



**Julio César Coaquira Nina**

**Análise Não Linear da Instabilidade e Vibração  
de uma Coluna Pultrudada Reforçada com  
Fibras.**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves  
Co-orientador: Prof. Daniel Carlos Taissum Cardoso

Rio de Janeiro  
Setembro de 2020



**Julio César Coaquira Nina**

**Análise Não Linear da Instabilidade e Vibração  
de uma Coluna Pultrudada Reforçada com  
Fibras.**

**Tese de Doutorado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada  
pela Comissão Examinadora abaixo.

**Prof. Paulo Batista Gonçalves**

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Prof. Daniel Carlos Taissum Cardoso**

Co-orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira**

Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil, UFOP

**Prof. Diego Orlando**

Departamento de Mecânica e Energia, UERJ

**Prof. Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado.**

Escola de Engenharia Civil e Ambiental, UFG

**Profª. Deane Mesquita Roehl**

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de Setembro de 2020

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Julio César Coaquira Nina**

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Nacional de San Antonio Abad do Cusco, UNSAAC (Cusco - Peru), em Janeiro de 2010. Ingressou em março de 2014 no curso de Mestrado em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro (PUC-Rio), na área de Estruturas, atuando na área de Instabilidade e Dinâmica das Estruturas. Em 2016, continuando na mesma linha de pesquisa, iniciou o curso de doutorado na PUC-Rio.

#### Ficha Catalográfica

Coaquira Nina, Julio César

Análise não linear da instabilidade e vibração de uma coluna pultrudada reforçada com fibras / Julio César Coaquira Nina ; orientador: Paulo Batista Gonçalves ; co-orientador: Daniel Carlos Taissum Cardoso. – 2020.

253 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2020.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil e Ambiental - Teses. 2. Vigas de paredes delgadas. 3. Instabilidade dinâmica. 4. Oscilações não lineares. 5. Vigas de seção aberta. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Cardoso, Daniel Carlos Taissum. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. IV. Título.

CDD: 624

Dedico esta tese ao meu pai, que me deu a tranquilidade para ficar longe da  
família.

## Agradecimentos

Ao professor Paulo Batista Gonçalves, que soube transmitir com paciência e dedicação cada passo da orientação e tornou-se um símbolo como profissional e amigo.

Ao professor Diego Orlando, pela orientação e esclarecimento de muitas dúvidas que ajudaram no desenvolvimento da tese.

Aos professores que participaram da comissão examinadora.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado..

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Resumo

Nina, Julio César Coaquira; Gonçalves, Paulo Batista; Cardoso, Daniel Carlos Taissum, **Análise Não Linear da Instabilidade e Vibração de uma Coluna Pultrudada Reforçada com Fibras**. Rio de Janeiro, 2020. 253p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Há um interesse crescente na aplicação de vigas e colunas de paredes finas de materiais compostos em vários campos da engenharia. No entanto, pouco se sabe sobre seu comportamento não linear local e global sob cargas estáticas e dinâmicas. Aqui se apresenta a análise local e global de um perfil com seção canal de polímero reforçado com fibras. Na análise global, as equações não lineares de movimento da coluna de parede fina são derivadas em termos dos dois deslocamentos de flexão e do ângulo de torção, levando em consideração grandes deslocamentos, efeitos de empenamento e encurtamento. As equações de movimento não lineares governantes são discretizadas no espaço usando o método de Galerkin. Para a análise local, a seção do canal é discretizada em três placas, que são modeladas usando duas teorias não lineares de placas: a teoria clássica e a teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem. O sistema contínuo é discretizado usando o método de Ritz. Inicialmente são determinados analiticamente, através da resolução dos respectivos problemas de autovalor, a carga e modo crítico, as frequências naturais de vibração, bem como a relação carga-frequência do perfil em função da sua geometria e das propriedades do material. A seguir são obtidos, usando o método de Newton-Raphson e técnicas de continuação, os caminhos pós-críticos da estrutura perfeita e os caminhos não lineares de equilíbrio da estrutura imperfeita e investiga-se a sensibilidade a imperfeições, considerando diversos tipos de imperfeições geométricas. Finalmente, investigam-se as oscilações não lineares e a instabilidade paramétrica da coluna sob cargas axiais harmônicas. As equações de movimento não lineares são resolvidas numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. As regiões de instabilidade paramétrica são determinadas como uma função dos parâmetros do material ortotrópico, amortecimento e geometria da seção transversal. Os diagramas de bifurcação são obtidos empregando técnicas de continuação e o método da força bruta, e a estabilidade das soluções é posteriormente investigada usando a teoria de Floquet. A análise de bifurcação permite a identificação das bifurcações associadas às fronteiras de instabilidade paramétrica, bem como a existência de soluções coexistentes. Em seguida, a evolução das bacias de atração das soluções coexistentes em função da magnitude da excitação é investigada, a fim de avaliar a integridade dinâmica das soluções. Os resultados demonstram que a coluna pode perder estabilidade em níveis de carga bem abaixo da carga de flambagem estática e, portanto, o projetista deve ter cuidado ao lidar com essas estruturas sujeitas a cargas axiais variáveis no tempo.

## Palavras-chave

Vigas de paredes delgadas; Instabilidade dinâmica; oscilações não lineares; vigas de seção aberta.

## Abstract

Nina, Julio César Coaquira; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor); Cardoso, Daniel Carlos Taissum, **Nonlinear Instability and Vibration Analysis of an Pultruded Fiber Reinforced Column under Axial Load**. Rio de Janeiro, 2020. 253p. PhD. Thesis – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

There is growing interest in the application of thin-walled beams and columns of composite materials in various engineering fields. However, little is known about its local and global nonlinear behavior under static and dynamic loads. Here the local and global analysis of a profile with fiber reinforced polymer channel section is conducted. In the global analysis, the nonlinear equations of motion of the thin-walled column are derived in terms of the two flexural displacements and the torsion angle, taking into account large displacements, warping and shortening effects. The governing nonlinear equations of motion are discretized in space using the Galerkin method. For local analysis, the channel section is discretized into three plates, which are modeled using two non-linear plate theories: the classical theory and the first order shear deformation theory. The continuous system is discretized using the Ritz method. Initially, the load and critical mode of the profile, its natural frequencies, as well as the load-frequency relation are determined analytically as a function of the column geometry and material properties by solving the respective eigenvalue problems. Next, using the Newton-Raphson method and continuation techniques, the post-critical paths of the perfect structure and the non-linear equilibrium paths of the imperfect structure are obtained and the imperfection sensitivity is investigated, considering several types of geometric imperfections. Finally, the nonlinear oscillations and parametric instability of the column under harmonic axial loads are investigated. Non-linear equations of motion are solved numerically by the fourth-order Runge-Kutta method. The regions of parametric instability are determined as a function of the parameters of the orthotropic material, damping ratio and cross-sectional geometry. The bifurcation diagrams are obtained using continuation techniques and the brute force method, and the stability of the solutions is further investigated using Floquet's theory. The bifurcation analysis allows the identification of the bifurcations associated with the boundaries of parametric instability, as well as the existence of coexisting solutions. Then, the evolution of the basins of attraction of the coexisting solutions as a function of the forcing magnitude is investigated, in order to evaluate the dynamic integrity of the solutions. The results demonstrate that the column can lose stability at load levels well below the static buckling load and, therefore, the designer must be careful when dealing with these structures subject to time-varying axial loads.

## Keywords

Thin-walled beams; dynamics instability; nonlinear oscillations; beams with open cross-section.

# Sumário

1 Introdução	28
1.1 Definições e Breve Revisão Bibliográfica	28
1.2 Objetivo	37
1.3 Descrição da Tese	37
2 Elementos Estruturais Pultrudados	39
2.1 Aspectos Gerais dos Materiais Compostos	39
2.2 Componentes Constituintes de um Material Composto	39
2.3 Constantes Elásticas dos Materiais Compostos	42
3 Formulação para Análise do Comportamento Global	47
3.1 Formulação Matemática do Perfil com Imperfeição	47
3.1.1 Cinemática	47
3.2 Formulação Variacional	51
3.2.1 Variação da Energia de Interna Deformação	51
3.2.2 Variação do Trabalho das Cargas Externas	54
3.2.3 Variação da Energia Cinética	54
3.3 Equações de Movimento	55
3.3.1 Equações Constitutivas	56
3.3.2 Análise de Flambagem de uma Viga com Imperfeição Inicial	57
4 Formulação para Análise do Comportamento Local	61
4.1 Elementos da Teoria de Flexão de Placas.	61
4.2 Teoria não Linear de Placas de Von Kármán	64
4.2.1 Formulação Energética pela Teoria Clássica de Placas	67
4.2.2 Equações Não Lineares de Equilíbrio	68
4.2.3 Equações de Movimento	69
4.3 Equações de Movimento pela Teoria de Primeira Ordem	70
4.3.1 Formulação	70
4.3.2 Energia Potencial Estacionária	72
5 Análise da Estabilidade: Cargas e Modos Críticos	75
5.1 Análise da Flambagem Global – Discretização das Equações de Movimento	75
5.1.1 Linearização das Equações de Equilíbrio	77
5.1.2 Análise Paramétrica	79
5.1.3 Influência da Largura das Mesas	85
5.2 Análise da Flambagem Local	87
5.2.1 Carga Crítica para um Perfil C pela Teoria Clássica de Placas	90
5.2.2 Carga Crítica para um Perfil C pela Teoria de Primeira Ordem	90
5.3 Resultados e Comparações com o GBTUL	93
6 Frequências Naturais e Modos de Vibração	98

6.1 Análise Global	98
6.2 Análise Local	102
6.2.1 Frequências Naturais pela Teoria Clássica de Placas	102
6.2.2 Frequências Naturais pela Teoria de Primeira Ordem	106
6.2.3 Influência da Geometria da Seção	109
6.3 Frequência Fundamental e Comparações com o GBTUL	111
6.4 Relação Carga Axial-Frequência.	114
6.4.1 Análise Global	114
6.4.2 Análise Local	116
7 Análise do Comportamento Pós-crítico e Sensibilidade a Imperfeições	124
7.1 Equações Não Lineares de Equilíbrio - Análise Global	124
7.2 Equações Não Lineares de Equilíbrio - Análise Local	127
7.2.1 Teoria Clássica de Placas	127
7.2.1.1 Funções de Forma	127
7.2.2 Teoria de Primeira Ordem	129
7.2.2.1 Funções de Forma.	130
7.2.2.2 Caminho Pós-crítico	131
7.3 Mudanças no Modo de Flambagem com o Comprimento do Perfil	132
7.4 Comportamento Pós-crítico e Sensibilidade a Imperfeições na Flambagem Local	132
7.5 Comportamento Pós-crítico e Sensibilidade a Imperfeições na Flambagem Global por Flexo-Torção	135
7.6 Efeito do Comprimento do Perfil no Caminho Pós-crítico de Flexo-Torção	140
7.7 Efeito do Material no Caminho Pós-crítico de Flexo-Torção	141
7.8 Caminho Pós-crítico Logo, Antes e Depois do Comprimento Limite entre Flexo-torção e Flexão, $L_{ftf}$ .	143
7.9 Influência do Tipo de Imperfeição no Caminho Não Linear de Equilíbrio e Sensibilidade a Imperfeições – Modo de Flexo-Torção	145
7.9.1 Influência do Material na Sensibilidade a Imperfeições, $L=3.5m$	150
7.10 Análise da Coluna Imperfeita sob Compressão Axial com Comprimento Crítico	151
7.11 Influência da Largura da Mesa no Comportamento Pós-crítico	162
8 Vibrações Não Lineares e Instabilidade Paramétrica	175
8.1 Análise Local: Discretização e Determinação das Equações Não Lineares de Movimento	176
8.2 Análise Global: Discretização e Determinação das Equações Não Lineares de Movimento	192
8.2.1 Fronteiras de Instabilidade Paramétrica da Coluna Perfeita	193
8.2.2 Fronteiras de Escape e Bifurcações	202
9 Conclusões e Sugestões	214
9.1 Conclusões	214
9.2 Sugestões	218
10 Referências Bibliográficas	219

Apêndice I	
Comportamento Pós-crítico Local e Sensibilidade a Imperfeições	227
Apêndice II	
Comportamento Pós-crítico e Sensibilidade a Imperfeições para os Materiais M2 a M5 e ISO	230
Apêndice III	
Caminhos de Equilíbrio da Coluna com Imperfeição na Forma do Modo Crítico e com Comprimento Crítico para os Diferentes Materiais	239
Apêndice IV	
Equações Não Lineares de Mathieu para Análise Global e Local	244

## Lista de Figuras

Figura 1.1: Passarela de pedestre em Lleida, Espanha, construída com perfis pultrudados de GPRF ( <a href="https://en.wikipedia.org/wiki/GPRF_Lleida_Pedestrian_Bridge">https://en.wikipedia.org/wiki/GPRF_Lleida_Pedestrian_Bridge</a> )	30
Figura 1.2: Passarela de Prato, Itália: (a) vista lateral; (b) vista do deck mostrando as treliças construídas com PRFs em C (Wei et al., 2019).	31
Figura 1.3: Detalhe da estrutura em PRF para proteção das ruínas da igreja histórica de S. Maria Paganica, que desabou parcialmente após o terremoto de L'Aquila (Itália) em 4 de abril de 2009 (Boscato et al., 2012; Russo, 2013)	31
Figura 2.1: O processo de pultrusão ( <a href="https://bedfordreinforced.com/the-pultrusion-process/">https://bedfordreinforced.com/the-pultrusion-process/</a> )	41
Figura 2.2: Sistema de eixos do perfil pultrudado	42
Figura 3.1: Elementos de uma seção transversal aberta, Sistema de referência e Notação.	48
Figura 3.2: Componentes do deslocamento do centro de cisalhamento	48
Figura 3.3: Eixos normal e tangencial ao contorno da seção Transversal	50
Figura 3.4: Forças resultantes da seção.	53
Figura 3.5: Deflexão da coluna imperfeita, $\bar{w} = w - w_o$ .	58
Figura 4.1: Sistema de Referência da Placa e Tensões	61
Figura 4.2: Elemento de uma placa, $dx dy$ , na configuração indeformada	62
Figura 4.3: Configuração inicial indeformada	63
Figura 4.4: Hipóteses das teorias (a) <i>CPT</i> e (b) <i>FSDT</i> .	64
Figura 4.5: Normal ao plano médio antes e depois da deformação (Brush et al., 1975)	64
Figura 5.1: Sistema de referência, deslocamentos e dimensões da seção transversal (ver Tabela 5.1)	79
Figura 5.2: Modos globais de flambagem	81
Figura 5.3: Variação do comprimento crítico $L_{ftf}$ com a razão entre as constantes elásticas, $(E_1/G_{12})$ , perfil C 200x100x5. e diferentes materiais	83
Figura 5.4: Variação da carga axial com o comprimento para os dois primeiros modos de flambagem, perfil C 200x100x5. e	

diferentes materiais	84
Figura 5.5: Variação da carga crítica e modo crítico com a largura da mesa. Material M1. Perfil C 200x $b_f$ x5. L=3m	87
Figura 5.6: (a) geometria do perfil C. sistema de coordenadas global e discretização em três placas. (b) Elemento da placa (alma e mesa), sistema de coordenadas local e campo de deslocamento (os eixos x global e local têm a mesma direção)	87
Figura 5.7: Modo de flambagem do perfil C e compatibilidade das rotações nas junções alma-mesa.	88
Figura 5.8: Relação Carga axial vs razão de comprimento e alma do perfil C 200x100x5. Teoria clássica de placas (CPT)	93
Figura 5.9: Variação da carga crítica com o comprimento da Viga-coluna, calculados com diferentes teorias e comparadas com resultados do GBTUL, e diferentes materiais, Perfil C 200x100x5.	94
Figura 5.10: Modos de deformação da seção transversal do Perfil C do código GBTUL.	95
Figura 5.11: Participação modal no modo de flambagem do modelo GBTUL, para uma viga-coluna simplesmente apoiada de seção C 200x100x5	96
Figura 5.12: Variação da carga crítica do perfil C em função do parâmetro geométrico $b_f/b_w$ para diferentes materiais	97
Figura 6.1: Variação da frequência natural com o comprimento, para diferentes materiais	102
Figura 6.2: Modo de vibração do perfil C e compatibilidade das rotações nas junções alma-mesa.	105
Figura 6.3: Variação da frequência com o comprimento para diferentes números de meia ondas, m=1..5, FSDT, Material M1, Perfil 200x100x5	109
Figura 6.4: Variação da frequência fundamental do perfil C em função do parâmetro geométrico $b_f/b_w$ para diferentes materiais ortotrópico	110
Figura 6.5: Variação da frequência natural com o comprimento da Viga-Coluna, calculados com diferentes teorias de placas e comparadas com resultados do GBTUL, e diferentes materiais, Perfil C 200x100x5	112
Figura 6.6: Participação modal no modo de vibração do modelo GBTUL, para uma Viga-Coluna simplesmente apoiada de seção C 200x100x5 e diferentes materiais pultrudados	113
Figura 6.7: Variação das frequências naturais com a carga axial, L=4m	115
Figura 6.8: Variação das frequências naturais com a carga axial L=8m	116

Figura 6.9: Frequências naturais e cargas críticas para o material M1 obtidos pela formulação local	117
Figura 6.10: Variação das frequências naturais com a carga axial para $L = L_{cr1}$ , $m = 1$ , CPT	118
Figura 6.11: Variação das frequências naturais com a carga axial para $L = L_{cr2}$ , $m = 2$ , CPT	119
Figura 6.12: Variação das frequências naturais com a carga axial para $L = L_{cr3}$ , $m = 3$ , CPT	120
Figura 6.13: Variação das frequências naturais com a carga axial para $L = L_{cr1}$ , $m = 1$ , FSDT.	121
Figura 6.14: Variação das frequências naturais com a carga axial para $L = L_{cr2}$ , $m = 2$ , FSDT.	122
Figura 6.15: Variação das frequências naturais com a carga axial para $L = L_{cr3}$ , $m = 3$ , FSDT.	123
Figura 7.1: Comparação do caminho pós-crítico de equilíbrio pela teoria clássica de placas e pela teoria de primeira ordem, Material M1, $L=L_{cr}$ .	133
Figura 7.2: Caminho pós-crítico de equilíbrio pela teoria clássica de placas e caminhos não lineares de equilíbrio da estrutura imperfeita. Material M1. $L=L_{cr}$ .	134
Figura 7.3: Comparação dos caminhos pós-críticos dos seis materiais. (a) CPT, (b) FSDT. $L=L_{cr}$ .	134
Figura 7.4: Caminho pós-crítico de equilíbrio do perfil C 200x100x5, Material M1. $L = 3m$ .	136
Figura 7.5: Deslocamento da seção transversal no modo global de flexo-torção. Deslocamentos do centro de gravidade.	136
Figura 7.6: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho pós-crítico de equilíbrio.	137
Figura 7.7: Caminho de equilíbrio do perfil C 200x100x5, Material M1, com imperfeição $w_0 = 0.0010L$ , $L = 3.5m$ .	138
Figura 7.8: Deslocamento da seção C 200x100x5. material M1. com imperfeição inicial $w_0 = 0.0035m$ , $L = 3.5m$ .	139
Figura 7.9: Caminho pós-crítico, Material M1, Perfil C 200x100x5, $L_{lg} < L < L_{ftf}$ .	141
Figura 7.10: Caminho pós-crítico para uma coluna de $L=3.5 m$ ( $L < L_{ftf}$ ), e diferentes materiais.	142
Figura 7.11: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material M1.	143
Figura 7.12: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material M2.	144
Figura 7.13: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois	

do comprimento crítico, Material M3.	144
Figura 7.14: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material M4.	144
Figura 7.15: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material M5.	145
Figura 7.16: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material ISO.	145
Figura 7.17: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $w_o$ sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x100x5, $L=3.5m$ .	148
Figura 7.18: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $\theta_{ox}$ sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x100x5, $L=3.5m$ .	149
Figura 7.19: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição na forma do modo crítico $k(0, -0.986L, -0.162)$ sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x100x5, $L=4m$ .	150
Figura 7.20: Sensibilidade dos resultados obtidos para os seis materiais usados na análise, Perfil C 200x100x5, $L=3.5m$ .	151
Figura 7.21: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $v_o$ sob carga axial, Material M1, Perfil C 200x100x5, $L = L_{ftf}$	152
Figura 7.22: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, perfil C 200x100x5, material M1, imperfeição $v_o = 0.05 L_{ftf}$ , $L = L_{ftf}$ .	152
Figura 7.23: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $w_o$ sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x100x5, $L = L_{ftf}$ .	153
Figura 7.24: Caminho de equilíbrio imperfeito do perfil C 200x100x5. Material M1, imperfeição $w_o = 0.0050L_{ftf}$ , $L = L_{ftf}$ .	154
Figura 7.25: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, material M1, imperfeição $w_o = 0.0050L_{ftf}$ , $L = L_{ftf}$ .	155
Figura 7.26: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $\theta_{ox}$ sob carga axial, Material M1, Perfil C 200x100x5, $L = L_{ftf}$ .	156
Figura 7.27: Caminho de equilíbrio imperfeito do perfil C 200x100x5, material M1, imperfeição $\theta_{ox} = 0.08^\circ$ , $L = L_{ftf}$ .	157
Figura 7.28: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, material M1, imperfeição $\theta_{ox} = 0.08^\circ$ , $L = L_{ftf}$ .	158
Figura 7.29: Sensibilidade dos resultados obtidos para os seis materiais usados na análise, Perfil C 200x100x5, $L = L_{ftf}$ .	158

Figura 7.30: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no modo crítico sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x100x5, $L = L_{ftf}$ .	159
Figura 7.31: Caminho de equilíbrio imperfeito do perfil C 200x100x5, Material M1, imperfeição $k(0, -0.987, -0.160)$ , $k = 0.005$ , $L = L_{ftf}$ .	160
Figura 7.32: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, Material M1, imperfeição $k(0, -0.987, -0.160)$ , $k = 0.005$ , $L = L_{ftf}$ .	161
Figura 7.33: Sensibilidade dos resultados obtidos para os seis materiais usados na análise, no modo e comprimento crítico, Perfil C 200x100x5. $L = L_{ftf}$ .	161
Figura 7.34: Variação da carga crítica com a largura da mesa, modos de flambagem, Material M1, Perfil C 200x $b_f$ x5, $L=3m$ .	162
Figura 7.35: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição em $v_o$ sob carga axial, material M1, Perfil C 200x $b_f$ x5, $L=3m$ .	163
Figura 7.36: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, perfil C 200x80x5, Material M1, imperfeição $v_o = 0.08 L_{ftf}$ .	164
Figura 7.37: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $\theta_{ox}$ sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x80x5, $L=3m$ , $b_f = 8cm$	165
Figura 7.38: Caminho de equilíbrio imperfeito do perfil C 200x80x5. material M1, imperfeição $\theta_{ox} = 0.08^\circ$ , $L = 3m$	166
Figura 7.39: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, perfil C 200x80x5, Material M1, imperfeição $\theta_{ox} = 0.08^\circ$ , $L = 3m$ .	167
Figura 7.40: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $w_o$ sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x10 $b_f$ x5, $L=3m$ , $b_f = 8cm$ .	168
Figura 7.41: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $w_o$ sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x10 $b_f$ x5, $L=3m$ , $b_f = 9cm$ .	169
Figura 7.42: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $\theta_{ox}$ sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x10 $b_f$ x5, $L=3m$ , $b_f = 9cm$ .	170
Figura 7.43: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $w_o$ sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x10 $b_f$ x5, $L=3m$ , $b_f = 10cm$ .	171
Figura 7.44: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição $\theta_{ox}$ sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x10 $b_f$ x5, $L=3m$ , $b_f = 10cm$ .	172

- Figura 7.45: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no modo crítico,  $(v_o, w_o, \theta_{ox}) = \alpha(0, -0.986, -0.164)$ ,  $\alpha = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05$ , sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M5, Perfil C 200x100x5, L=3.5m. 173
- Figura 7.46: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição nas três direções,  $(v_o, w_o, \theta_{ox}) = \alpha(0.1, -0.986, -0.164)$ ,  $\alpha = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05$ , sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M5, Perfil C 200x100x5, L=3.5m. 174
- Figura 7.47: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no eixo de menor e de maior inércia,  $(v_o, w_o, \theta_{ox}) = (\alpha, -0.01, 0)$ ,  $\alpha = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05$ , sob carga axial, Material M5, Perfil C 200x100x5, L=3.5m. 174
- Figura 8.1: Diagrama de bifurcação do mapa de Poincaré no plano de frequência de excitação vs. magnitude de excitação,  $\xi = 1.45\%$ , (consulte a Tabela 5.2). 177
- Figura 8.2: Limites de estabilidade no espaço de controle de força normalizado,  $\xi = 1.45\%$ . 179
- Figura 8.3: (a) Relação não-linear de frequência-amplitude em função das propriedades do material; (b) Planos de fase para  $\delta = 7.0$ . 179
- Figura 8.4: (a) Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle o parâmetro de frequência de excitação  $\delta$  para valores crescentes da grandeza de excitação,  $Q_d$ , Material M1; (b) Influência do material no diagrama de bifurcação para  $Q_d = 0.10$  na principal região de ressonância paramétrica,  $\xi = 1.45\%$ . 180
- Figura 8.5: a) Resposta típica na região de ressonância paramétrica principal exibindo uma resposta ressonante 2:1; b) Respostas típicas na região de ressonância fundamental exibindo duas respostas ressonantes coexistentes 1:1. Os pontos indicam os pontos fixos do mapa de Poincaré.  $\xi = 1.45\%$ . 181
- Figura 8.6: Diagramas de bifurcação do mapa estroboscópico de Poincaré, tendo como parâmetro de controle o parâmetro de magnitude de excitação  $Q_d$  para três valores selecionados da razão de frequência  $\delta$  na principal região de ressonância paramétrica. PSP - Pitchfork supercrítico, PSB - Pitchfork subcrítico, FSP - Flip supercrítico, FSB - Flip subcrítico, SN - Nó de sela.  $\xi = 1.45\%$ . 182
- Figura 8.7: Diagramas de bifurcação do mapa estroboscópico de Poincaré, tendo como parâmetro de controle o parâmetro de magnitude de excitação  $Q_d$  para três valores selecionados da razão de frequência  $\delta$  na região de ressonância fundamental. PSP - Pitchfork supercrítico, PSB - Pitchfork subcrítico, FSP - Flip supercrítico, FSB - Flip subcrítico, SN - Nó de sela.  $\xi = 1.45\%$ . 183
- Figura 8.8: Evolução das bacias de atração para valores selecionados do parâmetro de frequência de forçamento,  $\delta$ ,  $Q_d = 0.10$ ,  $\xi = 1.45\%$ . 184

