

2

Modelo de Espaço de Estado Linear Gaussiano

2.1

Introdução

O modelo em espaço de estado linear gaussiano pode ser escrito de várias formas. A forma considerada nesta tese é a seguinte:

$$y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, H_t), \quad (2-1)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, Q_t), \quad t = 1, \dots, n, \quad (2-2)$$

onde y_t é um vetor $p \times 1$ de observações; α_t é um vetor não-observado $m \times 1$ chamado *vetor de estado*, os termos do erro ou choques, ϵ_t e η_t , são considerados variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

A idéia é que o movimento do sistema no tempo é determinado por α_t , de acordo com (2-2), mas como α_t não é observado diretamente a análise deve ser baseada nas observações y_t . A equação (2-1) é chamada de *equação das observações* ou *equação das medidas* e (2-2) é chamada de *equação do estado*.

As matrizes Z_t, T_t, R_t, H_t e Q_t , com dimensões apropriadas, são fixas, chamadas *matrizes do sistema*, assumidas inicialmente como conhecidas. Na prática algumas ou todas as matrizes dependem de elementos de um vetor de hiperparâmetros desconhecidos denominado ψ , cuja forma de estimação esta descrita, por exemplo, em Harvey [17] e Durbin & Koopman [7]. Assume-se que R_t é um subconjunto de colunas de I_m , a matriz identidade de ordem m ; R_t é chamada de matriz de seleção, posto que escolhe as linhas da equação do estado que tem perturbações não-nulas. Quando as matrizes do sistema são constantes, o modelo com as equações (2-1) e (2-2) é dito invariante no tempo.

Na tabela [2.1] são dadas as dimensões dos vetores e matrizes do modelo de espaço de estado.

Vetor		Matrix	
y_t	$p \times 1$	Z_t	$p \times m$
α_t	$m \times 1$	T_t	$m \times m$
ϵ_t	$p \times 1$	H_t	$p \times p$
η_t	$r \times 1$	R_t	$m \times r$
		Q_t	$r \times r$
a_1	$m \times 1$	P_1	$m \times m$

Tabela 2.1: Dimensões do modelo de espaço de estado.

Uma vez que o modelo é posto na forma de espaço de estado, podese usar o filtro de Kalman para construir um procedimento recursivo para realizar inferências sobre o vetor de estado e as observações. É importante notar que a representação na forma de espaço de estado de um sistema linear não é única.

Por simplicidade na dedução do filtro de Kalman, o estado inicial α_1 é suposto $N(a_1, P_1)$, independente de $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ e η_1, \dots, η_m , onde a_1 e P_1 são conhecidos.

Um modelo geral para o vetor de estado inicial é:

$$\alpha_1 = a + A\delta + R_0\eta_0, \quad \eta_0 \sim N(0, Q_0), \quad (2-3)$$

onde o vetor a de dimensão $m \times 1$ é conhecido, δ é um vetor $q \times 1$ desconhecido. As matrizes de seleção, A de dimensão $m \times q$, e R_0 de dimensão $m \times (m - q)$, são definidas de modo que em conjunto suas colunas constituem um conjunto de g colunas de I_m , com $g \leq m$ e $A'R_0 = 0$. A matriz Q_0 é assumida definida positiva e conhecida. Geralmente o vetor a é considerado nulo, a menos que alguns elementos do estado inicial sejam constantes conhecidas. Quando todos os elementos do vetor de estado são estacionários, as médias, variâncias e covariâncias iniciais deste vetor de estado podem ser obtidas dos parâmetros do modelo.

A título de ilustração da forma de inicialização dos modelos de espaço de estado, considere o modelo:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \rho_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2), \\ \rho_{t+1} &= \phi\rho_t + \tau_t, & \tau_t &\sim N(0, \sigma_\tau^2), \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + \beta_t + v_t, & v_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2), \\ \beta_{t+1} &= \beta_t + \xi_t, & \xi_t &\sim N(0, \sigma_\xi^2) \end{aligned}$$

onde $|\phi| < 1$, e os choques são serialmente e mutuamente não-correlacionados. Assim μ_t é um modelo de tendência linear, que é não-estacionário, e ρ_t é

um processo $AR(1)$ estacionário, não-observável e de média zero.

O modelo acima pode ser escrito na forma de espaço de estado como:

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_t \\ \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \epsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{t+1} \\ \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_t \\ \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_t \\ \nu_t \\ \xi_t \end{pmatrix}.$$

O objetivo da representação (2-3) é particionar α_1 numa parte constante a , uma parte não-estacionária $A\delta$, e uma parte estacionária $R_0\eta_0$.

