

3 – Uma solução para o problema da demarcação: formas lógicas

Embora a solução para o problema da demarcação anunciado em “On the Concept of Logical Consequence”, só tenha sido formulada por Tarski trinta anos mais tarde, uma sugestão na mesma direção já tinha sido apontada num artigo que veio a público em 1935, e que foi escrito em colaboração com Adolf Lindenbaum⁹⁵. Na parte inicial do artigo, são-nos apresentadas as características do sistema de lógica ao qual se aplicarão os resultados metamatemáticos ali contidos. Basicamente, este sistema é uma reformulação do sistema de lógica dos *Principia*: uma teoria simples de tipos com o axioma da infinidade, juntamente com os axiomas da escolha e da extensionalidade, considerados como sentenças lógicas.

A partir de um resultado inicial intitulado Teorema 1, os autores extraem uma série de outros resultados. O Teorema 1 é enunciado como se segue:

$$\forall x' \forall x'' \forall y' \forall y'' \forall z' \forall z'' \dots \forall R: R_{x', y', z', \dots} : \rightarrow . \sigma(x', y', z', \dots) . \leftrightarrow . \sigma(x'', y'', z'', \dots)^{96}$$

Intuitivamente, este teorema diz que toda relação entre objetos (indivíduos, classes, relações, etc.) que pode ser expressa em termos puramente lógicos (usando somente constantes lógicas e variáveis), é invariante sob todos os “one-one mappings” do universo de todos os indivíduos sobre si mesmo, e que esta invariância é logicamente provável. Os outros teoremas que podem ser derivados de 1 representam provas de que em diversos níveis da hierarquia de tipos, os objetos definíveis em termos lógicos na linguagem de *Principia Mathematica* são invariantes sob todas as funções 1-1 e sobre do universo de discurso sobre si mesmo. Seguindo a terminologia adotada em (86), chamarei daqui para diante estas funções de transformações.

No nível mais baixo da hierarquia, o segundo teorema apresentado no artigo nos mostra que os indivíduos não são distinguíveis, ou seja, não é possível

⁹⁵ Este artigo, conforme nos é informado numa nota ao pé da página 384 de (Tarski, 1983), foi apresentado por Tarski em 12 de junho de 1935 para o Mathematical Colloquium, conduzido por Karl Menger naquele ano, na Universidade de Viena.

⁹⁶ (Tarski, 1983, p.385). Os autores não apresentam provas dos teoremas no artigo. Para o Teorema 1, é dito que há uma prova publicada em polonês por Mostowski, embora numa forma mais fraca.

definir um indivíduo na linguagem lógica. O terceiro e quarto teoremas expressam, respectivamente, que somente a classe de todos os indivíduos e a classe nula ou conjunto vazio são definíveis em termos lógicos, e que dentre as relações binárias entre indivíduos somente as relações universal, identidade e seu complemento, e a relação nula, são definíveis na lógica pura. O teorema 5 merece uma atenção especial, pois ele reflete uma concepção de lógica que terá um papel fundamental para as discussões posteriores deste trabalho. Tarski e Lindenbaum formulam o teorema 5 da seguinte maneira:

Teorema 5. Se 'x'' e 'x''' são variáveis cujo percurso de valores são classes de indivíduos, então toda sentença da forma
 $\forall x' \forall x'' : Nc(x') = Nc(x'') \vee Nc(\bar{x}') = Nc(\bar{x}'') : \rightarrow : \sigma(x') . \leftrightarrow . \sigma(x'')$ é logicamente provável.

(...) É costumeiro dizer que a nossa lógica é uma lógica das extensões e não das intensões, uma vez que dois conceitos com intensões diferentes mas extensões idênticas são logicamente indistinguíveis. À luz do teorema 5 esta asserção pode ser precisada: nossa lógica não é nem mesmo uma lógica das extensões, mas meramente uma lógica da cardinalidade, desde que dois conceitos com extensões diferentes ainda são logicamente indistinguíveis, bastando que os números cardinais de suas extensões sejam iguais, e os números cardinais das extensões dos conceitos complementares também sejam iguais⁹⁷.

Numa lógica extensional, se dois conceitos têm a mesma extensão, eles são idênticos. Esta caracterização leva em conta a natureza dos objetos que caem sob um conceito, ou o que é dizer o mesmo, suas condições de identidade. A lógica cardinal, por outro lado, é neutra com relação às condições de identidade dos objetos. Assim como dois indivíduos não podem ser distinguidos em termos lógicos (razão pela qual a classe de todos os indivíduos é uma constante), as extensões de conceitos não são objetos lógicos, pois desde que tenham o mesmo número cardinal, elas são indistinguíveis. De acordo com este ponto de vista, o que distingue uma classe não é o conceito que ela representa, mas sim sua cardinalidade.

