2 – O conceito de conseqüência lógica e o problema da demarcação

2.1. As origens do problema da demarcação

A principal razão apontada por Tarski em (36) para a necessidade de uma definição semântica do conceito de conseqüência lógica, são as limitações de uma metateoria que pretende exaurir todos os métodos de prova usados nos raciocínios matemáticos por meio de algumas regras simples de inferência, "tais como as regras de substituição e *modus ponens*". Uma característica básica desta metateoria é sua aceitação exclusiva de métodos de prova finitários, ou seja, em que a conclusão é obtida a partir das premissas por um número finito de passos. É certo que numa formalização da aritmética na linguagem da lógica de predicados de 1ª ordem, os esquemas de axiomas e os metateoremas são, sob um certo aspecto, infinitários. Mas a forma de infinito aceita neste caso é apenas um infinito potencial, por assim dizer, um infinito por composição, já que os esquemas de axiomas, por exemplo, podem ser substituídos por infinitos axiomas da linguagem objeto. Por outro lado, não é possível provar, com base nas regras de inferência aceitas na aritmética de 1ª ordem, a conclusão de um argumento no qual o conjunto das premissas é constituído por uma totalidade infinita atual. O exemplo citado por Tarski é o seguinte:

> Há alguns anos atrás, eu dei um exemplo, bastante elementar, de uma teoria que apresentava a seguinte peculiaridade: entre os seus teoremas ocorriam sentenças tais como:
>
> A_0. 0 possui a propriedade dada P,
>
> A_1. 1 possui a propriedade dada P,
>
> e, em geral, todas as sentenças particulares da forma
>
> A_n. n possui a propriedade dada P,
>
> em que n está por qualquer símbolo que denota um número em um determinado sistema numérico (p. ex., decimal). Por outro lado, a sentença universal:
>
> A. Todo número natural possui a propriedade dada P,

Não pode ser ***provada*** com base nas regras normais de inferência. [5]

Esta ω-inferência, diz Tarski, é intuitivamente válida. Todavia, a citação acima nos diz que não é possível, usando apenas as regras de inferência para os sistemas dedutivos standard, provar sua conclusão. Poderíamos adotar a regra que o nosso autor chama indução infinita, e que hoje é conhecida como regra ω. Mas esta regra, “em razão de sua natureza infinitária, é essencialmente diferente das antigas regras” [6]. Ou seja, o problema com a regra ω, é que ela significaria um afastamento significativo dos sistemas dedutivos standard. O outro caminho para a solução do problema seria a suplementação das antigas regras de inferência por uma regra que também tenha uma natureza puramente estrutural (recursiva). A regra apresentada por Tarski neste ponto corresponde a uma indução completa, o que equivale a construir uma sentença B que afirma que todos os A_n são prováveis com base nas regras normais de inferência, e em seguida estabelecer o seguinte: se a sentença B é provada, então A pode ser aceita como provada ($\vdash B \rightarrow \vdash A$). Embora esta regra pertença à metateoria, podemos, em linguagens suficientemente poderosas, interpreta-la na teoria objeto. Tal é o caso da aritmética dos naturais, cuja riqueza expressiva nos permite uma tal interpretação.

A suplementação das antigas regras pelo procedimento esboçado acima, como é bem sabido, não supera as dificuldades, pois:

> Conforme os resultados de K. Gödel (...) Em qualquer teoria dedutiva (exceto certas teorias de um caráter particularmente elementar), não importa quanto nós suplementemos as regras ordinárias de inferência por novas regras de um caráter puramente estrutural, é possível construir sentenças que se seguem, no sentido usual, dos teoremas desta teoria, as quais, todavia, não podem ser provadas nesta teoria sobre a base das regras de inferência aceitas [7].

Tendo em vista estes problemas da caracterização “formal” do conceito de conseqüência, Tarski abre mão de fundar a lógica sobre derivabilidade, apontando para a necessidade de uma definição que seja próxima “em essência”, do conceito usual. Esta será a famosa definição em termos de verdade e satisfação, que são os conceitos básicos da semântica científica [8]. Existem vários problemas

[5] (Tarski, 1983, p.410. Grifo meu.)
[6] (Tarski, 1983, p.411)
[7] (Tarski, 1983, pp.412-13)
[8] Ver (Tarski, 1983, pp.401-8).

interpretativos relacionados ao exemplo de ω-inferência apresentado por Tarski em (36). Tratarei pormenorizadamente destes problemas na próxima seção, quando tentarei responder se a forma comum a estas inferências é de fato válida. Lembremo-nos apenas que uma das conseqüências do teorema de completude de Gödel, é que os conceitos modelo-teorético e prova-teorético de conseqüência lógica são equivalentes para a lógica de predicados de 1ª ordem e que, portanto, não fica claro em princípio como o conceito semântico superaria a caracterização sintática. No que se segue, farei uma exposição da análise tarskiana, discutindo sua concepção dos conceitos semânticos importantes para a nossa tarefa: mostrar como se instaura o problema da distinção entre os termos lógicos e extralógicos.

Tarski reconhece, em (36), que seu tratamento semântico do conceito de conseqüência lógica não pretende ser completamente original, mas que somente a partir dos conceitos estabelecidos na semântica científica é possível definir este conceito de uma forma exata. Certas "considerações de natureza intuitiva" devem, então, constituir o ponto de partida para a análise do conceito em questão:

> Considere qualquer classe de sentenças K e uma sentença X que se segue das sentenças desta classe. De um ponto de vista intuitivo, nunca pode ocorrer que a classe K consista somente de sentenças verdadeiras, e a sentença X seja falsa. Mais ainda, uma vez que nós estamos aqui preocupados com o conceito de conseqüência lógica, i. é, formal, e portanto com uma relação que deve ser determinada unicamente pela forma das sentenças entre as quais ela ocorre, esta relação não pode ser influenciada de nenhuma maneira por um conhecimento empírico, e em particular pelo conhecimento dos objetos aos quais a sentença X, ou as sentenças da classe K, se referem [9].

As intuições apresentadas nesta passagem são condições de adequação que uma elucidação matemática do conceito de conseqüência lógica deve cumprir. Uma elucidação científica deve, basicamente, nos esclarecer duas noções: verdade e forma lógica das sentenças. Tal esclarecimento deve ser fornecido pela semântica. A noção de verdade foi definida de forma sistemática em (33). Numa primeira tentativa de elucidar a noção geral de forma, o autor introduz a noção de substituição. Esta noção pressupõe a idéia de que, numa linguagem formal qualquer, há uma divisão interna entre os termos a serem substituídos (termos que variam), e os termos fixos da linguagem em questão, ou seja, entre termos materiais e termos formais. Esta situação está implícita na seguinte proposição:

[9] (Tarski, 1983, pp. 414-15)

"A relação de conseqüência não pode ser afetada pela substituição das *designações* dos objetos referidos nestas sentenças pelas designações de quaisquer outros objetos" [10].

Que a relação de conseqüência não deve ser afetada pela substituição ou permutação das designações de objetos, nos mostra que esta é uma tentativa de elucidar o conceito de conseqüência lógica em termos lingüísticos. As duas características essenciais do conceito de conseqüência lógica, preservação de verdade em virtude da forma, poderiam neste caso ser expressas pela chamada condição (F):

> Se, nas sentenças da classe K e na sentença X as constantes – aparte as constantes puramente lógicas – são substituídas por quaisquer outras constantes (signos iguais onde quer que seja sendo substituídos por signos iguais), e se nós denotamos a classe das sentenças assim obtidas de K por K′, e a sentença obtida de X por X′, então a sentença X′ deve ser verdadeira unicamente se todas as sentenças da classe K′ forem verdadeiras. [11]

Esta condição, segundo Tarski, é necessária, mas não é suficiente, pois ela depende de uma pressuposição "fictícia": que qualquer linguagem para a qual estejamos definindo o conceito de conseqüência lógica possa conter designações (termos variáveis) para todos os objetos possíveis. Uma definição por este viés torna o conceito a ser definido essencialmente dependente da riqueza expressiva da linguagem, relativizando-o à linguagem específica para a qual está sendo definido. O que precisamos, portanto, é de uma definição que seja semelhante à condição (F), mas que seja independente da pressuposição da existência de uma linguagem ideal. Isto nos conduz da permutação lingüística das designações para a permutação dos objetos que correspondem a estas designações, para a noção de 'modelo'. Com base nisto, Tarski enuncia sua famosa definição: "A sentença X se segue logicamente das sentenças da classe K se, e somente se, todo modelo da classe K é também um modelo da sentença X". [12]

Na última década do século passado, formou-se uma intensa discussão em torno da definição tarskiana dos conceitos de verdade lógica e conseqüência lógica, a partir das críticas feitas por Etchemendy. Em (Etchemendy, 1990), o autor defende que a concepção de modelo encontrada em (36), de forma alguma é

---

[10] (Tarski, 1983, p.415. Grifo meu.)
[11] (Tarski, 1983, p.415)
[12] (Tarski, 1983, p.417)

a concepção da teoria de modelos standard atual. Etchemendy sustenta que, ao contrário do que se pensava geralmente até então, a generalização sobre os modelos envolvida na definição do conceito de conseqüência pressupõe um domínio fixo de interpretação. Contra esta tese, diversos autores se levantaram, apresentando argumentos de maior ou menor força. Devido ao caráter mais analítico que interpretativo de sua obra, Etchemendy não apresenta argumentos específicos em defesa de seu ponto de vista. Num artigo recente, entretanto, Thimothy Bays[13] argumentou de forma relativamente convincente que, de fato, a definição de Tarski em (36) implica uma concepção de modelos que pressupõe um domínio fixo de interpretação.

A partir da argumentação de Bays, procurarei mostrar que uma compreensão adequada das origens do problema da demarcação, bem como da solução apresentada em (86), depende de compreendermos o conceito de modelo como se aplicando a um domínio fixo. Mais ainda, acredito que a questão da dicotomia entre domínios variáveis e domínio fixo não é apenas uma questão histórica, pois ela reflete a forma ampla como Tarski concebe o conceito de conseqüência lógica. Da mesma forma, esta linha interpretativa nos permite explicar certos pontos obscuros, como a apresentação em (36) da conexão entre conseqüência formal e conseqüência material, e também o problema da validade das ω-inferências. Enfim, a adoção desta concepção nos permitirá, no terceiro capítulo, mostrar de que forma algumas das críticas ao critério formulado em (86), conectadas em sua maior parte a conseqüências dos domínios variáveis de interpretação, devem ser revistas quando aplicadas à explicação das noções lógicas de Tarski.

Os problemas interpretativos surgem, basicamente, devido ao fato de que em (36), o autor foi extremamente lacônico em sua definição de modelo, talvez devido ao fato de estar numa conferência, falando a um público mais ou menos idôneo. Antes de apresentarmos e discutirmos a argumentação de Bays, apresentarei a noção de modelo no artigo em questão. O método apresentado por Tarski é o seguinte[14]: tomamos uma classe de sentenças L qualquer. Em seguida, substituímos todas as constantes, "afora as constantes puramente lógicas", por variáveis, obtendo assim uma classe de funções sentenciais L′. Pois bem, toda

[13] (Bays, 2001)
[14] Ver (Tarski, 1983, pp.416-17)

seqüência arbitrária de objetos que satisfizer todas as funções sentenciais de L′ é um modelo da classe L de sentenças. A partir desta definição de modelo, Tarski tem as ferramentas necessárias para explicar todas as permutações dos objetos das seqüências, o que é fundamental para o funcionamento da definição do conceito de conseqüência em termos de não contra-modelos. Atentemos para a expressão seguinte: "uma seqüência arbitrária de objetos que satisfaz todas as funções sentenciais da classe L′". Aqui, se seqüência arbitrária de objetos significar uma simples seqüência de objetos que correspondem aos lugares de argumento das funções sentenciais de L′, então temos um domínio fixo de interpretação. Se, em adição a isto, tivermos um 'objeto' no qual as funções sentenciais devem ser avaliadas, então temos modelos de domínios variáveis, em que um modelo é definido como um par ordenado arbitrário +D, I,, no qual D e I são, respectivamente, um domínio de objetos e uma função interpretativa. A seguir, apresento as razões para a sustentação da primeira destas hipóteses, bem como os contra argumentos e as réplicas de Bays a estes contra argumentos.