Figura 8.9: Evolução das bacias de atração das duas soluções coexistentes variando a magnitude da força escalada $Q_d$ como parâmetro de bifurcação, $\delta = 2.25$ , (principal região de ressonância paramétrica), $\xi = 1.45\%$ .	185
Figura 8.10: Evolução das bacias de atração das três soluções coexistentes variando a amplitude de excitação escalada $Q_d$ como parâmetro de bifurcação. $\delta = 1.10$ (região de ressonância fundamental). $\xi = 1.45\%$ .	186
Figura 8.11: Influência do parâmetro de amortecimento viscoso linear, $\xi$ , nos limites de estabilidade no espaço de controle de força normalizado.	187
Figura 8.12: Influência da pré-carga estática, $Q_s$ , no limite da instabilidade paramétrica no espaço de controle de força normalizado. $\xi = 1.45\%$ .	188
Figura 8.13: a) Diagramas de bifurcação do mapa estroboscópico de Poincaré tendo como parâmetro de controle o parâmetro de magnitude de excitação $Q_d$ para aumentar a pré-carga estática na principal região de ressonância paramétrica. Material M1. b) Influência do material na magnitude da vibração, $Q_d = 0.25$ . $\xi = 1.45\%$ .	188
Figura 8.14: Bacias de atração e soluções coexistentes para a coluna pré-carregada na principal região de ressonância paramétrica para valores crescentes da magnitude de excitação $Q_d$ . $Q_s=0.75$ e $\delta = \Omega_f/\omega_o = 1.0$ ( $\Omega_f/\omega_p = 2.0$ ). Os pontos correspondem aos pontos fixos do mapa de Poincaré. $\xi = 1.45\%$ .	189 - 191
Figura 8.15: Relação frequência-amplitude para valores crescentes da largura do flange $b_f$ (em mm). $b_w = 200mm$ .	191
Figura 8.16: Diagrama de bifurcação do mapa de Poincaré no plano de frequência de excitação vs. magnitude de excitação, $L=4m$ , $\xi = 1.45\%$ .	195
Figura 8.17: Limites de estabilidade normalizado, $L=4m$ , $\xi = 1.45\%$ : (a) frequência de excitação normalizada com respeito à frequência fundamental; (b) frequência de excitação normalizada com respeito à menor frequência de flexão	196
Figura 8.18: Análise da influência do parâmetro $b_f$ nas fronteiras de instabilidade, Material M4, $L=4m$ , $\xi = 1.45\%$ .	197
Figura 8.19: Análise da influência da relação $b_f/b_w$ nas fronteiras de instabilidade, Material M4, $L=4m$ , $\xi = 1.45\%$ . (a) frequência de excitação normalizada com respeito à frequência fundamental; (b) frequência de excitação normalizada com respeito à menor frequência de flexão	198
Figura 8.20: Análise da influência do amortecimento nas fronteiras de instabilidade. Material M4, $L=4m$ , $\xi = 1.45\%$ .	199
Figura 8.21: Análise da influência da carga estática nas fronteiras	

de instabilidade, Material M4, $L=4\text{m}$ , $\xi = 1.45\%$ .	200
Figura 8.22: Análise da influência do comprimento da coluna nas fronteiras de estabilidade, Material M5, $\xi = 1.45\%$ .	201
Figura 8.23: Análise da influência do comprimento da coluna nas fronteiras de estabilidade, Material M5, $\xi = 1.45\%$ . Força normalizada.	202
Figura 8.24: Fronteiras de estabilidade normalizado para diferentes comprimentos. Material M5, $\xi = 1.45\%$ .	204
Figura 8.25: Curva de ressonância, Material M5, $L=5.38\text{m}$ , $Q_d = 0.75$ .	205
Figura 8.26: Diagramas de bifurcação, Material M5, $L=5.38\text{m}$ , Região de ressonância fundamental, $\delta = 1.00$ .	206
Figura 8.27: Diagramas de bifurcação, Material M5, $L=5.38\text{m}$ , $\delta = 1.00$ .	206
Figura 8.28: Resposta no tempo dos três graus de liberdade antes e na bifurcação referente ao escape, Material M5, $L=5.38\text{m}$ , $\delta = 1.00$ .	207
Figura 8.29: Bacias de atração, Material M5, $L=5.38\text{m}$ , $\delta = 1.00$ .	208
Figura 8.30: Bacias de atração, Material M5, $L=5.38\text{m}$ , $\delta = 1.00$ (não considerando perturbações nos graus de liberdade $w$ e $\theta_x$ ).	208
Figura 8.31: Diagramas de bifurcação, Material M5, $L=5.38\text{m}$ , (Região principal de ressonância paramétrica em torno de $\delta = 2.00$ ).	209
Figura 8.32: Diagramas de bifurcação, Material M5, $L=5.38\text{m}$ , $\delta = 2$ .	209
Figura 8.33: Diagramas de bifurcação, Material M5, $L=2.5\text{m}$ , (Região de ressonância fundamental, $\delta = 1.00$ ).	210
Figura 8.34: Bacias de atração, Material M5, $L=2.5\text{m}$ , $\delta = 1.30$ .	211
Figura 8.35: Diagramas de bifurcação, Material M5, $L=2.5\text{m}$ .	212
Figura 8.36: Diagramas de bifurcação, Material M5, $L=2.5\text{m}$ , $\delta = 2.50$ (salto dinâmico e escape), Método da força bruta.	212
Figura 8.37: Evolução das bacias de atração, material M5, $L=2.5\text{m}$ , $\delta = 2.50$	213

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Coeficientes típicos de rigidez e de contração transversal (condição seca).	44
Tabela 2.2: Propriedades mecânicas dos componentes de pultrudados	45
Tabela 2.3: Propriedades mecânicas típicas de elementos pultrudados (Vedernikov et al., 2020)	46
Tabela 5.1: Dimensões e propriedades geométricas da seção C 200x100X5.	79
Tabela 5.2: Propriedades dos cinco materiais ortotrópicos (M1 a M5) e do material isotrópico de referência (ISO).	80
Tabela 5.3: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3.5$ m, Material M1.	81
Tabela 5.4: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3.5$ m, Material M2.	81
Tabela 5.5: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3.5$ m, Material M3.	81
Tabela 5.6: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3.5$ m, Material M4.	81
Tabela 5.7: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3.5$ m, Material M5.	82
Tabela 5.8: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3.5$ m, Material ISO.	82
Tabela 5.9: Resumo da carga e modo crítico para os seis materiais, $L=3.5$ m.	82
Tabela 5.10: Comprimento crítico para um perfil C 200x100x5 e diferentes materiais.	83
Tabela 5.11: Cargas críticas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3$ m, Material M1. $b_f = 3$ cm.	85
Tabela 5.12: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3$ m, Material M1. $b_f = 4$ cm.	85
Tabela 5.13: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3$ m, Material M1. $b_f = 5$ cm.	85
Tabela 5.14: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3$ m, Material M1. $b_f = 6$ cm.	86
Tabela 5.15: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3$ m, Material M1. $b_f = 7$ cm.	86

Tabela 5.16: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3\text{m}$ , Material M1. $b_f = 8\text{ cm}$ .	86
Tabela 5.17: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3\text{m}$ , Material M1. $b_f = 9\text{ cm}$ .	86
Tabela 5.18: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, $L=3\text{m}$ , Material M1. $b_f = 10\text{ cm}$ .	86
Tabela 6.1: Frequências naturais em função do número de semiondas axiais $m$ para a Viga-Coluna simplesmente apoiada, $L=3\text{ m}$ , Material M1.	103
Tabela 6.2: Frequência e modo fundamental de vibração (modo local) para os seis materiais, $L=2.0\text{ m}$ .	103
Tabela 6.3: Frequência e modo fundamental de vibração (modo global) para os seis materiais, $L=3.5\text{ m}$ .	103
Tabela 6.4: Influência de $b_f$ na frequência fundamental no caso global, material M1, $L=3.5\text{m}$ .	104
Tabela 6.5: Frequência e modo fundamental de vibração (modo local) para os seis materiais, $L=0.5\text{ m}$ .	109
Tabela 7.1: Comprimento onde os modos de flambagem muda de local para global, $L_{lg}$ , e de flexo-torção para flexão, $L_{ftf}$ .	132
Tabela 7.2: Cargas críticas ordenadas em ordem crescente para todos os materiais usadas na análise numérica - $L=3.5\text{m}$	142
Tabela 7.3: Imperfeições em $v - v_o = \alpha L$	146
Tabela 7.4: Imperfeições em $w - w_o = \beta L$	146
Tabela 7.5: Imperfeições em $\theta_x - \theta_{ox} = \vartheta\pi/180$	147
Tabela 7.6: Comprimento Crítico, o modo de flambagem de flexão e flexo-torção são os mesmos.	151
Tabela 8.1: Carga crítica axial e frequência fundamental em função das propriedades do material.	176
Tabela 8.2: Variação da carga crítica mínima nas três primeiras regiões de instabilidade paramétrica. Material M4, $L=4\text{m}$ .	199
Tabela 8.3: Variação da frequência natural com o comprimento. $L_{ftf} = 5.38\text{m}$ .	201

## Lista de símbolos

$A$	Área da seção transversal.
$B_{\omega}$	Bi momento.
$b_w, t_w$	Dimensões da alma.
$b_f, t_f$	Dimensões da mesa.
“C”	Seções do perfil tipo canal ( <i>channel section</i> ).
$d$	Distância de C ao ponto o.
$ds$	Diferencial de comprimento.
$E$	Módulo de Young.
$e_z, e_y$	Excentricidade do carregamento lateral $Q_z$ .
$\{F\}$	Vetor de forças externas.
$F, F_v$	Resultante da força externa.
$f(x), g(x)$	Modos de vibração a flexão da viga.
CG	Centro de gravidade.
$G_{ij}$	Módulo de cisalhamento.
3GDL	Três graus de liberdade: $u$ , $v$ e $w$
$h(x)$	primeiro modo de torção.
$h(s)$	Distância perpendicular desde o centro de cisalhamento até o contorno da seção.
$I$	Momento de inércia.
$I_o$	Momento polar de inércia com relação ao centro de cisalhamento.
$I_R$	Quarto momento de inércia com relação ao centro de cisalhamento.
$I_t$	Constante de torção de maior ordem.
$I_y$	Momento principal de inércia com relação ao eixo $Y$ .
$I_z$	Momento principal de inércia com relação ao eixo $Z$ .
$I_{\omega}, C_w$	Constantes de empenamento.
$I_{max}, I_2$	Momento de inércia máximo.
$I_{min}, I_1$	Momento de inércia mínimo.
$I_{yz}$	Produto de inércia.
$J$	Constante de torção de St. Venant.

$[K_e]$	Matriz de rigidez elástica.
$[K_G]$	Matriz de rigidez geométrica.
$K_y$	Curvatura com relação ao eixo $Y$ .
$K_z$	Curvatura com relação ao eixo $Z$ .
$L$	Comprimento do elemento.
$L_a$	Função de Lagrange.
$[M]$	Matriz de massa.
$M_{oy}, M_{oz}$	Máximos momentos de flexão.
$M_{ocr}$	Momento crítico estático.
$M_o$	Momento com respeito ao ponto $o$ .
$M_s$	Momento estático.
$M_c$	Momento no centro de cisalhamento.
$m$	Massa do elemento por unidade de comprimento.
$m_x$	Momento de torção distribuído.
$M_y$	Momento de torção com relação ao eixo $Y$ .
$M_z$	Momento de torção com relação ao eixo $Z$ .
$M_R$	Tensão resultante de ordem superior.
$M_{sv}$	Momento de torção de St. Venant.
$M_{max}$	Momento máximo de flexão.
$M_{CR}$	Momento crítico de flambagem.
$o$	Ponto acima da linha média da seção.
$P, N$	Carga axial compressiva.
$P_y, P_z, P_\theta$	Cargas de flambagem em flexão e torção.
$P_{cr}$	Carga crítica de flambagem.
$P_e$	Carga crítica de Euler.
$q_x, q_y, q_z$	Componentes da carga distribuída nos eixos $X, Y$ e $Z$ .
$q_{CR}$	Carga crítica de flambagem.
$q_{ymax}, q_{zmax}$	Cargas máximas de plastificação nas direções $v$ e $w$ .
$Q_z, Q_y$	Forças laterais de excitação.
$Q_{zcr}$	Carregamento lateral crítico estático.
$r$	Vetor radial.
$r(s)$	Componente curvilíneo do centro de cisalhamento nas coordenadas de referência.
$R$	Distância de um ponto $M$ ao centro de cisalhamento.
$s$	Coordenada curvilínea.

SC	Centro de cisalhamento.
$S_t$	Perímetro da seção.
$s_1, s_2$	Pontos da coordenada curvilínea.
$t$	Espessura da seção.
$T$	Momento de torção
$T, K$	Energia cinética.
$T = 2\pi/\omega_o$	Período
$t_f, t_w$	Espessuras da seção transversal.
$T_t$	Momento torsor.
$T_e$	Momento torsor devido ao empenamento.
$U$	Energia interna de deformação.
$u, v, w$	Componentes de deslocamento do centro de cisalhamento nos eixos $X, Y$ e $Z$ .
$u_M, v_M, w_M$	Componentes de deslocamento do ponto $M$ nos eixos $X, Y$ e $Z$ .
$v_t$	Componente de deslocamento do ponto $M$ na coordenada curvilínea no eixo $Y$ .
$V, V_y, V_z$	Esforços cortantes.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$\nu, w, \theta_x$	Deslocamentos dependentes do tempo.
$\nu_{max}$	Deslocamentos máximos na direção $Y$ .
$\bar{\nu}, \bar{w}, \bar{\theta}_x$	Amplitudes modais.
$w_t$	Componente do deslocamento do ponto $M$ na coordenada curvilínea no eixo $Z$ .
$W$	Trabalho das cargas externas.
$w_{max}$	Deslocamentos máximos na direção $Z$ .
$X, Y, Z$	Eixos principais
$x, y, z$	Coordenadas principais do ponto $M$ nos eixos $X, Y$ e $Z$ .
$y_c, z_c$	Coordenadas principais do centro de cisalhamento SC nos eixos $Y$ e $Z$ .
$y_{CG}, z_{CG}$	Coordenadas do centro de gravidade.
$y_0, y_2, y_4$	Amplitudes dos deslocamentos $\nu, w, \theta_x$
$y_1, y_3, y_5$	Velocidades.
$\alpha$	Ângulo entre o eixo $Y$ e a tangente à coordenada curvilínea.
$\beta_y, \beta_z$	Coefficientes de Wagner nos eixos $Y$ e $Z$ .
$\beta_\omega$	Coefficiente de Wagner.

$\beta_v, \beta_w$	Fatores de amplificação dinâmica nas direções v e w.
$\delta = \Omega_f / \omega_o$	Taxa da frequência
$\bar{\delta} = \Omega_f / \omega_f$	Taxa da frequência associada ao modo de flexão.
$\xi$	Coefficiente de amortecimento viscoso.
$\varepsilon_{xx}$	Deformação axial.
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Componentes da deformação axial.
$\varepsilon_{xy}$	Deformação de cisalhamento no plano XY.
$\varepsilon_{xz}$	Deformação de cisalhamento no plano XZ.
$\lambda$	Autovalores.
$\Omega_y, \Omega_z, \Omega_f$	Frequências das forças de excitação.
$\rho$	Densidade do material.
$m = \rho A$	Masa por unidade de comprimento do perfil.
$\omega_o$	Menor frequência natural.
$\omega_f$	Frequência associada ao modo de flexão.
$\omega_{o1}, \omega_{o2}, \omega_{o3}$	Primeira, segunda e terça frequência natural.
$\omega_s$	Coordenada setorial ou área setorial principal.
$\theta_x$	Ângulo de rotação em torno do eixo x.
$\varepsilon_i$	Deformações normais na direção i
$\kappa_i$	Curvaturas
$\gamma_{ij}$	Deformações angulares no plano ij
$\sigma_i$	Tensões normais na direção i
$\tau_{ij}$	Tensões de cisalhamento no plano ij
$\nu_{ij}$	Coefficiente de Poisson (deformação causada na direção j devida a uma solicitação na direção i).
$E_i$	Módulo de elasticidade na direção i
$G_{ij}$	Módulo de cisalhamento no plano ij
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	Deslocamentos nas direções X, Y e Z em um ponto qualquer dentro a espessura da placa.
$u, v, w$	Deslocamentos no plano médio da placa nas direções X, Y, e Z, respectivamente.
$\psi_x, \psi_y$	Rotações da seção transversal em torno dos eixos y e x, respectivamente.
$E_{ij}$	Componente do tensor de deformações de Green
$N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}$	Intensidades de forças normais e cortantes transversais na placa. <b><math>kN/m</math></b> .

$Q_x, Q_y$	Intensidades de forças transversais cortantes, $kN/m$ .
$M_x, M_y$	Intensidades de momento flector, $kN - m/m$
$M_{xy}, M_{yx}$	Intensidades de momento torsor, $kN - m/m$
$\beta_x$ e $\beta_y$	rotações relativas aos eixos $y$ e $x$ , respectivamente.
$Q_{ij}$	Componentes da matriz de rigidez do material ortotrópico
$A_{ij}$	Parâmetros de rigidez extensional da matriz constitutiva da placa.
$D_{ij}, D$	Parâmetros de rigidez por flexão da matriz constitutiva da placa.
$A_{\alpha\beta}$ ( $\alpha, \beta = 4, 5$ )	Parâmetros de rigidez associados aos esforços de cisalhamento transversal.
$P_{cr}$	Carga crítica
$N_x, N_y, N_{xy}$	Carga crítica por unidade de comprimento.
$m, n$	Número de semiondas ao longo dos eixos $x$ e $y$
$\Pi$	Energia potencial total
$U$	Energia de interna deformação para uma placa.
$U_m$	Energia de interna deformação da membrana.
$U_b$	Energia de interna deformação por flexão da placa.
$\Omega$	Potencial gravitacional das cargas aplicadas para o sistema conservativo.
$F$	Integrando da energia potencial estacionaria.
$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$	Funções que devem respeitar as condições de contorno na teoria clássica de placas.
$\tilde{\omega}$	Frequência natural pela teoria clássica de placas.
$b_f$	Largura das mesas de uma seção aberta.
$L_{lg}$	Comprimento indicando a mudança do modo local para global.
$L_{ftf}$	Comprimento indicando a mudança do modo de flexo-torção para flexão.
$L_{cr}$	Comprimento crítico para uma semionda pela teoria local
$L_{crm}$	Comprimento crítico para $m$ semiondas pela teoria local
$P_{lim}$	Carga máxima ou carga limite.
$P_{cr}$	Carga crítica
$P_{crm}$	Carga crítica associada ao modo $m$
$P_s$	Carga axial estática resultante.
$P_d$	Magnitude da excitação harmónica axial.

$Q_d$	Fator da carga de instabilidade paramétrica.
$Q_{cl}$	Fator da carga de colapso, carga limite ou carga máxima.
$\tau = \omega_o t$	Tempo não-dimensional.
$Q_s$	Fator da carga estática.
$Q_d$	Fator da carga dinâmica.
$Q_{dcr}$	Fator da carga crítica dinâmica (menor valor).
$N_s$	Carga axial estática por unidade de comprimento.
$N_d$	Magnitude da excitação harmônica por unidade de comprimento.
$\alpha, \beta, \vartheta$	Fator de proporcionalidade da imperfeição.

*"There are no constraints on the human mind, no walls around the human spirit, no barriers to our progress except those we ourselves erect"*

*"There are no great limits to growth because there are no limits of human intelligence, imagination, and wonder"*

Ronald Reagan

# 1

## Introdução

### 1.1

#### Definições e Breve Revisão Bibliográfica

O uso de materiais compostos (também denominados compósitos) reforçados com fibras no campo da engenharia estrutural tem crescido nas últimas décadas, sendo seu uso validado por inúmeras pesquisas e por aplicações em estruturas reais. Dentre estes, o uso de perfis de paredes finas feitos de Polímeros Reforçados com Fibras (PRF, FRP em inglês) tem aumentado, especialmente onde as características de leveza e durabilidade são de primordial importância. Os materiais compostos consistem em dois ou mais materiais que retêm suas respectivas características químicas e físicas quando combinados, resultando em um material com propriedades únicas com relação aquelas dos constituintes tomados separadamente. Ele é composto de um material mais rígido e resistente, denominado reforço, imerso em uma matriz com propriedades mecânicas inferiores às do reforço. Enquanto o reforço confere rigidez e resistência ao composto, a matriz é responsável pela proteção do reforço e redistribuição de forças.

Dentre os materiais compostos usados em engenharia, observa-se um crescente interesse naqueles obtidos pela combinação de fibras imersas em uma matriz polimérica, sobretudo os produzidos pelo processo de pultrusão (Zaman et al., 2013; Cardoso et al., 2014a,b; Vedernikov et al., 2020). A pultrusão é um dentre os diversos processos de fabricação possíveis. Está dentre os mais prevalentes devido à sua automação e alta capacidade de produção. O processo consiste em puxar camadas de material fibroso impregnado por uma resina, através de um molde aquecido e, assim, formar o membro estrutural retilíneo e de seção transversal constante (Clarke, 2003; Qiao e Shan, 2005). A maioria dos elementos de polímero reforçado com fibra (PRF) para aplicações em engenharia civil são compostas por matriz polimérica, como poliéster, vinil-éster e epóxi, e reforço normalmente de fibra de vidro, carbono ou aramida. Mantas ou tecidos também são usados para fornecer propriedades mecânicas mínimas na direção transversal. Os elementos de paredes finas de polímero reforçado com fibra são elementos estruturais importantes. Polímeros reforçados com fibras de carbono e de vidro (CFRP e GFRP em inglês) são os mais comuns.

Inicialmente, as aplicações mais comuns dos PRFs foram nas indústrias aeroespacial, automotiva e marítima, como materiais de baixo peso e alta resistência. A aplicação de compósitos em aeronaves civis ou militares seguiu os estágios típicos pelos quais toda nova tecnologia passa durante sua implementação. No início, as aplicações eram limitadas a estruturas secundárias. Esse uso limitado foi seguido por aplicações mais amplas, primeiro em aeronaves

menores, aproveitando a experiência adquirida anteriormente. Mais recentemente, com o aumento da demanda por eficiência e baixos custos de operação, os compósitos têm sido amplamente aplicados em aeronaves maiores (Kassapoglou, 2010).

Na engenharia civil, os compósitos de matriz polimérica teve seu uso na indústria da construção relegado por muitos anos a aplicações não estruturais como guarnições, revestimento e acabamento. Apesar disso, o setor de construção é um dos maiores mercados de polímeros reforçados com fibra. Em 1999, este setor era o segundo maior consumidor mundial de compósitos poliméricos, representando 35% do mercado global (Zaman et al., 2013; Weaver, 1999). Nas últimas décadas, tem havido um esforço para migrar os perfis reforçados por fibras para aplicações como elementos estruturais como vigas e colunas. Exemplos são encontrados em todo o mundo de componentes em edifícios, passarelas de pedestres ou pontes para veículos com vãos limitados, ferrovias e outras obras de infraestrutura de engenharia civil, além de aplicações geotécnicas (Moy, 2013; Bank, 2006).

Com respeito aos materiais tradicionais, os componentes de PRF podem oferecer vantagens significativas na montagem, transporte e lançamento de partes da estrutura. Suas vantagens não se limitam a leveza, mas incluem alto desempenho mecânico, anisotropia controlada, altas resistência e rigidez específica, excelente resistência à corrosão eletroquímica e convenientes propriedades elétricas, magnéticas e térmicas. Adicionalmente, os PRFs podem ser fabricados com diferentes formatos de seções e apresentam facilidade de instalação. A grande resistência a ataques químicos os torna particularmente adequados para uso em ambientes agressivos. Essas vantagens podem às vezes resultar em reduções de custo significativas em comparação com outros materiais de construção e tornar as estruturas de PRF mais sustentáveis. Adicionalmente, perfis compostos de paredes finas têm sido usados em conjunto com outros materiais estruturais como concreto, aço e madeira bem como reforço em obras de reparo/reabilitação de estruturas (Benmokrane et al., 2002; Schober et al., 2015).