A principal consequência da concepção de uma lógica cardinal é que os conceitos lógicos semanticamente definíveis são conjuntos puros invariantes sob todas as transformações do universo de todos os indivíduos sobre si mesmo. Assim, o seguinte enunciado metateórico é verdadeiro: todos os conceitos lógicos

⁹⁷ (Tarski, 1983, p.387-88). A formulação do quantificador universal e da conjunção é ligeiramente diferente da formulação original usada por Tarski e Lindenbaum.

semanticamente definíveis são conjuntos puros invariantes ⁹⁸. Pergunta: o que poderíamos dizer da conversa deste enunciado? Vejamos: todos os conjuntos puros invariantes são semanticamente definíveis em termos lógicos. Uma simples reflexão nos mostra que o último enunciado não é verdadeiro, pelas razões já apontadas em 2.3. Enquanto nossa linguagem formal tem a capacidade de definir logicamente um número denumerável de conjuntos puros invariantes, a pressuposição existencial da teoria geral de classes nos garante que existe um número incontável de conjuntos puros invariantes. Como exemplo, podemos pensar no Teorema 4 formulado por Tarski e Lindenbaum: dentre as relações binárias entre indivíduos, apenas quatro relações são definíveis em termos lógicos. Por outro lado, “(...) se [o universo] é infinito, então existem infinitas, e de fato não-denumeráveis, operações lógicas unárias e binárias entre os elementos do universo de discurso” ⁹⁹.

Em 2.3, vimos como em sua definição semântica do conceito de consequência, Tarski supera a limitação das linguagens formais, representada pela condição (F). Mas ali, as constantes lógicas da linguagem ainda são tomadas como primitivos. Conseqüentemente, a generalidade do conceito de consequência é alcançada pela ubiquidade de certas constantes lógicas nas linguagens formais, e embora esta escolha dos termos lógicos não seja “muito arbitrária”, ela ainda encerra um grau bastante alto de relatividade, razão pela qual a generalidade mencionada ainda é muito fraca em vista do objetivo de Tarski quanto à lógica. Fenômeno semelhante ocorre com os resultados apresentados em Tarski-Lindenbaum, em que os objetos lógicos definíveis são definíveis a partir das constantes lógicas primitivas de um sistema arbitrário de lógica.

A superação das limitações da linguagem no que diz respeito aos termos lógicos é alcançada em “*What Are Logical Notions?*”. O primeiro passo introduzido por Tarski é a distinção fundamental entre noções ou objetos lógicos por um lado, e constantes lógicas, de outro. As constantes lógicas são objetos lingüísticos, elementos da sintaxe lógica que estruturam as sentenças. As noções

⁹⁸ Embora em seu artigo, Tarski e Lindenbaum apliquem os teoremas a uma variante do sistema dos Principia, desde o princípio é dito que os resultados metamatemáticos ali apresentados são aplicáveis a vários sistemas de lógica.

⁹⁹ (Tarski and Givant, 1986, p.57). O termo usado na passagem citada é ‘operações’ e não conjuntos ou objetos lógicos, como estamos denominando aqui. Mas as definições são equivalentes, pois as operações são identificadas com as classes que elas representam. Aliás, na mesma página da qual esta citação foi retirada, Tarski e Givant denominam os objetos invariantes como objetos lógicos.

lógicas, por seu turno, são os objetos denotados pelas constantes lógicas ¹⁰⁰, que figuram em todos os níveis da hierarquia de tipos da teoria geral de conjuntos formulada de acordo com o método de Whitehead e Russell. Eis a definição de Tarski (ou explicação, como ele prefere chamar): “eu sugiro que nós chamemos uma noção ‘lógica’, se ela é invariante sob todas possíveis transformações um-um do mundo sobre si mesmo” ¹⁰¹.

Temos assim uma explicação para o funcionamento das regras gramaticais da lógica. Podemos entender por que razão, quando construímos as fórmulas do cálculo proposicional, do cálculo de predicados, e de outras partes da lógica, as constantes lógicas são os parâmetros sintáticos fixos que estruturam as sentenças ¹⁰². As famosas regras de formação de fórmulas, sob este ponto de vista, são critérios subordinados à estrutura cardinal dos objetos invariantes da hierarquia de classes, e não apenas manipulações arbitrárias de signos sem significado. Na metalinguagem, fundamentamos o emprego destas regras gramaticais mostrando os fatos em que elas estão alicerçadas, além de mostrar como as sentenças da linguagem estudada se relacionam aos objetos a que elas se referem. Esta “libertação da linguagem” tem, todavia, um custo. É que segundo esta concepção, o conceito de noção lógica, assim como os conceitos de verdade lógica e consequência lógica, é não efetivo, pois os objetos lógicos possuem cardinalidades que estão além das capacidades expressivas das linguagens formais. Entretanto, parece ser possível delinear as linhas gerais do funcionamento da “semântica cardinal” de Tarski. Infelizmente, isto não poderá ser feito aqui, dados os limites do presente trabalho. Por hora, discutirei mais alguns dos aspectos principais da formulação elaborada por Tarski em (86).