Em seu artigo, Bays apresenta três argumentos em favor dos modelos de domínio fixo. O primeiro deles é que em nenhum momento Tarski menciona estar adotando uma concepção de modelos com domínios variáveis de interpretação e, embora ele também não diga o contrário, esta omissão, dada a estrutura geral do artigo, fala em favor de modelos de um único domínio. Por exemplo, para introduzir domínios variáveis, Tarski precisaria de um bocado de aparato técnico para explicar a interação entre os objetos da interpretação. Explicar, por exemplo, que os objetos correspondentes às variáveis individuais são elementos de um certo domínio, que os objetos correspondentes às variáveis predicativas correspondem a certos conjuntos incluídos no domínio, que este domínio pode variar, etc.

Um argumento contra esta interpretação afirmaria que, em realidade, a adoção de um domínio fixo de interpretação é que exigiria um esclarecimento por parte de Tarski, pois no tempo de (36), a construção de modelos de sistemas axiomáticos a partir de domínios variáveis era a forma standard de apresentação. Acrescente-se a isto a afirmação do próprio Tarski de estar adotando um domínio standard de interpretação: "exatamente neste sentido fala-se de modelos de um sistema axiomático de uma teoria dedutiva" [15]. Tendo em vista esta situação,

[15] (Tarski, 1983, p.417)

então de duas uma: ou o autor está falando aqui de domínios variáveis, ou então se enganou a respeito do estado do trabalho lógico-matemático de seu tempo. Esta última hipótese é totalmente implausível. Portanto, Tarski está falando de domínios variáveis de interpretação.

Às considerações acima Bays responde que "Desafortunadamente, contudo, este argumento (…) supersimplifica o estado da prática matemática no período em que Tarski escrevia [seus artigos] (…)" [16]. Isto se deve ao fato de que: "Naquele tempo, vários lógicos [p. ex. Carnap, Russell] trabalhavam freqüentemente em alguma forma da teoria dos tipos, na qual o domínio dos indivíduos era tomado como fixo" [17]. Portanto, não se pode dizer categoricamente que a construção dos modelos a partir de um domínio fixo de interpretação era não standard naquela época. Este argumento, por si só, não é muito convincente. Pois aqui podemos perguntar: o que Bays quer dizer ao afirmar que a "concepção de um domínio fixo era relativamente standard naquele tempo"? Se as duas formas de se compreender a noção de modelo na época eram usuais, então a omissão de Tarski não nos permite concluir nada, uma vez que não foi dito qual concepção de modelos estava sendo usada. Este argumento tem como efeito, entretanto, neutralizar a posição contrária, mostrando que neste caso a interpretação favorável a modelos de um domínio fixo (MDF) é no mínimo tão sustentável quanto à de modelos de um domínio variável (MDV).

A segunda razão para a defesa de MDF em (36) se deve a que esta interpretação se encaixa com a argumentação de Tarski, o que não seria o caso para MDV. Bays observa que quando Tarski introduz a noção de modelos no artigo em questão, ele está tentando resolver um problema específico: o problema das linguagens artificialmente empobrecidas. De acordo com este ponto de vista, a condição (F) que apresentamos acima seria um equivalente matemático da definição em termos de modelos, desde que contivesse designações para todos os objetos possíveis. MDV, por outro lado, sempre diverge da condição (F). Para mostrar isto, Bays apresenta a inferência seguinte: 1. Algo existe. 2. Portanto, duas coisas existem. [18] Esta inferência é válida tanto para a teoria de modelos com um domínio fixo, quanto para a condição (F). Na teoria de modelos usual esta

[16] (Bays, 2001, p.1711)
[17] (Bays, 2001, p.1712)
[18] (Bays, 2001, p.1707)

inferência não é válida, como o mostra qualquer domínio composto por apenas um indivíduo. O problema desta linha de raciocínio é que nós não podemos provar irrefutavelmente, mesmo com base no texto, o que Tarski quis dizer: "A condição (F) poderia ser considerada como suficiente somente se ('only if') as designações de todos os objetos possíveis ocorressem na linguagem em questão". [19]

Para que pudéssemos dar uma palavra final aqui, seria necessário interpretar o 'only if'($\rightarrow$) da passagem acima, como 'if and only if' ($\leftrightarrow$), caso em que Tarski estaria dizendo textualmente que a versão de uma linguagem suficientemente rica para (F) seria um equivalente matemático da definição em termos de modelos.

As duas razões apontadas em defesa de MDF não são, de fato, conclusivas. Isto se deve ao caráter impreciso, talvez evasivo, das declarações que Tarski faz em (36). Não obstante, fica claro que os argumentos contra esta interpretação não têm de modo algum o caráter "devastador" que alguns autores defenderam em suas críticas a Etchemendy. Ao contrário, estes argumentos são bastante questionáveis, tendo em vista as bases sobre as quais foram construídos. Assim, a tese interpretativa de que todos os modelos partilham a totalidade de um mesmo 'mundo' é, no mínimo, tão sustentável quanto à tese contrária. Até ao final deste trabalho, espero deixar claro que, em realidade, a primeira destas leituras é bem mais plausível. Feitas estas considerações, vamos ao terceiro e último argumento.

A técnica apresentada em (36) para a superação das limitações da conseqüência substitucional está assentada sobre um pressuposto básico: a divisão dos termos da linguagem entre lógicos e extralógicos. Somente a partir deste expediente, podemos relacionar um conjunto de sentenças L ao seu correlato sintático L', composto por funções sentenciais cuja estrutura é constituída por variáveis individuais e/ou variáveis predicativas, e por constantes lógicas [20], e daí empregar as seqüências de objetos como todos os modelos possíveis. As constantes lógicas poderiam nos ser dadas simplesmente por enumeração. Este

[19] (Tarski, 1983, p.416)

[20] É interessante notar que em sua formulação Tarski não faz nenhuma restrição quanto à ordem das constantes extralógicas. Posteriormente, veremos que isto se deve ao fato de que o autor está definindo o conceito de conseqüência lógica para linguagens cuja lógica subjacente é de 2ª ordem, ou mesmo de ordens superiores.

expediente, contudo, é insatisfatório. Lembramo-nos aqui da máxima exarada por Tarski em (33): "(...) não fazer uso de qualquer conceito semântico se não estou apto a reduzi-lo previamente a outros conceitos" [21]. Considerar as constantes lógicas da linguagem como primitivos equivale a deter artificialmente nossa análise. O intento de Tarski, entretanto, é mostrar de uma forma geral como a relação de conseqüência formal é, num certo sentido, independente da linguagem. Assim como o conceito de conseqüência lógica não deve ser limitado pelo estoque de constantes extralógicas de uma linguagem arbitrária, o mesmo se aplica ao número de constantes lógicas de um sistema de lógica qualquer. Limitando o número das constantes lógicas a um sistema de lógica, limitaremos de maneira injustificável os raciocínios possíveis nas teorias formalizadas. É necessário então termos uma caracterização dos 'objetos' lógicos que ultrapassem estas limitações lingüísticas. É neste sentido que devemos entender a afirmação de que "parece ser possível incluir entre os termos lógicos, alguns dos quais são usualmente considerados pelos lógicos como extralógicos, sem incorrer em conseqüências que estejam em contraste com o uso ordinário". [22]

Esta superação das limitações de um sistema arbitrário de lógica requer um critério preciso para distinguir quais termos manter fixos, e quais devem variar. Ela requer, por assim dizer, um fundamento, sob pena de considerarmos como relações de conseqüência algumas relações que contradizem o uso ordinário, e a atitude filosófica básica de Tarski, como sabemos, é buscar "aderir aos conceitos da linguagem cotidiana" [23]. Um exemplo desta situação indesejável é o de considerarmos todos os termos da linguagem como lógicos. Neste caso, "O conceito de conseqüência formal iria então coincidir com aquele de conseqüência material. A sentença X (...) se seguiria da classe K de sentenças se X fosse verdadeira, ou ao menos uma sentença da classe K fosse falsa." [24]

Este é o ponto em que um defensor de domínios variáveis encontra mais dificuldades, a não ser que esteja pronto a admitir sem mais que Tarski não conhecia ou confundiu as conseqüências de seu próprio sistema teórico. Em (Sher, 1991), encontramos uma interpretação deste jaez. Como contra exemplo à afirmação da citação anterior, a autora apresenta o seguinte argumento:

---

[21] (Tarski, 1983, p.416)
[22] (Tarski, 1983, p.419)
[23] (Tarski, 1983, p.409)
[24] (Tarski, 1983, p.419)

> Suponhamos que ‹ seja uma lógica na qual ‘todos os termos sejam considerados como lógicos.’ Então, evidentemente as constantes lógicas standard também serão consideradas como lógicas em ‹. Consideremos a ‹-sentença:
>
> (2) Existe exatamente uma coisa,
> ou, formalmente,
> (3) $(\exists x)\ (\forall y)\ x = y$
>
> esta sentença é falsa no mundo real, portanto,
>
> (4) Existem exatamente duas coisas
>
> segue-se materialmente dela (em ‹). Mas a semântica de Tarski determina que para cada cardinalidade α, extiste um modelo para ‹ com um universo de cardinalidade α. (...). Assim, em particular, ‹ tem um modelo com exatamente um indivíduo. Não é, portanto, verdadeiro que em todo modelo no qual (2) é verdadeira, (4) também é verdadeira. Por conseguinte, de acordo com a definição de Tarski, (4) não é uma conseqüência lógica de (2). Assim, Tarski concedeu muito: nenhuma adição de novos termos lógicos iria trivializar sua definição. *Tarski subestimou a viabilidade de seu sistema*. [25]

Dentro da concepção de MDF, esta argumentação é incorreta. Pois para os modelos de um único domínio, a sentença “existe exatamente uma coisa” é falsa. Portanto, “existem exatamente duas coisas” ou, “existem cinqüenta e três coisas”, são conseqüências lógicas da primeira. Este fato nos mostra que a concepção tarskiana de conseqüência implica que as sentenças acerca da cardinalidade do universo são logicamente verdadeiras, ou logicamente falsas. Como é lugar comum nos dias de hoje afirmar que de uma maneira geral a lógica deve ser independente de fatos acerca do mundo, e em particular da quantidade de seus objetos, é necessário discutir a questão com mais detalhes. É o que farei na terceira seção deste capítulo. Representemo-nos agora um caso em que uma sentença não é composta apenas por constantes lógicas e variáveis, como no exemplo de Sher, mas contenha também aquelas expressões consideradas habitualmente como constantes extralógicas, adotando novamente MDF. Podemos chamar esta sentença de X. Substituindo todas as constantes não lógicas de X, obtemos a função sentencial X′. Se todos os elementos da linguagem são constantes lógicas, então X é idêntica a X′. Obtemos assim as seguintes equivalências:

[25] (Sher, 1991, pp. 45-6) Grifo meu.

(1)X é verdadeira $\leftrightarrow$ X é logicamente verdadeira;

(2) X é falsa $\leftrightarrow$ X é logicamente falsa.

Similarmente, para o caso da relação de conseqüência:

(3) X é conseqüência lógica de K $\leftrightarrow$ X é verdadeira ou alguma das sentenças de K é falsa (ou seja, X é conseqüência material de K).

Num domínio único, a sentença (3) é verdadeira, como o são (1) e (2). Evidentemente, nenhuma destas sentenças é verdadeira em MDV. Este é o argumento mais persuasivo em favor da concepção de MDF em (36). Nenhum argumento do ponto de vista contrário possui a mesma plausibilidade. Mais do que isto, somente esta interpretação pode nos ajudar a compreender o problema que Tarski estava procurando resolver quando discutiu a questão da adequação material dos termos lógicos. É deste problema que passo a tratar nos parágrafos seguintes.

