \tag{A.12}$$

onde

$$A = \mathcal{P}\mathrm{L}^{(1)}\mathcal{P}, \quad \mathrm{B} = \mathcal{P}\mathrm{L}^{(1)}\mathcal{Q}, \quad \mathrm{C} = \mathcal{Q}\mathrm{L}^{(1)}\mathcal{P},$$

$$D = \mathcal{Q}\mathrm{L}^{(1)}\mathcal{Q}, \tag{A.13}$$

$$E = \mathcal{Q}\mathrm{L}^{(0)}\mathcal{Q}. \tag{A.14}$$

Na escala de tempo das variáveis lentas $s = \varepsilon\tau$ temos

$$\partial_s y = A y + B z, \tag{A.15}$$

$$\partial_s z = \frac{1}{\varepsilon} E z + C y + D z. \tag{A.16}$$

Da equação de movimento para z vemos que a solução para esta variável dependerá do parâmetro ε, então podemos escrever

$$z = z^{(0)} + \varepsilon z^{(1)} + \varepsilon^2 z^{(2)} + \cdots. \tag{A.17}$$

Substituindo esta equação na equação (A.16), agrupando termos comuns até ordem $\varepsilon^{(0)}$, obtemos

$$\partial_s z^{(0)} + \mathcal{O}(z) = \frac{1}{\varepsilon} E z^{(0)} + E z^{(1)} + C y + D z^{(0)} + \mathcal{O}(z). \tag{A.18}$$

Igualando ambos lados da equação acima encontramos para o termo de ordem $\frac{1}{\varepsilon}$ a equação

$$E z^{(0)} = 0, \tag{A.19}$$

e para o termo de ordem $\varepsilon^{(0)}$ a equação

$$\partial_s z^{(0)} = Ez^{(1)} + Cy = 0. \tag{A.20}$$

Da equação (A.19) obtemos

$$z^{(0)} = 0$$

e da equação (A.20) obtemos

$$z^{(1)} = -E^{-1}Cy. \tag{A.21}$$

Finalmente obtemos em primeira ordem em ε a seguinte equação para y

$$\partial_s y = Ay - \varepsilon BE^{-1}Cy \tag{A.22}$$

e passando à escala de tempo definida por τ, $\tau = \epsilon^{-1}s$ obtemos

$$\partial_\tau y = \varepsilon Ay - \varepsilon^2 BE^{-1}Cy. \tag{A.23}$$

Esta é a equção a ser obedecida pelas variáveis lentas do sistema. Os operadores A, B e E^{-1} serão calculados a partir do operador $\mathcal{P}$ do sistema e dos operadores $\mathrm{L}^{(0)}$ e $\mathrm{L}^{(1)}$.

A.2 Expansão em polinômios de Sonine com coeficientes dependentes do tempo

Vamos seguir aqui a técnica apresentada por Pöschel[11] para estudar o comportamento da função distribuição de velocidades em relação a uma distribuição Gaussiana quando o coeficiente de restituição do sistema depende da velocidade.

A.2.1 Fundamentos

Vamos supor que temos uma distribuição de velocidades $f(\mathbf{v},t)$ cuja equação de movimento esteja dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{v},t) = I(f,f). \tag{A.24}$$

Seja a transformação

$$f(\mathbf{v},t) = \frac{n}{v_0^3}\tilde{f}(\mathbf{c},t), \tag{A.25}$$

onde

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{v}}{v_0} \qquad \text{e} \qquad n = \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v},t). \tag{A.26}$$

Desta maneira a nova função distribuição fica normalizada

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{c}\, v_0^3 \frac{n}{v_0^3}\,\tilde{f} &= \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v},t), \\ \Rightarrow n \int d\mathbf{c}\tilde{f} &= n \\ \Rightarrow \int d\mathbf{c}\tilde{f} &= 1. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{v}}{v_0^2}\frac{\partial v_0}{\partial t} = -\frac{\mathbf{c}}{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial t},$$

então, derivamos ambos lados da equação (A.25) em relação ao tempo obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{v},t)}{\partial t} &= -\frac{3n}{v_0^4}\frac{dv_0}{dt}\tilde{f} + \frac{n}{v_0^3}[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}] \\ &= \frac{n}{v_o^4}\frac{dv_0}{dt}\left[-3 - c\cdot\frac{\partial}{\partial c}\right]\tilde{f} + \frac{n}{v_0^3}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{A.27}$$

onde $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}$ é a derivada parcial em relação à variável explicita t. Da definição de temperatura granular temos que

$$\frac{3}{2}nT(t) = \int d\mathbf{v}\frac{m\mathbf{v}^2}{2} f(\mathbf{v},t). \tag{A.28}$$