Por outro lado, os PRFs apresentam problemas de fratura e delaminação, comportamento anisotrópico e suas propriedades mecânicas podem ser afetadas pela taxa de carregamento, temperatura e condições ambientais. Com o aumento de durabilidade, os PRFs podem, em um futuro próximo, competir com os materiais de construção tradicionais. Os perfis com fibras na direção longitudinal (reforçados unidirecionalmente), como os estudados nesta tese, pertencem à classe dos materiais ortotrópicos cujas propriedades dependem do tipo, volume e alinhamento das fibras, tipo de matriz, forma e qualidade da construção. Portanto, as propriedades dos PRFs são direcionais, o que significa que as melhores propriedades mecânicas estão na direção paralela às das fibras (Vedernikov et al., 2020).

Diversas estruturas usando perfis pultrudados reforçados por fibras são descritas na literatura técnica, enfatizando o seu uso em engenharia civil. A Figura 1.1 mostra uma passarela de pedestre em Lleida, Espanha, construída com perfis pultrudados. A estrutura é um arco atirantado com 38 m de comprimento, 6,2 m de altura e um deck tem 3 m de largura (Fibre-reinforced polymer composite

bridges in Europe, s.d.). A ponte é inteiramente feita de perfis pultrudados de GPRF. A configuração do arco foi escolhida de forma a minimizar os problemas de manutenção devido ao baixo módulo de elasticidade dos perfis de GPRF. A escolha do GPRF foi influenciada pelo fato do material ser um isolante elétrico e eliminar a interferência magnética com a ferrovia eletrificada. As vigas e painéis de plástico reforçado com fibra de vidro utilizados na passarela foram fabricados na Dinamarca e montados na Espanha (Fibre-reinforced polymer composite bridges in Europe, s.d.; Caron et al., 2009). Recentemente, Wei et al. (2019) estudaram o comportamento dinâmico de oito passarelas compostas de PRF na Europa, incluindo a passarela de Prato, Itália, (Figura 1.2). Esta passarela é uma estrutura simplesmente apoiada de 25 m de vão para pedestres e ciclistas, inaugurada em 2008. As treliças foram construídas com PRFs em C (canais), (Adilardi e Frasconi, 2008). A Figura 1.3 mostra uma estrutura reticulada espacial totalmente em PRFs em forma de C (canais). A montagem desta estrutura foi realizada para proteção das ruínas da igreja histórica de S. Maria Paganica, que desabou parcialmente após o terremoto de L'Aquila (Itália) em 4 de abril de 2009 (Feroldi e Russo, 2016).

Recentemente Vedernikov et al. (2020) apresentaram uma revisão detalhada do emprego de materiais pultrudados em estruturas contendo 523 referências. Esta revisão analisa os principais campos de aplicação dos elementos produzidos pelo processo de pultrusão em pontes e decks de pontes, torres de resfriamento, elementos de construção e sistemas de construção completos, construção naval, transporte e sistemas de energia. Análises da literatura científica em relação ao comportamento mecânico de elementos pultrudados também são apresentadas. Por fim, esta revisão delinea as possibilidades de estudos futuros nesta área.



**Figura 1.1: Passarela de pedestre em Lleida, Espanha, construída com perfis pultrudados de GPRF**  
([https://en.wikipedia.org/wiki/GPRF\\_Lleida\\_Pedestrian\\_Bridge](https://en.wikipedia.org/wiki/GPRF_Lleida_Pedestrian_Bridge))



**Figura 1.2: Passarela de Prato, Itália: (a) vista lateral; (b) vista do deck mostrando as treliças construídas com PRFs em C (Wei et al., 2019).**



**Figura 1.3: Detalhe da estrutura em PRF para proteção das ruínas da igreja histórica de S. Maria Paganica, que desabou parcialmente após o terremoto de L'Aquila (Itália) em 4 de abril de 2009 (Boscato et al., 2012; Russo, 2013).**

Como mostram estes exemplos, a maioria dos elementos de PRF são estruturas de paredes finas. Assim, as estruturas com elementos estruturais pultrudados, geralmente são leves e esbeltas e têm baixo coeficiente de amortecimento (Boscato e Russo, 2009; Song et al., 2004; Ahmadi et al., 2018, Wei et al., 2019). Portanto, podem sofrer instabilidade sob cargas estáticas e dinâmicas, além de vibrações excessivas. Apesar das inúmeras pesquisas em perfis pultrudados, muitos aspectos do comportamento pós-crítico, sensibilidade a imperfeições, características dinâmicas, instabilidade dinâmica e vibrações não lineares ainda são pouco conhecidos, justificando o tema desta tese.

O comportamento estrutural dos perfis pultrudados de PRF difere significativamente do obtido para materiais tradicionais. Ao contrário dos elementos de aço ou de concreto armado, que escoam ou fissuram, os perfis pultrudados de PRF exibem um comportamento elástico linear até a falha, o que geralmente ocorre para deformações bastante grandes. Apesar de sua relação constitutiva ortotrópica e sua constituição laminada em camada, os perfis pultrudados de PRF têm sido muitas vezes projetados com base na teoria de vigas-coluna assumindo um comportamento isotrópico equivalente (Zureick, 1995; Davalos et al., 1996).

Devido ao baixo módulo de Young e ao papel significativo desempenhado pela deformação de cisalhamento, o projeto de perfis pultrudados de PRF é geralmente governado por restrições de deformação em serviço (Correia, 2004; Neto e La Rovere, 2007). Além disso, o baixo módulo de Young geralmente leva a falhas desencadeadas geralmente por fenômenos de flambagem, e não por limitações de resistência do material. De fato, o colapso de membros delgados é geralmente associado a mecanismos de flambagem global (flexão ou flexo-torção), enquanto a falha de membros menos esbeltos (ou lateralmente reforçados) geralmente decorre da flambagem local.

Quanto à flambagem local nos membros do PRF, vários pesquisadores realizaram investigações tanto numéricas quanto experimentais (Tomblin e Barbero, 1994; Qiao et al., 2001; Pecce e Cosenza, 2000; Cardoso e Vieira, 2017). Diferentes formulações analíticas e numéricas foram propostas para estimar a carga crítica da flambagem local. No entanto, como discutido por Mottram (2002), existem diferenças significativas entre os resultados experimentais disponíveis e as previsões produzidas por equações relatadas na literatura ou incluídas nos manuais dos fabricantes.

As dificuldades na obtenção de estimativas analíticas precisas das cargas críticas de flambagem local, obtidas experimentalmente, provavelmente resultam de incertezas quanto à (i) modelagem das restrições entre as diferentes placas da seção transversal (nas junções da flange e da alma), (ii) não-homogeneidade do material e sua anisotropia e (iii) presença inevitável de imperfeições iniciais.

Kollár (2003) desenvolveu expressões analíticas simples para estimar as cargas críticas de flambagem local de vigas e colunas ortotrópicas com seções transversais em I e vigas caixão, que são baseadas em soluções de placas e levam em conta as restrições rotacionais devido às paredes adjacentes à "placa crítica", ou seja, que desencadeia a flambagem local. Essas fórmulas fornecem estimativas bastante precisas de carga crítica de flambagem local quando comparadas com valores produzidos por simulações de elementos finitos e testes experimentais referentes a membros pultrudados de PRF (Bank et al., 1995).

Várias pesquisas dedicaram-se ao desenvolvimento de métodos analíticos em forma fechada para análise e dimensionamento de vigas compostas sujeitas à flambagem local de mesas e almas (Kuehn et al., 2014; Cardoso e Vieira, 2017).

Um modelo analítico aproximado, que leva a uma solução analítica de forma fechada, é apresentado para explicar a interação de modos de flambagem nas colunas compostas de seção I por Barbero e Raftoyiannis (1994). O acoplamento da flambagem lateral e distorcional em perfis de paredes finas é investigado bem como a flambagem das vigas I pultrudadas sujeitas a várias condições de carga. A teoria da placa é usada para estudar as deflexões locais das paredes da seção transversal. Os efeitos de cisalhamento e o acoplamento flexão-torção são considerados na análise, devido ao seu papel significativo (Barbero e Tomblin, 1994).

No estudo da flambagem local, tanto a alma como as mesas são tratadas como placas separadas da seção transversal da viga, onde nas junções entre alma e mesas são consideradas restrições elásticas que representam a geometria e propriedades do material dos elementos de viga adjacentes. No entanto, em muitas situações, a flambagem local e global podem ocorrer simultaneamente, o que geralmente é referido como interação modal.

A formulação GBT (Generalized Beam Theory) desenvolvida por Silvestre e Camotim (2002, 2003) e implementada numericamente no programa GBTUL (Bebiano et al., 2008; 2018) permite analisar a flambagem local e global dos membros de paredes finas de seção aberta e material ortotrópico. Além disso, o software permite a identificação dos modos significativos de deformação da seção transversal. Silva et al. (2010) estendeu esta formulação para membros de paredes finas de PRF com seções abertas arbitrárias e mostrou que fornece resultados de flambagem que se comparam bastante bem com os valores numéricos e experimentais relatados na literatura para colunas de seção I.

Na análise da flambagem e vibrações locais, discretiza-se cada elemento do perfil como uma placa. Para o estudo do comportamento pós-crítico e sensibilidade a imperfeições é necessário o uso de teorias não lineares de placas. A resposta não linear de placas finas tem sido objeto de estudos extensivos e existem muitas publicações sobre o assunto. Brush et al. (1975), Fares (1999) e Kim e Reddy (2010) e Shen (2017) usaram a teoria não linear de placas de von Kármán para estudar a estabilidade e vibrações não lineares de placas. Para placas espessas usa-se com frequência a teoria por deformação de cisalhamento de primeira ordem (first-order shear deformation theory, FSDT). A FSDT leva em conta os efeitos de deformação de cisalhamento através de uma variação linear para deslocamentos e requer um fator de correção de cisalhamento. Por outro lado, as teorias de mais alta ordem (HSDT) não exigem fator de correção de cisalhamento, mas suas equações de movimento são mais complicadas do que as da FSDT (Reddy, 1984; Thai et al., 2014).

Uma vez que a rigidez do compósito é relativamente baixa, a flambagem é uma consideração importante no projeto estrutural (Qiao et al., 1999, 2001; Barbero, 2000). Enquanto os elementos curtos sofrem flambagem local, os elementos longos geralmente sofrem flambagem em um modo global de flexão ou flexo-torção (Togashi, 2017). Para comprimentos intermediários, a interação entre os modos de flambagem local e global pode ser um fenômeno importante (Barbero, 2000).

Para estudar o comportamento pós-flambagem de uma viga-coluna longa de seção aberta, precisa-se considerar a não linearidade geométrica que depende da relação deformação-deslocamento adotada. A análise de perfis de seção aberta foi tradicionalmente desenvolvida usando-se a teoria proposta por Vlasov (1961). Implementações numéricas e teorias desenvolvidas com base nas hipóteses de Vlasov são encontradas com frequência na literatura (Bauld, 1984; Ambrosini et al., 2000; Mohri et al., 2001, Yu et al., 2005 ; Pezeshky et al., 2020). Mohri et al. (2001) apresentam uma formulação não linear para a análise do comportamento global de perfis de seção aberta e paredes finas considerando os efeitos de empenamento e encurtamento nas equações não lineares de equilíbrio que serve

de base para os estudos desenvolvidos neste tese. Mancilla et al. (2014) e Coaquira et al. (2016) usaram esta formulação para estudar a estabilidade estática e frequências naturais de perfis de aço com diferentes geometrias de seção transversal e condições de contorno.

Como os perfis de PRF geralmente têm uma alta relação resistência/rigidez, é mais provável que a capacidade da seção seja governada pela flambagem. Quando carregadas em compressão ou flexão, os perfis estruturais de PRF geralmente flambam em níveis de carga muito abaixo da resistência do material. Em uma viga ou coluna, as tensões axiais na direção do comprimento são as mais altas e, portanto, as fibras são predominantemente orientadas nessa direção. Isso faz com que as propriedades elásticas nas direções transversais ao comprimento e ao cisalhamento, sejam significativamente menores do que na direção longitudinal. Isso tem duas consequências principais: a flambagem local dos segmentos ocorre para valores bem menores que em um material isotrópico e a deformação por cisalhamento afeta de maneira importante a análise da flambagem global (Barbero; 1993 e 2000). Quando a flambagem se desenvolve, a falha prematura geralmente ocorre na junção flange-alma devido à resistência limitada dessa zona rica em resina e com poucas fibras (Cintra et al., 2019).

Devido à presença de fibras alinhadas essencialmente unidirecionais, o PRF pultrudado possui uma ortotropia distinta na qual as propriedades do material na direção das fibras são significativamente mais altas do que aquelas na direção transversal. Seu comportamento mecânico depende das propriedades do constituinte e da fração volumétrica e é caracterizado por uma relação tensão-deformação elástica linear até o colapso, não exibindo ductilidade (Silvestre et al., 2001). A natureza ortotrópica do material, a heterogeneidade da distribuição das fibras através da seção transversal e as deformações por cisalhamento dentro e fora do plano devido à baixa resistência ao cisalhamento podem influenciar seu comportamento estrutural.

As colunas com perfil C em chapa dobrada são bem conhecidas por serem altamente suscetíveis a fenômenos de instabilidade, conhecidas como flambagem local (L), distorcional (D) e global (G - flexão ou flexão-torção). Os modos L e D podem ser importantes quando os perfis são formados pela associação de placas esbeltas. Dependendo da geometria da coluna (dimensões da seção transversal e comprimento) e condições de suporte, seu comportamento pós-flambagem e resistência podem ser significativamente afetados por interações envolvendo os três modos de flambagem (locais, distorcionais e globais). Os modos podem ocorrer de forma isolada ou conjunta, o que é chamado acoplamento (Schafer, 2002; Dinis et al., 2012). A interação local-global (LG) é o fenômeno de interação mais investigado e, as disposições de projeto atuais contêm diretrizes baseadas no método tradicional de largura efetiva ou no método mais recente de resistência direta (DSM) (Batista, 2009; Schafer, 2008).

Enquanto muitos estudos numéricos (Dinis et al., 2007) e experimentais (Kwon et al., 2009) se dedicam a investigar diversos aspectos da instabilidade colunas de aço de seção aberta formadas a frio, um número relativamente menor de pesquisas foi dedicado a colunas de PRF. Dependendo de suas propriedades materiais e geométricas, a flambagem local, distorcional e global de flexão ou flexo-torção

pode ocorrer em colunas com seção transversal aberta e também interação entre os diferentes modos de flambagem. Com base nesses estudos, algumas prescrições e códigos de projeto são encontrados para elementos PRF sob cargas estáticas (ASCE, 2010; CNR, 2008; Ascione et al., 2016). No entanto, vários problemas relacionados ao seu comportamento estático e flambagem continuam exigindo análises mais aprofundadas. Na literatura e nos códigos de projeto, as abordagens mais adotadas para prever a carga crítica geralmente consideram cada parede da seção isolada, conectada às paredes adjacentes por molas rotacionais, apesar de que formulações levando em consideração a seção completa sejam encontradas na literatura (Kuehn, 2014). No entanto, poucos projetos de pesquisa experimental e analítica foram dedicados ao caso de resposta dinâmica de vigas e colunas compostas. Dentre as poucas pesquisas nesta área, Zhang e Taheri (2002) estudam a flambagem dinâmica de perfis pultrudados sob cargas axiais de impacto.

A carga máxima ou crítica que leva à falha em estruturas de paredes delgadas é geralmente determinada pela sua estabilidade, não por sua resistência. A perda de estabilidade de estruturas de paredes delgadas sujeitas a carga estática é um fenômeno conhecido e foi amplamente investigado na literatura mundial. No entanto, a perda de estabilidade tem um caráter dinâmico. Esta é uma razão por que alguns pesquisadores utilizam a formulação dinâmica para o estudo do processo de perda de estabilidade. Outra, é o relativo desconhecimento da perda de estabilidade sob cargas dinâmicas.

A configuração reta de uma coluna pode se tornar instável sob uma carga axial dinâmica de magnitude significativamente menor que a carga de flambagem estática, se existirem certas relações entre a frequência da carga aplicada e as frequências naturais da coluna na direção transversal. Nesse caso, a chamada ressonância paramétrica pode ocorrer e até distúrbios laterais infinitesimais podem levar a vibrações laterais de grande amplitude. A ressonância devido à excitação paramétrica leva a um sistema de equações diferenciais homogêneas com coeficiente de variação periódica. As equações linearizadas resultam em um sistema de equações de Mathieu-Hill, onde as soluções instáveis crescem exponencialmente (Bolotin, 1964; Nayfeh e Mook, 1979; Xie, 2006; Fosse e Nijmeijer, 2011; Richards, 2012).

A instabilidade dinâmica de colunas de paredes finas de metal, carregadas axialmente, sob cargas harmônicas e de pulso, foi objeto de uma série de trabalhos no passado (Iwatsubo et al., 1973; Yabuki et al., 2005). Contudo, a maioria das contribuições, mesmo nos últimos anos, se restringe à determinação de frequências/cargas críticas de excitação pelo método de Bolotin (Bolotin, 1964) que permite a obtenção das fronteiras de instabilidade paramétrica de forma aproximada a partir de uma formulação linear. Apenas algumas contribuições são encontradas em relação ao comportamento não linear dessas estruturas e estas consideram apenas o comportamento global. As vibrações e bifurcações não lineares das colunas de PRF, curtas ou longas, foram raramente investigadas e, segundo o conhecimento do autor, nenhum estudo anterior foi realizado sobre a instabilidade paramétrica de colunas de PRF sujeitas a excitação axial, exceto o trabalho de Coaquira *et al.* (2020); parte do presente trabalho.

Adicionalmente a maioria dos trabalhos é dedicada à flambagem dinâmica de barras, placas finas e estruturas de cascas (Bolotin, 1964; Nayfeh e Mook, 1979;

Xie, 2006; Del Prado et al., 2010), enquanto a análise da flambagem dinâmica de estruturas de paredes delgadas não tem sido suficientemente explorada, em particular de colunas com seções transversais complexas. Cabe destacar que, são raras as publicações sobre perfis de PRF na área de dinâmica de estruturas.

Kubiak (2011) analisou as respostas dinâmicas locais e globais de colunas de paredes finas com seções transversais abertas sujeitas a carga de compressão impulsiva, usando diferentes formas de pulsos. O estudo é baseado na teoria assintótica de Koiter para sistemas conservativos. Cortinez et al. (2002) desenvolveram um modelo teórico para a análise dinâmica de vigas compostas por seções transversais abertas ou fechadas. O modelo incorpora, de forma completa, a flexibilidade devido ao cisalhamento, bem como um estado de tensões iniciais. Isso permite estudar as vibrações livres e os problemas de flambagem de forma unificada. Uma solução analítica das equações desenvolvidas é obtida para o caso de vigas de paredes finas simplesmente apoiadas.

Gunda et al. (2011) analisaram as vibrações de grande amplitude de vigas compostas laminadas com extremidades axialmente restringidas, com orientações de camadas simétricas e assimétricas usando o método Rayleigh-Ritz (R-R). Os campos de deslocamento utilizados na formulação analítica são acoplados usando a equação de equilíbrio axial estática. A não linearidade geométrica é considerada através do uso da teoria de placas de von Kármán, permitindo a interação entre esforços de membrana e flexão. Çalim (2009) analisou as vibrações livres e forçadas de vigas compostas não uniformes usando o método de Laplace. Banerjee (2003) analisou a vibração livre de vigas sanduiche de três camadas pelo método de rigidez dinâmica.

Boscato e Russo (2009) estudam as vibrações livres de perfis pultrudados usando os modos globais e uma lei constitutiva isotrópica. Wei et al. (2019) relatam novos dados experimentais para propriedades dinâmicas (ou seja, massa modal, frequência natural e razão de amortecimento) de oito passarelas compostas de PRF na Europa, o que ajuda na compreensão das propriedades dinâmicas das passarelas de PRF. Além disso, as propriedades dinâmicas de seis outras passarelas de PRF são apresentadas e comparadas com as propriedades de 124 passarelas construídas com outros materiais após 1991. Uma comparação abrangente desses 138 conjuntos de propriedades dinâmicas mostra que as passarelas de PRF possuem frequências fundamentais semelhantes a outras estruturas com o mesmo vão, mas geralmente taxas de amortecimento mais elevadas (média de 2,5%, média de <1,0% para aço, concreto e compósito aço-concreto). Além disso, as frequências naturais e as taxas de amortecimento identificadas de decaimentos livres medidos em passarelas de PRF são dependentes da amplitude de resposta. A comparação dos picos de aceleração de PRF e passarelas convencionais revelou que as passarelas de PRF são, em média, cerca de 3,5 vezes mais responsivas à excitação ressonante do que as pontes convencionais com o mesmo comprimento de ponte, largura de convés e formato modal devido à sua massa modal significativamente menor.

## 1.2 Objetivo

O objetivo da presente tese é estudar, através de formulações não lineares, a estabilidade estática e dinâmica de colunas de material pultrudado com seção transversal em C. Usa-se uma formulação não linear para análise do comportamento global e duas formulações não lineares para análise do comportamento local. Vários aspectos importantes para o entendimento do comportamento não linear e segurança destas estruturas são analisados. No que se refere à estabilidade estática, são deduzidas expressões analíticas para a carga crítica e estudam-se em detalhe os caminhos pós-críticos e a sensibilidade a imperfeições. Quanto ao comportamento dinâmico, são deduzidas expressões analíticas para as frequências naturais e para a relação entre carga e frequência. Por fim a resposta dinâmica não linear e a instabilidade paramétrica sob um carregamento axial harmônico é estudada, destacando-se a determinação das fronteiras de estabilidade paramétrica e escape, os diagramas de bifurcação e bacias de atração. A análise paramétrica mostra a influência do material pultrudado e da geometria da coluna (comprimento e seção transversal) nestes resultados. Em todos os itens resultados inéditos são apresentados, contribuindo para o projeto destas estruturas.

## 1.3 Descrição da Tese

Esta tese está dividida em nove capítulos, sendo o primeiro a introdução, onde se apresenta uma pequena revisão bibliográfica, justificativa do tema e descrição da tese. No Capítulo 2, apresenta-se os aspectos gerais dos materiais compostos pultrudados.

No Capítulo 3, apresenta-se a formulação matemática para descrever o comportamento dinâmico não linear de vigas e colunas de seção transversal aberta de paredes delgadas com base no trabalho de Mohri et al. (2001), que descreve de forma precisa a flambagem global.

No Capítulo 4 se apresenta a formulação não linear para análise da flambagem e vibrações locais do perfil, considerando-o como formado por três placas esbeltas e levando em consideração as condições de compatibilidade dos deslocamentos nas conexões das placas. Consideram-se duas teorias de placas: a teoria clássica de placas esbeltas e a teoria por deformação de cisalhamento de primeira ordem.

No Capítulo 5 são obtidas analiticamente as cargas e modos críticos do perfil, considerando as formulações global e local descritas nos Capítulos 3 e 4 e investiga-se a influência das características físicas e geométricas do perfil pultrudado na carga e modos críticos. Os resultados da análise são comparados com aqueles obtidos através do programa GBTUL (Bebiano et al., 2008). Estes resultados servirão de base para análise do comportamento pós-crítico e sensibilidade a imperfeições estudados no Capítulo 7.

No Capítulo 6 são obtidas analiticamente as frequências naturais e modos de vibração do perfil pultrudado considerando as formulações global e local, e

investiga-se a influência das características físicas e geométricas do perfil pultrudado nas suas propriedades dinâmicas. Os resultados relativos às frequências naturais são comparados com aqueles obtidos através do programa GBTUL (Bebiano et al., 2008). Estuda-se por fim a relação não linear entre o carregamento estático axial e as frequências de vibração.

No Capítulo 7 são deduzidas as equações não lineares de equilíbrio que descrevem o caminho pós-crítico da estrutura perfeita e os caminhos não lineares de equilíbrio da estrutura imperfeita, usando as formulações global e local. A seguir, apresentam-se os resultados da análise paramétrica, destacando-se os três tipos de comportamento do perfil em função do seu comprimento, a saber, instabilidade no modo local, instabilidade no modo global de flexo-torção e instabilidade no modo global de flexão em torno do eixo de menor inércia.

No Capítulo 8 são as equações não lineares de movimento da estrutura sob uma carga axial harmônica, usando as formulações global e local e, a seguir, são obtidas as regiões de instabilidade paramétrica em função da frequência e magnitude da força de excitação harmônica. Estuda-se a influência do material, amortecimento e geometria da seção transversal e comprimento do perfil nas fronteiras de instabilidade paramétrica e diagramas de bifurcação.

No Capítulo 9, apresentam-se as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## **2**

### **Elementos Estruturais Pultrudados**

Neste capítulo apresentam-se de forma concisa as principais características dos materiais pultrudados. Para uma descrição mais detalhada consultar os trabalhos de Cardoso (2014); Togashi (2017); Cintra (2017); Vieira (2019), desenvolvidos na PUC-Rio, e os trabalhos de Arshad (2015); Vedernikov et al. (2020).

#### **2.1**

##### **Aspectos gerais dos materiais compostos**

O interesse dos materiais compostos está ligado a dois fatores: econômico e desempenho. O fator econômico vem do fato do material composto ser muito mais leve que os materiais metálicos, o que implica em uma economia com transporte e montagem e, nas indústrias aeronáutica e aeroespacial, em um aumento de carga útil. A redução na massa total da estrutura pode chegar a 30% ou mais, em função da aplicação dada ao material composto. O custo de fabricação de algumas peças em material composto pode ser também sensivelmente menor se comparado com os materiais metálicos (Zaman et al., 2013; Vedernikov et al., 2020).