Desta forma:

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\eta_0 = \rho_1$ e $Q_0 = \sigma_\tau^2/(1 - \phi^2)$ é a variância da série estacionária ρ_t . Na prática, ϕ é um parâmetro desconhecido que na análise clássica é estimado por máxima verossimilhança.

Na abordagem bayesiana, α_1 pode ser tratado como tendo uma densidade *a priori* conhecida ou não-informativa.

O vetor δ pode ser tratado como um vetor fixo de parâmetros desconhecidos e pode ser estimado por máxima verossimilhança, de acordo com o procedimento desenvolvido por Rosenberg [30], ou tratado como um vetor de variáveis aleatórias gaussianas com variância infinita.

Quando δ é aleatório assume-se que tem distribuição dada por:

$$\delta \sim N(0, kI_q),$$

onde $k \rightarrow \infty$, e I_q é a identidade de orden q .

A inicialização então considera o filtro de Kalman com $a_1 = E(\alpha_1) = a$ e $P_1 = Var(\alpha_1)$, onde:

$$P_1 = kP_\infty + P_*, \quad k \rightarrow \infty.$$

Na equação acima $P_\infty = AA'$ e $P_* = R_0Q_0R_0'$. Dado que A é formado por colunas de I_m , então P_∞ é uma matriz $m \times m$ diagonal com q elementos

iguais a um, e os outros elementos iguais a zero. É assumido que quando um elemento diagonal de P_∞ é diferente de zero o elemento correspondente de P_* é zero.

Esta inicialização é chamada de *inicialização difusa*, dado que um vetor qualquer com distribuição $N(0, kI_q)$, com $k \rightarrow \infty$ é chamado de difuso.

Uma forma aproximada de inicialização difusa é substituir k por um número arbitrariamente grande e usar o filtro de Kalman sem modificações, mas é preferível considerar um tratamento exato conforme descrito em Koopman [24], que usa uma expansão em k^{-1} , tomando somente os primeiros dois ou três termos, e fazendo $k \rightarrow \infty$. As equações do filtro de Kalman devem ser re-adequadas para se considerar a inicialização exata, mas após algumas iterações têm-se a mesma forma das equações do filtro de Kalman em que é suposto que os valores iniciais a_1 e P_1 são conhecidos, o mesmo acontece para a função de verossimilhança.

Na formulação de espaço de estado, a equação das observações tem a estrutura de um modelo de regressão linear, onde o vetor de coeficientes α_t varia no tempo, e a equação do estado tem uma estrutura markoviana, que é uma forma efetiva de descrever a estrutura de correlação serial presente nas observações.

Os modelos em espaço de estado proporcionam uma metodologia unificada para análise de um amplo espectro de problemas. Seu propósito fundamental é inferir propriedades relevantes de α_t baseado no conhecimento das observações y_1, \dots, y_n . Estes modelos permitem a utilização de algoritmos associados ao filtro de Kalman [22], para a realização de tarefas de interesse, como por exemplo:

- Estimação de hiperparâmetros;
- Filtragem: que consiste basicamente na atualização do conhecimento do sistema quando uma nova observação é disponível;
- Alisamento: que permite basear a estimação de quantidades de interesse na amostra completa y_1, \dots, y_n ;
- Simulação Suavizada (*Simulation Smoothing*): Que permite gerar amostras do vetor de estado e/ou das perturbações condicional às observações. Este procedimento é usado no algoritmo desenvolvido por Durbin & Koopman para o estudo de modelos não-lineares/não-gaussianos.
- Previsão: extrapolação do modelo;
- Tratamento da série no caso de dados faltantes.

Desenvolvido por Kalman [22], o filtro de Kalman é a ferramenta fundamental para a análise dos modelos de espaço de estado calcula recursivamente a média e as covariâncias *a posteriori* do vetor de estado, supondo o vetor de hiperparâmetros conhecido.

Os capítulos 4 a 7 do livro de Durbin & Koopman [7] apresentam um tratamento completo dos modelos de espaço de estado lineares e gaussianos utilizando o filtro de Kalman, o que também pode ser achado em diversos outros artigos e livros, como, por exemplo, em Harvey [17] e Anderson & Moore [1].

2.1.1

O Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um algoritmo recursivo que permite atualizar o conhecimento do sistema cada vez que chega uma nova observação, ele permite calcular de forma ótima o vetor de estado baseado na informação disponível até o tempo t . O filtro de Kalman pode ser derivado por meio da aplicação de resultados existentes na teoria de regressão multivariada com erros gaussianos.