Usando a equação (A.25) temos que

$$\frac{3}{2}nT(t) = n\frac{mv_0^2}{2}\int d\mathbf{c}\,\mathbf{c}^2\tilde{f},$$

e como

$$T(t) = \frac{mv_0^2(t)}{2}, \tag{A.29}$$

obtemos

$$\int d\mathbf{c}\,\mathbf{c}^2\tilde{f} = \langle c^2\rangle = \frac{3}{2}. \tag{A.30}$$

Supondo que ao substituir a transformação (A.25) no lado direito da equação de movimento (A.24) este fica na forma

$$\frac{\partial f(\mathbf{v},t)}{\partial t} = \sigma_0^2\frac{n^2}{v_0^2}\,\tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f}). \tag{A.31}$$

Multiplicando ambos lados da equação acima por $\mathbf{v}^2 = \mathbf{c}^2\,v_0^2$ e integrando em $\mathbf{c}$ obtemos

$$\int d\mathbf{c}\,\mathbf{v}^2\frac{\partial f(\mathbf{v},t)}{\partial t} = \sigma_0^2\,n^2\int d\mathbf{c}\;\mathbf{c}^2\,\tilde{I}.$$

Passando da integral na variável $\mathbf{c}$ para uma na variável $\mathbf{v}$ no lado esquerdo da equação acima e lembrando que

$$T = \frac{1}{3n}\int d\mathbf{v}\,m\,\mathbf{v}^2\,f(v,t),$$

obtemos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{m}{3}\sigma_0^2\,n\,v_o^3\int d\mathbf{c}\;\mathbf{c}^2\,\tilde{I}. \tag{A.32}$$

Definindo

$$B = v_0\sigma_0^2 n \qquad \text{e} \qquad \mu_p = -\int d\mathbf{c}\;\mathbf{c}^p\,\tilde{I}, \tag{A.33}$$

escrevemos (A.32) como

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{2}{3}BT\mu_2. \tag{A.34}$$

Ao substituir a equação (A.27) no lado esquerdo da equação (A.31) obtemos a equação de movimento em termos de $\tilde{f}$ e a temperatura granular T_g, dada pela equação (A.29):

$$-\frac{1}{v_o^2}\frac{dT}{dt}\left[3 + c\cdot\frac{\partial}{\partial c}\right]\tilde{f} + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial t} = \sigma_0^2\,n\,v_o\,\tilde{I},$$

substituindo agora (A.34) na equação acima

$$\frac{\mu_2}{3}\left[3+c\cdot\frac{\partial}{\partial c}\right]\tilde{f}+B^{-1}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}=\tilde{I}. \tag{A.35}$$

Multiplicando esta equação por c^p e integrando em $\mathbf{c}$ e lembrando a definição

$$\langle c^p\rangle=\int d\mathbf{c}\, c^p\,\tilde{f},$$

obtemos

$$\frac{\mu_2}{3}\Big[3\langle c^p\rangle+\int d\mathbf{c}\, c^p\,\mathbf{c}\cdot\frac{\partial}{\partial c}\tilde{f}\Big]+B^{-1}\int d\mathbf{c}\, c^p\,\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}=-\mu_p. \tag{A.36}$$