No início de sua discussão em (36), Tarski diz que a inclusão do conceito de conseqüência lógica no campo de investigação não foi "uma questão de decisão arbitrária por parte deste ou daquele investigador" [26]. Pelo contrário, o que se tentou ao longo dos anos foi oferecer uma caracterização precisa do conceito ordinário, intuitivo. Como nos aponta Etchemendy [27], é por essa razão que a tarefa de uma definição do conceito de conseqüência se torna, em grande parte, uma análise conceitual. Tarski não espera, contudo, dar uma definição que seja a palavra final uma vez que, já no início do artigo em questão, ele nos adverte para o fato de que "Nós devemos nos reconciliar desde o princípio com o fato de que toda definição precisa deste conceito irá apresentar aspectos arbitrários em maior ou menor grau" [28]. Sua tentativa passa a ser então fazer uma análise do conceito de conseqüência que supere as falhas das outras caracterizações e, ao mesmo tempo, dê um tratamento matemático exato das intuições presentes em vários dos usos ordinários deste conceito. Como indiquei há alguns parágrafos

[26] (Tarski, 1983, p.409)
[27] (Etchemendy, 1990, p.2)
[28] (Tarski, 1983, p.409)

atrás, uma intuição fundamental subjacente à análise tarskiana é a de que a relação formal de conseqüência deve superar a caracterização meramente lingüística, seja com respeito às constantes extralógicas (o caso da condição (F)), ou às constantes lógicas de um determinado sistema dedutivo. Daí que a discussão acerca das relações entre conseqüência formal e conseqüência material não seja um mero jogo arbitrário de escolha de constantes lógicas. Esta discussão encerra, sobretudo, uma tentativa de dar uma definição de conseqüência cuja amplitude permita aproximarmo-nos do ideal de "reproduzir todos os raciocínios exatos que alguma vez tenham sido realizados nas matemáticas", fornecendo o maior grau de generalidade possível ao conceito central da metodologia das ciências dedutivas.

Por estas razões, o problema da demarcação surge em conexão com um problema mais profundo: qual o sistema conceitual apropriado para uma definição materialmente adequada do conceito de conseqüência lógica? [29] Como vimos, a caracterização do conceito de conseqüência em termos de derivabilidade não é suficiente. Como veremos, a demarcação entre termos lógicos e extralógicos acessível a uma teoria de modelos standard (basicamente, as constantes lógicas da lógica de predicados de 1ª ordem com identidade) não é materialmente adequada. Em particular, uma teoria de modelos de 1ª ordem não é capaz de atestar a validade lógica das ω-inferências. Considerando os números como indivíduos de um universo de discurso, é fácil mostrar que várias destas ω-inferências não passam no teste de logicalidade, mesmo que nós estejamos trabalhando em MDF. Dadas estas e outras razões que serão apontadas no que se segue, podemos dizer que a definição de conseqüência que encontramos em (36) não é simplesmente uma definição modelo-teorética de 1ª ordem, ampliada pela possibilidade de escolhas arbitrárias das constantes lógicas.

Todas estas considerações exigem que a metateoria seja formulada num sistema apropriado. Em particular, os recursos conjunto-teoréticos devem ultrapassar os recursos expressivos de uma teoria de 1ª ordem. Este fato envolve uma série de problemas bastante complicados, que exigiriam um estudo detido e aprofundado de grande parte da obra de Tarski. Não tendo condições de fazer uma análise deste calibre aqui, me limitarei a apontar alguns aspectos de seu

[29] Poderíamos também formular esta pergunta da seguinte maneira: 'qual sistema conceitual pode nos permitir dar uma definição materialmente adequada das noções lógicas, e que irá resultar igualmente numa definição materialmente adequada do conceito de conseqüência lógica?'. Retomarei essa questão posteriormente.

pensamento, com base em outros autores, que nos permitam delinear as principais nuances desta problemática.

A primeira questão está relacionada a uma pretensa mudança de opinião nas concepções de Tarski entre 1936 e 1953 em “Undecidable theories”(53) [30]. Em (Etchemendy, 1988), o autor defende que em (53), Tarski usa a definição de modelos standard por estar consciente da falha de sua análise em (36). Esta falha, na visão de Etchemendy, estaria conectada ao fato de que a definição tarskiana do conceito de conseqüência só supera a definição standard em teoria de modelos pela possibilidade de escolhas arbitrárias das constantes lógicas, o que implicaria uma trivialização da análise de Tarski. Mas se, segundo Etchemendy, o próprio Tarski reconhecia as limitações da definição standard, então sua insatisfação com a própria definição não explica o fato de ele adotar a concepção standard no livro citado. Nas palavras de Etchemendy:

> Mas este fato, por si mesmo, não explica por que ele veio a endossar subseqüentemente a explicação standard, a despeito das considerações salientadas em seu artigo inicial. Desafortunadamente, existe muito pouco que dizer aqui, uma vez que Tarski nunca mais se ocupou das questões filosóficas salientadas no artigo de 1936. De fato, em seu texto introdutório de lógica [31], embora ele discuta questões similares com algum detalhe, não existe nenhuma menção de uma análise semântica de verdade lógica ou conseqüência lógica. Pelo contrário, ele parece fornecer uma versão sintática da relação de conseqüência (...), o que talvez seja um sinal de sua insatisfação com as definições de 1936. Então, posteriormente, quando ele dá as definições modelo-teoréticas standard em [53^{m}], ele não diz nada sobre a divergência destas definições [com relação à sua] primeira explicação [32].

Em primeiro lugar, sobre as declarações de Etchemendy com respeito a (Tarski, 1953), devemos notar que quando Tarski apresenta a definição modelo-teorética standard, ele o faz com o fim de introduzir o pano de fundo para os resultados negativos demonstrados posteriormente neste livro. Quanto ao fato de não haver uma exposição semântica do conceito de conseqüência e verdade lógica em (Tarski, 1941), talvez pudesse ser respondido que, como este livro é introdutório, seria complicado dar definições semânticas destes conceitos, com toda a maquinaria necessária para tal.

---

[30] (Tarski, 1953. Ver especialmente pp.5-12)
[31] Etchemendy está se referindo neste ponto a (Tarski, 1941)
[32] (Etchemendy, 1988, p.73)

Em seu artigo “Tarski’s Conceptual Analysis of Semantical Notions”, Feferman faz uma análise das mudanças de concepção de Tarski quanto à caracterização dos conceitos semânticos, refletidas no uso de modos diferentes de construção das definições na metateoria. A declaração de Feferman é a seguinte:

> Hourya Sinaceur enfatizou esta diferença entre o ponto de vista de Tarski antes de 1940 e sua alteração para a nossa maneira de pensar, talvez por volta daquela [mesma] época. De fato, nas primeiras publicações pré-guerra, teorias matemáticas específicas são sempre consideradas por Tarski em uma estrutura axiomática, freqüentemente expandidas na teoria simples dos tipos, e ele evitava falar de estruturas como se elas fossem entidades independentemente existentes [33].

Dentre as publicações pré-guerra acima mencionadas, estão alguns dos artigos reunidos em (Tarski, 1983). Nestes artigos, as noções matemáticas são formuladas em termos axiomáticos como teorias dedutivas, baseadas em sua própria estrutura lógica, ou em uma estrutura mais ampla, como a teoria dos tipos simples. Nesse tipo de procedimento, os termos fundamentais de uma teoria matemática são tomados como primitivos na formalização (por exemplo, os conceitos de número, pertinência, etc). É interessante notarmos, todavia, a existência de trabalhos tarskianos do mesmo período histórico, nos quais encontramos a construção de teorias matemáticas, em particular a aritmética dos naturais, em bases puramente lógicas. Tal é o caso de (33a). Na mesma linha pode ser colocado um artigo escrito em colaboração com Adolf Lindenbaum, entre os anos de 34-35 [34]. Neste artigo, é-nos dito que os resultados metamatemáticos ali contidos se aplicam a um sistema de lógica (e a todas as teorias nele baseadas, ou que podem ser seus modelos), que é uma teoria simples de tipos, com os axiomas da compreensão e da extensionalidade para todas as ordens finitas, e um axioma da infinidade em 1ª ordem. Os autores declaram que os resultados por eles apresentados, em particular o Teorema 1 [35], estão ali restritos a sistemas para os quais se pressupõe um domínio fixo de interpretação, embora seja possível aplica-los a modelos de domínios variáveis [36]. Em contrapartida, em outros escritos, nos quais resultados metamatemáticos são aplicados a modelos de domínios variáveis,

---

[33] (Feferman, 2002, p.7)
[34] Ver (Tarski, 1983, pp. 384-92).
[35] O Teorema 1 é formulado em (Tarski, 1983, p.385). Ver também a página 55 do presente trabalho.
[36] (Tarski, 1983, p.392).

vemos Tarski declarando que eles também se aplicam a MDF [37]. Assim, podemos dizer que um interesse no estudo de uma teoria de modelos de ordem superior perpassa vários dos artigos de Tarski na década de 30 [38]. Podemos observar, além disso, que mesmo fora do domínio das publicações pré-guerra, Tarski mantém seu apreço pela idéia de uma construção de teorias matemáticas sobre bases puramente lógicas. Assim é que em seu livro de introdução à lógica, já na década de 40, encontramos a seguinte declaração: “(...) o fato (...) de haver sido possível desenvolver toda a aritmética, incluindo as disciplinas erigidas sobre ela – álgebra, análise, etc. – como parte da lógica pura, constitui uma das maiores realizações das investigações lógicas recentes” [39].

No contexto da obra da qual foi extraída a passagem acima, o autor faz esta declaração após explicar como os números podem ser construídos como classes de classes. Pois bem, a idéia do desenvolvimento da matemática numa base lógica de ordem superior também é encontrada em (86). Ora, (86) foi apresentado pela primeira vez numa conferência no Bedford College, em 1966. Como foi apontado por Corcoran na Introdução Editorial deste artigo [40], ele deve ser entendido como uma continuação de (36). Isto nos leva a pensar que esta “conversão” de Tarski ao modo standard de construção de modelos por volta da década de 40 do século passado seja um tanto duvidosa. Ao que parece, podemos extrair dos artigos citados na página anterior, sejam eles do princípio do século passado, ou de uma época mais tardia, uma idéia comum. Tomando por base esta afirmação, lançarei aqui uma hipótese que, ao final da presente seção, irá permitir-nos explicar as origens do problema da demarcação. A hipótese é a seguinte: (36), em conjunto com (33), (33a), (35) e (86), compõe uma gama de trabalhos nos quais Tarski tenta realizar a idéia de definir os conceitos semânticos fundamentais para toda a lógica. De fato, para a teoria geral de conjuntos [41]. Uma vez apresentada a hipótese, vamos aos problemas que ela acarreta.

---

[37] Ver (Tarski, 1983, (notas das páginas 310-14)), conforme citado em (Bays, 2001, p.1712).

[38] Sobre o interesse de Tarski numa teoria de modelos de ordem superior ver (Vaught, 1986, p.874).

[39] (Tarski, 1977, p.110). Feferman observa que mesmo na quarta edição em língua inglesa, esta afirmação foi mantida.

[40] (Tarski, 1986, pp.143-44).

[41] Em **2.2** demonstraremos, por meio da solução ao problema das ω-inferências, que (36) realmente pertence à gama de artigos mencionados. Quanto à identificação da lógica em sua totalidade com a teoria geral de classes ou conjuntos, isto se tornará mais claro em **2.3**.

Devemos nos confrontar com duas ordens de problemas. Da primeira ordem, intimamente relacionada com a segunda, como veremos mais adiante, podemos dizer que é conectada a questões históricas e interpretativas do pensamento de Tarski. Como todos sabem, é um lugar comum a afirmação de que Tarski foi um filósofo nominalista e anti-platonista. Tal afirmação, entretanto, constitui uma simplificação bastante enganadora. Como ficou claro há alguns parágrafos atrás, podemos encontrar na obra de Tarski uma espécie de dicotomia entre um tratamento metamatemático das teorias matemáticas em termos axiomáticos, e um outro procedimento, no qual, ao construirmos conceitos metateóricos, fazemos uso das noções conjunto-teoréticas habituais. Nesta situação está baseada a seguinte declaração de Feferman: há no sistema de Tarski uma tensão. Por um lado, encontramos ao longo de seu trabalho uma formulação de teorias matemáticas em uma estrutura axiomática. Esta tendência estaria associada, ainda segundo Feferman, às posições (mais tardias) de Tarski, e ao seu nominalismo e antiplatonismo professo. Por outro lado, encontramos em sua obra um largo uso prático da teoria de conjuntos, assim como sua aceitação dos axiomas de Zermelo como uma estrutura para seu próprio trabalho conjunto-teorético [42].