Considere o modelo (2-1) e (2-2), com a condição inicial $\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$, onde a_1 e P_1 são conhecidos, e seja Y_{t-1} o conjunto de observações até o tempo $t - 1$, isto é, $Y_{t-1} = (y_1, \dots, y_{t-1})$. Pode-se mostrar que $p(y_t | \alpha_1, \dots, \alpha_t, Y_{t-1}) = p(y_t | \alpha_t)$ e $p(\alpha_{t+1} | \alpha_1, \dots, \alpha_t, Y_t) = p(\alpha_{t+1} | \alpha_t)$.

O objetivo é obter a distribuição condicional de α_{t+1} dado Y_t , para $t = 1, \dots, n$.

Uma vez que as distribuições consideradas no modelo são gaussianas, então distribuições condicionais de um subconjunto destas variáveis dado outro subconjunto das mesmas variáveis são também gaussianas; deste modo, para se obter a distribuição condicional de interesse é suficiente conhecer $a_{t+1} = E(\alpha_{t+1} | Y_t)$ e $P_{t+1} = Var(\alpha_{t+1} | Y_t)$.

Sob o suposto que α_t dado Y_{t-1} é $N(a_t, P_t)$, com a_t e P_t conhecidos, o objetivo é calcular a_{t+1} e P_{t+1} .

Para $t = 1, \dots, n$ e como $\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t$, temos:

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= E(T_t \alpha_t + R_t \eta_t | Y_t) \\ &= T_t E(\alpha_t | Y_t), \end{aligned} \tag{2-4}$$

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= Var(T_t \alpha_t + R_t \eta_t | Y_t) \\ &= T_t Var(\alpha_t | Y_t) T_t' + R_t Q_t R_t'. \end{aligned} \tag{2-5}$$

Seja ν_t o erro de predição um passo à frente de y_t dado Y_{t-1} , isto é:

$$\nu_t = y_t - E(y_t|Y_{t-1}) = y_t - E(Z_t\alpha_t + \epsilon_t|Y_{t-1}) = y_t - Z_t a_t. \quad (2-6)$$

Note que quando Y_{t-1} e ν_t são fixos, Y_t é fixo e vice-versa, de modo que $E(\alpha_t|Y_t) = E(\alpha_t|Y_{t-1}, \nu_t)$.

Por outro lado,

$$E(\nu_t|Y_{t-1}) = E(y_t - Z_t a_t|Y_{t-1}) = E(Z_t\alpha_t + \epsilon_t - Z_t a_t|Y_{t-1}) = 0,$$

de modo que $E(\nu_t) = E(E(\nu_t|Y_{t-1})) = 0$.

Também, tem-se que para $j = 1, \dots, t-1$, $Cov(y_j, \nu_t) = E(y_j E(\nu_t|Y_{t-1})') = 0$.

A dedução do filtro de Kalman utiliza o lema da regressão multivariada mostrado a seguir:

Lema: Suponha que x, y e z são variáveis aleatórias de ordem arbitrária, conjuntamente distribuídas como normal, com média μ_p , e matriz de covariância $\Sigma_{pq} = E[(p - \mu_p)(q - \mu_q)']$, para $p, q = x, y$ e z , com $\mu_z = 0$ e $\Sigma_{yz} = 0$, então:

$$E(x|y, z) = E(x|y) + \Sigma_{xz}\Sigma_{zz}^{-1}z, \quad (2-7)$$

$$Var(x|y, z) = Var(x|y) - \Sigma_{xz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma'_{xz}. \quad (2-8)$$

A prova do lema anterior pode ser achada na página 37 do livro de DK [7].

Utilizando a equação (2-7) do lema, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} E(\alpha_t|Y_t) &= E(\alpha_t|Y_{t-1}, \nu_t) \\ &= E(\alpha_t|Y_{t-1}) + Cov(\alpha_t, \nu_t) [Var(\nu_t)]^{-1} \nu_t \\ &= a_t + M_t F_t^{-1} \nu_t, \end{aligned} \quad (2-9)$$

onde $M_t = Cov(\alpha_t, \nu_t)$, $F_t = Var(\nu_t)$.

$$\begin{aligned} M_t &= Cov(\alpha_t, \nu_t) = E[E\{\alpha_t(Z_t\alpha_t + \epsilon_t - Z_t a_t)'|Y_{t-1}\}] \\ &= E[E\{\alpha_t(\alpha_t - a_t)'Z_t'|Y_{t-1}\}] = P_t Z_t', \end{aligned}$$

e

$$F_t = Var(Z_t\alpha_t + \epsilon_t - Z_t a_t) = Z_t P_t Z_t' + H_t.$$

Assume-se que F_t é não-singular e usando (2-4):

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= T_t a_t + T_t M_t F_t^{-1} \nu_t \\ &= T_t a_t + K_t \nu_t, \quad t = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

onde $K_t = T_t M_t F_t^{-1} = T_t P_t Z_t' F_t^{-1}$.