O fator desempenho está ligado à procura por um melhor desempenho de componentes estruturais, sobretudo no que diz respeito às características mecânicas (resistência à ruptura, resistência a ambientes agressivos, etc.). O caráter anisotrópico dos materiais compostos é o fator primordial para a obtenção das propriedades mecânicas requeridas pelo componente. A leveza, juntamente com as excelentes características mecânicas, faz com que os materiais compostos sejam cada vez mais utilizados em engenharia.

#### **2.2**

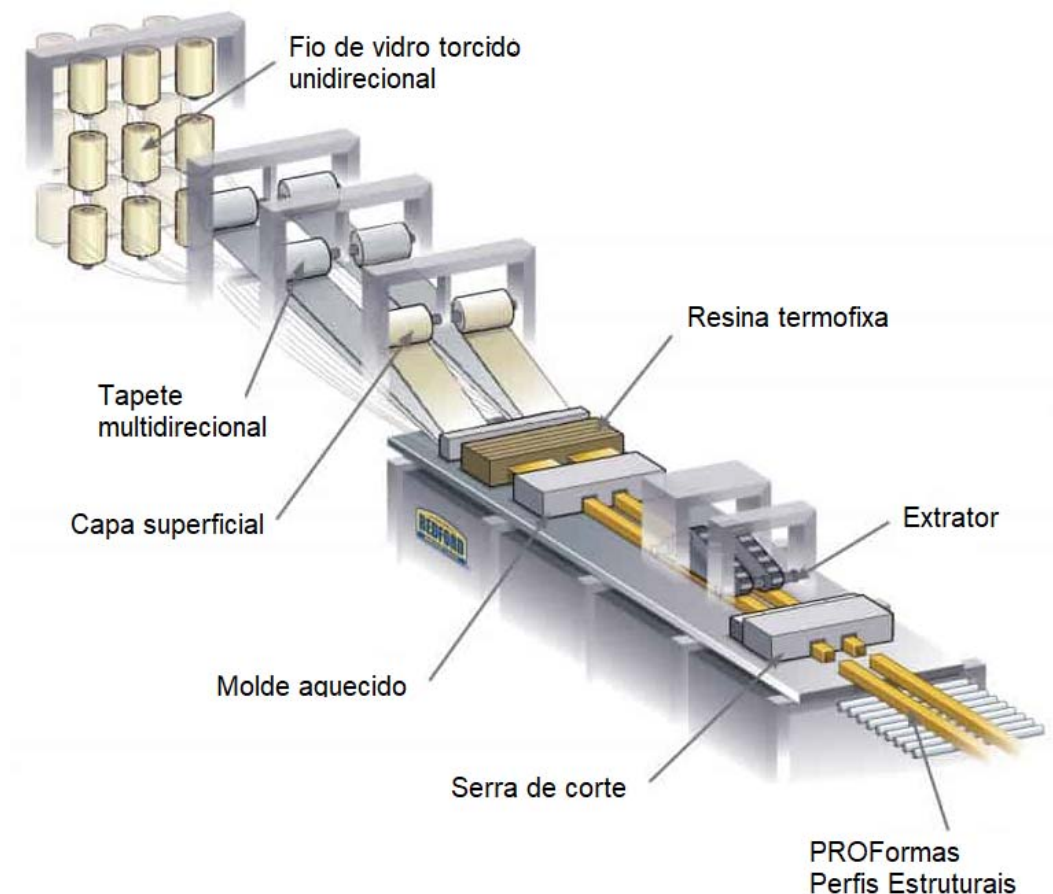
##### **Componentes constituintes de um material composto**

Um material composto (também chamado de material compósito) é um material feito de dois ou mais materiais constituintes com propriedades físicas ou químicas significativamente diferentes que, quando combinados, produzem um material com características diferentes dos componentes individuais. Os componentes individuais permanecem separados e distintos dentro da estrutura acabada, diferenciando um material composto de misturas e soluções sólidas. O novo material pode ser preferido por vários motivos. Exemplos comuns incluem materiais que são mais fortes, mais leves ou menos caros quando comparados aos materiais tradicionais.

Os materiais compostos conhecidos como compostos de polímero reforçado com fibra (PRF) são feitos de uma matriz de polímero que é reforçada com uma fibra artificial ou natural (como vidro, carbono ou aramida) ou outro material de reforço. A matriz protege as fibras de danos ambientais (ou seja, a resistência à corrosão, a resistência aos raios ultravioleta, a resistência ao impacto, etc.) e transfere a carga entre as fibras. As fibras, por sua vez, fornecem resistência e rigidez.

O processo de pultrusão é um dos métodos mais econômicos para a produção de materiais compostos. É um processo contínuo que produz poucos resíduos. No processo de pultrusão para resinas termofixas, os materiais de reforço como fibras ou fios tecidos ou trançados são impregnados com resina, possivelmente seguido por um sistema de pré-formação separado, e puxados através de uma matriz estacionária aquecida onde a resina sofre polimerização. A impregnação é feita puxando o reforço através de um banho ou injetando a resina em uma câmara de injeção que normalmente é conectada à matriz. Uma peça curada na forma desejada não requer processamento adicional quando sai da matriz. Embora o processo pareça simples, várias variáveis de processo, como velocidade de extração, temperatura da matriz, umidade da fibra/resina e volume da fibra podem afetar a qualidade dos compósitos pultrudados. As etapas típicas do processo são ilustradas na Figura 2.1. Para tirar o máximo proveito do processo de pultrusão, o efeito que cada variável do processo tem nas propriedades mecânicas deve ser completamente compreendido (The Composite Materials Research Group (CMRG), s.d. at the University of Mississippi).

O processo de pultrusão também oferece uma combinação única de características. Devido à natureza contínua do processo de pultrusão, compostos de qualquer comprimento desejado podem ser produzidos. O processo de pultrusão pode ser usado para fabricar perfis com geometria simples ou complexa; no entanto, a peça deve ter uma seção transversal constante ao longo do seu comprimento. O deslocamento através da matriz resulta em todas as superfícies de um compósito pultrudado sendo superfícies lisas e acabadas. As velocidades do processo variam dependendo do tipo de resina e da geometria do perfil, mas velocidades de linha mais rápidas são desejáveis para aumentar a eficiência e economia do processo. A pultrusão pode produzir compósitos com maior volume de fibra e, portanto, melhores propriedades mecânicas do que muitos processos podem alcançar. A natureza automatizada do processo produz compostos com propriedades mais uniformes que não são dependentes da habilidade do operador (The Composite Materials Research Group (CMRG), s.d. at the University of Mississippi ).



**Figura 2.1: O processo de pultrusão** (<https://bedfordreinforced.com/the-pultrusion-process/>).

## Fibras

A fibra é o elemento constituinte que confere ao material composto suas características mecânicas: rigidez, resistência à ruptura, etc. As fibras podem ser curtas, de alguns centímetros, que são injetadas no momento da moldagem da peça, ou longas e que são cortadas após a fabricação da peça. Os tipos mais comuns de fibras são: de vidro, de aramida (kevlar), carbono e boro. As fibras podem ser definidas como sendo unidirecionais, quando orientadas seguindo uma mesma direção; bidimensionais, com as fibras orientadas segundo duas direções ortogonais (tecidos), ou com as fibras orientadas aleatoriamente (esteiras), e tridimensionais, quando as fibras são orientadas no espaço tridimensional (tecidos multidimensionais).

## Matrizes

As matrizes têm como função principal, transferir as solicitações mecânicas às fibras e protegê-las do ambiente externo. As matrizes podem ser resinosas (poliéster, epóxi, etc), minerais (carbono) e metálicas (ligas de alumínio).

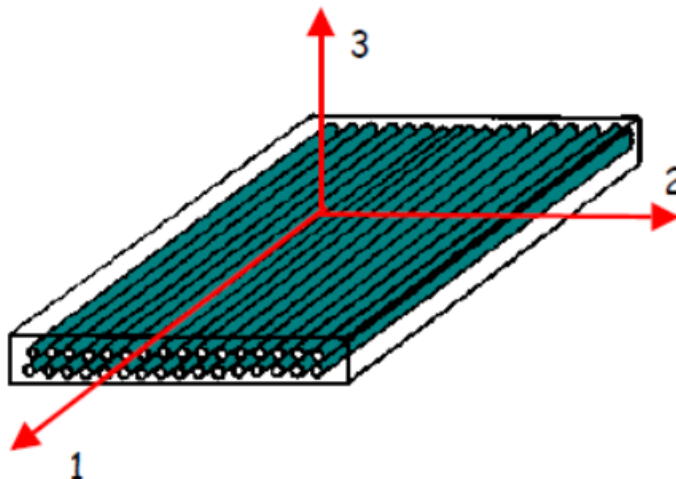
A escolha entre um tipo de fibra e uma matriz depende fundamentalmente da aplicação ao qual será dado o material composto como, por exemplo, características mecânicas elevadas, resistência a altas temperaturas, resistência à

corrosão, etc. O custo em muitos casos pode também ser um fator de escolha entre um ou outro componente. Deve ser observada também a compatibilidade entre as fibras e as matrizes.

### 2.3

#### Constantes Elásticas dos Materiais Compostos

A anisotropia dos materiais compostos é mais facilmente trabalhada do que nos casos mais gerais de materiais anisotrópicos, como, por exemplo, a madeira. Para os materiais compostos pultrudados, pode-se definir um sistema de eixos ortogonais compatível com a direção das fibras, em função do qual as propriedades mecânicas são facilmente identificadas. Pode-se considerar, pois, um eixo designado 1 (longitudinal) na direção das fibras, um outro designado 2 (transversal) colocado transversalmente às fibras e um terceiro designado 3 (normal) colocado ortogonalmente aos dois anteriores, como ilustra a Figura 2.2. Os materiais pultrudados com reforço unidirecional são normalmente designados como com ortotropia especial ou ortotrópicos com isotropia transversal.



**Figura 2.2: Sistema de eixos do perfil pultrudado**

A lei constitutiva do material composto que relaciona deformação e tensão através da matriz de flexibilidade, com respeito ao sistema de eixos considerados (1, 2, 3), contém nove constantes elásticas independentes, a saber:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & & & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

onde:

$\varepsilon_{ii}$  = deformações normais na direção i

$\gamma_{ij}$  = deformações angulares no plano ij

$\sigma_{ii}$  = tensões normais na direção i

$\tau_{ij}$  = tensões de cisalhamento no plano ij

$\nu_{ij}$  = coeficiente de Poisson (deformação causada na direção j devida a uma solitação na direção i).

$E_i$  = módulo de elasticidade na direção i

$G_{ij}$  = módulo de cisalhamento no plano ij

Como a matriz é simétrica, tem-se que:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (2.2)$$

Em muitos casos, é possível considerar que as propriedades mecânicas nas direções 2 e 3 como idênticas, já que, como mostrado na Figura 2.2, estas direções são direções perpendiculares a direção das fibras, direção 1. Para este tipo de material, dito isotrópico transverso, a matriz constitutiva necessita somente de cinco constantes elásticas independentes:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & & & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & & & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & & & \\ & & & \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

onde:

$\nu_2$  = Coeficiente de Poisson no plano de isotropia transversa

Nota-se que, devido a isotropia transversa,  $\frac{1}{G_{23}} = \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}$ .

Considerado somente o estado plano de tensão (placas laminadas com  $\sigma_{33} = 0$ ,  $\tau_{23} = 0$  e  $\tau_{13} = 0$ ), a matriz de rigidez do material composto é frequentemente expressa da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Tabela 2.1: Coeficientes típicos de rigidez e de contração transversal (condição seca).**

		[MPa]	[..]
Modulo de Elasticidade	$E_1$	20000 - 28000	
Modulo de Elasticidade	$E_2$	5000 - 15000	
Modulo de cisalhamento	$G_{12}$	2200 - 6000	
Coeficiente de Poisson	$\nu_{12}$		0.23 - 0.32
Coeficiente de Poisson	$\nu_{21}$		0.09 – 0.16

Como estudos recentes sobre as propriedades e análise experimental de perfis pultrudados podem ser citados os trabalhos de Cardoso (2014); Arshad, (2015); Togashi, (2017); Cintra, (2017) e Vieira, (2019), dentre outros. Vedernikov et al. (2020) apresentaram uma revisão bibliográfica detalhada do emprego de materiais pultrudados em estruturas contendo 523 referências. As Tabelas 2.2 e 2.3 mostram a faixa de variação das propriedades mecânicas observadas nesta revisão bibliográfica para os componentes e os perfis de material pultrudado.

**Tabela 2.2: Propriedades mecânicas dos componentes de pultrudados**  
**Propriedades típicas da matriz (Vedernikov et al., 2020).**

<b>Material</b>	<b>Tensile strength (MPa)</b>	<b>Tensile modulus (GPa)</b>	<b>Flexural strength (MPa)</b>	<b>Flexural modulus (GPa)</b>	<b>Shear strength (MPa)</b>	<b>Shear modulus (GPa)</b>	<b>Density (kg/m³)</b>	<b>Poisson's ratio (ν)</b>
Epóxi	55-130	2.5-4.1	70-140	3.0	46-70	0.98-1.24	1100-1300	0.20-0.37
Poliéster	20-100	1.8-4.1	70-132	3.9-4.0	56-70	1.38-1.6	1000-1450	0.1-0.38
Ester vinílico	70-87	3.0-5.1	149-156	3.2-3.5	-	1.43-1.6	1100-1300	0.3-0.4
Acrílico	56-88	2.2-3.1	117-215	2.9-3.7	-	-	-	-
Fenól	35-60	1.2-4.1	48	-	43	-	1200-1400	-
Polipropileno	34-37.2	0.7	34	1.2-1.5	-	-	900	-
ABS	28-45	1.5-2.4	63-76	2.1-2.2	62.1	1.06	1020-1050	-
Nylon	55-90	1.3-3.5	108-117	2.8	-	-	1100-1160	-

**Propriedades típicas das fibras de reforço (Vedernikov et al., 2020)**

Basalto	2500-4800	85-110	-	21.7	7-17	2600-2800	0.2-0.26
Carbono	3650-7000	207-600	1400	90	3-7	1700-1800	0.25-0.3
Fibra de vidro tipo E	2500-4800	70-81.2	830	26-28.8	7-20	2540-2570	0.2-0.3
Fibra de vidro tipo S	4200-4800	83-93	-	35-39	-	2485-2540	0.21-0.23
Kenaf	-	4.5	-	-	-	1400	0.15
Kevlar (Aramida)	2900-3400	70-152	280	2.9	12	1390-1467	0.35
Linho	500-900	50	-	-	-	1400-1500	-
Boro	4137	400	-	167	140	2630	0.2

**Tabela 2.3: Propriedades mecânicas típicas de elementos pultrudados (Vedernikov et al., 2020)**

<b>Material</b>	<b>Fiber volume fraction (%)</b>	<b>Density (kg/m<sup>3</sup>)</b>	<b>Tensile strength (MPa)</b>	<b>Tensile modulus (GPa)</b>	<b>Compressive strength (MPa)</b>	<b>Shear strength (MPa)</b>	<b>Shear modulus (GPa)</b>
E-glass roving/polyester	46-80%	1600-2000	307-1320	21-59	290-1240	27	3.5
E-glass mat+roving/polyester	48-61%	1750-1900	235-400	18-36	220-485	25-52	2.6-5.0
E-glass roving/vinylester	62%	1770	240	18-42	240	22	4.0
E-glass mat+roving/vinylester				24			3.7
E-glass roving/epoxy	52-53%		414-790	32-40			3.0-4.5
E-glass mat+roving/epoxy	56%	2000		42			7
E-glass roving/polyurethane	58%		310-850	37-47			
Carbon roving/epoxy	65%	1500-1600	1430-2200	130-180	985-1450	72	3.6-4.2
Carbon roving/vinylester		1600	2000	140-145	1400		
Kevlar roving/styrene acrylonitrile	61%	1180	170	9.4	120		
Kevlar roving/styrene acrylonitrile	61%	1130	170	9.3	90		
Kevlar roving/polyethylene	61%	1235	165	9.2	40		

\* Roving: fios alinhados, Mat: manta de fios orientados aleatoriamente

### 3

## Formulação para Análise do Comportamento Global

Neste capítulo é apresentada a formulação utilizada para a obtenção do funcional de energia e das equações de equilíbrio não lineares para vigas-coluna de seção transversal aberta de paredes delgadas com imperfeições, com base no trabalho de Mohri et al. (2003) e nos estudos desenvolvidos por Mancilla et al. (2014) e Coaquira et al. (2016).

### 3.1

#### Formulação Matemática do Perfil com Imperfeição

Um elemento de barra reta de seção transversal aberta é mostrada na Figura 3.1. Para a formulação do problema se adota um sistema cartesiano de coordenadas globais  $(X,Y,Z)$ , como mostra a Figura 3.1, onde  $X$  representa o eixo da barra na configuração inicial indeformada e  $Y$  e  $Z$  definem os eixos da seção transversal, coincidindo com os eixos principais de inércia.

#### 3.1.1

##### Cinemática

Adota-se como origem do sistema de eixos o centro de gravidade da seção, denotado por  $CG$ . Em seções com um único eixo de simetria (monosimétricas) ou assimétricas, o centro de cisalhamento,  $SC$ , não coincide com o centro de gravidade, sendo suas coordenadas no sistema de referências aqui adotado dadas por  $(y_c, z_c)$ . Considere-se  $M$ , um ponto ao longo do contorno da seção com coordenadas  $(y, z, \omega_s)$ , onde  $\omega_s$ , é a área setorial de um ponto usado no modelo de Vlasov para torção não uniforme (Vlasov, 1961), como ilustra a área em azul na Figura 3.1.

As hipóteses fundamentais da teoria de Vlasov para elementos de seção transversal aberta e paredes delgadas (Vlasov, 1961) são:

- A forma da seção transversal não se altera, ou seja, não são consideradas distorções de seção em seu próprio plano ( $\gamma_{xy} = 0$ );
- As deformações por cisalhamento na superfície média da barra podem ser desprezadas ( $\varepsilon_{xs} = 0$ ). Esta hipótese corresponde à de Euler-Bernoulli na teoria clássica de vigas; e
- O empenamento da seção transversal é constante ao longo da espessura e pode ser representado pelo seu valor ao longo da superfície média.

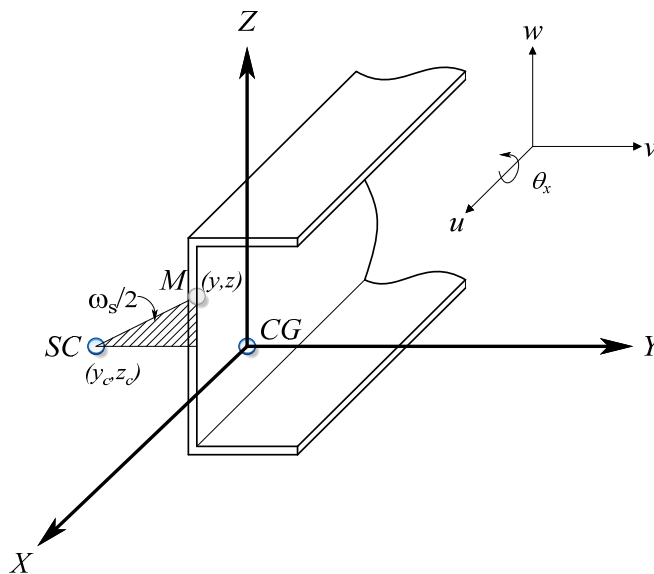
A partir da primeira hipótese, como ilustra a Figura 3.2, a posição do ponto  $M$  com relação ao centro de cisalhamento pode ser derivada. A primeira hipótese significa que a seção transversal sofre deslocamentos no seu próprio plano, que

correspondem a um movimento de corpo rígido. Assim os deslocamentos transversais do ponto  $M$ ,  $v_M$  e  $w_M$  podem ser assim descritos respectivamente por:

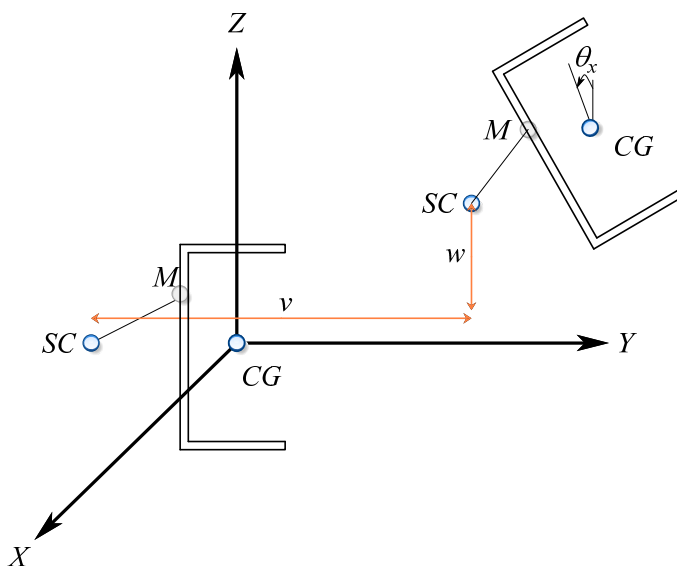
$$v_M = v - (z - z_c)\sin\theta_x - (y - y_c)\cos\theta_x \quad (3.1)$$

$$w_M = w + (y - y_c)\sin\theta_x - (z - z_c)(1 - \cos\theta_x) \quad (3.2)$$

onde,  $v$  e  $w$  são as componentes de deslocamento do centro de cisalhamento e  $\theta_x$  é o ângulo de torção, com respeito ao centro de gravidade da seção transversal.



**Figura 3.1: Elementos de uma seção transversal aberta, Sistema de referência e Notação.**



**Figura 3.2: Componentes do deslocamento do centro de cisalhamento**

O deslocamento axial  $u_M$  é derivado a partir da segunda hipótese. Introduzindo no ponto  $M$  da seção um sistema de coordenadas curvilíneo  $s$  (Figura 3.3), têm-se as

componentes de deslocamento  $v_t$  e  $w_t$  do ponto  $M$  na direção tangencial e transversal à parede do elemento, respectivamente. Assim a componente  $\varepsilon_{xs}$  do tensor de deformações de Green, devido ao cisalhamento ao longo do contorno, tem que ser nulo, ou seja:

$$\varepsilon_{xs} = \frac{\partial u_M}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x} + \frac{\partial v_t}{\partial x} \frac{\partial v_t}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial x} \frac{\partial w_t}{\partial s} = 0 \quad (3.3)$$

Os deslocamentos  $v_t$  e  $w_t$  são deduzidos a partir do campo de deslocamentos  $v_M$  e  $w_M$ , sendo dados por:

$$v_t = v \cos \alpha + w \sin \alpha + h \sin \theta_x + r(\cos \theta_x - 1) \quad (3.4)$$

$$w_t = -v \sin \alpha + w \cos \alpha + r \sin \theta_x - h(\cos \theta_x - 1) \quad (3.5)$$

Nestas relações,  $\alpha$  é o ângulo entre o eixo  $Y$  e a tangente no ponto  $M$ ,  $h(s)$  e  $r(s)$  são as coordenadas do centro de cisalhamento no sistema de coordenadas  $t-n$ , como ilustra a Figura 3.3. Substituindo as expressões (3.4) e (3.5) na expressão (3.3) e integrando a expressão resultante em termos da coordenada local  $s$  ao longo da seção transversal, e considerando que

$$\frac{\partial h}{\partial s} = 0 \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = 1 \quad (3.6b)$$

$$dy = ds \cos \alpha \quad (3.6c)$$

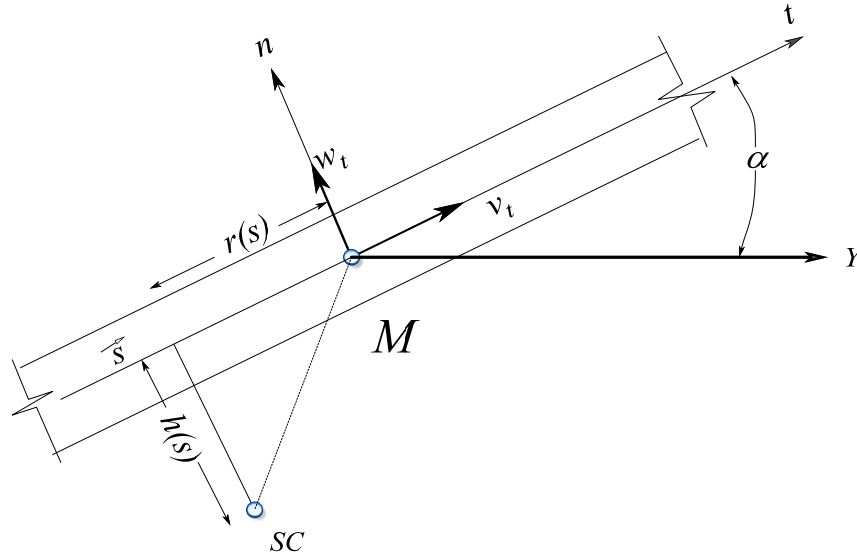
$$dz = ds \sin \alpha \quad (3.6d)$$

$$\omega = \int_s h \, ds \quad (3.6e)$$

obtem-se para o deslocamento axial  $u_M$ :

$$u_M = u - y(v' \cos \theta_x + w' \sin \theta_x) - z(w' \cos \theta_x - v' \sin \theta_x) - \omega \theta'_x \quad (3.7)$$

Nesta formulação, o símbolo  $(.)'$  denota a derivada com respeito a variável  $x$ .