Às considerações do parágrafo anterior podemos adicionar o fato de que Tarski sempre considerou a teoria axiomática de conjuntos de Zermelo *et alia*, e a teoria dos tipos (simples) de *Principia Mathematica*, como métodos alternativos para a formulação da teoria geral de conjuntos. Em suas próprias palavras:

> Vocês todos sabem que como resultado das antinomias, basicamente a antinomia de Russell, que apareceu na teoria de conjuntos na virada do século, foi necessário submeter os fundamentos da teoria de conjuntos a uma investigação completa. Um resultado desta investigação, o qual de nenhuma forma está completo no momento, é que dois métodos foram desenvolvidos para construir o que pode ser salvo da teoria de conjuntos depois do golpe devastador que ela sofreu. Um método é essencialmente o método de *Principia Mathematica*, o método de Whitehead e Russell – o método de tipos. O segundo método é o método de pessoas tais como Zermelo, von Neumann e Bernays, o método de primeira ordem [43].

[42] Feferman também observa, em uma nota, que este aspecto do trabalho de Tarski está igualmente em contradição com a abordagem metamatemática finitista do programa de Hilbert.
[43] (Tarski, 1986, p.152)

A partir do que foi exposto anteriormente, juntamente com as declarações de Feferman e a citação exposta acima, podemos deduzir que estes “aspectos conflitantes do pensamento de Tarski” representam, em realidade, as relações entre duas idéias ou tendências. De um lado, temos aquilo que poderíamos chamar não muito exatamente de tendência axiomático-dedutivista. De outro, a idéia de fornecer definições semânticas para os conceitos fundamentais da lógica em sua totalidade [44]. Várias passagens obscuras de (36), como veremos posteriormente, podem ser explicadas à luz desta idéia. Estas considerações nos permitem igualmente oferecer uma resposta àquele “problema mais profundo”, relacionado ao problema da demarcação, de que falamos anteriormente. A posição favorável de Tarski com relação a uma teoria de classes estratificada em tipos lógicos como a de *Principia Mathematica* (não necessariamente em sua formulação clássica, é claro), está conectada ao fato de que ele via esta teoria como um sistema conceitual que, acrescido de outros conceitos matemáticos, seria apropriado para informar uma definição do conceito de conseqüência lógica que coincidisse em extensão com o uso ordinário ou intuitivo deste conceito.

O que podemos concluir até aqui é que Tarski, tendo em vista o propósito que acabamos de expor, aceita uma formulação da teoria dos tipos em uma forma não ramificada, com os axiomas da infinidade, da compreensão e da extensionalidade. Com isto, todavia, ainda não fornecemos uma resposta ao problema da relação entre a aceitação de uma teoria formulada nestes moldes por um lado, que parece implicar uma espécie de realismo platônico, e a posição filosófica do nosso autor, de outro. Neste ponto, o que nos vem à mente é que talvez Tarski se assemelhe àquele “(...) homem que, em sua vida cotidiana, faz com náuseas muitas coisas que não estão de acordo com os altos princípios morais que professa aos domingos” [45]. Como poderemos constatar no que se segue, não é este o caso. Mas para esclarecermos esta questão, é necessário adentrarmos pela segunda ordem de problemas relativos à nossa hipótese, que irei chamar de objetivos, em contraposição aos históricos e interpretativos que mencionei acima.

[44] De fato,Tarski afirma, em passagens de alguns de seus escritos, não haver conflito entre as duas tendências aqui apontadas. Ver, por exemplo, (Tarski, 1983, p.413) e as linhas finais de *“Truth and Proof”*. Em **2.3** serão dados mais detalhes sobre essa questão.
[45] (Carnap, 1988, p.205)

As objeções de caráter objetivo podem ser representadas por duas críticas feitas por Feferman com relação à aceitação de uma teoria de tipos nos moldes expostos acima como sendo puramente lógica. São as seguintes: 1) o axioma da infinidade não é um princípio lógico; 2) a ontologia platonista [é] normalmente vista como sendo requerida a justificar a natureza impredicativa dos axiomas da compreensão, o que coloca seu status lógico em questão [46]. Uma resposta direta a estas duas críticas de Feferman envolveria uma discussão bastante complexa. Seria necessário responder se, de fato, a aceitação da lógica pura como uma teoria ontológica representa uma ameaça aos princípios desta ciência, o que extrapola os limites do presente trabalho. Continuemos então rastreando o itinerário do pensamento de Tarski, para entendermos por que ele adota a concepção em questão.

A primeira pista para uma resposta à questão pode ser encontrada em (Tarski, 1977). No prefácio deste livro, Tarski nos expõe em uma frase o seu ideal filosófico quanto à tarefa da lógica. Em suas próprias palavras, tal tarefa seria a de "(...) criar um aparato conceitual unificado capaz de fornecer uma base comum a todo o conhecimento humano" [47]. Esta declaração nos mostra que o nosso autor acalentava aquela idéia de lógica como a mais universal de todas as ciências [48], e como tal, o princípio unificador de todo o *corpus* científico. O esclarecimento pormenorizado do empreendimento decorrente desta motivação filosófica envolveria discussões metateóricas muito complicadas, de modo que não entrarei numa descrição pormenorizada das questões envolvidas, tentando apenas apresentar uma visão panorâmica sobre o assunto.

Em primeiro lugar, podemos dizer que, de acordo com a motivação filosófica apontada, Tarski empreende o projeto de fornecer, por meio de suas definições formais, elucidações matemáticas que possam unificar os conceitos centrais da lógica em seu sentido ordinário, intuitivo. Tomemos como exemplo o caso do conceito de conseqüência lógica. Sua elucidação formal tem como objetivo, entre outros, dar um caráter de univocidade aos raciocínios matemáticos e, por extensão, a todo raciocínio científico [49] [50]. Como todos sabem, a definição

[46] Ver (Feferman, 2002, p.8).
[47] (Tarski, 1977, p.11)
[48] Ver (Tarski, 1977, pp.139-40).
[49] Esta identificação de raciocínio matemático com raciocínio científico está ligada ao ideal, partilhado e promovido por Tarski em vários Congressos sobre a Unidade das Ciências, de unidade

de conceitos como conseqüência lógica, é metateórica. Uma vez que a metateoria se alimenta dos resultados técnicos obtidos nos diversos ramos da matemática, seus resultados dependem dos instrumentos lógicos ou matemáticos disponíveis, ou em outras palavras, do estado das pesquisas lógicas e matemáticas. Enquanto estes instrumentos apresentam um caráter problemático para a sua aceitação por parte da comunidade científica, as elucidações metateóricas mantêm o caráter de prospecções filosóficas [51].

Neste ponto começa a despontar a maneira como podemos compreender a concepção tarskiana da filosofia da lógica. O interesse maior de Tarski, tendo em vista seu objetivo, é no ganho teórico que pode advir de certos conceitos e teorias. Em sua concepção, com o advento de *Principia Mathematica*, a lógica contemporânea tinha chegado a um certo termo, necessitando, obviamente, de reelaborações, correções e acréscimos. Esta posição condiz com sua idéia de que a nova lógica é uma ciência em construção. Nesse contexto, entendemos por que a idéia de contrapor resultados positivos a resultados negativos assume um aspecto tão importante. É dentro deste espírito que, se referindo aos teoremas de Gödel, Tarski escreve:

> Sumariando, nós podemos dizer que o estabelecimento da semântica científica, e em particular a definição de verdade, permite-nos confrontar os resultados negativos no campo da metamatemática com resultados positivos correspondentes, e desta maneira preencher as lacunas que foram reveladas no método dedutivo e na própria estrutura da ciência dedutiva [52].

---

entre as ciências. Todo conhecimento científico, de acordo com este ponto de vista, deve poder ser reduzido a conceitos lógicos e/ou matemáticos, e a conceitos empíricos.

[50] Que Tarski pensava que a tarefa da lógica é promover a unificação das matemáticas, nos é atestado por uma carta escrita por ele e Henkin em nome do comitê do *"summer institute of The American Mathematical Society"*, pedindo apoio para o Cornell Institute in Symbolic Logic de 1957:

"(...) ... [muitos] matemáticos têm o sentimento de que a lógica se ocupa exclusivamente daqueles problemas fundacionais que originalmente deram ímpeto ao assunto; eles acham que a lógica é isolada do corpo principal da matemática, talvez mesmo classificando-a como tendo um caráter principalmente filosófico. Atualmente tais julgamentos são bastante equivocados. A lógica matemática evolveu largamente, e de muitas maneiras, com relação à sua forma original. Existe uma tendência crescente para [que esta ciência] faça contato com outros ramos da matemática, tanto em matéria quanto em método. *De fato, nós poderíamos ir além e nos aventurarmos a predizer que por meio da investigação lógica poderão emergir importantes princípios unificadores, os quais irão ajudar a dar coerência a uma matemática que muitas vezes parece estar em perigo de tornar-se infinitamente divisível* ". Citado em (Feferman, 2001, pp.9-10).

[51] Um exemplo de tal situação são os problemas relacionados à aceitação de um sistema de lógica que incorpora o axioma da infinidade como princípio, como é o caso da teoria dos tipos, molde *Principia*.

[52] (Tarski, 1983, p.408)

Tendo em vista estes fatos, nos parece que mais esclarecedora do que a interpretação de que existe uma tensão no sistema de Tarski, é a idéia de que provavelmente ele queria evitar um convencionalismo que levaria à concepção teórica de uma falta de unidade das matemáticas, mas que por outro lado não estava interessado em discussões filosóficas (metafísicas) tradicionais, que parecem sempre ter lhe parecido abstrusas. Isto nos esclarece igualmente como, entre os escritos de Tarski, a idéia da lógica como um bloco único e base para todo o conhecimento humano, aparece ao lado de seus resultados técnicos para a teoria de modelos com domínios variáveis, como a generalização do teorema de Löwenheim-Skolem.

Podemos agora concluir, ressaltando que somente sobre o background das idéias apontadas acima é possível avaliar de maneira satisfatória o problema da demarcação na obra de Tarski. O conceito fulcral para o entendimento de tal problema é o de adequação material. Comecemos por mais uma citação. Nas linhas finais de (36), o autor faz a seguinte declaração com respeito à adequação material de sua definição: “Eu não sou de nenhuma forma da opinião de que, em resultado da discussão acima, o problema de uma definição materialmente adequada do conceito de conseqüência tenha sido completamente resolvido” [53]. A compreensão do problema da adequação material do conceito de conseqüência depende de nos aprofundarmos em uma questão já mencionada anteriormente. Naquele ponto, afirmamos que a caracterização das constantes lógicas como termos primitivos de uma linguagem, dados por enumeração, é insatisfatória, pois teria como conseqüência uma restrição injustificável dos argumentos válidos nas teorias formalizadas. Cabe-nos agora esclarecer mais exatamente tal afirmação.

Como todos sabem, a adequação material da definição de um conceito, que é o objetivo teórico que estamos investigando, significa que o conceito assim definido é extensionalmente equivalente a uma noção previamente dada, no nosso caso, o uso ordinário ou intuitivo do conceito de conseqüência lógica. Os conceitos semânticos, definidos em termos de modelo, estão alicerçados no conceito de satisfação. Este último, por sua vez, está alicerçado no conceito fundamental da lógica, que é o conceito de forma lógica. Como já dissemos, se as formas lógicas forem restringidas às constantes lógicas da linguagem de uma

[53] (Tarski, 1983, p.418)

teoria específica, qualquer que seja, então nossa definição do conceito de conseqüência, dada na metateoria, ficará relativizada às constantes lógicas desta linguagem. Não é difícil perceber que numa tal situação, a idéia de uma definição unificada do conceito de conseqüência lógica, assim como de verdade lógica, colapsa, uma vez que seu caráter flutuante é determinado pela relatividade já mencionada. Com base nisto, podemos afirmar que o problema da demarcação surge da necessidade de se obter uma caracterização metateórica das formas ou objetos lógicos, que seja independente dos termos primitivos considerados como lógicos na linguagem de uma teoria específica.

2.2. O problema das ω-inferências

Os problemas mais embaraçosos da interpretação de (36) estão relacionados a um exemplo de ω-inferência dado por Tarski em seu artigo, declarando em seguida que esta inferência é logicamente válida. Uma ω-inferência sobre os números naturais é um argumento que possui como conclusão uma sentença universal sobre os números naturais, enquanto suas premissas formam o conjunto de todas as instâncias numéricas desta sentença universal. Como vimos em **2.1**, Tarski afirma que a existência de inferências como esta nos mostra que a caracterização do conceito de conseqüência lógica em termos de derivabilidade não pode capturar a essência deste conceito, uma vez que uma ω-inferência é constituída por um conjunto infinito de premissas, enquanto toda derivação nos sistemas dedutivos recursivos é inerentemente finita.