Desta forma a_{t+1} é obtido como uma combinação linear do valor anterior a_t e ν_t .

Para achar $Var(\alpha_t|Y_t)$ usa-se a equação (2-8) do lema da maneira seguinte:

$$\begin{aligned} Var(\alpha_t|Y_t) &= Var(\alpha_t|Y_{t-1}, \nu_t) \\ &= Var(\alpha_t|Y_{t-1}) - Cov(\alpha_t, \nu_t)[Var(\nu_t)]^{-1}Cov(\alpha_t, \nu_t)' \\ &= P_t - M_t F_t^{-1} M_t' \\ &= P_t - P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2-5), obtém-se:

$$P_{t+1} = T_t P_t L_t' + R_t Q_t R_t', \quad t = 1, \dots, n, \quad \text{onde } L_t = T_t - K_t Z_t.$$

De modo que as equações do filtro de Kalman são:

$$\begin{aligned} \nu_t &= y_t - Z_t a_t, & F_t &= Z_t P_t Z_t' + H_t \\ K_t &= T_t P_t Z_t' F_t^{-1}, & L_t &= T_t - K_t Z_t & t = 1, \dots, n & \quad (2-10) \\ a_{t+1} &= T_t a_t + K_t \nu_t, & P_{t+1} &= T_t P_t L_t' + R_t Q_t R_t' \end{aligned}$$

O filtro de Kalman pode ser escrito considerando o processo de atualização, incorporando o cálculo do vetor $a_{t|t} = E(\alpha_t|Y_t)$ e sua variância denotada por $P_{t|t} = Var(\alpha_t|Y_t)$, as equações resultantes são:

$$\begin{aligned} \nu_t &= y_t - Z_t a_t, & F_t &= Z_t P_t Z_t' + H_t, \\ & & M_t &= P_t Z_t', \\ a_{t|t} &= a_t + M_t F_t^{-1} \nu_t & P_{t|t} &= P_t - M_t F_t^{-1} M_t', & t = 1, \dots, n \\ a_{t+1|t} &= T_t a_{t|t}, & P_{t+1} &= T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t', \end{aligned}$$

A prova desta formulação pode ser achada no livro de Durbin & Koopman [7].

2.2

Modelos Estruturais para Séries Temporais

Na abordagem estrutural de séries temporais, a série é decomposta em componentes que possuem interpretação direta, tais como: tendência, sazonalidade, ciclo e irregular. Cada componente é especificada através de um processo estocástico, e assim sendo os parâmetros do modelo mudam ao longo do tempo. Isto é muito diferente da filosofia dos modelos de Box-Jenkins, onde a tendência e sazonalidade são removidas por diferenciação antes de uma análise detalhada da série.

A abordagem estrutural para séries temporais pode ser estudada colocando-se o modelo em forma de espaço de estado, onde no estado estão as componentes não-observáveis.

A seguir é descrito brevemente o abordagem estrutural univariado, para um estudo mais completo do tema, ver por exemplo, o artigo de Harvey e Shephard [19].

As diferentes componentes do modelo devem ser construídas de acordo com o problema em estudo. Na prática, existe um grupo de componentes usadas com frequência. Por exemplo, uma série temporal pode ser especificada considerando a inclusão de uma componente de tendência μ_t , uma de sazonalidade γ_t , uma de ciclo ψ_t e uma componente irregular ϵ_t . Assim, o modelo da série é:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \epsilon_t, \text{ onde } \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2). \quad (2-11)$$

As componentes consideradas acima são estocásticas e as perturbações são serial e mutuamente não-correlacionadas.

Estas componentes são generalizações estocásticas de funções determinísticas no tempo, e se reduzem a elas no caso limite; a componente irregular é um ruído branco.

A seguir, apresentam-se breves descrições de cada uma das componentes.

A tendência determinística linear é dada por:

$$\mu_t = \alpha + \beta t, \quad (2-12)$$

assim $\mu_t = \mu_{t-1} + \beta$, com $\mu_0 = \alpha$.