Segundo Tarski, a melhor forma de constatar a plausibilidade de sua sugestão para a explicação das noções lógicas, é avaliarmos as suas consequências. Em primeiro lugar, são mencionados os resultados obtidos no artigo escrito com Lindenbaum na década de 30. Todas as noções denotadas por termos que podem ser definidos em todos os sistemas de lógica existentes (por exemplo, *Principia Mathematica*), são noções lógicas no sentido da definição em

¹⁰⁰ O enunciado de Tarski é o seguinte: “Eu tomo a lógica como sendo uma ciência, um sistema de sentenças verdadeiras, e as sentenças contêm termos denotando certas noções, as noções lógicas.” (Tarski, 1986, p.145).

¹⁰¹ (Tarski, 1986, p.149).

¹⁰² As regras sintáticas que mencionamos aqui não são, obviamente, circunscritas à lógica de 1ª ordem. Muito ao contrário, são regras para formação de fórmulas numa linguagem de ordem ω .

questão ¹⁰³. Em seguida, percorrendo os níveis da hierarquia de tipos, o autor examina quais noções são lógicas em cada tipo, exemplificando os sistemas de lógica em que essas noções ocorrem.

No nível mais baixo da hierarquia, o nível dos indivíduos, não há noções lógicas, “simplesmente [porque] nós sempre podemos encontrar uma transformação do mundo sobre si mesmo onde um indivíduo é transformado num indivíduo diferente” ¹⁰⁴. É interessante observarmos que a verdade deste enunciado depende sem sombra de dúvida que estejamos definindo as noções lógicas tomando em conta um domínio fixo de interpretação. Senão vejamos: seja \langle uma lógica de 1ª ordem. Sob a concepção de modelos de domínios variáveis, para qualquer cardinalidade α , existe um modelo de \langle que possui exatamente α elementos. Assim, temos um modelo de \langle que possui exatamente um indivíduo. Neste último caso, não há nenhuma transformação do mundo sobre si mesmo sob a qual um indivíduo é transformado num indivíduo diferente.

Seguindo adiante, podemos dar exemplos de noções de diversas ordens tradicionalmente consideradas como lógicas, e que passam no teste de invariância: dentre as classes de indivíduos, as classes universal e nula; as quatro relações binárias entre indivíduos consideradas como lógicas por Peirce e Schröder; as propriedades cardinais das classes de indivíduos; as relações lógicas tradicionais entre classes, como inclusão, sobreposição, disjunção, etc. Em (86), Tarski se restringe a estes poucos exemplos, naturalmente devido ao fato de que eles são o bastante para que se possa ter uma idéia geral do que é uma noção lógica.

Entretanto, poderíamos demonstrar, a partir do critério de Tarski e de algumas definições, a invariância de objetos de diversas ordens, como por exemplo, as classes universais de todas as ordens finitas. Representemos a hierarquia de classes. Para cada nível n , tal que ($n > 0$), temos uma classe universal M_n de todos os objetos de nível ($n-1$). Assim, M_1 por exemplo, é a classe à qual pertencem todos os indivíduos, M_2 é a classe à qual pertencem todas as classes de

¹⁰³ (Tarski, 1986, p.150). Em uma nota ao pé da página, Corcoran nos informa que na conferência dada na universidade de Buffalo (1973), Tarski indicou que embora a sua formulação se aplique a ‘noções’ no sentido estrito de conjuntos, classes de conjuntos, etc, é possível construir os conectivos, operadores de relação, etc, de *Principia Mathematica*, neste sentido estrito. Para isto basta considerar o universo de discurso e o conjunto vazio, respectivamente como os valores de verdade V e F.