Os problemas surgem porque, segundo Tarski, uma inferência é logicamente válida se, e somente se, todas as outras inferências semelhantes, ou seja, que possuem a mesma forma desta inferência, são válidas. Entretanto, fica difícil em princípio compreender qual a razão pela qual Tarski considera válidas as ω-inferências, uma vez que o conceito modelo-teorético de conseqüência em 1^a ordem é equivalente à caracterização sintática ou derivacional standard, resultado original de Gödel. Para atestarmos que nem todas as ω-inferências preservam verdade nesta definição modelo-teorética, basta encontrarmos um contra modelo. Imaginemos uma linguagem L suficiente para fazer aritmética, sendo T uma axiomatização da aritmética em L. Consideremos uma expansão de L para L∪{P}, em que P é um novo predicado unário. Podemos encontrar então um modelo M, tal que M satisfaz as seguintes sentenças:

A_0. 0 possui a propriedade P,

A_1. 1 possui a propriedade P,
....

A_n. n possui a propriedade P.

Ao mesmo tempo, M também satisfaz a sentença:

Existe um número x que não possui a propriedade P [54].

Deve-se notar que a concepção de modelo fixo que encontramos em (36) não resolveria o problema, pois nós poderíamos, mesmo neste caso, encontrar um exemplo de violação das ω-inferências. Com base nisto, Etchemendy faz as seguintes indagações:

> Agora, o argumento de Tarski de que qualquer caracterização sintática do conceito de conseqüência irá ser extensionalmente inadequada pode nos surpreender como problemático sob vários aspectos. Talvez o mais óbvio seja que em nenhum caso a sentença citada por Tarski (isto é, A ou G) [55], é uma conseqüência modelo-teorética standard da teoria da qual ela pretensamente se segue. Realmente, ambos os exemplos de Tarski envolvem a relação de conseqüência para linguagens de primeira ordem, onde a relação definida modelo-teoreticamente coincide com a relação definida sintaticamente. Como pode uma explicação semântica ser julgada extensionalmente superior às caracterizações sintáticas usuais se as duas são, de fato, extensionalmente equivalentes? Pareceria que as queixas que Tarski tem a respeito da adequação extensional da caracterização sintática irá ricochetear no teorema de completude e atingir sua explicação com a mesma força [56].

De fato, isto não é verdade, como reconhece o próprio Etchemendy no parágrafo que se segue à citação acima. A explicação tarskiana da relação de conseqüência não está sujeita às limitações da concepção modelo-teorética standard, pois ela envolve a possibilidade de uma concepção ampliada dos termos lógicos, de tal modo que estes últimos não fiquem restritos aos conectivos lógicos habituais e aos quantificadores das teorias formalizadas em 1ª ordem. Incluindo entre os termos lógicos, em adição às constantes lógicas habituais, a expressão 'todo número natural', bem como a coleção de todos os numerais 0, 1, 2, etc, ou seja, toda a terminologia da teoria dos números, a relação de conseqüência intuitiva irá 'emergir' como uma conseqüência tarskiana, no caso da ω-inferência apresentada por Tarski em seu artigo. Deste modo, no caso das ω-inferências, como todos os termos envolvidos são lógicos, as relações de conseqüência formal e material serão coincidentes.

No entanto, de acordo com Etchemendy, este procedimento denuncia uma forte dose de arbitrariedade da análise tarskiana. Como podemos, em última

---

[54] (Bays, 2001, pp.1714-1715)

[55] Uma sentença A é a conclusão de uma ω-inferência, como a do exemplo de Tarski que citei acima. Uma sentença do tipo G é uma sentença canônica de Gödel.

[56] (Etchemendy, 1990, p.85)

instância, sem um critério de demarcação claro, estipular que uma certa parte do nosso vocabulário seja considerada como lógica? A arbitrariedade da análise se torna mais notável, segundo Etchemendy, no caso de considerarmos todos os termos do nosso vocabulário como lógicos. Neste caso, uma sentença verdadeira será conseqüência de quaisquer sentenças. Chegamos assim à chamada "falácia de Tarski": confundir os sintomas da relação de conseqüência com as suas causas. A confusão em questão se refletiria na maneira como Tarski concebe a noção de validade de uma inferência: uma inferência é logicamente válida, se todas as outras inferências de uma classe relacionada (isto é, inferências semelhantes ou de mesma 'forma lógica', neste sentido) preservam verdade. No caso de uma ω-inferência, como não há constantes extralógicas a ser substituídas, então todas as seqüências se reduzem a uma apenas: a seqüência das constantes lógicas representadas pelos numerais. Mas uma definição genuína de validade inverteria esta definição: todas as instâncias de um argumento preservam verdade porque ele é logicamente válido.

Com base na situação apontada, Etchemendy conclui que esta arbitrariedade na escolha das constantes lógicas mina a análise do conceito de conseqüência lógica que encontramos em (36). Devido ás limitações do conceito modelo-teorético de conseqüência, Tarski teria sido obrigado a fazer suposições externas ao sistema, na tentativa de capturar o conceito em questão. Na ausência de um critério que permitisse determinar de uma forma geral quais são os termos fixos ou lógicos, e no caso particular das ω-inferências, determinar que os numerais são constantes lógicas, estas suposições se tornam puramente arbitrárias, e a análise colapsa. Em defesa de Etchemendy neste ponto, poderia ser dito que o próprio Tarski foi o primeiro a reconhecer que a situação é de fato esta. Porém, a compreensão do que de fato está envolvido aqui, assim como das críticas de Etchemendy, depende de respondermos a algumas perguntas. Foi este o raciocínio de Tarski, quando ele afirmou não conhecer fundamentos objetivos para a distinção entre termos lógicos e extralógicos? Era esta sua compreensão sobre as relações entre conseqüência material e conseqüência formal? Se não era, o que de fato está envolvido aqui?

A resposta a estas questões depende de nós voltarmos para uma tese básica de Etchemendy: que a definição de Tarski "envolve a relação de conseqüência para linguagens de 1ª ordem". Mais especificamente, gostaríamos de analisar as conseqüências da hipótese de que a definição de (36) envolve a consideração de teorias cuja lógica de base é uma lógica de ordem superior. Aqui, mais uma vez, nossa tarefa se torna muito mais fácil ao avaliarmos a cuidadosa análise feita por Bays em seu artigo. O primeiro ponto a ser observado é o seguinte: quando Tarski formula seu exemplo de ω-inferência, ele nos remete ao artigo em que este exemplo foi formulado pela primeira vez [57]. Bays nos chama a atenção para o fato de que neste artigo, em nenhum momento são introduzidos símbolos primitivos para os números naturais, de forma que Tarski é obrigado a definir análogos dos números naturais usando somente os recursos expressivos de uma lógica de 2ª ordem (no caso, a lógica de *Principia Mathematica*). Estes análogos são as propriedades cardinais dos conjuntos finitos, e Tarski formula suas ω-inferências em termos de tais propriedades. Bays então propõe que o exemplo de ω-inferência de (36) deveria ser lido assim:

> A_0. O conjunto vazio possui a propriedade dada P,
> A_1. Conjuntos contendo apenas um elemento possuem a propriedade dada P,
>
> E em geral, toda sentença particular da forma
> A_n. Conjuntos contendo exatamente n elementos possuem a propriedade dada P.
>
> Por outro lado, a sentença universal:
> Todo conjunto finito possui a propriedade dada P,
>
> Não pode ser provada sobre a base da teoria em questão por meio das regras normais de inferência [58].

Esta leitura de (36) tem várias conseqüências. Em primeiro lugar, ela resolve o problema do conflito entre a definição em termos de modelos dada por Tarski, e seu exemplo de ω-inferência dado neste artigo. Uma vez que esta inferência é formulada usando somente os recursos expressivos da estrutura de *Principia Mathematica*, não há necessidade de nenhuma pressuposição externa ao sistema no que diz respeito às constantes lógicas. Todos os conjuntos finitos de n elementos possuem uma propriedade lógica comum, a saber, sua propriedade cardinal. Portanto, numa ω-inferência formulada nestes termos, não existem constantes extralógicas. Em qualquer modelo de uma inferência formulada nestes moldes, ela é logicamente válida. A este respeito, Bays observa:

---

[57] Trata-se aqui de (33a).
[58] (Bays, 2001, p.1719)

> Pela minha solução, as únicas constantes lógicas são aquelas da formulação standard da teoria dos tipos. E, embora esteja correntemente na moda questionar a teoria dos tipos como lógica, na época em que Tarski escreveu *'On the Concept of Logical Consequence'*, muitos lógicos não tinham tais escrúpulos. Portanto, dados os padrões do seu tempo, não existe nada *ad hoc* com relação à decisão de Tarski em tratar os termos tipo-teoréticos como lógicos; esta era simplesmente a decisão padrão para ele tomar [59].

Da mesma forma, esta leitura reforça a idéia de uma concepção de MDF em (36), pois ela implica que Tarski "(...) necessita de algo como o axioma da infinidade para assegurar que seus modelos contenham elementos o bastante para formular as ω-inferências nas quais ele está interessado" [60], ou seja, para construir todos os conjuntos finitos necessários para a formulação das ω-inferências. De fato, em (33a), Tarski considera explicitamente o axioma da infinidade como um princípio lógico [61].Uma terceira conseqüência desta leitura apontada por Bays, é que ela explica porque Tarski considera que as limitações das regras normais de inferência são uma motivação para a definição modelo-teorética do conceito de conseqüência. Isto se deve ao fato de que uma das conseqüências de (Gödel, 1931), é que as regras de inferência dos sistemas dedutivos recursivos não conseguem capturar as inferências modelo-teoreticamente válidas de 2ª ordem. Isto explica também porque Tarski considera as ω-inferências como "intuitivamente lógicas".

As interpretações de Bays e Etchemendy são semelhantes em vários pontos. Ambas consideram, por exemplo, que a definição de modelos de (36) envolve a concepção de um domínio fixo de interpretação. Igualmente, ambas concordam em que, no caso de uma inferência conter apenas constantes lógicas, conseqüência material e conseqüência lógica são coincidentes. Não obstante estas semelhanças, há diferenças fundamentais. Abordarei apenas uma destas diferenças aqui, devido à sua importância para as partes posteriores do presente trabalho. Trata-se da aceitação de constantes lógicas outras que as constantes habituais. Como expus algumas linhas atrás, Etchemendy defendeu que devido à sua tentativa de superar os defeitos da concepção modelo-teorética standard, Tarski foi forçado a lançar mão do expediente de incluir como fixos ou lógicos,

[59] (Bays, 2001, p.1721)
[60] (Bays, 2001, p.1720)
[61] (Tarski, 1983, p.289)

segundo as exigências do momento, aqueles termos necessários para capturar a relação intuitiva de conseqüência em questão. Como este expediente beira o arbitrário, temos todas as conseqüências negativas daí resultantes.

Como Bays nos mostrou, as questões relacionadas à demarcação dos termos lógicos são mais complicadas do que a primeira vista possa parecer. No caso das ω-inferências, Tarski adotou os termos comumente reconhecidos como lógicos na estrutura (framework) do sistema lógico dos *Principia*, o que no seu tempo era uma convenção relativamente standard. Sua insatisfação com esta atitude teórica pode ser explicada a partir das idéias já expostas na seção anterior acerca das origens do problema da demarcação. Na ausência de uma solução positiva para o problema, estaríamos diante de um fracasso (ainda que parcial) com relação à possibilidade de fundamentação dos raciocínios lógicos ou formais. Podemos constatar este fato por uma declaração que se encontra nas linhas finais de (36). Depois de fazer algumas declarações otimistas acerca da possibilidade de uma resolução, Tarski escreve:

> Mas eu também considero bastante possível que as investigações não irão levar a nenhum resultado positivo nesta direção, de maneira que nós iremos ser compelidos a considerar conceitos tais como ‘conseqüência lógica’, ‘enunciado analítico’ e ‘tautologia’ como conceitos *relativos* que deverão, em cada ocasião, ser relacionados a uma divisão definida, embora em maior ou menor grau arbitrária, dos termos em lógicos e extralógicos. A flutuação no conceito comum de conseqüência iria – em parte ao menos – ser bastante naturalmente refletida em tal situação compulsória [62].