Ao introduzir termos estocásticos, a componente de tendência é

definida como:

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad (2-13)$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t + \varsigma_t, \quad \varsigma_t \sim N(0, \sigma_\varsigma^2), \quad (2-14)$$

onde η_t e ς_t são ruídos brancos, mutuamente não-correlacionados, de média zero e variâncias, σ_η^2 e σ_ς^2 , respectivamente. O choque η_t permite que o nível da tendência varie estocásticamente no tempo, enquanto ς_t permite mudanças na inclinação. Assim sendo, variâncias grandes no choque implicam em maior movimento estocástico na tendência. No caso em que $\sigma_\eta^2 = \sigma_\varsigma^2 = 0$, a equação (2-13) tem forma similar à tendência determinística definida em (2-12), e assim a tendência determinística é um caso limite da tendência estocástica.

Seja ψ_t uma função cíclica de frequência λ_c , a qual é medida em radianos, cujo período de ciclo é $2\pi/\lambda_c$. Uma função cíclica pode ser expressa como uma mistura de senos e cossenos:

$$\psi_t = \alpha \cos \lambda_c t + \beta \sin \lambda_c t,$$

onde α e β são parâmetros, com amplitude $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ e fase $\tan^{-1}(\beta/\alpha)$.

A componente cíclica pode ser construída considerando o seguinte modelo estocástico:

$$\begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

onde k_t e k_t^* são perturbações mutuamente não-correlacionadas, com variância comum σ_k^2 , e $0 \leq \rho \leq 1$. O modelo é estacionário se ρ é estritamente menor que um, e no caso que λ_c seja zero ou π , o modelo se reduz a um processo autoregressivo de ordem um.

O modelo com sazonalidade determinística considera que os efeitos sazonais somam zero no período sazonal. Os efeitos sazonais podem mudar no tempo, deixando que a soma no período seja igual a um termo aleatório ω_t , de média zero e variância σ_ω^2 . Assim, se temos s estações no período, o modelo é dado por:

$$\gamma_{t+1} = - \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t+1-j} + \omega_t, \quad \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2), \quad t = 1, \dots, n. \quad (2-16)$$

Uma forma alternativa é considerar a definição de γ_{jt} como o efeito

da estação j no tempo t ; então γ_{jt} é gerado a partir de:

$$\gamma_{j,t+1} = \gamma_{j,t} + \omega_{tj}, \quad t = (i-1)s + j; \quad i = 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, s.$$

Nesta formulação, deve ser considerado um ajuste de modo que cada conjunto sucessivo de s componentes sazonais somem zero.

A sazonalidade pode ser modelada também por um conjunto de termos trigonométricos nas frequências $\lambda_j = 2\pi j/s$, $j = 1, \dots, [s/2]$, onde $[s/2] = s/2$ se s é par, e $[s/2] = (s-1)/2$ quando s é ímpar. O efeito sazonal em t é:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{[s/2]} (\gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \sin \lambda_j t).$$

No caso de s par, o termo correspondente à função seno desaparece para $j = s/2$. Assim o número de parâmetros trigonométricos, os γ_t e γ_t^* , são sempre $(s-1)/2$.

Esta componente sazonal pode evoluir no tempo, da mesma forma que a componente cíclica, e tem a forma:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{[s/2]} \gamma_{j,t}, \quad (2-17)$$

onde

$$\begin{pmatrix} \gamma_{j,t} \\ \gamma_{j,t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_j & \sin \lambda_j \\ -\sin \lambda_j & \cos \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{j,t-1} \\ \gamma_{j,t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{j,t} \\ w_{j,t}^* \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

$w_{j,t}$ e $w_{j,t}^*$, $j = 1, \dots, [s/2]$ são processos de ruído branco com média zero, não-correlacionados, e variância comum σ_w^2 . Quando s é par, a componente para $j = s/2$ é:

$$\gamma_{j,t} = \gamma_{j,t-1} \cos \lambda_j + \omega_{jt}.$$

Variáveis explicativas

Na abordagem estrutural, podem ser incluídas variáveis explicativas. Sejam x_{1t}, \dots, x_{kt} , k variáveis explicativas no tempo t , com coeficientes β_1, \dots, β_k , constantes.

Adicionando estas variáveis no modelo (2-11), tem-se:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{jt} + \epsilon_t. \quad (2-19)$$

Os coeficientes β_j podem variar no tempo, através de:

$$\beta_{j,t+1} = \beta_{jt} + \chi_{jt}, \quad \chi_{jt} \sim N(0, \sigma_\chi^2), \quad j = 1, \dots, k.$$

Análises de intervenção

A análise de intervenção refere-se ao fato de haver inferências acerca de efeitos de eventos conhecidos. Por exemplo, Harvey & Durbin [16] fazem inferência sobre o efeito de uma lei de trânsito no número de mortos ou feridos graves em acidentes de trânsito no Reino Unido. Este efeito pode ser medido incluindo uma variável de intervenção. Assim o modelo (2-19) tem a forma:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{jt} + \lambda w_t + \epsilon_t, \quad (2-20)$$

onde w_t é a variável de intervenção e λ mede a mudança no nível da série no tempo conhecido τ . A definição de w_t depende da forma assumida para o efeito da intervenção. Se a intervenção é transitória e tem efeito só em t , w_t é uma função pulso. Mais geralmente a intervenção pode ter um efeito transitório, que decai gradualmente, por exemplo, $w_t = \varphi^{t-\tau}$, onde $|\varphi| < 1$, $t \geq \tau$.