¹⁰⁴ (Tarski, 1986, p.150).

indivíduos, e assim por diante. Podemos representar este estado de coisas por meio de uma relação de pertinência tipificada \in_n , tal que ($n \geq 0$). Enfim podemos representar cada automorfismo de M_1 por si mesma, ou transformação, por T . Dados todos esses elementos, formulamos a seguinte definição:

$$D: \forall x_n \forall T \forall M_{n+1} ((x_n \in_n M_{n+1}) \leftrightarrow (T(x_n) \in_n M_{n+1})).$$

A partir de D , se seguem de maneira trivial teoremas sobre a satisfação da propriedade da invariância pelas classes universais de todas as ordens finitas. Poderíamos também demonstrar que o conjunto vazio satisfaz (em modo vácuo) esta propriedade. Provas análogas poderiam ser dadas no que diz respeito aos exemplos de noções lógicas fornecidos por Tarski em (86), como das relações lógicas binárias entre indivíduos ¹⁰⁵, entre classes, propriedades de classes, e assim por diante. Todavia, para que nossas provas da invariância destes objetos tivesse a generalidade necessária, seria preciso extraí-las do Teorema 1 de Tarski-Lindenbaum que apresentamos acima. Mesmo neste caso, contudo, não seria possível provar, por exemplo, que as classes universais de todas as ordens da teoria geral de classes são invariantes, pois neste caso teríamos que formular definições que incluíssem classes de ordem ω .

¹⁰⁵ Um exemplo específico de uma tal prova poderia ser apresentado como se segue: Suponhamos que pudéssemos definir a relação de identidade do seguinte modo:

Definição:

Para dois objetos a e b quaisquer e uma relação φ , tal que ($a, b \in_0 M_1$), $a\varphi b$ se, e somente se, a é idêntico a b .

A partir desta definição, poderíamos provar a invariância de φ :

(1º caso):

- | | |
|-----------------------|--------------------------------|
| 1. $a\varphi b$ | (hipótese) |
| 2. $a = b$ | (pela definição de φ) |
| 3. $T(a) = T(b)$ | (a partir de 2.) |
| 4. $T(a)\varphi T(b)$ | (a partir de 1 e 3) |

(2º caso):

- | | |
|-----------------------------|---|
| 5. $\neg(a\varphi b)$ | (hipótese) |
| 6. $a \neq b$ | (a partir de 5) |
| 7. $T(a) \neq T(b)$ | (a partir de 6, porque as transformações T são injetoras) |
| 8. $\neg(T(a)\varphi T(b))$ | (a partir de 7 e da definição de φ). |

(De 8 e da hipótese de 5 se segue a invariância de φ).

QED.

Uma prova similar a esta se encontra em (Filotico, 2000).

Entretanto, essas considerações a respeito da capacidade expressiva das linguagens formais poderiam nos desviar do verdadeiro sentido do critério formulado por Tarski em (86). É que independentemente da linguagem com a qual estejamos trabalhando, tenha ela um alfabeto denumerável, como as linguagens consideradas por Tarski nos escritos que avaliamos até agora, ou um alfabeto incontável, como L_{∞} , “nós não podemos esperar provar a tese com rigor matemático, porque nós não temos nenhuma caracterização prévia precisa acerca de quais noções considerar como lógicas”¹⁰⁶.

O critério de Tarski desempenha, é certo, um papel construtivo. Ao construirmos gramaticalmente as sentenças de um sistema formal qualquer, o critério da invariância nos fornece um fundamento para determinarmos quais termos da linguagem devem ser mantidos fixos e estruturar as sentenças, ou seja, quais são as constantes lógicas do sistema formal em questão. Por outro lado, não poderíamos esperar obter efetivamente o conjunto de todos os objetos lógicos possíveis. O que temos em (86), em realidade, é uma caracterização metateórica geral acerca de quais objetos considerar como lógicos. Neste ponto, podemos traçar uma analogia entre a explicação tarskiana das noções lógicas, e suas explicações anteriores de verdade e consequência. Em (36), após demonstrar, por meio de seu exemplo de ω -inferência, que o critério de derivação não pode captar a essência do conceito comum de consequência, Tarski declara:

Talvez não seja supérfluo apontar adiantadamente que o antigo conceito de consequência, como é comumente usado pelos lógicos matemáticos – em comparação com o novo – de nenhuma maneira perde sua importância. Este conceito provavelmente irá ter sempre um significado decisivo para a construção prática de teorias dedutivas, como um instrumento que nos permite provar ou refutar sentenças particulares destas teorias. Parece, entretanto, que em considerações de uma natureza teórica geral, o conceito próprio de consequência deve ser colocado em primeiro plano¹⁰⁷.

Ao construirmos uma teoria dedutiva, formulamos regras sintáticas por meio das quais podemos provar as sentenças corretas da teoria. Em seguida, na metalinguagem, obtemos em vários casos as provas de que as regras de dedução adotadas são consistentes, completas, etc. Com o emprego desse procedimento, estamos fornecendo provas metateóricas para uma linguagem em particular. O

¹⁰⁶ (Mc Gee, 1996, p.567)

¹⁰⁷ (Tarski, 1983, p.413)

que garante universalidade ao método é o seu uso prático geral. Mas as provas metateóricas que oferecemos são relativas à teoria dedutiva às quais as estamos aplicando. O fundamento das nossas práticas dedutivas nos deve ser dado, de acordo com Tarski, em termos semânticos, por meio do conceito próprio de consequência lógica. Relações similares se aplicam aos conceitos “sentença provável” e “sentença verdadeira”¹⁰⁸.