**Figura 3.3: Eixos normal e tangencial ao contorno da seção transversal.**

O tensor de Green é dado por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_M}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_M}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_M}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_M}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_M}{\partial y} + \frac{\partial v_M}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_M}{\partial x} \frac{\partial u_M}{\partial y} + \frac{\partial v_M}{\partial x} \frac{\partial v_M}{\partial y} + \frac{\partial w_M}{\partial x} \frac{\partial w_M}{\partial y} \right] \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_M}{\partial z} + \frac{\partial w_M}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_M}{\partial x} \frac{\partial u_M}{\partial z} + \frac{\partial v_M}{\partial x} \frac{\partial v_M}{\partial z} + \frac{\partial w_M}{\partial x} \frac{\partial w_M}{\partial z} \right] \quad (3.10)$$

Introduzindo o campo de deslocamentos para  $v$ ,  $w$  e  $\theta_x$  no tensor de Green, obtém-se:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (3.11a)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2} \left( z - z_c + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \theta'_x \quad (3.11b)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( y - y_c + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \theta'_x \quad (3.11c)$$

onde:

$$\varepsilon_1 = u' - y(v'' \cos \theta_x + w'' \sin \theta_x) - z(w'' \cos \theta_x - v'' \sin \theta_x) - \omega \theta''_x \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2 + R^2 \theta_x'^2) - y_c \theta'_x (w' \cos \theta_x - v' \sin \theta_x) + z_c \theta'_x (v' \cos \theta_x + w' \sin \theta_x) \quad (3.13)$$

$$R = (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \quad (3.14)$$

Destas expressões observa-se que as duas parcelas da deformação axial,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , dependem não linearmente das variáveis desconhecidas  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $\theta_x$ .

## 3.2

### Formulação Variacional

As equações não lineares de movimento podem ser obtidas a partir do princípio variacional de Hamilton, considerando a função de Lagrange  $L = T - U + W$ , onde  $U$  é a energia interna de deformação,  $T$  é a energia cinética e  $W$  é o trabalho das cargas externas.

#### 3.2.1

#### Variação da Energia de Interna Deformação

A energia interna de deformação  $U$  de um corpo elástico pode ser escrito como:

$$U = \int_L \int_A (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz}) dA dx \quad (3.15)$$

As equações de equilíbrio são obtidas da condição de estacionaridade da energia potencial total,  $\Pi = U - W$ , e as equações de movimento a partir da condição de estacionaridade da função de Lagrange, sendo dadas respectivamente por:

$$\delta(\Pi) = \delta(U - W) = 0 \quad (3.16)$$

$$\delta(L) = \delta(T - \Pi) = \delta(T - U + W) = 0 \quad (3.17)$$

A variação da energia interna de deformação é dada por:

$$\delta U = \int_L \int_A (\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz}) dA dx \quad (3.18)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff.

Usando as Equações (3.11) a (3.13), obtém-se a variação das componentes do tensor de deformações, a saber:

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{xx} = & \delta u' - y(\delta v''\cos\theta_x + \delta w''\sin\theta_x) \\ & - y(w''\cos\theta_x - v''\sin\theta_x)\delta\theta_x \\ & - z(\delta w''\cos\theta_x - \delta v''\sin\theta_x) \\ & + z(w''\sin\theta_x + v''\cos\theta_x)\delta\theta_x - \omega\delta\theta_x'' \\ & + \delta v'(v' + y_c\theta_x'\sin\theta_x + z_c\theta_x'\cos\theta_x) \\ & + \delta w'(w' - y_c\theta_x'\cos\theta_x + z_c\theta_x'\sin\theta_x) \\ & + \delta\theta_x'(R^2\theta_x' + y_c(v'\sin\theta_x - w'\cos\theta_x) \\ & + z_c(v'\cos\theta_x + w'\sin\theta_x)) \\ & + \delta\theta_x(y_c(w'\theta_x'\sin\theta_x + v'\theta_x'\cos\theta_x) \\ & + z_c(w'\theta_x'\cos\theta_x - v'\theta_x'\sin\theta_x)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\delta\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\left(z - z_c + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\delta\theta'_x \quad (3.20)$$

$$\delta\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(y - y_c + \frac{\partial\omega}{\partial z}\right)\delta\theta'_x \quad (3.21)$$

A variação da energia interna de deformação pode ser expressa como uma função dos esforços resultantes atuando na seção transversal do elemento de parede delgada no estado deformado. Os esforços internos são dados pelas seguintes integrais ao longo da área da seção transversal:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA \quad (3.22)$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (3.23)$$

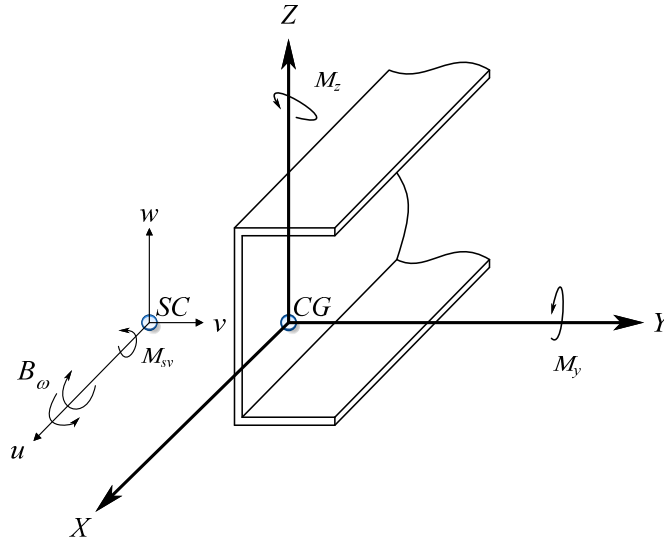
$$M_z = - \int_A \sigma_{xx} y dA \quad (3.24)$$

$$B_\omega = - \int_A \sigma_{xx} \omega dA \quad (3.25)$$

$$M_{sv} = \int_A \left( \sigma_{xz} \left( y - y_c - \frac{\partial\omega}{\partial z} \right) - \sigma_{xy} \left( z - z_c - \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) \right) dA \quad (3.26)$$

$$M_R = \int_A \sigma_{xx} R^2 dA \quad (3.27)$$

onde  $N$  é o esforço normal,  $M_y$  e  $M_z$  são os momentos fletores,  $B_\omega$  é o bi momento,  $M_{sv}$  é o momento de torção de Saint Venant e  $M_R$  é uma resultante de ordem superior, como ilustrado na Figura 3.4.



**Figura 3.4: Forças resultantes da seção.**

Introduzindo as expressões (3.19) a (3.27) na Eq. (3.18), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \delta U = & \int_L N(\delta u' + \delta v'(v' + y_c \theta'_x \sin \theta_x + z_c \theta'_x \cos \theta_x) + \\
 & \delta w'(w' - y_c \theta'_x \cos \theta_x + z_c \theta'_x \sin \theta_x)) dx + \int_L N \delta \theta_x (y_c (w' \theta'_x \sin \theta_x + \\
 & v' \theta'_x \cos \theta_x) + z_c (w' \theta'_x \cos \theta_x - v' \theta'_x \sin \theta_x)) dx + \\
 & \int_L N \delta \theta'_x (y_c (v' \sin \theta_x - w' \cos \theta_x) + z_c (v' \cos \theta_x + w' \sin \theta_x)) dx + \\
 & \int_L (M_z (\delta v'' \cos \theta_x + \delta w'' \sin \theta_x)) dx + \int_L (M_z (w'' \cos \theta_x - \\
 & v'' \sin \theta_x) \delta \theta_x) dx - \int_L (M_y (\delta w'' \cos \theta_x - \delta v'' \sin \theta_x)) dx + \\
 & \int_L (M_y (w'' \sin \theta_x + v'' \cos \theta_x) \delta \theta_x) dx + \int_L B_\omega \delta \theta''_x dx + \\
 & \int_L M_R \theta'_x \delta \theta'_x dx + \int_L M_{sv} \delta \theta'_x dx
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

O potencial de energia é então definido como uma função dos deslocamentos virtuais e suas derivadas. Fazendo a integração por partes da Equação (3.28) e coletando os termos relacionados aos deslocamentos virtuais  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  e  $\delta \theta_x$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \delta U = & \int_L \left\{ (-N) \delta u + \left[ (M_z \cos \theta_x)'' + (M_y \sin \theta_x)'' - \right. \right. \\
 & N(v' + (y_c \sin \theta_x + z_c \cos \theta_x) \theta'_x)'] \delta v + \left[ -(M_y \cos \theta_x)'' + \right. \\
 & (M_z \sin \theta_x)'' - N(w' - (y_c \cos \theta_x - z_c \sin \theta_x) \theta'_x)'] \delta w + \\
 & [B_\omega'' - (M_{sv})' - (M_R \theta'_x)' + M_y (w'' \sin \theta_x + v'' \cos \theta_x) + \\
 & M_z (w'' \cos \theta_x - v'' \sin \theta_x) + N(y_c \theta'_x (w' \sin \theta_x + v' \cos \theta_x) + \\
 & z_c \theta'_x (w' \cos \theta_x - v' \sin \theta_x)) - N y_c (-w' \cos \theta_x + v' \sin \theta_x)' - \\
 & N z_c (w' \sin \theta_x + v' \cos \theta_x)'] \delta \theta_x \} dx
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

### 3.2.2

#### Varição do Trabalho das Cargas Externas

Consideram-se cargas distribuídas transversais ao eixo da barra,  $q_y$  e  $q_z$ , bem como carga distribuída na direção axial,  $q_x$ , além de um momento tursor axial,  $m_x$ . Assim, tem-se:

$$W = \int_L (q_x u + q_y v + q_z w + m_x \theta_x) dx \quad (3.30)$$

A variação do trabalho das cargas externas é dada por:

$$\delta W = \int_L (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w + m_x \delta \theta_x) dx \quad (3.31)$$

O momento tursor,  $m_x$ , pode ter componentes geradas pelas cargas  $q_x$  e  $q_y$  em função das suas excentricidades  $e_x$  e  $e_y$  com relação ao centro de cisalhamento.

### 3.2.3

#### Varição da Energia Cinética

A energia cinética de um elemento de paredes delgadas, com massa por unidade de volume  $\rho$ , é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_L \int_A \rho \left[ \left( \frac{\partial u_M}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_M}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_M}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx \quad (3.32)$$

Integrando na área da seção transversal e desprezando os termos de inércia a rotação, obtém-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_L m \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_o \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 + z_c \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \theta_x}{\partial t} - y_c \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right] dx \quad (3.33)$$

com  $m = \rho A$  a massa do elemento por unidade de comprimento e  $I_o$  o momento polar de inércia.

A variação da energia cinética é dada por:

$$\begin{aligned} \delta T = \frac{1}{2} \int_L m \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + z_c \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta v \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial t} - y_c \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta w \right. \\ \left. + \left( I_o \frac{\partial \theta_x}{\partial t} + z_c \frac{\partial v}{\partial t} - y_c \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta \theta_x \right] dx \end{aligned} \quad (3.34)$$

Integrando por partes a Equação (3.34) e coletando os termos em função dos deslocamentos virtuais  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  e  $\delta \theta_x$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta T = \int_L -m \left[ \left( \frac{d^2 u}{dt^2} \right) \delta u + \left( \frac{d^2 v}{dt^2} + z_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) \delta v \right. \\ \left. + \left( \frac{d^2 w}{dt^2} - y_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) \delta w \right. \\ \left. + \left( I_o \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} + z_c \frac{d^2 v}{dt^2} - y_c \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \delta \theta_x \right] dx \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3.3

#### Equações de Movimento

Após determinar a variação das parcelas da função de Lagrange, têm-se, a partir do princípio de Hamilton, as seguintes equações de movimento:

$$1. \quad m \frac{d^2 u}{dt^2} (-N') = q_x \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad m \left( \frac{d^2 v}{dt^2} + z_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) + (M_z \cos \theta_x)'' + (M_y \sin \theta_x)'' \\ - N(v' + (y_c \sin \theta_x + z_c \cos \theta_x) \theta_x')' = q_y \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad m \left( \frac{d^2 w}{dt^2} - y_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) - (M_y \cos \theta_x)'' + (M_z \sin \theta_x)'' \\ - N(w' - (y_c \cos \theta_x - z_c \sin \theta_x) \theta_x')' = q_z \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \left( I_o \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} + z_c \frac{d^2 v}{dt^2} - y_c \frac{d^2 w}{dt^2} \right) + B_\omega'' - (M_{sv})' - (M_R \theta_x')' \\ + M_y (w'' \sin \theta_x + v'' \cos \theta_x) \\ + M_z (w'' \cos \theta_x - v'' \sin \theta_x) \\ + N (y_c \theta_x' (w' \sin \theta_x + v' \cos \theta_x) \\ + z_c \theta_x' (w' \cos \theta_x - v' \sin \theta_x)) \\ - N y_c (-w' \cos \theta_x + v' \sin \theta_x)' \\ - N z_c (w' \sin \theta_x + v' \cos \theta_x)' = m_x \end{aligned} \quad (3.39)$$

Estas são as equações não lineares de movimento considerando grandes deslocamentos e rotações, considerando as expressões exatas das relações cinemáticas. Estas equações são não lineares e fortemente acopladas. O acoplamento resulta do ângulo de torção  $\theta_x$  (acoplamento cinemático) e das coordenadas do centro de cisalhamento,  $y_c$  e  $z_c$  que têm influência marcante no comportamento estático e dinâmico de seções assimétricas e monossimétricas. Eliminando os termos de inércia, obtém-se as equações não lineares de equilíbrio estático.

### 3.3.1 Equações Constitutivas

As equações de equilíbrio foram estabelecidas sem nenhuma referência ao comportamento do material e às relações tensão-deformação. Adotando-se um comportamento elástico e linear, tem-se que as forças internas são dadas por:

$$N = EA \left( u' + \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2 + I_o \theta_x'^2) + z_c v' \theta_x' - y_c w' \theta_x' \right) \quad (3.40)$$

$$M_y = -EI_y (k_y \cos \theta_x - k_z \sin \theta_x - \beta_z \theta_x'^2) \quad (3.41)$$

$$M_z = EI_z (k_z \cos \theta_x + k_y \sin \theta_x - \beta_y \theta_x'^2) \quad (3.42)$$

$$B_\omega = EI_\omega (\theta_x'' - \beta_\omega \theta_x'^2) \quad (3.43)$$

$$M_{sv} = GJ \theta_x' \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} M_R = NI_o - 2EI_z \beta_y (v'' \cos \theta_x + w'' \sin \theta_x) \\ - 2EI_y \beta_z (w'' \cos \theta_x - v'' \sin \theta_x) - 2EI_\omega \beta_\omega \theta_x'' \\ + \frac{1}{2} E (I_R - AI_o^2) \theta_x'^2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde  $k_y$  e  $k_z$  são as mudanças de curvatura,  $A$  é a área da seção transversal,  $I_z$  e  $I_y$  são respectivamente os momentos de inércia com relação aos eixos  $Z$  e  $Y$ ,  $J$  é a constante de torção de Saint Venant,  $I_\omega$  é a constante de empenamento e  $\beta_y$ ,  $\beta_z$  e  $\beta_\omega$  são os coeficientes de Wagner (Mohri et al., 2003) e  $E = E_1$  e  $G = G_{12}$  são respectivamente o módulo de Young longitudinal (na direção das fibras do material pultrudado que coincide com o eixo do perfil) e o módulo de cisalhamento do material no plano das chapas do perfil.

Estes parâmetros geométricos são obtidos através das seguintes integrais:

$$I_y = \int z^2 dA \quad (3.46)$$

$$I_z = \int y^2 dA \quad (3.47)$$

$$I_\omega = \int \omega^2 dA \quad (3.48)$$

$$\beta_y = \frac{1}{2I_z} \int_A y(y^2 + z^2) dA - y_c \quad (3.49)$$

$$\beta_z = \frac{1}{2I_y} \int_A z(y^2 + z^2) dA - z_c \quad (3.50)$$

$$\beta_\omega = \frac{1}{2I_\omega} \int_A \omega(y^2 + z^2) dA \quad (3.51)$$

Adicionalmente, tem-se que  $I_o$  é o momento polar de inércia em torno do centro de cisalhamento e  $I_R$  é o quarto momento de inércia em torno do centro de cisalhamento. Suas expressões são:

$$I_o = \frac{I_y + I_z}{A} + y_c^2 + z_c^2 \quad (3.52)$$

$$I_R = \int_A [(y - y_c)^2 + (z - z_c)^2]^2 dA \quad (3.53)$$

Partindo da teoria clássica de flexão, as expressões exatas para as mudanças de curvatura são dadas por:

$$k_y = \frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} \quad (3.54)$$

$$k_z = \frac{v''}{\sqrt{1 - v'^2}} \quad (3.55)$$

As equações de movimento aqui deduzidas são de difícil resolução em função da presença das funções trigonométricas e das expressões não lineares das curvaturas.

### 3.3.2

#### **Análise de Flambagem de uma Viga-Coluna com Imperfeição Inicial.**

Para obter uma formulação não linear com não linearidade polinomial e que permita a introdução do efeito de imperfeições geométricas de uma forma simples, adotam-se as seguintes aproximações para as mudanças de curvatura:

$$k_y = \frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} \approx w'' \left( 1 + \frac{w'^2}{2} \right) \quad (3.56)$$

$$k_z = \frac{v''}{\sqrt{1 - v'^2}} \approx v'' \left( 1 + \frac{v'^2}{2} \right) \quad (3.57)$$

Para pequenos deslocamentos, estas relações são reduzidas às bem conhecidas relações lineares  $k_y = w''$  e  $k_z = v''$ .

Nas aproximações para  $\cos\theta_x$  e  $\sin\theta_x$  são considerados os dois primeiros termos de suas expansões em séries de Taylor, ou seja:

$$\cos\theta_x = 1 - \frac{\theta_x^2}{2} \quad (3.58)$$

$$\text{sen}\theta_x = \theta_x - \frac{\theta_x^3}{6} \quad (3.59)$$

Para incluir o efeito das imperfeições geométricas iniciais, considera-se que a mudança de curvatura é dada pela diferença de curvatura da viga-coluna sem imperfeição e a curvatura inicial, ou seja:

$$M_y = EI_y \Delta K = EI_y [K(u, v, w, \theta_x) - K(u_o, v_o, w_o, \theta_{ox})] \quad (3.60)$$

onde  $u_o$  é a imperfeição no eixo axial, geralmente desconsiderada,  $v_o$  é a imperfeição no eixo menor de inércia,  $w_o$  é a imperfeição no eixo maior de inércia, e  $\theta_{ox}$  é a imperfeição inicial de rotação. A Figura 3.5 ilustra uma coluna com uma imperfeição inicial  $w_o$ , e a coluna deformada. Os deslocamentos  $w_o$  e  $w$  são medidos em relação à configuração inicial indeformada.



**Figura 3.5: Deflexão da coluna imperfeita,  $\bar{w} = w - w_o$ .**

Introduzindo as aproximações para as mudanças de curvaturas  $k_y$ ,  $k_z$  e para  $\cos\theta_x$  e  $\text{sen}\theta_x$ , nas equações constitutivas de momento, obtém-se:

$$\begin{aligned} M_y = -EI_y & \left[ w'' \left( 1 + \frac{w'^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{\theta_x^2}{2} \right) - v'' \left( 1 + \frac{v'^2}{2} \right) \left( \theta_x - \frac{\theta_x^3}{6} \right) \right. \\ & \left. - \beta_z \theta_x'^2 \right] \\ & + EI_y \left[ w_o'' \left( 1 + \frac{w_o'^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{\theta_{ox}^2}{2} \right) \right. \\ & \left. - v_o'' \left( 1 + \frac{v_o'^2}{2} \right) \left( \theta_{ox} - \frac{\theta_{ox}^3}{6} \right) - \beta_z \theta_{ox}'^2 \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}
M_z = EI_z \left[ v'' \left( 1 + \frac{v'^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{\theta_x^2}{2} \right) + w'' \left( 1 + \frac{w'^2}{2} \right) \left( \theta_x - \frac{\theta_x^3}{6} \right) \right. \\
\left. - \beta_y \theta_x'^2 \right] \\
- EI_z \left[ v_o'' \left( 1 + \frac{v_o'^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{\theta_{ox}^2}{2} \right) \right. \\
\left. + w_o'' \left( 1 + \frac{w_o'^2}{2} \right) \left( \theta_{ox} - \frac{\theta_{ox}^3}{6} \right) - \beta_y \theta_{ox}'^2 \right]
\end{aligned} \quad (3.62)$$

Introduzindo as expressões de momento nas equações de movimento Equações (3.36 – 3.39), e considerando os termos não lineares até a terceira ordem, chegam-se às seguintes equações de equilíbrio.

$$\begin{aligned}
m \left( \frac{d^2 v}{dt^2} + z_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) + EI_z \left( v^{(4)} + 3v'v''v''' + v''^3 + \frac{v^{(4)}v'^2}{2} \right) \\
- N(v'' + z_c \theta_x'' + y_c(\theta_x \theta_x'' + \theta_x'^2)) \\
+ (EI_z - EI_y)(w^{(4)}\theta_x + 2w'''\theta_x' + w''\theta_x'' \\
- v^{(4)}\theta_x^2 - 4v'''\theta_x \theta_x' - 2v''\theta_x \theta_x'' - 2v''\theta_x'^2) \\
- EI_z \left( w_o^{(4)}\theta_{ox} + 2w_o'''\theta_{ox}' + w_o''\theta_{ox}'' \right. \\
- v_o^{(4)} \left( \frac{\theta_{ox}^2}{2} + \frac{\theta_x^2}{2} \right) - 2v_o'''\theta_{ox} \theta_x' + \theta_x \theta_{ox}' \\
\left. - v_o''(\theta_{ox} \theta_{ox}'' + \theta_x \theta_x'') - v_o''(\theta_{ox}'^2 + \theta_x'^2) \right) \\
+ EI_y \left( w_o^{(4)}\theta_x + 2w_o'''\theta_x' + w_o''\theta_x'' - v_o^{(4)}(\theta_{ox} \theta_x) \right. \\
- 2v_o'''\theta_x \theta_{ox}' + \theta_{ox} \theta_x' - v_o''(\theta_{ox} \theta_x'' + \theta_x \theta_{ox}'') \\
\left. - 2v_o''(\theta_{ox}' \theta_x') \right) = 0
\end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
& m \left( \frac{d^2 w}{dt^2} - y_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) \\
& + EI_y \left( w^{(4)} + 3w'w''w''' + w''^3 + \frac{w^{(4)}w'^2}{2} \right) \\
& - N(w'' - y_c \theta_x'' + z_c(\theta_x \theta_x'' + \theta_x'^2)) \\
& + (EI_z - EI_y)(v^{(4)}\theta_x + 2v'''\theta_x' + v''\theta_x'' + w^{(4)}\theta_x^2 \\
& - 4w'''\theta_x \theta_x' + 2w''\theta_x \theta_x'' + 2w''\theta_x'^2) \\
& - EI_z \left( v_o^{(4)}\theta_{ox} + 2v_o'''\theta_{ox}' + v_o''\theta_{ox}'' \right. \\
& \left. - w_o^{(4)} \left( \frac{\theta_{ox}^2}{2} + \frac{\theta_x^2}{2} \right) - 2w_o''(\theta_{ox}\theta_{ox}' + \theta_x \theta_x') \right. \\
& \left. - w_o''(\theta_{ox}\theta_{ox}'' + \theta_x \theta_x'') - w_o''(\theta_{ox}'^2 + \theta_x'^2) \right) \\
& + EI_y \left( v_o^{(4)}\theta_x + 2v_o'''\theta_x' + v_o''\theta_x'' - w_o^{(4)}(\theta_{ox}\theta_x) \right. \\
& - 2w_o''(\theta_x \theta_{ox}' + \theta_{ox}\theta_x') - w_o''(\theta_{ox}\theta_x'' + \theta_x \theta_{ox}'') \\
& \left. - 2w_o''(\theta_{ox}'\theta_x') \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
& m \left( I_o \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} + z_c \frac{d^2 v}{dt^2} - y_c \frac{d^2 w}{dt^2} \right) + EI_\omega \theta_x^{(4)} - GJ\theta_x'' - \frac{3}{2}EI_t \theta_x'^2 \theta_o'' \\
& - N(I_o \theta_x'' - y_c(w'' + v''\theta_x) + z_c(v'' + w''\theta_x)) \\
& + (EI_z - EI_y)(v''w'' - v''^2\theta_x + w''^2\theta_x) \\
& - EI_z(w_o''w''\theta_{ox} + w''v_o'' - v_o''v''\theta_x) \\
& + EI_y(w_o''w''\theta_x + v''w_o'' - v_o''v''\theta_{ox}) = 0
\end{aligned} \tag{3.65}$$

As Equações (3.63 – 3.65) são as equações diferenciais parciais de movimento de um elemento de viga de paredes delgadas com imperfeição, submetido a uma carga axial de compressão,  $N$ .