Podemos mostrar facilmente que

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{c}\, c^p\,\mathbf{c}\cdot\frac{\partial}{\partial c}\tilde{f} &= \int dc_x dc_y dc_z c^p(c_x\frac{\partial}{\partial c_x}+c_y\frac{\partial}{\partial c_y}+c_z\frac{\partial}{\partial c_z})\tilde{f}\\
&= -\int dc_x dc_y dc_z\Big[\frac{\partial}{\partial c_x}(c_x\,c^p)+\frac{\partial}{\partial c_y}(c_y\,c^p)+\frac{\partial}{\partial c_z}(c_z\,c^p)\Big]\tilde{f}\\
&= -\int dc_x dc_y dc_z(3c^p+p\,c_x^2c^{p-2}+p\,c_y^2c^{p-2}p\,c_z^2c^{p-2})\tilde{f}\\
&= -(3+p)\langle c^p\rangle.
\end{aligned}$$

Substituindo esta última igualdade na equação (A.36) obtemos

$$\frac{\mu_2\,p}{3}\langle c^p\rangle-B^{-1}\int d\mathbf{c}\, c^p\,\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}=\mu_p\,. \tag{A.37}$$

Para continuar a desenvolver esta equação precisamos conhecer $\partial_t\tilde{f}$ para isso vamos expressar $\tilde{f}$ em função dos polinômios de Sonine.

A.2.2 Polinômios de Sonine

O polinômio de sonine é dado pela série

$$S_m^{(n)}(x)=\sum_{p=0}^{n}\frac{(-x)^p(m+n)_{n-p}}{p!(n-p)!} \tag{A.38}$$

onde r_q denota o produto de q fatores $r, r-1,\ldots,r-q+1$. Em particular

$$S_m^{(0)}(x)=1,\qquad S_m^{(1)}(x)=m+1-x. \tag{A.39}$$

Os polinômios de Sonine que serão usados são os correspondentes a $m=1/2$ e se entenderá que $S_p\equiv S_{1/2}^{(p)}$, então, para este caso temos

$$S_0(x)\equiv S_{1/2}^{(0)}(x)=1 \tag{A.40}$$

$$S_1(x)\equiv S_{1/2}^{(1)}(x)=-x+\frac{3}{2} \tag{A.41}$$

$$S_2(x)\equiv S_{1/2}^{(2)}(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{2}+\frac{15}{8}. \tag{A.42}$$

Os polinômios de Sonine satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x} S_m^{(p)}(x) S_m^{(q)} x^m = 0 \qquad (p \neq q)$$
$$= \frac{\Gamma(m+p+1)}{p!} \qquad (p = q), \qquad \text{(A.43)}$$

onde Γ é a função gama.

A.2.3 Expansão da distribuição de velocidades em polinômios de Sonine

Vamos usar a expansão da função $\tilde{f}(\mathbf{c})$ em termos dos polinômios de Sonine $S_p(c^2)$

$$\tilde{f}(\mathbf{c}) = \phi(c)\Big\{1 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p\, S_p(c^2)\Big\}, \qquad \text{(A.44)}$$

onde

$$\phi(c) = \frac{e^{-c^2}}{2\,\pi^{3/2}} \qquad \text{(A.45)}$$

Devido a substituição da variável x por c^2 na definição dos polinômios de Sonine podemos expressar agora a relação de ortogonalidade (A.43) por outra onde a variável de integração seja o vetor $\mathbf{c}$. Substituindo, então, c^2 por x na relação de ortogonalidade temos

$$2\int_0^\infty e^{-c^2} S_p(c^2)\, S_q(c^2)\, c^2\, dc = \frac{\Gamma(3/2+p)}{p!}\delta_{pq}.$$

Por causa da simetria esférica $d\mathbf{c} = 4\pi c^2 dc$, então podemos escrever a integral acima de maneira a encontrar a seguinte relação de ortogonalidade,

$$\int d\mathbf{c}\phi(c) S_p(c^2) S_q(c^2) = \mathcal{N}_p \delta_{pq} \qquad \text{(A.46)}$$

onde a constante de normalização é

$$\mathcal{N}_p = \frac{\Gamma(3/2+p)}{\pi^{1/2}\, p\,!}. \qquad \text{(A.47)}$$

É fácil mostrar que $\mathcal{N}_0 = 1$ e $\mathcal{N}_1 = 3/2$. Usando esse resultado podemos calcular o valor de a_1 e de $\langle c^4 \rangle$. Notando que $c^2 = \frac{3}{2} S_0(c^2) - S_1(c^2)$ podemos calcular

$$\langle c^2 \rangle = \int d\mathbf{c}\phi(c)\Big[\frac{3}{2} S_0(c^2) - S_1(c^2)\Big]\Big\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(c^2)\Big\}$$

como $S_0(C^2) = 1$ e usando a relação de ortogonalidade encontramos

$$\langle c^2 \rangle = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} a_1. \tag{A.48}$$