A partir da citação acima, podemos extrair a idéia de uma oposição entre duas situações. Caso seja obtido um critério de demarcação, teremos conseguido um resultado positivo na tentativa de uma fundamentação filosófica da lógica. Caso este critério não seja encontrado, seremos obrigados a nos contentar com uma caracterização até certo ponto convencionada, relativa e arbitrária [63] dos conceitos lógicos fundamentais, dependentes da divisão tradicional entre formal e material, lógico e extralógico.

Considerando a oposição apontada, e desde que não queiramos abandonar a perspectiva de fundamentar a lógica, duas alternativas se apresentam. A

[62] (Tarski, 1983, p. 420)
[63] É bastante claro que a palavra ‘arbitrário’ não tem aqui o sentido que lhe empresta Etchemendy em sua interpretação da definição de Tarski.

primeira delas seria a de determinar as propriedades das constantes lógicas por meio da identificação das sentenças modal ou epistemicamente privilegiadas. A esta perspectiva estão ligadas as controvérsias filosóficas sobre certos conceitos como aprioridade, necessidade, etc.. Várias posições são possíveis neste contexto. Poderíamos, por exemplo, sustentar que certas sentenças, como as logicamente verdadeiras, e uma relação entre sentenças como conseqüência lógica, expressam um aspecto necessário, fundado em algo como a estrutura de um "sujeito transcendental", ou na natureza das coisas. Em ambos os casos seria preciso esclarecer o conceito de necessidade, ao qual todos os argumentos válidos, incluindo os raciocínios matemáticos, estariam subordinados.

Um outro ponto de vista que também poderia ser assumido com relação à questão, poderia ser identificado como uma tentativa de esclarecer o conceito de necessidade em termos lingüísticos. Considerar, por exemplo, como inicialmente o fez Carnap, os enunciados lógicos como enunciados que não dizem nada acerca da realidade. Em sua autobiografia intelectual, Carnap ressalta claramente a oposição entre sua maneira de pensar e dos integrantes do círculo de Viena, por um lado, e a concepção de Tarski:

> Existia um problema, entretanto, a respeito do qual eu discordava de Tarski. Em contraste com o nosso ponto de vista, de que existe uma diferença fundamental entre enunciados lógicos e factuais, uma vez que enunciados lógicos não dizem nada acerca do mundo, Tarski mantinha que a distinção era somente uma questão de grau. Esta diferença existe ainda hoje [64].

Com relação à passagem citada, e tendo em vista a discussão que irá se seguir, é importante mantermos em mente que a posição de Carnap, em acordo com o círculo de Viena, levava a uma distinção fundamental entre enunciados factuais e lógicos, uma vez que estes últimos, assim como os enunciados matemáticos, "não dizem nada acerca da realidade" [65]. E agora vamos considerar a segunda das alternativas para a fundamentação da lógica. De acordo com este ponto de vista, que chamarei semântico (no sentido tarskiano), deve ser possível determinar a que correspondem as constantes lógicas. Isto implica, de acordo com os princípios teóricos da semântica científica, como frisei em **2.1**, encontrar um

[64] (Carnap, 1968, p.30)
[65] Sobre o caráter comum aos enunciados lógicos e matemáticos, de acordo com a concepção do círculo de Viena, ver (Carnap, 1968, p.47).

conceito puramente matemático que nos permita identificar as formas ou objetos lógicos [66]. Conseqüentemente, a natureza ou estrutura última da realidade é reduzida a certos parâmetros matemáticos inalteráveis ou fixos, e tais parâmetros não são analisados em termos de categorias modais da filosofia tradicional, ou de posições posteriores, como no caso de Carnap. Devemos perceber que quando insiste na validade das ω-inferências, reconhecendo depois a ausência de um critério de distinção entre o lógico e o extralógico, Tarski de forma alguma está falando de uma elucidação das constantes lógicas em termos modais. Devemos acreditar ainda menos que a validade das ω-inferências, no seu entender, está fundada em algo como a idéia de uma "implicação em virtude do significado" dos termos da teoria geral dos números, que são os termos lógicos das inferências em questão [67], [68], [69]. Essa distinção é fundamental para as discussões que irão se seguir.

[66] Sobre esta designação, ver (Tarski and Givant, 1986, cap.3).
[67] A este respeito ver (Torrente, 1996, pp.146-7).
[68] Nos capítulos seguintes, espero tornar mais clara a concepção de Tarski quanto à questão dos "parâmetros matemáticos da realidade".
[69] Poder-se-ia argumentar que, se a realidade tem uma estrutura matemática infinita, então este é um aspecto necessário da realidade. Mas procedendo desta maneira, estaríamos reinstaurando uma discussão que Tarski quer evitar.

2.3. Axioma da infinidade e metafísica na semântica de Tarski

As discussões movidas nas duas seções anteriores nos permitiram identificar alguns traços do ideal tarskiano de uma metateoria geral, capaz de conferir um significado preciso e unificado de cada um dos conceitos lógicos mais importantes. Na presente seção, pretendo mostrar de que modo este ideal se encontra na raiz da atitude de Tarski frente ao axioma da infinidade. Da mesma forma, espero que a compreensão aqui alcançada nos permita preparar o terreno para as discussões do segundo capítulo. Em um artigo escrito há alguns anos [70], Gómez-Torrente apresentou uma interessante descrição histórica acerca das relações entre as definições semânticas de Tarski e o axioma da infinidade. Farei da descrição de Torrente a principal fonte de dados para a minha discussão, apresentando, todavia, os pontos em que sua argumentação me parece falha.

Segundo Gómez-Torrente, a definição dada em (36) seria uma definição geral. Por generalidade aqui devemos entender, basicamente, que o conceito tarskiano de conseqüência lógica se aplica a dois tipos de teorias. As primeiras seriam certos tipos de teorias lógicas axiomáticas de ordem finita, cujo conjunto de teoremas é composto por sentenças *corretas relativamente a um domínio* (em (33), estas teorias são identificadas sob a denominação 'partes da lógica'). Por outro lado, a definição em questão também se aplicaria a uma teoria de ordem infinita com os axiomas da infinidade, da compreensão, e da extensionalidade. "Isto é, a teoria geral de classes, [a teoria que] compreende todas as partes da lógica; ela pode, de fato, ser identificada com a lógica" [71]. Enquanto as partes da lógica contam entre seus teoremas apenas fórmulas independentes da cardinalidade do domínio, a teoria geral de classes, sobre a qual "o todo da matemática pode ser desenvolvido", precisa ter na base da hierarquia de tipos de sua construção conjuntista, o conjunto de todos os "indivíduos lógicos".

Uma das principais conseqüências do caráter de independência dos teoremas das partes fragmentárias da lógica com relação à cardinalidade do domínio, é que para estas teorias, os domínios têm cardinalidades variáveis. De acordo com o ponto de vista de Torrente, este fato nos oferece uma razão inabalável para crer que, na definição de (36), Tarski contempla tanto uma teoria

[70] Trata-se aqui de (Gómez-Torrente, 1996).
[71] (Gómez-Torrente, 1996, p.140).

cuja classe de modelos partilham um domínio fixo, quanto as teorias cujos modelos têm domínios variáveis. Esta é uma interpretação curiosa, pois ela equivale a afirmar que em (36) não temos apenas uma, mas no mínimo duas definições do conceito de conseqüência lógica. Mas, deixando de parte os comentários, vejamos as razões por que Torrente pensa assim.

Os argumentos apontados por Torrente em favor de uma definição de conseqüência para a teoria geral de classes são bastante acurados, colocando à mostra várias das incorreções cometidas por Etchemendy em sua análise. Eles são, em muitas partes, similares aos argumentos de Bays que apontei anteriormente, mostrando o engano de Etchemendy ao supor que em (36), temos uma definição de 1ª ordem acrescida da possibilidade de escolhas arbitrárias das constantes lógicas. Utilizarei a parte desta argumentação que interessa à nossa questão acerca da atitude de Tarski com relação ao axioma da infinidade. Já os argumentos em favor de uma definição de conseqüência para modelos de domínios variáveis, se apóiam em dois pontos básicos: (a) o caráter contraditório de uma definição de conseqüência lógica que tomasse em conta um único domínio de todos os indivíduos para estas teorias. Além deste caráter contraditório, no caso de assumirmos um domínio único, levaríamos a teoria de modelos à bancarrota, pois vários de seus teoremas principais, como os teoremas de Löwenheim-Skolem, dependem da nossa capacidade de variar os domínios; (b) a concordância ("sympathetic view") de Tarski em outros escritos com o uso da noção de modelos variáveis para teorias que são fragmentos da lógica pura.

É interessante notarmos antes de tudo que nem (a), nem (b), são alicerçados numa análise direta de (36). No primeiro caso temos uma acusação de *nonsense*, enquanto em (b), uma pretensa evidência baseada em outros textos de Tarski e em fontes externas. Analisemos o primeiro destes argumentos. A motivação de um de seus pontos é uma afirmação feita por Etchemendy, de que na concepção de MDF de Tarski, a sentença '$\exists x \exists y(\neg x = y)$' é uma verdade lógica. Num domínio fixo de interpretação, esta sentença equivale à afirmação: existem dois indivíduos. Contra a tese de Etchemendy, Torrente faz a seguinte consideração:

> Suponha que um dia nós estejamos engajados em estudar, com nossa lógica sem pressuposições anteriores de cardinalidade, uma certa interpretação de um

> conjunto de axiomas que admite interpretações de diferentes cardinalidades, e também que este fato possa ser expresso na linguagem da teoria. Para ficar mais definido, suponha que nós tenhamos uma formalização da álgebra de Boole de 1ª ordem, e que nós estejamos estudando uma álgebra de Boole de dois elementos, tomada como a interpretação pretendida dos axiomas. Aplicando a definição de Tarski nós iríamos concluir que a sentença '$\exists x \exists y \exists z$ ($\neg x = y$ & $\neg x = z$ & $\neg y = z$)' *não se segue* dos axiomas da álgebra de Boole. Agora suponha que no dia seguinte nós estejamos estudando uma álgebra de Boole infinita. Então, aplicando a definição de Tarski, nós iríamos concluir que '$\exists x \exists y \exists z$ ($\neg x = y$ & $\neg x = z$ & $\neg y = z$)' se segue do conjunto de axiomas da álgebra de Boole. A definição de Tarski não iria ser somente falha; ela iria ser inútil, sob qualquer concepção de verdade lógica [72].

De acordo com a citação acima, a interpretação de Etchemendy, se estivesse correta, apontaria uma incompatibilidade irreconciliável entre a definição de Tarski e a definição da teoria de modelos standard. Em contrapartida, Torrente argumenta que várias passagens de artigos escritos na época de (36), em particular os §§3 e 4 de (33), constituem evidência de que Tarski era favorável aos domínios variáveis de interpretação, e que portanto sua definição de conseqüência lógica deveria contemplar teorias para as quais fosse este o caso. Posteriormente, analisarei esta pretensa concordância de Tarski quanto à adoção de domínios variáveis que encontramos em (33). Por agora, podemos mostrar que a adoção de um domínio fixo não tem o caráter desastroso que Torrente quer que tenha.

Segundo Torrente, se aceitamos apenas um domínio fixo de interpretação, a definição de Tarski não apenas falha, mas se torna inútil sob qualquer concepção de verdade lógica. Como disse Bays, esse tipo de argumento "(...) subestima a importância matemática da concepção de modelos de domínios variáveis" [73]. Analisemos o argumento de Torrente mais de perto. Suponhamos que nossa concepção seja a de um domínio fixo, invariante. Uma sentença do tipo '$\exists x \exists y$ ($\neg x = y$)' é, de fato, uma verdade lógica neste caso. Da mesma forma, esta sentença se segue dos axiomas da álgebra de Boole de dois elementos. Para demarcarmos a álgebra de Boole de dois elementos, basta relativizarmos os elementos em questão a um predicado B à maneira de um postulado, tal que (0,

[72] (Gómez-Torrente, 1996, p.142). Um argumento nesta mesma linha se encontra em (Sher, 1991, p.41).
[73] (Bays, 2001, 1711).