## 4

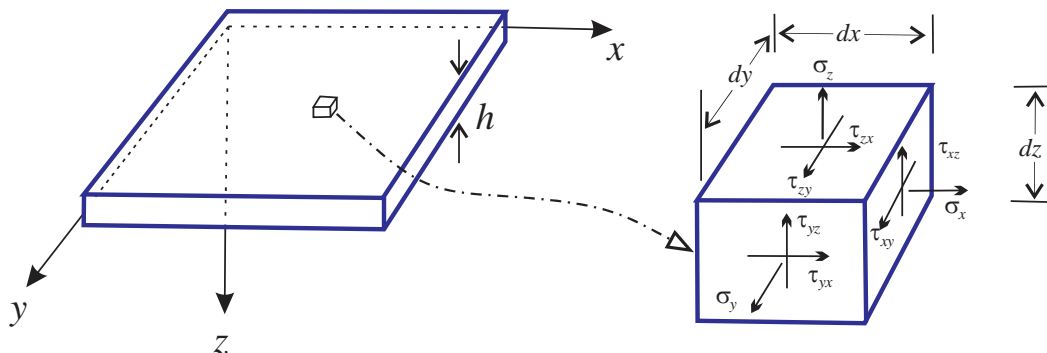
## Formulação para Análise do Comportamento Local

Neste capítulo se apresenta a formulação não linear para análise da flambagem e vibrações locais do perfil, considerando-o como formado por três placas e levando em consideração as condições de compatibilidade dos deslocamentos nas conexões das placas. Consideram-se duas teorias de placas: a teoria clássica de placas esbeltas (classical plate theory, CPT) e a teoria por deformação de cisalhamento de primeira ordem (first-order shear deformation theory, FSDT). Em ambas considera-se a ortotropia do material pultrudado. A FSDT leva em conta os efeitos de deformação de cisalhamento através de uma variação linear para deslocamentos no plano e requer um fator de correção de cisalhamento. Por outro lado, as teorias de mais alta ordem (HSDT) não exigem fator de correção de cisalhamento, mas suas equações de movimento são mais complicadas do que as do FSDT (Reddy, 1984; Thai et al., 2014).

## 4.1

## Teoria Não Linear de Flexão de Placas

Considere a placa delgada de espessura uniforme  $h$ , mostrada na Figura 4.1. Os eixos de coordenadas  $x$  e  $y$ , ao longo das bordas da placa, a meia altura entre as duas superfícies da placa, definem a superfície média da placa e o eixo  $z$ , direcionado verticalmente para abaixo, a sua normal. A Figura 4.1 ilustra um elemento diferencial da placa. Em cada lado do elemento pode existir uma tensão normal e duas componentes de tensão de cisalhamento.

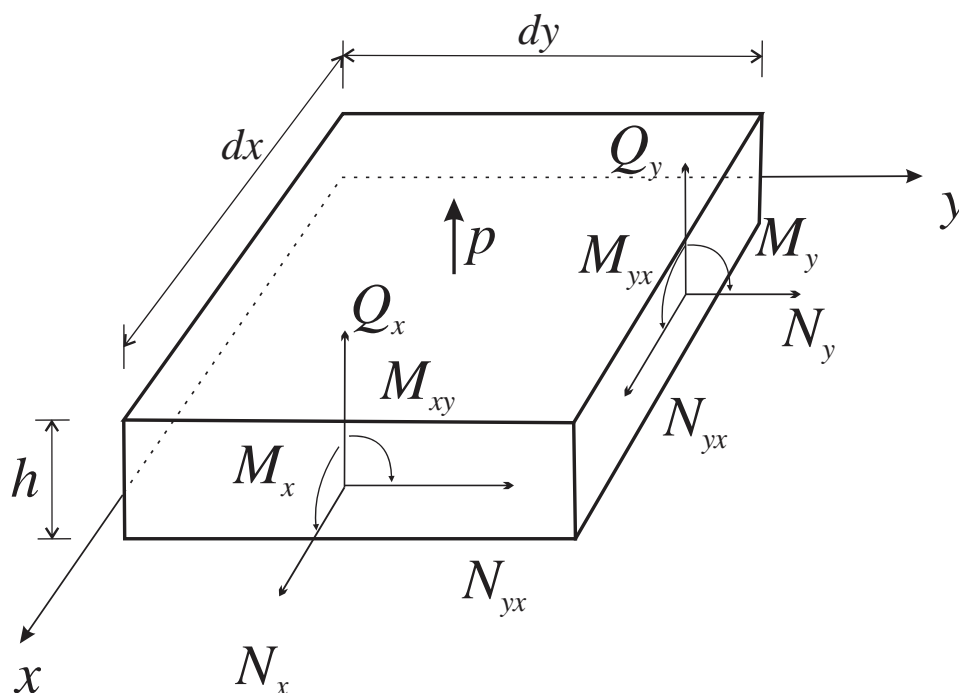


**Figura 4.1: Sistema de Referência da Placa e Tensões**

Placas podem ser classificadas em três categorias: placas espessas, placas finas e membranas. Se a espessura da placa é considerável, se comparada às outras dimensões, deformações de cisalhamento tendem a ter ordem de grandeza semelhante às de flexão e, portanto, devem ser consideradas na análise. Tais placas são denominadas de *placas espessas*. Por outro lado, *placas finas* são aquelas em que a espessura é pequena comparada às outras dimensões e deformações de cisalhamento são desprezíveis comparadas às de flexão. Um

terceiro grupo conhecido por *membranas* é constituído por elementos estruturais cuja espessura é tão fina que a rigidez a flexão tende a zero, e cargas transversais devem ser resistidas quase que exclusivamente pela ação de membrana. Neste capítulo somente placas finas a moderadamente espessas são consideradas.

Inicialmente, considera-se uma placa retangular de comprimento  $L$ , largura  $b$  e espessura  $h$ , carregada nos bordos e com uma carga distribuída transversal à superfície,  $p$ .



**Figura 4.2: Elemento de uma placa,  $dx dy$ , na configuração indeformada.**

O objetivo da teoria de placas é reduzir o problema tridimensional a uma aproximação bidimensional do mesmo problema. As forças internas e momentos por unidade de comprimento, obtidos a partir da integração das tensões ao longo da espessura da placa, que atuam nos bordos de um elemento infinitesimal de placa são mostrados na Figura 4.2. As intensidades de forças e momentos são dadas por:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x dz & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} dz & N_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yx} dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xz} dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yz} dz \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y z dz
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} z \, dz \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yx} z \, dz$$

onde:

$N_x, N_y$ , = Intensidades das forças normais, em  $kN/m$ .

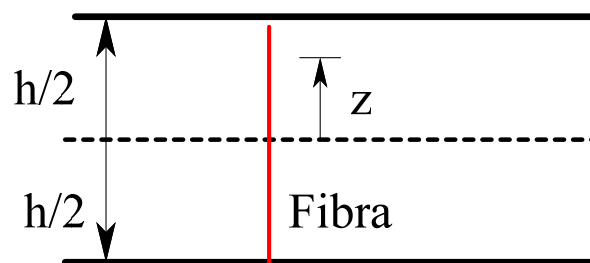
$N_{xy}, N_{yx}$  = Intensidades das forças cisalhantes no plano da placa, em  $kN/m$ .

$Q_x, Q_y$  = Intensidades de forças cortantes transversais, em  $kN/m$ .

$M_x, M_y$  = Intensidades de momento fletor, em  $kN \cdot m/m$

$M_{xy}, M_{yx}$  = Intensidades de momento torsor, em  $kN \cdot m/m$

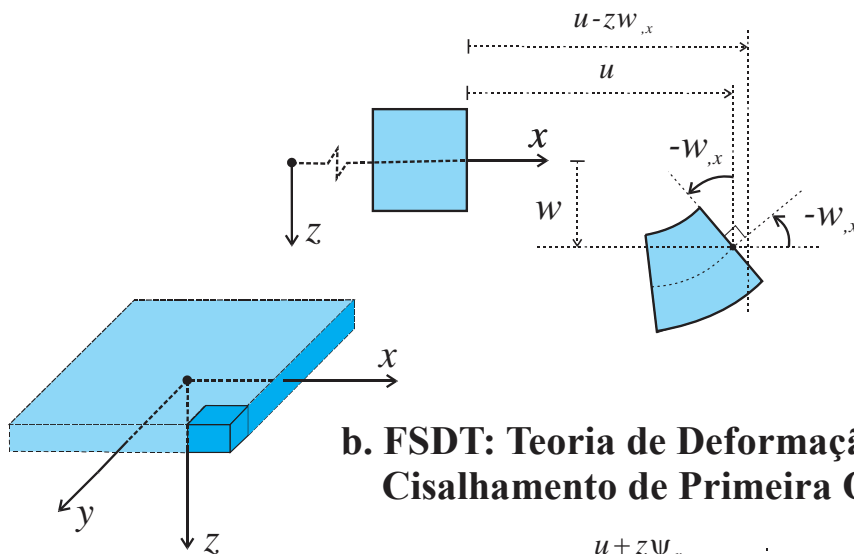
Para descrever os deslocamentos em um ponto qualquer da placa, a uma distância  $z$  da superfície neutra, considera-se uma fibra inicialmente reta e perpendicular ao plano médio da placa, como mostra a Figura 4.3.



**Figura 4.3: Configuração inicial indeformada**

A teoria clássica de placas assume que as fibras perpendiculares ao plano médio da placa permanecem retas e perpendiculares ao plano após a deformação. Na teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem, as fibras perpendiculares ao plano médio da placa permanecem retas, mas não necessariamente perpendiculares ao plano após a deformação. A Figura 4.4 ilustra estas duas hipóteses.

### a. CPT: Teoria Clássica de Placas



### b. FSDT: Teoria de Deformação por Cisalhamento de Primeira Ordem

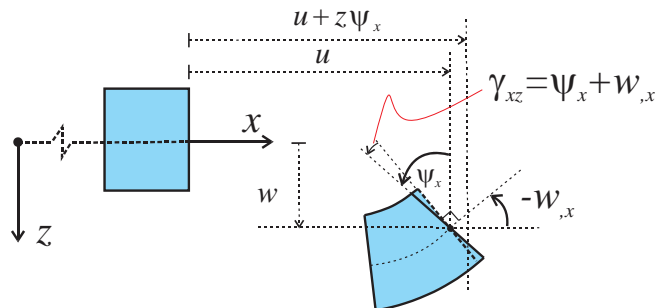


Figura 4.4: Hipóteses das teorias (a) CPT e (b) FSDT.

## 4.2

### Teoria Não Linear de Placas de Von Kármán

A teoria clássica de placas é baseada nas seguintes hipóteses as hipóteses de Kirchhoff:

1. As deformações de cisalhamento  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são desprezíveis, as linhas normais à superfície média antes da deformação permanecem retas e normais à superfície média após a deformação.
2. A tensão normal  $\sigma_z$  e a deformação correspondente são desprezíveis e, portanto, a deflexão transversal de qualquer ponto  $(x, y, z)$  é igual à deflexão transversal do ponto correspondente,  $(x, y, 0)$ , na superfície média.

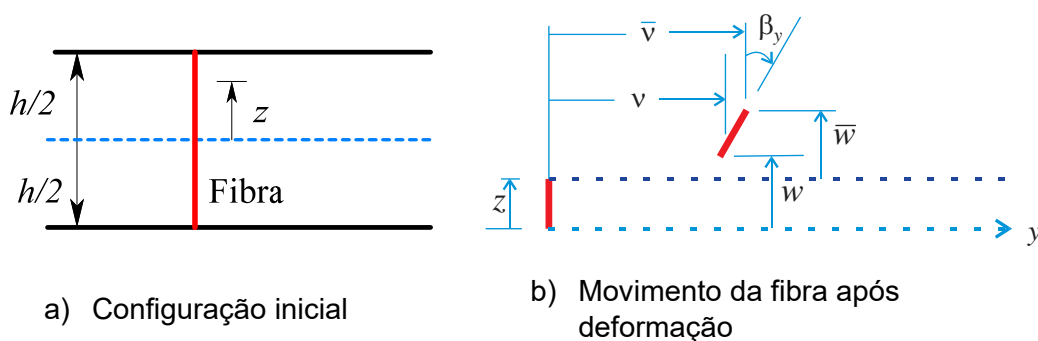


Figura 4.5: Normal ao plano médio antes e depois da deformação. (Brush et al., 1975)

Consequentemente, o campo de deslocamentos em um ponto qualquer da placa,  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  pode ser expresso em termos das correspondentes quantidades no plano médio,  $u, v, w$  pelas relações (Figura 4.5):

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u + z\beta_x \\ \bar{v} &= v + z\beta_y \\ \bar{w} &= w\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde  $\beta_x$  e  $\beta_y$  são rotações relativas aos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente.

Estas expressões mostram que os deslocamentos verticais não dependem de  $z$ , enquanto os deslocamentos no plano da placa,  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , são funções lineares em  $z$ .

As deformações de classe intermediárias são definidas assumindo que as deformações são pequenas comparadas com a unidade, as rotações relativas aos eixos  $x$  e  $y$  são moderadamente pequenas e rotações relativas ao eixo  $z$  desprezíveis.

As relações deformação-deslocamento para um ponto qualquer são dadas por:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \bar{u}_{,x} + \frac{1}{2}\bar{w}_{,x}^2 \\ \bar{\varepsilon}_y &= \bar{v}_{,y} + \frac{1}{2}\bar{w}_{,y}^2 \\ \bar{\gamma}_{xy} &= (\bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x}) + \bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y}\end{aligned}\tag{4.3}$$

onde, os subscritos  $x$  e  $y$  após a vírgula denotam diferenciação com respeito a  $x$  e  $y$ , respectivamente. Além disso, para rotações moderadamente pequenas, considera-se que:

$$\beta_x = -w_{,x} \text{ e } \beta_y = -w_{,y}$$

Substituindo (4.2) em (4.3), obtém-se:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + z\kappa_x \\ \bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_y + z\kappa_y \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \gamma_{xy} + 2z\kappa_{xy}\end{aligned}\tag{4.4}$$

onde  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  são as correspondentes quantidades no plano médio da placa, e  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  e  $\kappa_{xy}$  são as mudanças de curvatura, dadas em termos dos deslocamentos da superfície média por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}\beta_x^2 \\
\varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2}\beta_y^2 \\
\gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + \beta_x\beta_y \\
\kappa_x &= \beta_{x,x} \\
\kappa_y &= \beta_{y,y} \\
\kappa_{xy} &= \frac{1}{2}(\beta_{x,y} + \beta_{y,x})
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Estas equações são as relações cinemáticas para a placa. Todas as variáveis nestas equações são quantidades referentes ao plano médio da placa e são funções de  $x$  e  $y$ .

A relação constitutiva para um elemento de placa com material ortotrópico (com reforço unidirecional) é dada por:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

onde as propriedades de rigidez  $A_{op}$ ,  $D_{op}$ , ( $o, p = 1, 2, 6$ ) são determinadas a partir das integrais:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz, \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z^2 dz \tag{4.7}$$

Os termos  $Q_{ij}$  são escritos em função das constantes elásticas do material. Para o material ortotrópico são apresentados no Capítulo 2, Eq. 2.5.

As deformações da superfície média incorporando o efeito de imperfeições geométricas iniciais descritas por uma função  $w_o(x, y)$ , são dadas por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \\
\varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \\
\gamma_{xy} &= (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{o,y} + w_{,y}w_{o,x} + w_{,x}w_{,y}) \\
\kappa_x &= -w_{,xx} \\
\kappa_y &= -w_{,yy} \\
\kappa_{xy} &= \frac{1}{2}(-w_{,xy} - w_{,yx})
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Introduzindo estas deformações na matriz constitutiva do material ortotrópico, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \\ v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{o,y} + w_{,y}w_{o,x} + w_{,x}w_{,y} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

#### 4.2.1

##### Formulação de Energia pela Teoria Clássica de Placas

A energia de deformação interna,  $U$ , é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\varepsilon}_y + \bar{\sigma}_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) dV \quad (4.10)$$

Integrando as tensões ao longo da espessura da placa e substituindo as deformações pelas deformações no plano médio da placa, obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L \left[ N_x \left( u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \right) + N_y \left( v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \right) + N_{xy} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{o,y} + w_{,y}w_{o,x} + w_{,x}w_{,y}) + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy} \right] dx dy \quad (4.11)$$

As intensidades de forças e momentos são obtidas da matriz constitutiva Eq. (4.9), introduzindo estas expressões, obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L \left[ A_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \right)^2 + 2A_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \right) \left( v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \right) + A_{22} \left( v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \right)^2 + A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{o,y} + w_{,y}w_{o,x} + w_{,x}w_{,y})^2 + D_{11} \kappa_x^2 + 2D_{12} \kappa_x \kappa_y + D_{22} \kappa_y^2 + 4D_{66} \kappa_{xy}^2 \right] dx dy \quad (4.12)$$

O potencial das cargas aplicadas,  $\Omega$ , para uma placa com imperfeição inicial sob compressão axial na direção  $x$  pode ser escrito como:

$$\Omega = -N_x \int_0^b \int_0^L \left( u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \right) dx dy \quad (4.13)$$

onde  $N_x$  é a carga aplicada por unidade de comprimento ao longo dos bordos.

A energia cinética, considerando o campo de deslocamentos (4.2) é dada por:

$$T = \frac{\rho}{2} \int \int \int [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] dx dy dz \quad (4.14a)$$

Desprezando-se a inércia a rotação, hipótese usual em placas delgadas, tem-se:

$$T = \frac{\rho}{2} \int \int [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx dy dz = \frac{\rho h}{2} \int \int [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx dy \quad (4.14b)$$

onde  $(\dot{\phantom{x}})$  denota a derivada com respeito ao tempo e  $\rho$  é a massa por unidade de volume.

Considerando a função de Lagrange,  $L = T - \Pi = T - U - \Omega$ , aplicando o princípio de Hamilton e desprezando-se os termos de inércia à rotação, obtêm-se as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial u_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Pi}{\partial u_{,y}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Pi}{\partial u_{,t}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial v_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Pi}{\partial v_{,y}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial v_{,t}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial w_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Pi}{\partial w_{,y}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Pi}{\partial w_{,t}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Pi}{\partial w_{,xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial \Pi}{\partial w_{,xy}} \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \Pi}{\partial w_{,yy}} = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

#### 4.2.2

##### Equações Não Lineares de Equilíbrio

Considerando o funcional  $\Pi = U + \Omega$ , e substituindo nas equações de Euler-Lagrange as relações constitutivas, obtêm-se as seguintes equações não lineares de equilíbrio, em termos dos deslocamentos da superfície média,  $u$ ,  $v$  e  $w$  e suas derivadas:

$$\begin{aligned} \left[ A_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) + A_{12} \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{o,y} \right) \right]_{,x} \\ + \left[ A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{o,y} + w_{,y} w_{o,x} + w_{,x} w_{,y}) \right]_{,y} = 0 \end{aligned} \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} \left[ A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{o,y} + w_{,y} w_{o,x} + w_{,x} w_{,y}) \right]_{,x} \\ + \left[ A_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) + A_{22} \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{o,y} \right) \right]_{,y} = 0 \end{aligned} \quad (4.16b)$$

$$\begin{aligned}
& D_{11}w_{,xxxx} + 2D_{12}w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} + 4D_{66}w_{,xxyy} \\
& - \left( \left[ A_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \right) \right. \right. \\
& + A_{12} \left( v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \right) \left. \right] w_{,xx} \\
& + 2 \left[ A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{o,y} + w_{,y}w_{o,x} \right. \\
& + w_{,x}w_{,y}) \left. \right] w_{,xy} \\
& + \left[ A_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \right) \right. \\
& + A_{22} \left( v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \right) \left. \right] w_{,yy} \Big) = 0
\end{aligned} \tag{4.16c}$$

que podem ser reescritas na forma concisa:

$$\left[ (A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y)_{,x} + (A_{66}\gamma_{xy})_{,y} \right] = 0 \tag{4.17a}$$

$$\left[ (A_{66}\gamma_{xy})_{,x} + (A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y)_{,y} \right] = 0 \tag{4.17b}$$

$$\begin{aligned}
& D_{11}w_{,xxxx} + 2D_{12}w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} + 4D_{66}w_{,xxyy} \\
& - (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) = 0
\end{aligned} \tag{4.17c}$$

### 4.2.3

#### Equações de Movimento

As equações de movimento em termos dos deslocamentos são dadas por:

$$\begin{aligned}
& \left[ A_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \right) + A_{12} \left( v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \right) \right]_{,x} \\
& + \left[ A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{o,y} + w_{,y}w_{o,x} \right. \\
& + w_{,x}w_{,y}) \left. \right]_{,y} = \rho h \ddot{u}
\end{aligned} \tag{4.18a}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{o,y} + w_{,y}w_{o,x} + w_{,x}w_{,y}) \right]_{,x} \\
& + \left[ A_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \right) \right. \\
& + A_{22} \left( v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \right) \left. \right]_{,y} = \rho h \ddot{v}
\end{aligned} \tag{4.18b}$$

$$\begin{aligned}
& D_{11}w_{,xxxx} + 2D_{12}w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} + 4D_{66}w_{,xxyy} \\
& - \left( \left[ A_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \right) \right. \right. \\
& + A_{12} \left( v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \right) \left. \right] w_{,xx} \\
& + 2 \left[ A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{o,y} + w_{,y}w_{o,x} \right. \\
& + w_{,x}w_{,y}) \left. \right] w_{,xy} \\
& + \left[ A_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \right) \right. \\
& + A_{22} \left( v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \right) \left. \right] w_{,yy} \Big) = \rho h \ddot{w}
\end{aligned} \tag{4.18c}$$

### 4.3

#### Equações de Movimento pela Teoria de Primeira Ordem

Neste item apresenta-se a formulação não linear da teoria de placas de primeira ordem, incluindo o efeito da não linearidade geométrica e imperfeição.

##### 4.3.1

##### Formulação

A teoria de primeira ordem, Figura 4.4, segue as hipóteses de Kirchhoff com a exceção de que a normal ao plano médio não permanece perpendicular ao dito plano após a deformação. Consequentemente, deformações por cisalhamento transversal são levadas em consideração. O campo de deslocamentos para um ponto qualquer na teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem é dado por:

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= u + z\psi_x \\
\bar{v} &= v + z\psi_y \\
\bar{w} &= w
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  são os deslocamentos em um ponto arbitrário  $(x, y, z)$  da placa,  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os deslocamentos em um ponto  $(x, y, z = 0)$  situado no plano médio da placa e  $\psi_x$  e  $\psi_y$  são as rotações da seção transversal em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

As deformações normais e de cisalhamento em um ponto qualquer ao longo da espessura da placa são dadas por:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + z\psi_{x,x} \\
\bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_y + z\psi_{y,y} \\
\bar{\gamma}_{xy} &= \gamma_{xy} + z(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\
\bar{\gamma}_{xz} &= \psi_x + w_{,x} \\
\bar{\gamma}_{yz} &= \psi_y + w_{,y}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \tag{4.21}$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2$$

$$\gamma_{xy} = (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y})$$

onde  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  são as deformações normais e  $\gamma_{xy}$  a deformação por cisalhamento no plano médio na teoria de placas de von Kármán.

Os esforços em um elemento de placa podem ser calculados a partir da integração das tensões ao longo da espessura da placa a saber:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (4.22)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{xz} \end{Bmatrix} dz$$

onde  $N_x, N_y, N_{xy}$  são intensidades, por unidade de comprimento no plano médio da placa, das forças normais e de cisalhamento,  $M_x, M_y, M_{xy}$  são as intensidades dos momentos fletores e torsor e  $Q_y$  e  $Q_x$  são as intensidades das forças de cisalhamento transversais, Figura 4.2. Os símbolos  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yz}$  e  $\bar{\tau}_{xz}$  denotam as componentes de tensão em um ponto qualquer da placa.

A matriz constitutiva para um material composto é dada por:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & KA_{44} & KA_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & KA_{45} & KA_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \\ \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \\ w_{,y} + \psi_y \\ w_{,x} + \psi_x \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

De acordo com a teoria de placas, os coeficientes  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) na Eq. 5.5 podem ser determinadas a partir das integrais:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz$$

$$B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z dz$$

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z^2 dz \quad (4.24)$$

As componentes de rigidez associadas às forças de cisalhamento transversais  $A_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 4, 5$ ) na Eq. 4.23 são dadas por:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{\alpha\beta} dz \quad (4.25)$$

O coeficiente  $K$  na Eq. 4.23 é o fator de correção por cisalhamento tomado como  $K = 5/6$ , neste trabalho (Wang, 2000; Vrabie, 2017).