Como por definição de temperatura $\langle c^2 \rangle = \frac{3}{2}$, equação (A.30), concluímos que $a_1 = 0$. Similarmente podemos calcular $\langle c^4 \rangle$ notando que $c^4 = 2S_2 - 5S_1 + \frac{15}{4} S_0$

$$\begin{aligned} \langle c^4 \rangle &= \int \mathbf{c}\, \phi(c) \Big[c^4 = 2S_2 - 5S_1 + \frac{15}{4} S_0 \Big] \Big\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, S_k(c^2) \Big\} \\ &= \frac{15}{4}(1 + a_2). \end{aligned} \tag{A.49}$$

Para poder calcular a_2 precisamos resolver uma equação que podemos encontrá-la a partir da equação (A.37), para isso calculamos

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \phi(c) \sum_k \dot{a}_k\, S_k(c^2).$$

Multiplicando esta equação por c^p e integrando em $\mathbf{c}$ obtemos

$$\int d\mathbf{c}\, c^p\, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \sum_{k=1} \dot{a}_k\, V_{kp}, \tag{A.50}$$

onde

$$V_{kp} = \int d\mathbf{c}\, c^p\, \phi(c) S_k(c^2). \tag{A.51}$$

Então substituindo a equação acima na (A.37) obtemos

$$\frac{\mu_2\, p}{3} \langle c^p \rangle - B^{-1} \sum_{k=1} \dot{a}_k\, V_{kp} = \mu_p. \tag{A.52}$$

Esta equação representa um conjunto de equações para os coeficientes $a_2, a_3, \cdot.$ Vamos a ver esta equação para $p = 2$ e $p = 4$:

Caso p=2:

Fazendo $p = 2$ na equação (A.52) obtemos

$$\sum_{k=1} \dot{a}_k\, V_{k2} = 0.$$

Calculamos os coeficientes V_{k2} fazendo $c^2 = \frac{3}{2} S_0 - S_1$. Assim

$$V_{k2} = \int d\mathbf{c} (\frac{3}{2} S_0 - S_1) S_k(c^2) \phi(c).$$

Logo

$$\begin{aligned} V_{02} &= \frac{3}{2}, \\ V_{12} &= -N_1 = -\frac{3}{2}, \\ V_{k2} &= 0 \qquad k \geq 2. \end{aligned}$$

Como $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$ a equação em este caso é uma identidade.

Caso p=4:
Neste caso a equação (A.52) se reduz a

$$\frac{\mu_2}{3} 15(1+a_2) - B^{-1} \sum_{k=1} \dot{a}_k V_{k4} = \mu_4,$$

dado $\langle c^4 \rangle = \frac{15}{4}(1+a_2)$. Calculamos os coeficientes V_{k4} fazendo $c^4 = 2S_2 - 5S_1 + \frac{15}{4} S_0$. Então

$$V_{k4} = \int d\mathbf{c}(2S_2 - 5S_1 + \frac{15}{4} S_0) S_k(c^2)\phi(c).$$

Logo

$$\begin{aligned} V_{04} &= \frac{15}{4}, \\ V_{14} &= -5N_1 = -\frac{15}{2}, \\ V_{24} &= 2N_2 = \frac{15}{4}, \\ V_{k4} &= 0 \qquad k > 2. \end{aligned}$$

Assim obtemos a equação que deve satisfazer a_2

$$\dot{a}_2 - \frac{4}{3} B\mu_2(1 + a_2) + \frac{4}{15} B\mu_4 = 0.. \tag{A.53}$$

Esta equação será usada para calcular a evolução temporal de a_2.