$1 \in B)$ [74]. Numa álgebra de Boole infinita, a sentença '$\exists x \exists y\ (\neg x = y)$' se segue dos teoremas da teoria, assim como a sentença '$\exists x \exists y \exists z\ (\neg x = y \lor \neg x = z \lor \neg y = z)$', que também é uma verdade lógica. Não há contradição aqui. A única coisa que esse fato nos mostra, é que a partir de uma teoria artificialmente empobrecida em termos de constantes extralógicas como a álgebra de Boole de dois elementos, não podemos provar todas as verdades lógicas em 1ª ordem. O que aliás é óbvio.

Por meio do método de relativização de todos os quantificadores de um conjunto de sentenças a um predicado, o partidário de um domínio fixo pode obter todos os teoremas importantes obtidos numa teoria de modelos standard com variações dos domínios. O procedimento é o seguinte: tomemos um conjunto de sentenças Γ, relativizando seus quantificadores a um predicado D (de domínio). Tendo feito isto, poderemos induzir uma correspondência entre todos os modelos variáveis possíveis do conjunto Γ original, e o novo conjunto Γ' relativizado a um domínio fixo (onde Γ e Γ' são de 1ª ordem). Como conseqüência deste procedimento, os teoremas de Löwenheim-Skolem se traduzem em teoremas a respeito das cardinalidades possíveis dos conjuntos figurados por D [75].

Os contra-argumentos apresentados nos dois parágrafos anteriores nos mostram que mesmo sendo uma definição unificada para a 'teoria geral das classes' com um domínio único infinito, a definição de conseqüência lógica de Tarski não deixa de contemplar as partes 'fragmentárias' da lógica, ou seja, teorias lógicas de ordem finita que contêm sentenças corretas relativamente a um certo predicado ("domínio"), ou mesmo conjuntos de sentenças satisfazíveis independentemente da cardinalidade do "domínio" [76]. Vejamos agora as partes de (33) nas quais Tarski considera uma metodologia que toma em consideração domínios variáveis.

Os dados nos quais Torrente se apóia na defesa de que Tarski seguramente sabia e era favorável a uma concepção de domínios variáveis são, como dissemos, extraídos de (33), mais especificamente do §4 do artigo em questão. Examinando

[74] Aliás, este é exatamente o procedimento empregado por Tarski em (Tarski, 1983, p.321). Na concepção de modelos de um domínio variável, uma tal relativização é claramente supérflua, pois que ela se segue da própria definição de "modelo". Ver a este respeito (Bays, 2001, p.1712, nota 19).

[75] (Bays, 2001, p.1711). No artigo, o autor nos dá outros exemplos de teoremas que podem ser trasladados numa concepção de domínio fixo, como os teoremas acerca da categoricidade da teoria dos números e/ou análise, que se traduzem pela existência de bijeções entre quaisquer dois conjuntos figurados por um predicado D.

[76] Como o caso dos teoremas correlatos aos de Löwenheim-Skolem.

as passagens deste parágrafo citadas por Torrente, vemos que ali Tarski está tratando dos problemas relacionados à completude e consistência de certas teorias, ou seja, da possibilidade de uma definição estrutural do conceito de verdade. Problemas análogos podem ser apontados, de acordo com Tarski, com relação ao conceito *'sentença correta em todos os domínios'*. Com respeito à sua extensão, estas sentenças "se colocam a meio caminho entre o conceito de sentença provável, e aquele de sentença verdadeira" [77]. Isto nos mostra que o conjunto das sentenças corretas em todos os domínios é um subconjunto próprio do conjunto de todas as sentenças verdadeiras, pois ele não contém aquelas cuja verdade depende da cardinalidade do domínio (ou seja, do número de todos os "indivíduos lógicos"). Sob este ponto de vista, para que o nosso sistema seja completo, é necessário adicionar o axioma da infinidade. Entretanto, Tarski assinala que havia naquele tempo um outro ponto de vista muito difundido, segundo o qual questões acerca da cardinalidade do domínio devem ser deixadas para as ciências (matemáticas) especiais, enquanto as teorias lógicas devem tratar apenas dos problemas relativos à coincidência entre sentenças prováveis e sentenças independentes do domínio. Nas palavras de Tarski:

> Mas por várias razões, outro ponto de vista parece ser melhor estabelecido, nomeadamente, o ponto de vista de que a decisão respeitante a estes problemas deveria ser deixada para as teorias dedutivas específicas, enquanto que na lógica e suas partes nós deveríamos tentar assegurar somente que a extensão do conceito de sentença provável coincide com aquele de sentença correta em todo domínio individual [78].

Uma formalização nestes cânones sobrepõe a uma base lógica de ordem finita (um fragmento da "lógica pura" total) a linguagem de uma teoria matemática que contém primitivos que irão denotar as noções matemáticas. O alcance desse tipo de formalização é relativo à força da base lógica. Devemos garantir que as sentenças prováveis e as sentenças corretas tenham a mesma extensão "em todos os domínios individuais". Analisando tal concepção, Tarski escreve:

> Para um defensor deste ponto de vista, a questão [de saber] se as extensões destes dois conceitos são atualmente idênticas é de grande importância. No caso de uma

[77] (Tarski, 1983, p.240)
[78] (Tarski, 1983, p.240)

> resposta negativa, surge o problema de completar o sistema de axiomas da ciência estudada, de tal maneira que a classe das sentenças prováveis assim estendida coincida com a classe das sentenças corretas em todo domínio. *Este problema, que propriamente equivalente à questão de caracterizar estruturalmente o último conceito, pode ser positivamente decidido somente em uns poucos casos*. (Nota: No caso do cálculo de predicados de nível mais baixo, este problema foi recentemente decidido por Gödel (...)). Falando em termos gerais, as dificuldades apresentadas por essa questão não são menos essenciais do que aquelas conectadas com o problema análogo de uma definição estrutural do conceito de sentença verdadeira. [79]

A interpretação da passagem citada feita por Torrente parece um tanto tendenciosa. O que Tarski está afirmando é que um ponto de vista assim enfrenta dificuldades equivalentes àquelas enfrentadas pela tentativa de dar uma definição estrutural do conceito de verdade. É importante que atentemos para a expressão "Para um defensor deste ponto de vista". Ela nos indica que o autor está analisando os problemas relacionados a uma certa posição, e não aderindo a esta mesma posição. Podemos ver isto mais claramente ao analisarmos o que vem escrito no parágrafo seguinte (o §5), onde Tarski analisa as possibilidades e os problemas relacionados à definição de verdade para linguagens de ordem infinita (em particular, a teoria geral de classes).

O objetivo de Tarski em (33) é dar uma definição geral *materialmente adequada e formalmente correta* do conceito geral de verdade para as linguagens formalizadas. Para alcançar este objetivo, ele necessita de um conceito de satisfação que possa unificar a lógica como um todo. Nesse contexto, o postulado de que somente as sentenças que são corretas em todos os domínios individuais são prováveis em lógica perde sua importância [80]. Com a adoção do axioma da infinidade, obtemos uma base suficiente para desenvolver, a partir da lógica pura, várias partes da matemática, dentre elas a aritmética. Em algumas passagens do §5, Tarski mostra os problemas de uma definição estrutural do conceito de verdade. Em razão do primeiro teorema de incompletude de Gödel, a tentativa de oferecer uma definição estrutural para o conceito de verdade falha para linguagens de diversas ordens finitas.

Mais do que isso, mesmo nos casos elementares em que é possível dar uma definição estrutural de verdade (como no cálculo de predicados de 1ª ordem), não temos em realidade um critério estrutural geral para a verdade de uma

[79] (Tarski, 1983, p.240. Grifo meu)
[80] Ver (Tarski, 1983, p.243, nota 1).

sentença, mas para a noção relacionada de função sentencial universal (quer dizer, para funções sentenciais cuja correção independe dos domínios individuais) [81]. Isto nos indica que Tarski pensa que, para que o problema de encontrar um critério estrutural para a verdade de uma sentença, neste caso específico, pudesse ser resolvido de maneira positiva, as sentenças verdadeiras em razão da cardinalidade do domínio também deveriam ser implicadas pelo critério em questão. Dadas estas circunstâncias, fica claro que não há, em (33), nenhum "sympathetic view" por parte de Tarski com relação à concepção de que a lógica deve tratar somente de sentenças corretas independente do domínio, pois mesmo no caso em que este critério funciona, ele não é suficiente.

No caso da aplicação do cálculo de 1ª ordem à construção de teorias matemáticas, as coisas se tornam ainda mais complicadas, pois ao admitirmos noções matemáticas (certos predicados, relações, etc) como primitivos, há teorias para as quais o conjunto das sentenças prováveis não coincide com o conjunto das sentenças corretas independente do domínio, como mostra a aplicação do teorema de Gödel à aritmética formalizada em 1ª ordem, de nada adiantando a suplementação dos axiomas da teoria. Com estas considerações não quero dizer, obviamente, que Tarski detratava esta concepção, mas apenas que ela não tem relevância direta para os problemas que o autor está tentando resolver na sua definição de verdade e, como teremos oportunidade de ver, na articulação do conceito de conseqüência lógica.

Como foi dito anteriormente, Tarski almeja obter um conceito de satisfação que possa unificar todas as partes fragmentárias da lógica, o que equivale a dar uma definição de satisfação para a linguagem da teoria geral de classes, "uma linguagem que é digna de nota porque, a despeito de sua estrutura elementar e de sua pobreza em formas gramaticais, ela é suficiente para a formulação de toda idéia que pode ser expressa na linguagem da lógica matemática como um todo" [82]. A tarefa a que Tarski se propõe é então estruturar uma semântica para uma linguagem de ordem infinita (ordem ω, nas suas palavras), que traz entre seus enunciados básicos um axioma da infinidade em 1ª ordem, juntamente com axiomas da compreensão e da extensionalidade para todas as ordens desta linguagem.

[81] (Tarski, 1983, p.254, nota 1)
[82] (Tarski, 1983, p.242)

Naquele tempo, como Tarski não aceitava na metalinguagem nada que estivesse além dos recursos expressivos da teoria clássica dos tipos, sua conclusão com respeito à possibilidade de oferecer um conceito unificador de satisfação para toda a linguagem da lógica é negativa. Para evitar a multiplicação indefinida da noção de satisfação, devemos ter uma categoria unificadora que nos permita tratar todas as variáveis da linguagem objeto como pertencentes a uma única categoria semântica. As seqüências de objetos pertencentes a esta categoria unificadora, e mais ainda, o conceito de satisfação que relaciona estas seqüências de objetos às funções sentenciais apropriadas, devem ser de ordem superior a todas as variáveis da linguagem estudada. Como a linguagem da teoria geral das classes é de ordem ω, seria necessário que a metalinguagem contivesse termos de ordem infinita. Com relação a esta exigência, Tarski conclui: "Todavia nem a metalinguagem que forma a base das investigações presentes, nem qualquer outra das linguagens existentes, contêm tais expressões. De fato, absolutamente não é claro que significado intuitivo poderia ser dado a tais expressões" [83].

Se tentássemos construir o conceito de satisfação numa metalinguagem que possui a mesma ordem da teoria objeto, a teoria em questão adquiriria aquela mesma universalidade da linguagem natural, gerando antinomias, como o paradoxo do mentiroso. Com base nestes dados, Tarski prova o teorema que afirma que, se a metalinguagem for consistente, é impossível construir uma definição de verdade para a linguagem objeto de ordem ω no sentido da convenção T. Com base nesta situação, só poderíamos concluir que é impossível dar uma definição geral do conceito de satisfação para linguagens de ordem infinita. As conseqüências extraídas dessa impossibilidade repercutem obviamente em todos os conceitos cuja definição depende do conceito de satisfação. Da mesma forma que o conceito de verdade, o conceito de conseqüência lógica para toda a teoria geral de classes fica impedido. É o que podemos constatar a partir das conclusões negativas extraídas por Tarski nas linhas finais de seu artigo sobre ω-consistência e ω-completude [84].

Os problemas relacionados à definição geral do conceito de satisfação são superados pela adoção de recursos suficientes (de fato, teoria de conjuntos suficiente), na metalinguagem, que permitam definir o conceito em questão para

[83] (Tarski, 1983, p.244)
[84] Ver (Tarski, 1983, p.295)

linguagens de ordem infinita. Trata-se aqui de admitir na linguagem da metateoria variáveis de ordem superior a todas as variáveis da linguagem estudada (da teoria geral de classes), ou seja, variáveis de ordem transfinita, cumprindo assim o requisito de que o poder expressivo da metalinguagem seja de uma ordem superior ao poder expressivo da linguagem objeto. No pós-escrito de (33), Tarski tece várias considerações a esse respeito. Da mesma forma, há uma nota na página final de (33a), em que o autor declara que a afirmação ali contida, de que jamais seria possível dar uma apresentação formal exata do conceito próprio de conseqüência lógica, só é válida enquanto nos limitamos aos recursos expressivos da teoria clássica dos tipos.