Uma mudança permanente de nível na série pode ser capturada por:

$$w_t = \begin{cases} 1, & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

Um efeito deste tipo também pode ser interpretado como um choque transitório na equação do nível na componente de tendência.

Uma outra forma de intervenção é considerar a variável:

$$w_t = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1 + t - \tau & t \geq \tau \end{cases}$$

Coefficientes como λ , que não mudam no tempo, podem ser incorporados no vetor de estado, fazendo a perturbação correspondente igual a zero.

O modelo (2-20) pode ser posto na forma de espaço de estado diretamente. A seguir, se apresentam alguns exemplos de formulações em forma de espaço de estado :

Exemplos da formulação de Espaço de Estado*Modelo de Nível Local*

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned}$$

neste caso, a formulação em espaço de estado é direta.

Modelo de Tendência Local

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + \beta_t + \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \\ \beta_{t+1} &= \beta_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{aligned}$$

em formulação de espaço de estado:

$$\begin{aligned} y_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \epsilon_t \\ \begin{pmatrix} \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Modelo Estrutural Básico

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \gamma_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + \beta_t + \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \\ \beta_{t+1} &= \beta_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \gamma_{t+1} &= -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t+1-j} + \omega_t, & \omega_t &\sim N(0, \sigma_\omega^2) \end{aligned}$$

em formulação de espaço de estado:

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \end{pmatrix} + \epsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \\ \gamma_{t+1} \\ \gamma_t \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \end{pmatrix} + \\
 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \\ \omega_t \end{pmatrix}$$

Modelo Estrutural Básico com ciclo

$$\begin{aligned}
 y_t &= \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\
 \mu_{t+1} &= \mu_t + \beta_t + \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \\
 \beta_{t+1} &= \beta_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \\
 \gamma_{t+1} &= -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t+1-j} + \omega_t, & \omega_t &\sim N(0, \sigma_\omega^2)
 \end{aligned}$$

onde (ψ_t, ψ_t^*) é dado por (2-15). O modelo tem a seguinte estrutura em formulação de espaço de estado:

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \\ \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} + \epsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \\ \gamma_{t+1} \\ \gamma_t \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+3} \\ \psi_{t+1} \\ \psi_{t+1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \rho \cos \lambda_c & \rho \sin \lambda_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \rho \sin \lambda_c & \rho \cos \lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \\ \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} + \\
 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \\ \omega_t \\ k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}$$

Seleção do Modelo

Um dos aspectos complicados ao se trabalhar com séries temporais é a seleção do modelo. A abordagem de modelos estruturais permite ao pesquisador formular um modelo que considere as características próprias da série, por exemplo os fatos estilizados de tendência e sazonalidade. Uma vez que o modelo é estimado, pode-se verificar sua adequabilidade através de testes estatísticos e gráficos de resíduos. Deve-se também considerar se as componentes estimadas são consistentes com o conhecimento prévio disponível sobre o fenômeno modelado. Por exemplo, ao considerar uma componente cíclica numa série econômica, o conhecimento da história econômica do período considerado permite julgar se o ciclo estimado é consistente com a evolução da economia naquele período.

Modelos Multivariados

A metodologia de modelos estruturais pode ser generalizada para séries temporais multivariadas. Por exemplo, o modelo de nível local para um vetor $p \times 1$ de observações y_t , é:

$$\begin{aligned}y_t &= \mu_t + \epsilon_t \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + \eta_t,\end{aligned}$$

onde μ_t , ϵ_t e η_t são vetores $p \times 1$ e $\epsilon_t \sim N(0, \Sigma_\epsilon)$, $\eta_t \sim N(0, \Sigma_\eta)$, e as matrizes Σ_ϵ e Σ_η tem dimensão $p \times p$. Esta classe de modelos é chamada de SUTSE (*seemingly unrelated time series equations*), descrevendo o fato que as séries individuais estão conectadas somente através das perturbações correlatadas pela equação das observações e equação do estado.