A.2.4 Integrais importantes

Vamos mostrar o calculo de algumas integrais usadas para o calculo dos valores médios usados no presente trabalho de tese:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{c}\ c^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \tilde{f}(c) &= \int d\mathbf{c}\ (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)\Big(\frac{\partial^2}{\partial c_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial c_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial c_z^2}\Big)\tilde{f}(c) \\ &\quad \text{integrando por partes duas vezes} \\ &= 2 \times 3 \int d\mathbf{c}\ \tilde{f}(c) \\ &= 6 \end{aligned} \tag{A.54}$$

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{c}\ c^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \mathbf{c}\tilde{f}(c) &= \int d\mathbf{c}\ (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)\Big(\frac{\partial}{\partial c_x} c_x \tilde{f}(c) + \frac{\partial}{\partial c_y} c_y \tilde{f}(c) + \frac{\partial}{\partial c_z} c_z \tilde{f}(c)\Big) \\ &= -2 \int d\mathbf{c}\ (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)\tilde{f}(c) \\ &= -2 \int d\mathbf{c}\ c^2 \tilde{f}(c) \\ &= -2\langle c^2 \rangle \\ &= -3 \end{aligned} \tag{A.55}$$

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{c}\ c^4 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \mathbf{c}\tilde{f}(c) &= \int d\mathbf{c}\ c^4 \Big(\frac{\partial^2}{\partial c_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial c_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial c_z^2} \Big) \tilde{f}(c) \\
&= \int d\mathbf{c}\ \Big(-4c^3 \frac{\partial c}{\partial c_x} \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_x} - 4c^3 \frac{\partial c}{\partial c_y} \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_y} - 4c^3 \frac{\partial c}{\partial c_z} \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_z} \Big) \\
&\quad \text{como } \partial_{c_\alpha} c = c_\alpha / c \text{ então} \\
&= \int d\mathbf{c}\ \Big(-4c^2 c_x \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_x} - 4c^2 c_y \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_y} - 4c^2 c_z \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_z} \Big) \\
&= 4 \int d\mathbf{c}\ \Big(2c \frac{\partial c_x}{\partial c_x} + c^2 + 2c \frac{\partial c_y}{\partial c_y} + c^2 + 2c \frac{\partial c_z}{\partial c_z} \tilde{f}(c) + c^2 \Big) \\
&= 4 \int d\mathbf{c}\ \Big(3c^2 + 2c^2 \Big) \tilde{f}(c) = 20 \langle c^2 \rangle = 30
\end{aligned} \tag{A.56}$$

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{c}\ c^4 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \mathbf{c}\tilde{f}(c) &= \int d\mathbf{c}\ c^4 \Big(\frac{\partial}{\partial c_x} c_x \tilde{f}(c) + \frac{\partial}{\partial c_y} c_y \tilde{f}(c) + \frac{\partial}{\partial c_z} c_z \tilde{f}(c) \Big) \\
&= -\int d\mathbf{c}\ (4c^3 c_x \frac{\partial c}{\partial c_x} + 4c^3 c_y \frac{\partial c}{\partial c_y} + 4c^3 c_z \frac{\partial c}{\partial c_z} \Big) \tilde{f}(c) \\
&= -4 \int d\mathbf{c}\ (c^3 \frac{c_x^2}{c} + c^3 \frac{c_y^2}{c} + c^3 \frac{c_z^2}{c} \Big) \tilde{f}(c) \\
&= -4 \int d\mathbf{c}\ c^4 \tilde{f}(c) \\
&= -4 \langle c^4 \rangle \\
&= -15(1 + a_2)
\end{aligned} \tag{A.57}$$

A.3 Equação de Boltzmann para valores grandes da velocidade

Seja equação

$$I_1(\tilde{f},\tilde{f}) = \int d\mathbf{c}_2 d\Omega \mid \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \mid \tilde{\sigma}(\Omega)(\tilde{f}(\mathbf{c}'_1)\tilde{f}(\mathbf{c}'_2) - \tilde{f}(\mathbf{c}_1)\tilde{f}(\mathbf{c}_2)) \qquad (A.58)$$

Para $\mathbf{c} \gg 1$ o termo de ganho pode ser desprezado em relação ao termo de perda na equação. A partir da equação (1.8) encontramos que as velocidades pré-colisionais $\mathbf{c}_1'$ e $\mathbf{c}_2'$ se relacionam com as velocidades pós-colisionais $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ pelas equações