É graças aos resultados acima expostos que se torna possível uma articulação do conceito próprio de conseqüência lógica em termos formais. O mesmo se aplica ao conceito de verdade lógica. É importante percebermos, no entanto, que as noções de forma de uma sentença, bem como de relação formal entre sentenças, têm no entender de Tarski uma dimensão sintática e outra semântica. A dimensão sintática advém do fato de que as constantes lógicas, os componentes da linguagem que estruturam as sentenças, são seus elementos primitivos, dados por enumeração. Já a idéia de todos os modelos nos conduz diretamente à teoria de conjuntos e, portanto, para além da linguagem. Para comprovarmos que isto é assim, lembremo-nos da condição (F):

> Se, nas sentenças da classe K e na sentença X as constantes – aparte aquelas constantes puramente lógicas – são substituídas por outras constantes (signos iguais sendo em toda parte substituídos por signos iguais), e se nós denotamos a classe de sentenças assim obtida de K por ‘K′’, e a sentença obtida de X por ‘X′’, então a sentença X′ deve ser verdadeira somente se todas as sentenças da classe K′ forem verdadeiras. [85]

Na passagem acima, (F) provavelmente significa “forma” ou “formal”. Aqui, Tarski está expondo uma tentativa de explicar a noção de forma de uma maneira puramente lingüística. Esta afirmação poderia ser contestada, pois temos aí o conceito de verdade. Mas a noção de interpretação neste caso se dá intra-lingüísticamente. Temos uma relação de “referência” ou correlação entre os nomes das expressões (sentença, classe de sentenças, constantes extralógicas), que pertencem à metalinguagem, e as próprias expressões, que pertencem à linguagem

[85] (Tarski, 1983, p.415)

objeto. Tomadas em bloco, todas as sentenças que podem ser obtidas umas a partir das outras pela substituição de seus designadores ou constantes extralógicas formam uma classe, que seria a forma lógica destas sentenças. Poderíamos então fazer afirmações do gênero “a sentença ‘X’ é uma verdade lógica” ou “a forma lógica das sentenças ‘X’ e ‘X′’ é a mesma, etc”.

Como Tarski afirmou, a caracterização interpretacional da noção de forma lógica é insuficiente, pois a classe que pretensamente representa a forma lógica das sentenças neste caso é circunscrita ao número de constantes extralógicas da linguagem, e portanto à quantidade de sentenças de mesma forma lógica possíveis a partir dos recursos expressivos da linguagem. Foi dito muitas vezes que Tarski considera a condição (F) insuficiente em razão das linguagens artificialmente empobrecidas, mas esta não é uma caracterização muito exata. O que está em jogo, no entender de Tarski, são as limitações inerentes às linguagens formais. Tomemos como exemplo a construção da aritmética de 2ª ordem na teoria geral de classes com o axioma da infinidade. Aqui, cada classe constituída por todas as classes similares com n indivíduos é o correlato de um número natural n. A potência dos números naturais é representada pela classe cujos elementos são todas as classes de classes de classes de indivíduos ou, melhor dizendo, classes de propriedades de classes de indivíduos. Assim, à classe potência pertence um número incontável de elementos, que são os subconjuntos da classe universal de 3º nível, a classe de todos os naturais. Relacionando um número natural n a cada um dos subconjuntos mencionados, podemos dizer que n possui uma quantidade incontável de propriedades. Por exemplo, dado um subconjunto de números naturais, n possui a propriedade de estar ou não incluído neste subconjunto. Como temos um número não denumerável de subconjuntos, n possui um número não denumerável de propriedades.

Ora, o alfabeto da linguagem formal que está sendo considerada possui um número denumerável de elementos. Como poderíamos então, no contexto que foi exposto no parágrafo anterior, determinar a forma lógica de uma sentença na qual é atribuída uma propriedade a um número natural n? Suponhamos uma sentença $(\alpha) = 1 \subseteq Q$ w $\neg 1 \subseteq Q$’, na qual Q está nomeando uma propriedade específica que pode ou não ser propriedade de ‘1’ [86]. Em (α), a única constante extralógica é a

[86] Quer dizer, Q não é uma variável, mas uma constante interpretada.

propriedade representada pela letra Q [87]. Qual é a forma lógica de (α), de acordo com a condição (F)? A classe de todas as sentenças verdadeiras que diferem de (α) no máximo em suas constantes extralógicas. Mas como as propriedades de 1 têm uma cardinalidade incontável, para representar a forma lógica de (α) a linguagem formal deveria conter uma classe com um número incontável de designadores para os objetos de mesma ordem que a propriedade designada por Q. “Esta pressuposição, entretanto, é fictícia e nunca pode ser realizada” [88].

A maneira como Tarski caracteriza as limitações da condição (F) nos permite antever sua concepção de ‘formal’, e em que sentido sua compreensão da forma lógica de uma sentença tem uma dimensão semântica. Pensemos na técnica empregada para testar os modelos. Em primeiro lugar substituímos todas as constantes extralógicas da sentença por variáveis, relacionando-a à função sentencial correspondente. Em seguida formamos os modelos da sentença como seqüências de objetos que satisfazem a função sentencial. Neste sentido, a forma lógica de uma sentença depende da cardinalidade da classe de objetos de um tipo correspondente à categoria semântica das variáveis da função sentencial em questão, bem como dos componentes lingüísticos que estruturam as sentenças, que são as constantes lógicas.

O que foi exposto nos permite concluir que a explicação dos conceitos de verdade lógica e conseqüência formal tem, na obra de Tarski, fortes pressupostos ontológicos. Para ultrapassar as limitações de uma semântica substitucional, ele é forçado a lançar mão dos fortes pressupostos existenciais da teoria de conjuntos formulada nos *Principia*. Podemos é claro, expor a forma lógica de uma sentença desinterpretando suas constantes extralógicas. No caso de (α), por exemplo, ($1 \subseteq Q \vee \neg 1 \subseteq Q$), podemos dizer que Q é uma propriedade qualquer. Partindo desta premissa, podemos generalizar, pois o que vale para um caso qualquer, vale para todos os casos. Mas aqui podemos perguntar: o que confere o status de “qualquer” a este caso? Como é evidente, a garantia de generalidade provém de uma constante, que é o tipo lógico apropriado dos objetos que podem ser designados

---

87 Lembremo-nos que em (α), ‘1’ não é um termo primitivo, mas definido. Para expormos a estrutura de (α) numa linguagem como a dos *Principia*, teríamos que construí-la de uma forma semelhante àquela feita por Tarski em (33a), em termos de quantificação sobre classes finitas similares, representando os números como propriedades lógicas de 2^a ordem.

88 (Tarski, 1983, p.416)

por Q. Isto implica que estamos fazendo referência, ainda que de forma elíptica, à classe de todos estes objetos, e à sua cardinalidade.

Partindo dos elementos analisados acima, podemos agora realizar uma tentativa de esclarecimento à questão acerca das relações entre a semântica de Tarski e seu ideal de lógica por um lado, e o axioma da infinidade, de outro, bem como da relação entre forma lógica e cardinalidade. Antes, porém, direi mais algumas palavras sobre a dimensão sintática da concepção tarskiana de forma lógica. Em (36), logo após a exposição da condição (F) que citei acima, há um parêntese onde encontramos a seguinte declaração:

> Com o propósito de simplificar a discussão, certas complicações incidentais são desconsideradas, tanto aqui, como no que se segue. Elas estão conectadas em parte com a teoria dos tipos lógicos, e em parte com a necessidade de eliminar todos os signos definidos que possam ocorrer nas sentenças consideradas, i. é, de substitui-los por signos primitivos [89].

A necessidade de eliminar todos os signos definidos da linguagem é conectada ao problema da ordem em que são formuladas as inferências, como o caso das ω-inferências que discutimos em **2.2**. Na sentença (α) que exemplificamos anteriormente, por exemplo, o símbolo definido '1' deveria ser substituído pelos termos primitivos da linguagem da teoria de classes, para que a estrutura lógica das sentenças ficasse explicitada. Isto implica que a avaliação correta da definição de Tarski depende de levarmos em consideração que ela é sensível à maneira como as sentenças são formuladas [90], pois a questão sobre quais componentes da linguagem são considerados como primitivos lógicos, irá influir diretamente em nossa decisão sobre o status lógico de uma sentença e, por conseguinte, sobre a noção de validade.

Considerando o que foi exposto nos parágrafos anteriores, podemos agora apresentar sumariamente os principais pontos da compreensão até aqui alcançada acerca da relação entre forma lógica e cardinalidade. Como tivemos oportunidade de ver, Tarski identifica a lógica em sua totalidade com a teoria geral de classes ou conjuntos, formulada de acordo com o método de *Principia Mathematica*. Constatamos que esta identificação o levou a considerar o axioma da infinidade

[89] (Tarski, 1983, p.415)

[90] Ou seja, as definições de Tarski são sensíveis à estrutura sintática da linguagem na qual são formuladas as sentenças.

como um princípio lógico [91]. Por conseguinte, uma vez que postula uma quantidade determinada de "indivíduos lógicos", a lógica é uma ciência que estabelece uma cardinalidade exata de objetos em cada nível da hierarquia de tipos [92]. As seqüências infinitas destes objetos constituem os possíveis modelos para as sentenças de ordem apropriada. Assim, em seu aspecto semântico, a forma lógica é determinada pela cardinalidade dos objetos cujas seqüências podem ser seus modelos. Como a linguagem considerada tem um alfabeto denumerável, a cardinalidade dos objetos ultrapassa sua capacidade expressiva, razão pela qual os conceitos de modelo e satisfação, bem como todas as definições neles baseadas, são não efetivos. Em conseqüência, os conceitos semânticos são ferramentas conceituais que nos permitem ultrapassar as limitações das linguagens formais, cumprindo assim a tarefa da semântica científica, que é a de explicar "a totalidade das considerações concernentes àqueles conceitos que, grosso modo, expressam certas conexões entre as expressões de uma linguagem e o os objetos e estados de coisas a que se referem estas expressões" [93]. Esta interpretação, entretanto, não deixa de apresentar conflitos com certas definições de semântica que encontramos nos escritos de Tarski [94].

[91] Ver acima em **2.2** e também (Bays, 2001, pp.1713-14). Esta afirmação, contudo, é problemática. Pois se em várias passagens Tarski de fato considera o axioma da infinidade como um princípio lógico (embora, segundo suas próprias palavras, menos evidente), em alguns de seus textos ele parece sugerir que o problema seja transferido para a física (ver (Tarski, 1986, p.152). Uma declaração similar se encontra em (Tarski, 1983, p.174, nota 2)).

[92] Podemos ilustrar isto com o seguinte exemplo: o axioma da infinidade postula a existência de um número infinito denumerável de indivíduos lógicos no nível 0. O nível imediatamente posterior é o das classes de indivíduos. Como o número de objetos de nível 0 é infinito, então nenhuma classe finita pode conter todos os indivíduos. Logo, o número de objetos de nível 1 é igual a $\aleph_0$. Aplicando a operação de potência à classe de todos os objetos de nível 1, obtemos o número cardinal dos objetos de nível 2, que é $2^{\aleph_0}$. De uma maneira geral, se um determinado nível tem cardinalidade α, a cardinalidade do nível seguinte é igual a 2^{α}.

[93] (Tarski, 1983, p.401)

[94] Com efeito, numa passagem de (33), após fazer algumas observações sobre as limitações de se estabelecer a "lógica" de uma dada linguagem como parte da morfologia desta mesma linguagem, Tarski dá a seguinte definição de semântica:

"Um aspecto característico dos conceitos semânticos, é que eles dão expressão a certas relações entre as expressões da linguagem e os objetos aos quais estas expressões se referem, ou que por meio de tais relações eles caracterizam certas classes de expressões ou outros objetos. <u>*Nós podemos dizer (fazendo uso de suppositio materialis) que estes conceitos servem para apresentar a correlação entre os nomes das expressões e as próprias expressões*</u>." (Tarski, 1983, p.252). Grifo meu.