Uma modelo SUTSE diz-se homogêneo quando as variâncias associadas com as diversas perturbações são proporcionais. Por exemplo, a restrição de homogeneidade para o modelo de nível local é :

$$\Sigma_\eta = q\Sigma_\epsilon,$$

onde q é a razão sinal-ruído, $0 < q < \infty$.

Modelo de Fatores Comuns

Considere o modelo de nível local sem a restrição de homogeneidade, mas com a hipótese que o posto de Σ_η é $r < p$. O modelo contém só r componentes e é chamado de nível comum. O reconhecimento de fatores comuns tem uma interpretação interessante, e pode proporcionar eficientes inferências e predições. Após um apropriado ordenamento da série, o modelo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}y_t &= a + A\mu_t^* + \epsilon_t, \\ \mu_{t+1}^* &= \mu_t^* + \eta_t^*,\end{aligned}$$

onde μ_t^* e η_t^* são vetores de dimensão $r \times 1$, a é um vetor $p \times 1$ e A é uma matriz $p \times r$.

Supondo que:

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ a^* \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} I_r \\ A^* \end{pmatrix}, \quad \eta_t^* \sim N(0, \Sigma_\eta^*),$$

a^* é um vetor $(p-r) \times 1$ e A^* é uma matriz $(p-r) \times r$ de valores não-nulos, e Σ_η^* é uma matriz $r \times r$ definida-positiva.

Como ilustração, considere o modelo de nível local bivariado abaixo:

$$\begin{aligned}y_{1t} &= \mu_{1t} + \epsilon_{1t} \\y_{2t} &= \mu_{2t} + \epsilon_{2t} \\ \mu_{1,t+1} &= \mu_{1t} + \eta_{1t} \\ \mu_{2,t+1} &= \mu_{2t} + \eta_{2t}\end{aligned}$$

onde ϵ_t e η_t são independentes em todo o período de tempo.

A matriz de variância de $\eta_t = (\eta_{1t}, \eta_{2t})'$ é:

$$\Sigma_\eta = \begin{pmatrix} \sigma_{1\eta}^2 & \rho_\eta \sigma_{1\eta} \sigma_{2\eta} \\ \rho_\eta \sigma_{1\eta} \sigma_{2\eta} & \sigma_{2\eta}^2 \end{pmatrix}$$

ρ_η é a correlação.

O modelo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}y_{1t} &= \mu_{1t} + \epsilon_{1t} \\y_{2t} &= \pi \mu_{1t} + \bar{\mu} + \epsilon_{2t}\end{aligned}$$

De fato, fazendo $\eta_{2t} = \pi \eta_{1t} + \bar{\eta}_t$, onde $\pi = \rho_\eta \frac{\sigma_{2\eta}}{\sigma_{1\eta}}$, então, segue que:

$$\begin{aligned}E[\bar{\eta}_t] &= 0; \\Cov[\eta_{1t}, \bar{\eta}_t] &= E[\eta_{1t} \bar{\eta}_t] \\ &= E[\eta_{1t}(\eta_{2t} - \pi \eta_{1t})] \\ &= E[\eta_{1t} \eta_{2t}] - \pi E[\eta_{1t}^2] \\ &= \rho_\eta \sigma_{1\eta} \sigma_{2\eta} - \rho_\eta \frac{\sigma_{2\eta}}{\sigma_{1\eta}} \sigma_{1\eta}^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

E assim sendo, temos que:

$$\begin{aligned}Var[\bar{\eta}_t] &= Var[\eta_{2t} - \pi \eta_{1t}] \\ &= Var[\eta_{2t}] + \pi^2 Var[\eta_{1t}] - 2\pi Cov[\eta_{1t}, \eta_{2t}] \\ &= \sigma_{2\eta}^2 + \pi^2 \sigma_{1\eta}^2 - 2\pi \rho_\eta \sigma_{1\eta} \sigma_{2\eta} \\ &= \sigma_{2\eta}^2 + \rho_\eta^2 \sigma_{2\eta}^2 - 2\rho_\eta^2 \sigma_{2\eta}^2 \\ &= \sigma_{2\eta}^2 - \rho_\eta^2 \sigma_{2\eta}^2.\end{aligned}$$

Portanto

$$Cov \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{1\eta}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{2\eta}^2 - \rho_\eta^2 \sigma_{2\eta}^2 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\mu_{2,t+1} &= \mu_{2t} + \eta_{2t} \\ &= \mu_{2,t} + \pi\eta_{1t} + \bar{\eta}_t \\ &= \mu_{2,t} + \pi(\mu_{1,t+1} - \mu_{1,t}) + \bar{\eta}_t\end{aligned}$$