Para o tipo de material ortotrópico considerado neste trabalho, contendo fibras apenas na direção axial do perfil, os efeitos de acoplamento com a terceira direção desaparecem e a Eq. 4.23 simplifica significativamente tendo em vista que:

$$A_{16} = A_{26} = B_{op} = D_{16} = D_{26} = A_{45} = 0 \quad (o, p = 1, 2, 6) \quad (4.26)$$

e:

$$Q_{16} = Q_{26} = C_{45} = 0 \quad (4.27)$$

Além disso, as quantidades  $Q_{op}$  e  $C_{\alpha\beta}$  podem ser escritas em termos das constantes elásticas do material  $E_{11}, E_{22}, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$  como:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (4.28)$$

$$Q_{66} = G_{12}, \quad C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}$$

Incorporando imperfeições, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \\ \gamma_{xy} &= (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{o,y} + w_{,y}w_{o,x} + w_{,x}w_{,y}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Introduzindo estas deformações na matriz constitutiva do material ortotrópico, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & KA_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & KA_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{o,x} \\ v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{o,y} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{o,y} + w_{,y}w_{o,x} + w_{,x}w_{,y} \\ \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \\ w_{,y} + \psi_y \\ w_{,x} + \psi_x \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

### 4.3.2

#### Energia Potencial Estacionária

A energia de deformação interna,  $U$ , é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\varepsilon}_y + \bar{\sigma}_{xy} \bar{\gamma}_{xy} + \bar{\tau}_{xz} \bar{\gamma}_{xz} + \bar{\tau}_{yz} \bar{\gamma}_{yz}) dV \quad (4.31)$$

Substituindo as expressões de tensão e deformação previamente definidas e integrando ao longo da espessura da placa, tem-se:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L & \left[ N_x \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) + N_y \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{o,y} \right) \right. \\
& + N_{xy} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{o,y} + w_{,y} w_{o,x} + w_{,x} w_{,y}) \\
& + M_x \psi_{x,x} + M_y \psi_{y,y} + M_{xy} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\
& \left. + Q_y (w_{,y} + \psi_y) + Q_x (w_{,x} + \psi_x) \right] dx dy
\end{aligned} \quad (4.32)$$

Introduzindo a matriz constitutiva Eq. (4.30), tem-se:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L & \left[ A_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right)^2 \right. \\
& + 2A_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right. \\
& + w_{,y} w_{o,y} \left. \right) + A_{22} \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{o,y} \right)^2 \\
& + A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{o,y} + w_{,y} w_{o,x} + w_{,x} w_{,y})^2 \\
& + D_{11} (\psi_{x,x})^2 + 2D_{12} \psi_{x,x} \psi_{y,y} + D_{22} (\psi_{y,y})^2 \\
& + D_{66} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x})^2 + KA_{44} (w_{,y} + \psi_y)^2 \\
& \left. + KA_{55} (w_{,x} + \psi_x)^2 \right] dx dy
\end{aligned} \quad (4.33)$$

O potencial das cargas aplicadas,  $\Omega$ , para uma placa sob compressão axial pode ser escrita como:

$$\Omega = -N_x \int_0^b \int_0^L \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) dx dy \quad (4.35)$$

onde  $N_x$  é a carga aplicada por unidade de comprimento.

A energia cinética  $T$  da placa é dada em termos do campo de deslocamentos por:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int \int \int \rho [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] dx dy dz \\
\text{ou seja:} \\
T &= \frac{\rho}{2} \int \int \int [(\dot{u} - z\dot{\psi}_x)^2 + (\dot{v} - z\dot{\psi}_y)^2 + (\dot{w})^2] dx dy dz
\end{aligned} \quad (4.36)$$

o que leva a:

$$T = \frac{\rho h}{2} \int \int \left[ \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \frac{h^2}{12} (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2) \right] dx dy$$

onde o ponto (  $\dot{\phantom{x}}$  ) denota a derivada com respeito ao tempo e  $\rho$  é a densidade do material.

O Lagrangiano é dado por:

$$L = T - \Pi = T - U - \Omega \quad (4.37)$$

As equações de movimento podem ser derivadas a partir do princípio de Hamilton, o que requer que:

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} L dt = 0 \quad (4.38)$$

Extremando o funcional, obtêm-se as equações de Euler-Lagrange correspondentes à teoria de primeira ordem, a saber:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_{,y}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial u_{,t}} &= 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_{,y}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial v_{,t}} &= 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{,y}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial w_{,t}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{,xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{,xy}} \\
 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{,yy}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial F}{\partial w_{,tt}} &= 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial \psi_x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \psi_{x,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \psi_{x,y}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \dot{\psi}_x} &= 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial \psi_y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \psi_{y,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \psi_{y,y}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \dot{\psi}_y} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

que, em termos das três componentes de deslocamentos e das duas rotações, são dadas por

$$\begin{aligned}
 &\left[ A_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) + A_{12} \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{o,y} \right) \right]_{,x} \\
 &\quad + \left[ A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{o,y} + w_{,y} w_{o,x} + w_{,x} w_{,y}) \right]_{,y} = \rho h \ddot{u} \\
 &\left[ A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{o,y} + w_{,y} w_{o,x} + w_{,x} w_{,y}) \right]_{,x} \\
 &\quad + \left[ A_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) + A_{22} \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{o,y} \right) \right]_{,y} = \rho h \ddot{v} \\
 &\left[ A_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) (w_{,x} + w_{o,x}) + A_{12} (w_{,x} + w_{o,x}) \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. w_{,y} w_{o,y} \right) + A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{o,y} + w_{,y} w_{o,x} + w_{,x} w_{,y}) (w_{o,y} + w_{,y}) + \right. \\
 &\quad \left. K A_{55} (w_{,x} + \psi_x) \right]_{,x} + \left[ A_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) (w_{,y} + w_{o,y}) + A_{22} \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. w_{,y} w_{o,y} \right) (w_{,y} + w_{o,y}) + A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{o,y} + w_{,y} w_{o,x} + w_{,x} w_{,y}) (w_{o,x} + \right. \\
 &\quad \left. w_{,x}) + K A_{44} (w_{,y} + \psi_y) \right]_{,y} = \rho h \ddot{w}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$D_{11} \psi_{x,xx} + D_{12} \psi_{y,xy} + D_{66} (\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}) - K A_{55} (\psi_x + w_{,x}) = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\psi}_x$$

$$D_{22} \psi_{y,yy} + D_{12} \psi_{x,xy} + D_{66} (\psi_{y,xx} + \psi_{x,xy}) - K A_{44} (\psi_y + w_{,y}) = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\psi}_y$$

## 5

### Análise da Estabilidade: Cargas e Modos Críticos

Neste capítulo são obtidas analiticamente as cargas e modos críticos do perfil, considerando as formulações global e local descritas nos Capítulos 3 e 4 e investiga-se a influência das características físicas e geométricas do perfil pultrudado na carga e modo crítico. Os resultados da análise são comparados com aqueles obtidos através do programa GBTUL (Bebiano et al., 2008; 2018). Estes resultados servirão de base para análise do comportamento pós-crítico e sensibilidade a imperfeições estudados no Capítulo 7. As variáveis apresentadas a seguir foram definidas nos Capítulos 3 e 4.

#### 5.1

#### Análise da Flambagem Global – Discretização das Equações de Movimento

Neste trabalho considera-se, sem perda de generalidade, o caso de uma viga-coluna simplesmente apoiada. Considerando os modos de flambagem a flexão nas duas direções ortogonais (direções principais) e os modos de flambagem de torção (assumindo que a rotação  $\theta_x$  é nula nas duas extremidades), tem-se (Blevins e Plunkett, 1980):

$$v(x, t) = v(t) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{x}{L} \right) \quad (5.1)$$

$$w(x, t) = w(t) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{x}{L} \right) \quad (5.2)$$

$$\theta_x(x, t) = \theta_x(t) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{x}{L} \right) \quad (5.3)$$

onde  $v(t)$ ,  $w(t)$ , e  $\theta_x(t)$  são as amplitudes modais dependentes do tempo associadas aos três graus de liberdade e  $m$  o número de semiondas axiais. Para a estrutura simplesmente apoiada sem restrições laterais tem-se que o menor autovalor na análise global corresponde a  $m=1$ . Assim, sem perda de generalidade, restringe-se a seguir a análise aos menores autovalores, considerando  $m=1$ . Cabe ressaltar que as funções (5.1) a (5.3) são a solução analítica das equações linearizadas de equilíbrio crítico.

Considerando que a forma da imperfeição com maior influência no comportamento não linear de equilíbrio é aquela que tem a mesma forma do modo crítico, tem-se que as imperfeições geométricas iniciais são descritas pelas seguintes funções:

$$v_o(x) = v_o \operatorname{sen} \left( \pi \frac{x}{L} \right) \quad (5.4)$$

$$w_o(x) = w_o \operatorname{sen}\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (5.5)$$

$$\theta_o(x) = \theta_{ox} \operatorname{sen}\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (5.6)$$

onde  $v_o$ ,  $w_o$ ,  $\theta_{ox}$  são as amplitudes das imperfeições.

Introduzindo as funções de interpolação (5.1)-(5.6) nas Equações (3.63) a (3.65) e aplicando o método de Galerkin, obtém-se o seguinte sistema de equações não lineares de equilíbrio que descrevem o caminho não linear de equilíbrio da estrutura imperfeita:

$$\begin{aligned} \frac{mL}{2} \left( \frac{d^2}{dt^2} v + z_c \frac{d^2}{dt^2} \theta \right) + EI_z \frac{\pi^4}{2L^3} \left[ v - v_o + \frac{\pi^2}{8L^2} (v^3 - v_o^3) \right] \\ - P \frac{\pi}{L} \left[ \frac{\pi}{2} (v + z_c \theta_x) + \frac{2}{3} y_c \theta_x^2 \right] \\ + (EI_z - EI_y) \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} w \theta_x - \frac{3}{8} \pi v \theta_x^2 \right) - 2 \frac{L}{\pi} q_y \\ + EI_y \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} w_o \theta_x - \frac{1}{8} \frac{\pi^3}{L^2} v_o \theta_{ox} \theta_x \right) \\ - EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} w_o \theta_{ox} - \frac{3}{16} \pi v_o (\theta_{ox}^2 + \theta_x^2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{mL}{2} \left( \frac{d^2}{dt^2} w - y_c \frac{d^2}{dt^2} \theta_x \right) + EI_y \frac{\pi^4}{2L^3} \left[ w - w_o + \frac{\pi^2}{8L^2} (w^3 - w_o^3) \right] \\ - P \frac{\pi}{L} \left[ \frac{\pi}{2} (w - y_c \theta_x) + \frac{2}{3} z_c \theta_x^2 \right] \\ + (EI_z - EI_y) \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} v \theta_x + \frac{3}{8} \pi w \theta_x^2 \right) - 2 \frac{L}{\pi} q_z \\ + EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} v_o \theta_x + \frac{3}{8} \pi w_o \theta_{ox} \theta_x \right) \\ + EI_y \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} v_o \theta_{ox} + \frac{3}{16} \pi w_o (\theta_{ox}^2 + \theta_x^2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{mL}{2} \left( I_o \frac{d^2}{dt^2} \theta_x + z_c \frac{d^2}{dt^2} v - y_c \frac{d^2}{dt^2} w \right) + \frac{1}{2} \frac{\pi^4}{L^3} EI_w (\theta_x - \theta_{ox}) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{L} GJ (\theta_x - \theta_{ox}) + \frac{3}{16} \frac{\pi^4}{L^3} EI_t (\theta_x^3 - \theta_{ox}^3) \\
& + EI_z \frac{\pi^4}{2L^3} \left[ v - v_o + \frac{\pi^2}{8L^2} (v^3 - v_o^3) \right] \\
& - P \frac{\pi}{L} \left[ \frac{\pi}{2} I_o \theta_x - y_c \left( \frac{\pi}{2} w - \frac{4}{3} v \theta_x \right) + z_c \left( \frac{\pi}{2} v + \frac{4}{3} w \theta_x \right) \right] \\
& + (EI_z - EI_y) \frac{\pi^3}{L^3} \left[ \frac{4}{3} vw - \frac{3}{8} \pi (v^2 \theta_x - w^2 \theta_x) \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{L}{\pi} q_z (\pi e_z \theta_x - 4e_y) \\
& - EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{3}{8} \pi w_o w \theta_{ox} + \frac{4}{3} w v_o - \frac{3}{8} \pi v_o v \theta_x \right) \\
& + EI_y \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{3}{8} \pi w_o w \theta_x + \frac{4}{3} w_o v - \frac{3}{8} \pi v_o \theta_{ox} v \right) = 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

### 5.1.1

#### Linearização das Equações de Equilíbrio

As cargas e modos de bifurcação são obtidos a partir da linearização das equações discretizadas. Linearizando as equações (5-7) a (5.9) e desprezando os termos relativos às imperfeições, obtêm-se as seguintes equações lineares de equilíbrio crítico:

$$\frac{\pi^2 EI_z}{L^2} v - P(v + z_c \theta_x) = 0 \tag{5.10}$$

$$\frac{\pi^2 EI_y}{L^2} w - P(w - y_c \theta_x) = 0 \tag{5.11}$$

$$\left( \frac{\pi^2 EI_w}{L^2} + GJ \right) \theta_x - P[I_o \theta_x - y_c w + z_c v] = 0 \tag{5.12}$$

que podem ser expressas matricialmente como:

$$\{[K_e] - P[K_G]\}\{U\} = 0 \tag{5.13}$$

onde  $\{U\}$  é o vetor de deslocamentos,

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{\pi^2 EI_w}{L^2} + GJ \right) \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

é a matriz de rigidez elástica e

$$[K_G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ z_c & -y_c & I_o \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

é a matriz de rigidez geométrica.

Para um perfil C monossimétrico, onde as duas mesas têm as mesmas dimensões, tem-se que a ordenada do centro de cisalhamento  $z_c = 0$  em (5.15).

Para que o sistema homogêneo admita soluções não triviais, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser igual à zero, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} - P & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} - P & y_c P \\ 0 & y_c P & \left( \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} + GJ \right) - PI_o \end{bmatrix} = 0 \quad (5.16)$$

Observa-se que, para  $z_c = 0$ , a primeira equação se torna desacoplada e o autovalor associado corresponde a um modo de flambagem de flexão em torno do eixo  $z$ , que, para a maioria das seções em C, corresponde ao eixo de menor inércia (largura da alma maior ou igual à largura da mesa), sendo dado por:

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (5.17)$$

Os outros dois modos estão associados a dois modos de flexo-torção. Os dois autovalores são determinados a partir do determinante da submatriz 2x2, que resulta em uma equação característica quadrática. A solução da equação característica é descrita em termos dos seguintes parâmetros:

$$A = GJL^2 + \pi^2 EI_y I_o + \pi^2 EI_\omega \quad (5.18)$$

$$B = G^2 J^2 L^4 - 2\pi^4 E^2 I_y I_o I_\omega - 2\pi^2 EI_y I_o GJL^2 + \pi^4 E^2 I_y^2 I_o^2 + 2\pi^2 EI_\omega GJL^2 + \pi^4 E^2 I_\omega^2 + 4y_c^2 \pi^2 EI_y GJL^2 + 4y_c^2 \pi^4 E^2 I_y I_\omega \quad (5.19)$$

sendo dadas por:

$$P_{cr2} = \frac{A - \sqrt{B}}{2(I_o - y_c^2)L^2} \quad (5.20)$$

$$P_{cr3} = \frac{A + \sqrt{B}}{2(I_o - y_c^2)L^2} \quad (5.21)$$

Como se pode observar, a carga crítica de flambagem depende das características físicas e geométricas do perfil, podendo estar associada a um modo de flexão em torno do eixo de menor inércia ou a um modo acoplado de flexo-torção. O terceiro autovalor corresponde a uma carga bem superior às outras duas.

Portanto a carga crítica é dada por:

$$P_{cr} = \min(P_{cr1}, P_{cr2}) \quad (5.22)$$

Considerando as cargas críticas de flambagem a flexão,  $P_y$  e  $P_z$ , e a carga crítica de torção,  $P_\theta$ , para uma coluna simplesmente apoiada:

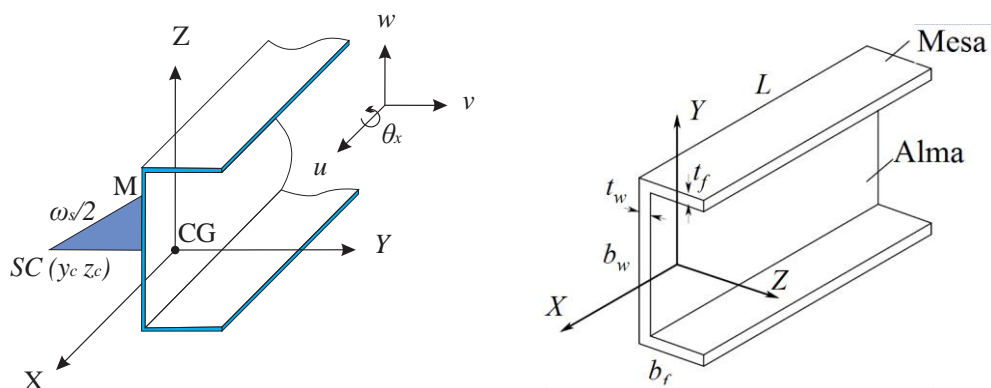
$$P_z = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}, \quad P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}, \quad P_\theta = \frac{1}{I_0} \left( \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} + GJ \right), \quad (5.23)$$

pode-se escrever a carga crítica de flexo-torção como (Mohri et al., 2001; Allen e Bulson, 1980):

$$P_{cr2} = \frac{(P_y + P_\theta) - \sqrt{(P_y + P_\theta)^2 - 4a_t P_y P_\theta}}{2a_t}; \quad a_t = 1 - \frac{y_c^2}{I_0} \quad (5.24)$$

de onde se pode observar o efeito de flexão e torção no modo acoplado.

### 5.1.2 Análise Paramétrica



**Figura 5.1: Sistema de referência, deslocamentos e dimensões da seção transversal (ver Tabela 5.1).**

As dimensões do perfil C usado na seguinte análise paramétrica e suas propriedades geométricas são apresentadas na Tabela 5.1 (ver Figura 5.1), com base em dimensões usuais de perfis pultrudados oferecidos pela indústria. Ao longo desta tese adotou-se o ponto em vez da vírgula para indicar as casas decimais.

**Tabela 5.1: Dimensões e propriedades geométricas da seção C 200x100X5.**

$b_f$	100mm	$A$	$19.5 \text{ cm}^2$
$b_w$	200mm	$J$	$1.692 \text{ cm}^4$
$t_f$	5mm	$I_w$	$1.289\text{E}04 \text{ cm}^6$
$t_w$	5mm	$I_y$	$1236.60 \text{ cm}^4$
$y_c$	-60.8mm	$I_z$	$193.450 \text{ cm}^4$
$z_c$	0	$I_R$	$351000 \text{ cm}^6$
		$I_o$	$110.302 \text{ cm}^2$

Cinco materiais ortotrópicos (denotados como M1 a M5) e um material isotrópico (denotado como ISO), usado como referência, são adotados na análise paramétrica. As constantes relevantes do material, com base em valores obtidos em catálogos e em valores experimentais, são apresentadas na Tabela 5.2 (Cardoso e Togashi, 2018; Cintra et al., 2019).

**Tabela 5.2: Propriedades dos cinco materiais ortotrópicos (M1 a M5) e do material isotrópico de referência (ISO)**

Propriedade	Unidade	M1	M2	M3	M4	M5	ISO
$E_1$	$kN/mm^2$	20.00	20.00	28.00	20.10	15.89	28.00
$E_2$	$kN/mm^2$	10.00	5.00	19.30	8.62	7.75	28.00
$G_{12}$	$kN/mm^2$	5.00	2.20	2.60	2.47	3.13	11.38
$\nu_{12}$	-	0.23	0.23	0.23	0.23	0.32	0.23
$\nu_{21}$	-	0.115	0.0575	0.1585	0.098	0.0735	0.23

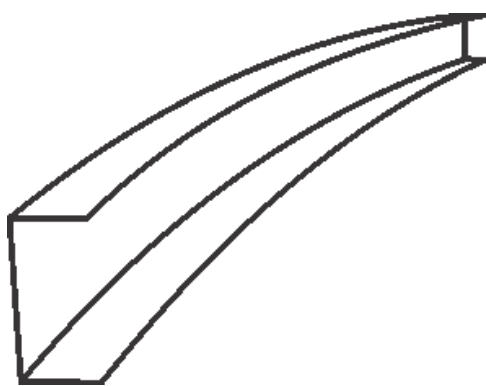
$E_1$  = Módulo de Elasticidade longitudinal

$E_2$  = Módulo de Elasticidade transversal

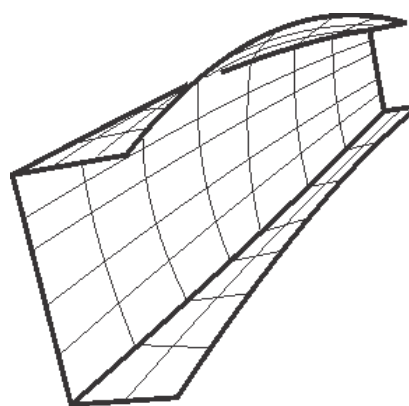
$G_{12}$  = Modulo de Elasticidade por cisalhamento

$\nu_{ij}$  = Coeficiente de Poisson

As Tabelas 5-3 a 5-8 mostram os três autovalores obtidos das equações (5.17), (5.20) e (5.21) e os respectivos autovetores normalizados (magnitude unitária) para os seis diferentes materiais, analisados, considerando uma coluna com 3.5m de comprimento, onde  $F$  designa a carga de bifurcação de flexão e  $FT$ , as duas cargas de flexo-torção. Para este comprimento, tem-se que a carga crítica (menor autovalor) é associada a um modo de flexo-torção para todos os materiais analisados (Equação (5.20)). Observa-se também que o terceiro autovalor é bem superior aos dois primeiros e não será considerado na análise paramétrica subsequente. Verifica-se que o autovetor associado à carga de flexo-torção  $P_{cr2}$  tem sua componente de rotação,  $\theta_x$ , bem superior a aquela associada a  $P_{cr3}$ , sendo aproximadamente igual a 0.164rad no vetor normalizado, indicando a forte interação entre flexão e torção do segundo modo. Já para o terceiro modo este valor fica em torno de 0.008rad, demonstrando que o terceiro modo é predominantemente um modo de flexão em torno do eixo de maior inércia. A Figura 5.2 ilustra os modos de flexão e flexo-torção associados aos dois menores autovalores obtidos pelo programa GBTUL (Bebiano et al., 2008).



Modo F: Flexão em torno do eixo de menor inércia (GBTUL)



Modo FT: flexo-torção (GBTUL)

**Figura 5.2: Modos globais de flambagem.**

**Tabela 5.3: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3.5 m, Material M1.**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
<i>F</i>	31.17	1.000	0.000	0.000
<i>FT</i>	<b>25.27</b>	0.000	-0.986	-0.164
<i>FT</i>	314.29	0.000	-0.999	0.008

**Tabela 5.4: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3.5 m, Material M2.**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
<i>F</i>	31.17	1.000	0.000	0.000
<i>FT</i>	<b>21.34</b>	0.000	-0.986	-0.164
<i>FT</i>	311.75	0.000	-0.999	0.007

**Tabela 5.5: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3.5 m, Material M3.**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
<i>F</i>	43.64	1.000	0.000	0.000
<i>FT</i>	<b>29.20</b>	0.000	-0.986	-0.166
<i>FT</i>	436.02	0.000	-0.999	0.007

**Tabela 5.6: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3.5 m, Material M4.**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
<i>F</i>	31.32	1.000	0.000	0.000
<i>FT</i>	<b>21.81</b>	0.000	-0.986	-0.165
<i>FT</i>	313.54	0.000	-0.999	0.007

**Tabela 5.7: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3.5 m, Material M5.**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
<i>F</i>	24.76	1.000	0.000	0.000
<i>FT</i>	<b>18.90</b>	0.000	-0.986	-0.164
<i>FT</i>	248.93	0.000	-0.999	0.008

**Tabela 5.8: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3.5 m, Material ISO**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
<i>F</i>	43.64	1.000	0.000	0.000
<i>FT</i>	<b>41.40</b>	0.000	-0.986	-0.161
<i>FT</i>	444.09	0.000	-0.999	0.010

Para melhor entender a influência do material na carga crítica, apresentam-se na Tabela 5.9 as cargas críticas dos seis materiais analisados juntamente com o módulo de Young do material na direção axial do perfil (direção das fibras),  $E_1$ , e o módulo de cisalhamento,  $G_{12}$ . Para efeito de comparação, apresenta-se também a carga crítica obtida pelo GBTUL e a carga de flexão associada ao segundo modo. Enquanto a carga de flexão é diretamente proporcional a  $E_1$  (equação 5.17), a carga de flexo-torção depende do módulo de Young na direção axial,  $E_1$ , e do módulo de cisalhamento,  $G_{12}$  (equação 5.20). Comparando-se a carga crítica de M1 com a carga crítica M2 (mesmo  $E_1$ ), observa-se que a carga crítica de M2 é 15.5% menor que a de M1. Isto se deve ao menor valor de  $G_{12}$  (decréscimo de 56%). Já o material M4, que tem propriedades próximas a de M2, possui aproximadamente a mesma carga crítica. O material M5, que tem o menor valor de  $E_1$ , apresenta a menor carga crítica, apesar do valor de  $G_{12}$  ser superior aos de M2 a M4. O material isotrópico, que tem módulo de elasticidade igual ao de M3 e um valor bem maior do módulo de cisalhamento (3.37 vezes maior), apresenta a maior carga crítica (43% maior que a de M3). Observa-se a partir destes dados a grande influência do material na capacidade de carga da estrutura.