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1' &= \mathbf{c}_1 - \frac{1}{2}(1+\alpha^{-1})\mathbf{c}_{12}\cdot\hat{\sigma} \\ \mathbf{c}_2' &= \mathbf{c}_2 + \frac{1}{2}(1+\alpha^{-1})\mathbf{c}_{12}\cdot\hat{\sigma} \end{aligned} \qquad (A.59)$$

onde α é o coeficiente de restituição. Para $\mathbf{c} \gg 1$ estas relações se tornam

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1' &= \mathbf{c}_1 - \frac{1}{2}(1+\alpha^{-1})(\mathbf{c}_1\cdot\hat{\sigma})\hat{\sigma} \\ \mathbf{c}_2' &= \mathbf{c}_2 + \frac{1}{2}(1+\alpha^{-1})(\mathbf{c}_1\cdot\hat{\sigma})\hat{\sigma} \end{aligned}$$

onde se substituiu $\mathbf{c}_{12}$ por $\mathbf{c}_1$. Se $|\mathbf{c}_1\cdot\hat{\sigma}|$, como é o caso típico, nas relações acima podemos desprezar $\mathbf{c}_2$ fazendo $\mathbf{c}_2 = 0$. Isto implica que os módulos de $\mathbf{c}_1'$ e $\mathbf{c}_2'$ são

$$\begin{aligned} c_1' &= c_1\sqrt{1 - \frac{1}{4}(1+\alpha^{-1})(3-\alpha^{-1})\hat{\mathbf{c}}_1\cdot\hat{\sigma}} \\ c_2' &= \frac{1}{2}(1+\alpha^{-1})c_1|\hat{\mathbf{c}}_1\cdot\hat{\sigma}| \end{aligned}$$

onde $\hat{\mathbf{c}}_1$ é um vetor unitário. Supondo que $\tilde{f}$ é da forma $\tilde{f}(c) \sim \exp(-ac^b)$ comparamos o fator $\tilde{f}(c_1')\tilde{f}(c_2')$ com $\tilde{f}(c_1)\tilde{f}(c_2)$ para c muito grande:

$$\frac{\tilde{f}(c_1')\tilde{f}(c_2')}{\tilde{f}(c_1)\tilde{f}(c_2)} \sim \exp -a\{(c_1')^b + (c_2')^b - (c_1)^b\} \qquad (A.60)$$

onde se desprezou c_2 em relação c_1. Podemos ver que para o caso $b = 1$

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' - c_1 &= c_1(\sqrt{1-(\hat{\mathbf{c}}_1\cdot\hat{\sigma})^2} + |\mathbf{c}_1\cdot\hat{\sigma}| - 1) \\ &= 2c_1|\hat{\mathbf{c}}_1\cdot\hat{\sigma}|\frac{\sqrt{1-|\hat{\mathbf{c}}_1\cdot\hat{\sigma}|}}{\sqrt{1+|\hat{\mathbf{c}}_1\cdot\hat{\sigma}|}+\sqrt{1-|\hat{\mathbf{c}}_1\cdot\hat{\sigma}|}} \gg 0. \end{aligned}$$

Desta maneira para c muito grande o expoente diverge e a exponencial é zero. Portanto podemos desprezar o fator $\tilde{f}(c_1'')\tilde{f}(c_2'')$ quando tomamos o limite $\mathbf{c}_1 \gg 1$. Então fazendo $\mathbf{c}_1 \gg 1$ na equação (A.58) temos

$$I_1(\tilde{f},\tilde{f}) \sim -\tilde{f}(\mathbf{c}_1)\, c_1 \int d\mathbf{c}_2 d\Omega\tilde{\sigma}(\Omega)\tilde{f}(\mathbf{c}_2) \qquad (A.61)$$

onde a constante

$$\int d\mathbf{c}_2 d\Omega \tilde{\sigma}(\Omega) \tilde{f}(\mathbf{c}_2) = \pi,$$

então finalmente temos que

$$I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) \sim -\pi\, c_1\, \tilde{f}(\mathbf{c}_1) \tag{A.62}$$