Da mesma forma que não há conflito entre os conceitos de verdade e prova, embora a noção de prova não possa ser um substituto da noção de verdade, não existe incompatibilidade entre nossas práticas com relação à estruturação das sentenças das teorias dedutivas por meio de regras sintáticas, e a explicação geral das noções ou formas lógicas como objetos invariantes. Ao formarmos as fórmulas ou sentenças de uma teoria dedutiva específica selecionamos, como foi dito anteriormente, certos elementos lingüísticos que serão mantidos fixos, as constantes lógicas da teoria. O fundamento para nossa determinação de selecionar como termos fixos uma classe específica de elementos lingüísticos, todavia, é semântico. Assim como o conceito próprio de consequência lógica de (36), as noções lógicas devem, “em considerações de uma natureza teórica geral, ser colocadas em primeiro plano”. Se as noções lógicas devem ser colocadas em primeiro plano, isto significa que o nosso uso prático das regras sintáticas nas teorias dedutivas está subordinado à existência do conjunto de objetos que são as formas lógicas, o que confere unidade ao nosso emprego prático das regras sintáticas de formação de fórmulas.

A partir das declarações feitas no parágrafo anterior, podemos traçar uma distinção básica que irá nos permitir analisar os aspectos da concepção tarskiana de forma lógica a partir do critério formulado em (86), diferenciando-a da que expusemos em 2.3. Naquele ponto, vimos como a concepção de forma lógica de Tarski possuía aspectos sintáticos e semânticos. Sob o aspecto semântico, a forma lógica era constituída por todas as seqüências possíveis de objetos sob a extensão das variáveis de sentenças de uma determinada ordem. Esta análise ainda encerra

¹⁰⁸ Ver (Tarski, 1985). Neste artigo, depois de afirmar que o conceito de provabilidade não é um substituto perfeito para o conceito de verdade, Tarski afirma:

“Prova ainda é o único método usado para asserir a *verdade das sentenças de uma teoria matemática específica*.” E na página seguinte:

“Não existe conflito entre as noções de verdade e prova no desenvolvimento das matemáticas; as duas noções não estão em guerra, mas vivem em uma coexistência pacífica.” (Tarski, 1985, pp.124-125). Grifo meu.

um elemento particular, visto que, embora obtenhamos deste modo um conceito não efetivo de forma lógica que ultrapassa a capacidade expressiva de qualquer linguagem com um alfabeto denumerável, nossa caracterização deste conceito, sob o aspecto sintático, fica circunscrita àquelas sentenças estruturadas a partir de um conjunto determinado de constantes lógicas, tomadas como elementos primitivos.

Em contraposição, de acordo com a formulação alcançada em (86), é possível considerar o conceito de forma lógica sob dois pontos de vista. Ao primeiro destes pontos de vista, se ligam os procedimentos de construção das sentenças de uma determinada teoria, conforme mencionamos acima. Todas estas regras, bem entendido, fazem parte do que podemos chamar o aspecto epistemológico da concepção tarskiana das formas lógicas. Sob esta perspectiva, sempre que falamos de forma lógica, estaremos nos referindo a sentenças. O fundamento no qual se apóiam nossos procedimentos na construção de teorias formais está centrado naquilo que poderíamos chamar o aspecto ontológico da concepção tarskiana das formas lógicas, ao qual o aspecto epistemológico deve estar subordinado. Sob o ponto de vista ontológico parece fazer sentido falarmos, dentro da concepção de Tarski, de formas lógicas, sem que estejamos fazendo referência a sentenças. Obtemos assim uma caracterização teórica geral do conceito mais importante da lógica que, sob este aspecto, não é relativizado a nenhuma linguagem em particular.

Para compreendermos mais claramente as relações entre as perspectivas ontológica epistemológica da lógica, com relação ao conceito específico de que estamos tratando, é necessário considerarmos mais alguns pontos importantes. Em primeiro lugar, a caracterização das formas lógicas como objetos abstratos, de acordo com a formulação de Tarski, tem como consequência uma concepção específica acerca da realidade. Esta última seria, como já apontamos, estratificada em tipos, cada um dos quais tem uma cardinalidade determinada, a começar pelo tipo 0. Por conseguinte, do ponto de vista ontológico, as formas lógicas são certas estruturas invariantes que, por sua vez, também possuem uma cardinalidade determinada. Uma vez que o mundo tem uma estrutura fixa, as formas lógicas são absolutas. Por outro lado, dado que a caracterização que Tarski faz da lógica depende, por assim dizer, do aspecto substantivo da realidade, no que diz respeito à sua cardinalidade, se introduzíssemos a idéia de “mundos” ou universos de

discurso com diferentes cardinalidades, ao construirmos um determinado sistema de lógica, não poderíamos explicar as variações de comportamento das constantes lógicas do sistema através de domínios com medidas diferentes. É o que podemos constatar a partir de uma declaração contida em (Mc Gee, 1996). Como veremos no próximo capítulo, este autor considera o critério de Tarski de acordo com a aplicação que dele encontramos em (Sher, 1991), na qual são considerados domínios variáveis, denominando-o “the Tarski-Sher thesis”. As palavras de Mc Gee são as seguintes:

A tese Tarski-Sher não requer que haja qualquer conexão entre as maneiras que uma operação lógica age sobre domínios com medidas diferentes. Assim, ela iria permitir um conectivo lógico que age como uma disjunção quando a medida do domínio é um sucessor cardinal par, como uma conjunção quando a medida do domínio é um sucessor cardinal ímpar, e como um bicondicional em limites ¹⁰⁹.

A pergunta que surge naturalmente a esta altura é a de se seria possível, do ponto de vista epistemológico, determinar um conjunto de procedimentos por meio do qual pudéssemos definir cada uma das noções ou formas lógicas, de acordo com o critério formulado por Tarski. A esta pergunta, a resposta é obviamente negativa. Nenhum sistema de símbolos é capaz de codificar todas as formas lógicas, independente de qual seja seu poder expressivo ¹¹⁰. Não obstante, uma vez assentado que o mundo tem uma estrutura cardinal fixa, invariante, que a realidade seja estratificada em tipos lógicos como aventamos acima, é possível identificar uma epistemologia privilegiada por meio da qual possamos descrever o mais adequadamente possível este estado de coisas. Esta epistemologia é, não surpreendentemente, a formulação da teoria geral de conjuntos de *Principia*

¹⁰⁹ (Mc Gee, 1996, p.577)

¹¹⁰ Ver (Mc Gee, p.567), citado na página 61 acima. Podemos precisar aquela afirmação com a seguinte consideração: mesmo que tenhamos numa linguagem um número suficiente de constantes lógicas, tal que estas possam ser colocadas numa correspondência 1-1 com as noções ou formas lógicas, para definir todas estas formas deveríamos ter um ponto de partida. Sob este ponto de vista, seria necessário estruturarmos certas sentenças por meio das quais poderíamos provar que todo operador invariante sob todas as transformações tem o caráter de logicidade. Este procedimento, todavia, depende de uma escolha prévia acerca de quais elementos da linguagem devem ser considerados como lógicos, para que possamos estruturar as sentenças em questão. Deste modo, não nos restaria outra alternativa, a não ser eleger como primitivos alguns elementos da linguagem *intuitivamente* reconhecidos como constantes lógicas. Desta maneira, recairíamos numa situação semelhante àquela apontada por Tarski quando anunciou o problema da demarcação. Notamos uma vez mais que a formulação de (86) tem um caráter irredutivelmente ontológico. Entretanto, para que pudéssemos oferecer uma resposta satisfatória a todas as questões que possam estar aqui envolvidas, deveríamos proceder a uma investigação detalhada sobre as linguagens infinitárias. Mas não discutirei estas linguagens aqui.

Mathematica. Tal formulação nos garante, por meio de seus axiomas, o caráter absoluto dos cardinais, entendidos como classes individuais em cada nível da hierarquia dos tipos. Da mesma forma, esta formulação nos permite caracterizar as formas lógicas como objetos matemáticos de ordem superior, de maneira não relativa.

Podemos dar algumas ilustrações da situação descrita no parágrafo anterior. Suponhamos, por exemplo, o quantificador universal para uma teoria de 1ª ordem, que normalmente denotamos por \forall . Este símbolo representa um operador de 2ª ordem, pois que designa a classe cujo único elemento é a classe universal de tipo 1, ou seja, a classe de todos os indivíduos. A classe universal é, neste sentido, uma instância da forma lógica que denotamos por \forall ¹¹¹. Caracterizações similares podem ser dadas para outras constantes lógicas, como os números finitos, representados como classes de classes de indivíduos, o quantificador existencial e os conectivos lógicos.