De modo que pode-se escrever:

$$\mu_{2,t+2} - \pi\mu_{1,t+1} = \mu_{2,t} - \pi\mu_{1,t} + \bar{\eta}_t.$$

Fazendo $\bar{\mu}_t = \mu_{2t} - \pi\mu_{1t}$, tem-se:

$$\bar{\mu}_{t+1} = \bar{\mu}_t + \bar{\eta}_t, \quad \text{e} \quad \mu_{2t} = \pi\mu_{1t} + \bar{\mu}_t, \quad \text{de modo que:}$$

$$\begin{aligned}y_{2t} &= \mu_{2t} + \epsilon_{2t} \\ &= \pi\mu_{1t} + \bar{\mu}_t + \epsilon_{2t}.\end{aligned}$$

Assim o modelo bivariado, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}y_{1t} &= \mu_{1t} + \epsilon_{1t} \\ y_{2t} &= \pi\mu_{1t} + \bar{\mu}_t + \epsilon_{2t} \\ \mu_{1,t+1} &= \mu_{1,t} + \eta_{1t} \\ \bar{\mu}_{t+1} &= \bar{\mu}_t + \bar{\eta}_t,\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{1\eta}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{2\eta}^2 - \rho_\eta^2 \sigma_{1\eta}^2 \end{pmatrix}.$$

No caso que $\rho_\eta = \pm 1$, $\bar{\mu}_t$ é constante, e há só uma tendência comum, que será denotada por μ_t^+ .

O modelo tem a forma:

$$\begin{aligned}y_{1t} &= \mu_t^+ + \epsilon_{1t} \\ y_{2t} &= \pi\mu_t^+ + \bar{\mu} + \epsilon_{2t} \\ \mu_{t+1}^+ &= \mu_t^+ + \eta_t^+, \quad \eta_t^+ \sim N(0, \sigma_{1\eta}^2).\end{aligned}$$

Se $\pi = 1$, a tendência da segunda série fica sempre a uma distância constante $\bar{\mu}$ da tendência na primeira série, isto é, $\mu_{2t} = \bar{\mu} + \mu_{1t}$.

Pré-multiplicando-se o vetor das observações pelo vetor $(-\pi, 1)$:

$$y_{2t} = \pi y_{1t} + \bar{\mu} + \epsilon_t,$$

$\epsilon_t = \epsilon_{2t} - \pi\epsilon_{1t}$, e $\pi = \frac{|\rho| \sigma_{2\eta}}{\rho \sigma_{1\eta}}$, dado que a combinação linear $y_{2t} - \pi y_{1t}$ é estacionária, tem-se que as séries são co-integradas.

2.3

Regressão com Coeficientes Variantes no Tempo

Suponha que no modelo de regressão linear $y_t = Z_t\beta + \epsilon_t$ o vetor de coeficientes β mude no tempo. Um modelo apropriado é obtido fazendo-se $\beta = \beta_t$ e deixando que cada coeficiente β_{it} , mude de acordo com o seguinte processo estocástico:

$$\beta_{i,t+1} = \beta_{it} + \eta_{it},$$

o que proporciona uma equação de estado para o vetor β_t , da forma $\beta_{t+1} = \beta_t + \eta_t$. Como este modelo é um caso particular de (2-1)-(2-2), ele pode ser trabalhado pela abordagem espaço de estado.

2.4

Variáveis Explicativas

O modelo de espaço de estado pode-se estender o modelo em forma de espaço de estado com a inclusão de variáveis explicativas e intervenções. Nesta situação, a equação das observações (2-1) é substituída pela equação:

$$y_t = Z_t\alpha_t + X_t\beta + \epsilon_t,$$

$X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt})$ é uma matriz de dimensão $p \times k$ de variáveis explicativas, e β é um vetor de dimensão $k \times 1$ de coeficientes de regressão, assumidos constantes, pois no caso que eles sejam variantes no tempo, podem ser incluídos no vetor de estado, numa generalização óbvia apresentada na seção anterior.

O modelo em espaço de estado com vetor de coeficientes constantes β

pode ser escrito como:

$$y_t = \begin{pmatrix} Z_t & X_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \epsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{t+1} \\ \beta_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_t & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_t \\ 0 \end{pmatrix} \eta_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

O vetor de estado inicial β_1 , pode ser considerado difuso ou fixo. No caso difuso o modelo para o estado inicial é:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \sim N \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, k \begin{pmatrix} P_\infty & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right\}$$

$k \rightarrow \infty$. O vetor β é considerado com o sufixo t , somente por conveniência, posto que $\beta_{t+1} = \beta_t = \beta$.