Analisando o esboço que fizemos acima, qual seja, o de uma análise dos aspectos ontológico e epistemológico do conceito de forma lógica, bem como das relações entre estes dois aspectos, percebemos uma questão que naturalmente se impõe: qual seria a posição de Tarski com relação a questões ontológicas, ou seja, com relação a questões que envolvem a determinação acerca “do que existe”? Num certo sentido, poderíamos dizer que Tarski se recusaria a tecer considerações sobre esse tipo de questões, por considera-las infrutíferas, e até mesmo abstrusas. É o que podemos constatar ao lermos as linhas iniciais de (86), quando o autor está a fazer considerações sobre os possíveis tipos de definições para esta ou aquela ciência. Vejamos as próprias palavras de Tarski:

Respostas à questão ‘o que é lógica?’ ou ‘o que é tal e tal ciência?’, podem ser de espécies muito diferentes. Em alguns casos nós podemos dar uma explicação do uso predominante do nome da ciência. (...). Em outros casos nós podemos estar interessados no uso predominante, não de todas as pessoas que usam um dado termo, mas somente de pessoas que são qualificadas para usa-lo – que são especialistas no domínio. (...). Ainda em outros casos nossa resposta tem um

¹¹¹ Como vimos em 2.3 (nota 92), o número cardinal do nível 1 é \aleph_0 . Portanto, como cardinal individual, este número surgiria somente no 3º nível, o cardinal da classe cujos elementos são todas as classes de classes de indivíduos. Contudo, se em adição ao axioma da infinidade, nós assumimos o axioma da escolha, ou seja, o axioma que diz que se nós temos um conjunto de classes mutuamente exclusivas, nenhuma das quais é nula, então existe uma classe que contém como membros exatamente um elemento de cada uma das classes deste conjunto, podemos provar um teorema que nos permite identificar na estrutura de tipos a classe de todos os indivíduos, cujo cardinal é \aleph_0 . Ver a este respeito (Russell, 1908a, p.180).

caráter normativo: nós fazemos uma sugestão de que o termo seja usado de uma certa maneira, independente da maneira na qual ele é atualmente usado. *Algumas respostas parecem ainda objetivar a algo bastante diferente, mas é muito difícil para mim dizer o que é; algumas pessoas falam de capturar o significado próprio, verdadeiro de uma noção, algo independente do uso atual e independente de quaisquer propostas normativas, algo como a idéia platônica por trás da noção. Esta última abordagem é tão alheia e estranha para mim que eu irei simplesmente ignorá-la, pois eu não posso dizer qualquer coisa de inteligente sobre tais questões*¹¹².

Examinando a citação acima, notamos em que sentido Tarski se recusa a entrar em discussões sobre questões ontológicas. Tal seria um procedimento pelo qual se tentasse, por meio de pretensas asserções teóricas, ou seja, revestindo-se de um discurso argumentativo, determinar como é *verdadeiramente* a realidade, ou quantos objetos existem no mundo, independentemente de qualquer teorização a respeito. Um tal procedimento seria, no entender de Tarski, um contra-senso. Por outro lado, podemos depreender do que foi exposto anteriormente que a caracterização tarskiana das formas lógicas se propõe a cumprir duas exigências básicas. Chamarei à primeira uma exigência de univocidade: como parâmetros ou cânones de todo raciocínio formal, as constantes lógicas devem ter uma referência única, fixa. À segunda exigência podemos designar por generalidade: as formas lógicas não podem ser relativas às possibilidades de definição de uma linguagem, qualquer que seja. Analisemos as conseqüências destas duas exigências. A exigência de univocidade determina que o mundo tenha uma cardinalidade invariante estratificada em níveis ou tipos. A exigência de generalidade, por seu turno, parece implicar inescapavelmente uma pressuposição de existência de objetos abstratos, independente de estes objetos terem sido ou não construídos numa linguagem. Tomadas em conjunto, as duas exigências mencionadas parecem acarretar que a caracterização das formas lógicas de Tarski tem um cunho realista. Chegamos assim, a um certo impasse: como podemos compreender a relação entre este aspecto realista, e as afirmações que sublinhamos na citação acima?

A resolução deste impasse depende de nos perguntarmos mais uma vez quais objetivos Tarski tinha em mente ao formular sua solução para o problema da demarcação. Voltamos assim a uma questão já tocada em 2.1. Naquela seção, vimos que a tentativa de definir os conceitos lógicos fundamentais obedece a uma

¹¹² (Tarski, 1986, p.145)

motivação filosófica bem definida quanto à tarefa da lógica, que é a de “criar um aparato conceitual unificado capaz de unificar todo o conhecimento humano”. É bastante claro que, concebida nestes termos, a lógica deve ter um caráter universal, absoluto. Podemos dizer, grosso modo, que o lócus no qual o conhecimento científico tem sua unidade são os raciocínios matemáticos. Pois bem, uma vez que “o todo da matemática” pode ser desenvolvido na teoria de conjuntos ¹¹³, o problema da fundamentação do conhecimento científico se reduziria ao problema de se fornecer uma caracterização teórica geral dos raciocínios formalmente válidos da teoria de conjuntos.

Deve-se notar, todavia, que quando nos referimos à ‘teoria de conjuntos’ neste contexto, estamos usando esta expressão num sentido muito geral e abstrato (e, não podemos deixar de reconhecer, bastante vago), e não considerando as formulações concretas distintas que encontramos, por exemplo, em *ZF* ou nos *Principia* de Russell e Whitehead. Ao que tudo indica, é esta acepção vaga e geral que Tarski tem em mente em algumas passagens de (86), quando afirma que o todo da matemática pode ser desenvolvido na teoria de conjuntos ¹¹⁴. À luz destas considerações, podemos dizer que, no entender de Tarski, as questões relativas ao status ontológico das formas lógicas se reduzem a questões de natureza pragmática. Estabelecido o objetivo filosófico de unificar os raciocínios matemáticos por meio de uma caracterização lógica, os problemas concernentes à estrutura última da realidade se convertem em problemas concernentes às condições de adequação que devem ser preenchidas para que se possa atingir o objetivo em questão. Tais são, por exemplo, as exigências de que a realidade tenha uma estrutura fixa, uma cardinalidade determinada, etc, conforme mencionei anteriormente.

Da mesma forma, é possível identificarmos como o caráter pragmático do pensamento filosófico de Tarski pode se refletir na escolha de construções distintas da teoria geral dos conjuntos ou, remetendo à distinção que fizemos acima, epistemologias distintas. Nas páginas finais de (86), depois de expor seu critério de logicalidade, o autor se volta para a célebre questão da redutibilidade da matemática à lógica. Já em princípio somos alertados para o fato de que será considerado apenas um aspecto da questão: se as noções ou formas lógicas são

¹¹³ Ver (Tarski, 1986, p.151).

¹¹⁴ Isto fica claro ao lermos com atenção a 4ª parte de (86), pp.151-153.

noções matemáticas, e não se verdades lógicas são verdades matemáticas¹¹⁵. Uma vez que o todo da matemática pode ser construído na teoria de conjuntos, e que esta última tem como relação fundamental a noção de pertinência, a resposta depende de sabermos se a relação de pertinência é uma forma lógica.

A resposta de Tarski a esse respeito é um tanto intrigante: “como queira!” (“as you wish!”). Adotando o método de construção tipo-teorético (“the higher-order method”), a relação de pertinência ocorrerá em vários níveis, e será invariante sob todas as transformações do universo de discurso. Portanto, de acordo com este método, ela será uma noção lógica. por outro lado, se adotarmos o método de construção de 1ª ordem tipo *ZF*, teremos apenas um universo de discurso, e neste caso, a pertinência é uma relação primitiva que ocorre entre os indivíduos deste universo, não sendo por conseguinte, lógica, visto que existem apenas quatro relações lógicas entre indivíduos: a relação nula, a universal, e as relações de identidade e seu complemento.

É importante percebermos que a expressão “as you wish!” significa algo como: a escolha do método de construção da teoria dos conjuntos irá depender do objetivo teórico que queiramos alcançar. Se tivermos em vista a idéia de uma concepção unificada de lógica, teoria de conjuntos e matemática, a tendência natural será adotarmos o método de construção logicista. É nesse sentido que, no final de (86), Tarski escreve:

Esta conclusão é interessante, me parece, porque as duas respostas possíveis correspondem a dois tipos de opinião. Uma concepção *monista* de lógica, teoria de conjuntos e matemática, na qual o todo da matemática seria uma parte da lógica apela, penso eu, para uma tendência fundamental dos filósofos modernos. Os matemáticos, por outro lado, ficariam desapontados ao ouvir que a matemática, considerada por eles como a disciplina mais elevada [que existe] no mundo, é uma parte de algo tão trivial quanto a lógica; e eles então preferem um desenvolvimento da teoria de conjuntos no qual as noções conjunto-teoréticas não são noções lógicas. A sugestão feita por mim não implica, *por si mesma*, qualquer resposta à questão de se as noções matemáticas são lógicas¹¹⁶.

Considerando as declarações desta passagem, podemos ver nela uma manifestação explícita daquela tensão apontada por Feferman entre as opiniões ou tendências de Tarski enquanto filósofo, e enquanto matemático (ou metamatemático).

¹¹⁵ Essa distinção marcante entre os termos ‘verdade’ e ‘noção’ reflete a atitude de Tarski com respeito a questões de caráter ontológico de que falamos anteriormente.

¹¹⁶ (Tarski, 1986, p.153)

Entretanto, dado o sentido geral do texto, parece que podemos compreender que a conclusão de Tarski, em realidade, é que, em vista do estado das pesquisas fundacionais em teoria de conjuntos, não é possível dar uma resposta definitiva sobre qual a relação entre a lógica e a matemática.