**Tabela 5.9: Resumo da carga e modo crítico para os seis materiais, L=3.5 m**

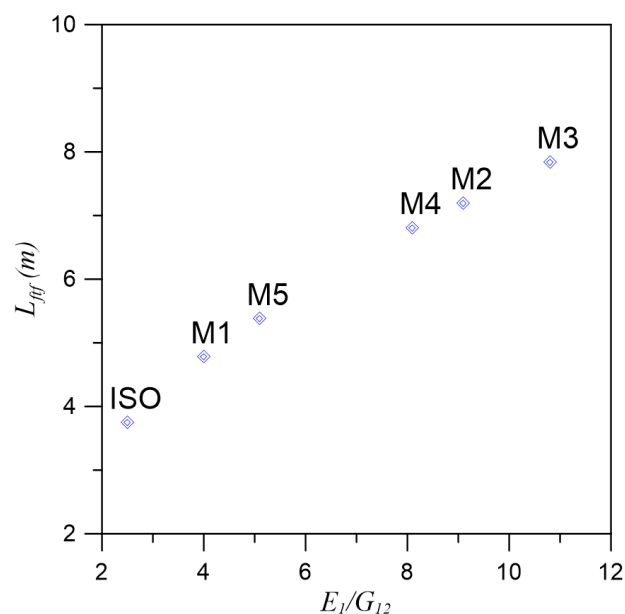
Material	Modo Crítico	P <sub>cr2</sub> (kN)	P <sub>cr</sub> GBTUL (kN)	E <sub>1</sub> (kN/mm <sup>2</sup> )	G <sub>12</sub> (kN/mm <sup>2</sup> )	P <sub>cr1</sub> (kN)
<b>M1</b>	<i>FT</i>	<b>25.27</b>	24.94	20.00	5.00	31.17
<b>M2</b>	<i>FT</i>	<b>21.35</b>	21.14	20.00	2.20	31.17
<b>M3</b>	<i>FT</i>	<b>29.21</b>	28.97	28.00	2.60	43.64
<b>M4</b>	<i>FT</i>	<b>21.81</b>	21.61	20.10	2.47	31.32
<b>M5</b>	<i>FT</i>	<b>18.90</b>	18.68	15.89	3.13	24.76
<b>ISO</b>	<i>FT</i>	<b>41.40</b>	40.72	28.00	11.38	43.64

A variação dos dois menores autovalores com o comprimento do perfil,  $L$ , para a seção C 200×100×5 (Tabela 5.1), é apresentada na Figura 5.4 para os seis materiais considerados na análise paramétrica. Observa-se que os dois autovalores dados pelas equações (5.17) e (5.20) decrescem, como esperado, à medida que  $L$  cresce. Inicialmente a carga crítica está associada a um modo de flexo-torção (curva

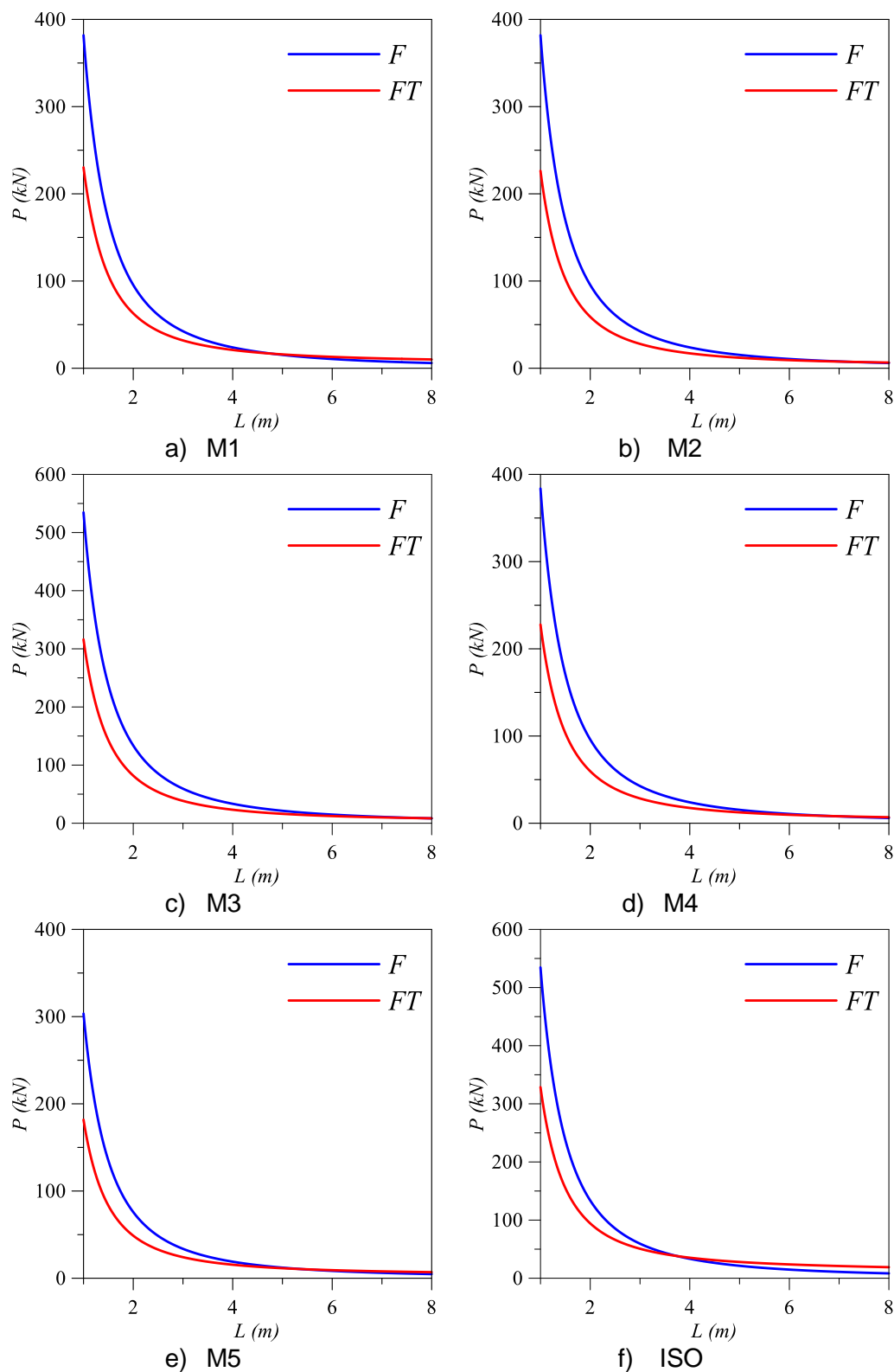
vermelha). À medida que  $L$  cresce, a carga associada ao modo de flexão se aproxima desta carga de flexo-torção e, para um comprimento crítico determinado, estas duas cargas coincidem, levando a uma possível acoplamento natural que será investigada durante a análise do comportamento pós-crítico. Para valores maiores de  $L$ , a carga crítica está associada ao modo de flexão em torno do eixo de menor inércia. A Tabela 5-10 mostra o valor do comprimento crítico,  $L_{ftf}$ , onde há mudança do modo crítico para cada material e a respectiva carga crítica. Observa-se na Figura 5.3 que o comprimento crítico decresce à medida que a razão entre as constantes elásticas,  $(E_1/G_{12})$ , decresce. Para o material isotrópico com  $E_1/G_{12}=2.5$ .  $L_{ftf} = 3.75m$ , já para o material M3 com  $E_1/G_{12}=10.8$ .  $L_{ftf} = 7.84m$ . Como em geral os materiais pultrudados apresentam  $E_1 > G_{12}$ , espera-se que na maioria das aplicações práticas a carga crítica esteja associada ao modo de flexo-torção em seções monossimétricas.

**Tabela 5.10: Comprimento crítico para um perfil C 200x100x5 e diferentes materiais.**

<b>Material</b>	<b><math>L_{ftf}</math> (m)</b>	<b><math>P_{cr}</math> (kN) (<math>FT=F</math>)</b>	<b><math>E_1</math> (kN/mm<sup>2</sup>)</b>	<b><math>G_{12}</math> (kN/mm<sup>2</sup>)</b>	<b><math>E_1/G_{12}</math></b>
<b>M1</b>	4.78	16.74	20.00	5.00	4.0
<b>M2</b>	7.20	7.36	20.00	2.20	9.1
<b>M3</b>	7.84	8.70	28.00	2.60	10.8
<b>M4</b>	6.81	8.27	20.10	2.47	8.1
<b>M5</b>	5.38	10.48	15.89	3.13	5.1
<b>ISO</b>	3.75	38.11	28.00	11.38	2.5



**Figura 5.3: Variação do comprimento crítico  $L_{ftf}$  com a razão entre as constantes elásticas,  $(E_1/G_{12})$ , perfil C 200x100x5. e diferentes materiais.**



**Figura 5.4: Variação da carga axial com o comprimento para os dois primeiros modos de flambagem, perfil C 200x100x5. e diferentes materiais.**

### 5.1.3

#### Influência da Largura das Mesas

Um parâmetro geométrico importante na análise do perfil C é a relação entre a largura da alma,  $b_w$ , e a largura da mesa,  $b_f$ . Neste item investiga-se a influência da relação  $b_w/b_f$  na carga e modo crítico, mantendo-se a largura da alma constante ( $b_w = 20\text{cm}$ ) e variando-se a largura da mesa dentro de limites esperados nas aplicações práticas.

As Tabelas 5.11 a 5.18 mostram os dois menores autovalores e autovetores para valores crescentes da largura da mesa,  $b_f$ , para um perfil C com  $L=3\text{m}$  e material M1. Observa-se que ambos os autovalores crescem, como esperado, com  $b_f$ . Inicialmente, para pequenos valores de  $b_f$  a carga crítica está associada ao modo de flexão em torno do eixo de menor inércia, já que o momento de inércia  $I_z$  é muito pequeno. Para larguras de mesa entre 9cm e 10cm, a menor carga crítica passa a ser associada com o modo de flexo-torção. A Figura 5.5 mostra a variação da carga crítica com a largura das mesas para o perfil C 200x $b_f$ x5. Os resultados mostram que para  $b_f = 8.5\text{cm}$  as cargas de flexão e flexo-torção coincidem. Quanto ao autovetor normalizado associado ao modo de flexo-torção, observa-se que a participação relativa da componente  $\theta_x$  decresce com  $b_f$ , sendo o valor normalizado de -0.413rad para  $b_f = 3\text{cm}$  e de -0.165rad para  $b_f = 10\text{cm}$ .

**Tabela 5.11: Cargas críticas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3m, Material M1.  $b_f = 3\text{ cm}$ .**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
$F$	<b>1.31</b>	1.000	0.000	0.000
$FT$	13.06	0.000	-0.911	-0.413

**Tabela 5.12: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3m, Material M1.  $b_f = 4\text{ cm}$ .**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
$F$	<b>3.103</b>	1.000	0.000	0.000
$FT$	14.75	0.000	-0.954	-0.298

**Tabela 5.13: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3m, Material M1.  $b_f = 5\text{ cm}$ .**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
$F$	<b>5.96</b>	1.000	0.000	0.000
$FT$	17.04	0.000	-0.971	-0.238

**Tabela 5.14: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3m, Material M1.  $b_f = 6 \text{ cm}$ .**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
$F$	<b>10.09</b>	1.000	0.000	0.000
$FT$	19.72	0.000	-0.978	-0.204

**Tabela 5.15: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3m, Material M1.  $b_f = 7 \text{ cm}$ .**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
$F$	<b>15.64</b>	1.000	0.000	0.000
$FT$	22.63	0.000	-0.982	-0.184

**Tabela 5.16: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3m, Material M1.  $b_f = 8 \text{ cm}$ .**

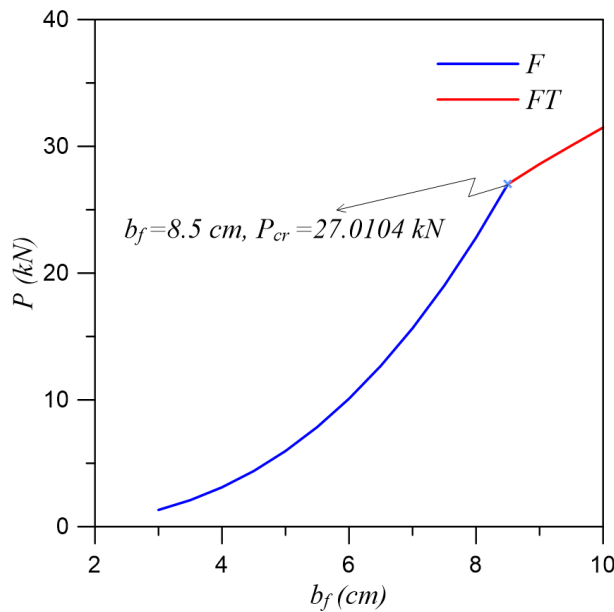
Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
$F$	<b>22.79</b>	1.000	0.000	0.000
$FT$	25.63	0.000	-0.982	-0.173

**Tabela 5.17: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3m, Material M1.  $b_f = 9 \text{ cm}$ .**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
$F$	31.67	1.000	0.000	0.000
$FT$	<b>28.59</b>	0.000	-0.985	-0.167

**Tabela 5.18: Cargas e modos de bifurcação para a viga-coluna simplesmente apoiada, L=3m, Material M1.  $b_f = 10 \text{ cm}$ .**

Modo	P (kN)	Direção $v$	Direção $w$	Direção $\theta_x$
$F$	42.42	1.000	0.000	0.000
$FT$	<b>31.48</b>	0.000	-0.986	-0.165



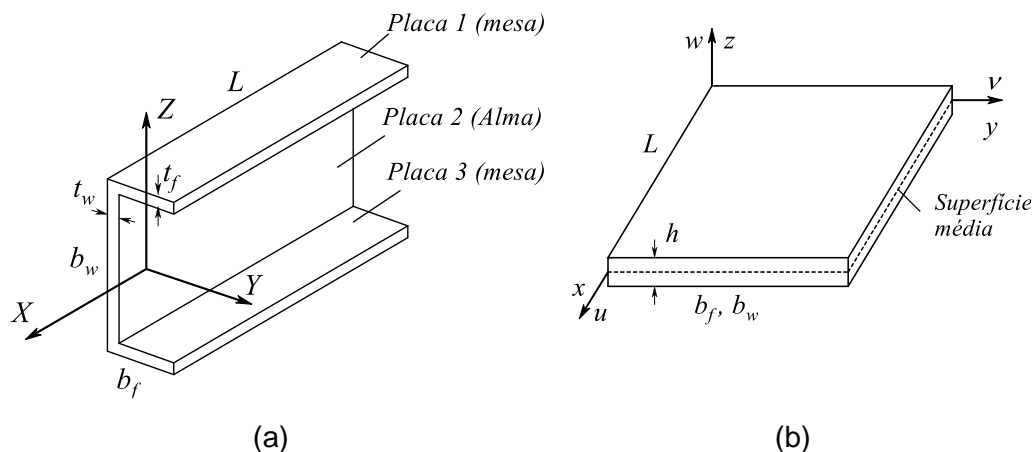
**Figura 5.5: Variação da carga crítica e modo crítico com a largura da mesa. Material M1. Perfil C 200x $b_f$ x5. L=3m.**

Sabe-se que, para uma dada seção transversal, à medida que o comprimento do perfil C decresce, o modo de flambagem muda de um modo global (flexão ou flexo-torção) para um modo local de placa. O próximo item apresenta a análise local.

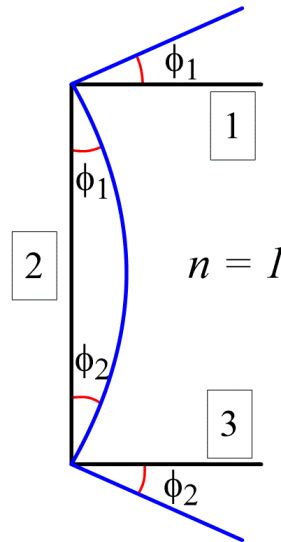
## 5.2

### Análise da Flambagem Local

Para a análise da estabilidade local sob carregamento axial,  $N_x$ , o perfil C é considerado como constituído por três placas retangulares, conforme ilustrado nas Figuras 5.6 e 5.7.



**Figura 5.6: (a) geometria do perfil C. sistema de coordenadas global e discretização em três placas. (b) Elemento da placa (alma e mesa), sistema de coordenadas local e campo de deslocamento (os eixos  $x$  global e local têm a mesma direção).**



**Figura 5.7: Modo de flambagem do perfil C e compatibilidade das rotações nas junções alma-mesa.**

Assume-se que as paredes do perfil sejam simplesmente apoiadas (SA) nos bordos carregados, assim como na análise global. Na junção entre placas adjacentes (alma-mesa), a compatibilidade de rotações é imposta, enquanto as outras bordas das mesas são consideradas livres. A energia potencial total das três placas do perfil C é dada por (ver Capítulo 4):

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 (U_i + \Omega_i) \quad (5.25)$$

Para validar a escolha das funções de forma para discretização do perfil e como referência na análise de estabilidade paramétrica, primeiro os modos de flambagem da estrutura são obtidos em função dos parâmetros geométricos e do material com o software GBTUL (Bebiano et al., 2008; GBTUL software, disponível em: <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>, acesso em 01/2020), que realiza análises elásticas de flambagem e vibração de membros de paredes finas, com base na chamada “*generalized beam theory*” (GBT). O GBTUL considera como funções de interpolação uma combinação de modos de deformação de seção transversal locais e modos globais estruturalmente significativos e calcula a participação de cada modo nos modos de flambagem ou vibração. Os resultados mostram que, para perfis C de comprimento curto a médio, o modo dominante tem a forma ilustrada na Figura 5.7. Semelhante a uma placa simplesmente apoiada, a alma flamba com  $m$  semiondas axiais e uma meia onda na direção transversal ( $n = 1$ ) (Brush et al., 1975).

Para usar o método Ritz, é necessário prescrever funções de forma apropriadas, levando em consideração as condições de contorno e continuidade dos deslocamentos. As seguintes expressões são adotadas para a alma:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= U \operatorname{sen} \left( 2 \frac{m\pi x}{L} \right) \cos \left( 2 \frac{\pi y}{b_w} \right) \\
v(x, y) &= V \cos \left( 2 \frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( 2 \frac{\pi y}{b_w} \right) \\
w(x, y) &= W \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{b_w} \right) \\
\psi_x(x, y) &= X \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{b_w} \right) \\
\psi_y(x, y) &= Y \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{\pi y}{b_w} \right)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

onde  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $X$  e  $Y$  são as amplitudes modais. Aqui  $0 \leq x \leq L$  e  $0 \leq y \leq b_w$  são as coordenadas locais da superfície média da placa (veja a Figura 5.6).

Ao impor as condições de compatibilidade ao longo da conexão da mesa-alma, o campo de deslocamentos da mesa é descrito por:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= U \operatorname{sen} \left( 2 \frac{m\pi x}{L} \right) \left[ 1 - \left( \frac{y}{b_w} \right)^2 \right] \\
v(x, y, t) &= V \cos \left( 2 \frac{m\pi x}{L} \right) \frac{y}{b_w} + y^3 \\
w(x, y, t) &= W \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \frac{\pi y}{b_w} \\
\psi_x(x, y, t) &= X \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \frac{\pi y}{b_w} \\
\psi_y(x, y, t) &= \frac{1}{2} Y \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

onde  $0 \leq x \leq L$  e  $0 \leq y \leq b_f$  são as coordenadas locais da superfície média da mesa.

As funções (5.26) e (5.27) satisfazem as condições de contorno da estrutura simplesmente apoiada em  $x = 0$  e  $x = L$  e as condições de continuidade ao longo da interface alma-mesa. Introduzindo as funções (5.26) e (5.27) na Eq. (5.25) e usando o método de Ritz, é obtido um sistema de cinco equações ordinárias não lineares de movimento acopladas.

Ao linearizar as equações de equilíbrio resultantes, as equações relativas aos deslocamentos no plano médio da placa,  $u$  e  $v$ , ficam desacopladas das equações relativas aos deslocamentos transversais (Brush e Almroth, 1975).

### 5.2.1

#### Carga Crítica para um Perfil C pela Teoria Clássica de Placas

No caso da teoria clássica de placas a equação de equilíbrio crítico do perfil é função apenas da variável,  $W$ , que expressa a amplitude modal (Brush e Almroth, 1975), como na análise de uma placa isolada sendo dada por:

$$\{[K_e] - N_x[K_G]\}W = 0$$

onde  $N_x$  é o esforço normal por unidade de comprimento ao longo dos dois bordos carregados (variáveis definidas no Capítulo 4),

$$K_e = \pi^4 \left[ \frac{m^4}{12b_w^2 L_{cr}^3} (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) D_{11} + \frac{1}{2b_w} \frac{m^2}{L_{cr}} D_{12} + \frac{1}{4} \frac{L_{cr}}{b_w^3} D_{22} + \frac{m^2}{L_{cr} b_w^2} (b_w + 4b_f) D_{33} \right] \quad (5.28)$$

é a rigidez elástica e

$$K_G = \frac{m^2 \pi^2}{12L_{cr} b_w^2} (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) \quad (5.29)$$

é a rigidez geométrica para o perfil C.

A carga crítica para um perfil C, é obtida resolvendo o problema de autovalor  $|[K_e] - N_x[K_G]| = 0$ , levando à seguinte expressão para a carga crítica (resultante do carregamento ( $P_{cr} = N_{cr}(b_w + 2b_f)$ ):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2(b_w + 2b_f)}{(3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3)} \left[ \frac{m^2}{L_{cr}^3} (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) D_{11} + 6 \frac{b_w}{L_{cr}} D_{12} + \frac{3L_{cr}}{b_w m^2} D_{22} + \frac{12(b_w + 4b_f)}{L_{cr}} D_{33} \right] \quad (5.30)$$

### 5.2.2

#### Carga Crítica para um Perfil C pela Teoria de Primeira Ordem

Neste caso as equações linearizadas de equilíbrio crítico depende das funções de forma para  $w$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  sendo desacopladas com relação às duas equações relativas aos deslocamentos  $u$  e  $v$ .

Tem-se assim o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} - N_x \bar{\lambda}_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

em que os valores  $\lambda_{ij}$ ,  $i, j = 1.2.3$  são obtidos das integrais, e são funções das constantes elásticas do material e das características geométricas do perfil C.

Observa-se que se pode expressar  $X$  e  $Y$  em função do deslocamento transversal  $W$ , a partir das duas últimas equações, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{12} \\ \lambda_{23} & \lambda_{33} & \lambda_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Introduzindo  $X$  e  $Y$  na primeira equação, obtém-se uma equação em função de  $N_x$  e  $W$ , na forma:

$$[[K_e] - N_x[K_G]]W = 0 \quad (5.33)$$

onde:

$$K_e = K\pi^2 \left[ \frac{L_{cr}^2 A_{44} + b_w^2 m^2 A_{55}}{4b_w L_{cr}} - \frac{(L_{cr}^4 A_{44} T_1 + b_w^2 m^2 A_{55} T_3)}{4b_w L_{cr} T_2} + \frac{\pi^2 m^2 b_f^3 A_{55}}{3b_w^2 L_{cr}} \left( \frac{T_2 - T_3}{T_2} \right) - \frac{b_f L_{cr} A_{44}}{b_w^2} \left( \frac{L_{cr}^2 T_1 - T_2}{T_2} \right) \right] \quad (5.34)$$

é o coeficiente de rigidez elástica e

$$K_G = \frac{m^2 \pi^2}{12L_{cr} b_w^2} (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) \quad (5.35)$$

é o coeficiente de rigidez geométrica.

A matriz de rigidez elástica resulta em uma expressão muito longa, sendo expresso em função de seguintes coeficientes  $T_i$ :

$$T_1 = -K\pi^4 b_w m^2 \left[ (b_w + 4b_f)(3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3)(L_{cr}^2 K A_{44} A_{55} + \pi^2 m^2 (A_{44} D_{11} - A_{55} D_{33})) - (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) b_w \pi^2 m^2 A_{55} D_{12} + 3\pi^2 L_{cr}^2 (b_w + 4b_f)^2 A_{44} D_{33} \right] \quad (5.36)$$

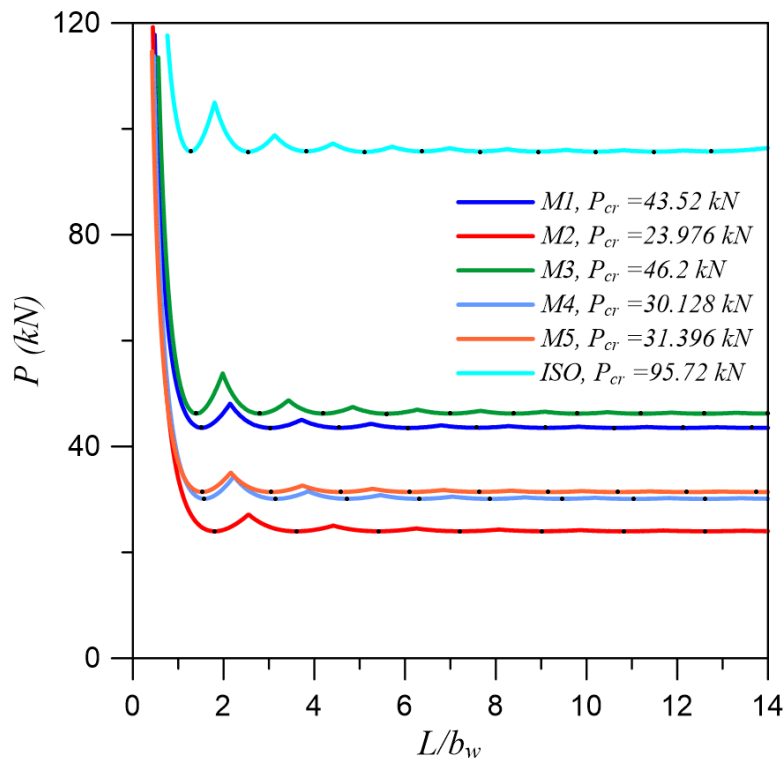
$$T_2 = -\pi^4 m^2 \left[ (b_w + 4b_f)(3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3)(L_{cr}^4 b_w K^2 A_{44} A_{55} + K\pi^2 L_{cr}^2 b_w m^2 (A_{44} D_{11} + A_{55} D_{33}) + \pi^4 b_w m^4 D_{11} D_{33}) + 3K\pi^2 L_{cr}^4 b_w (b_w + 4b_f)^2 A_{44} D_{33} + (b_w + 4b_f)(3\pi^4 L_{cr}^4 D_{33} D_{22} - 6\pi^4 L_{cr}^2 b_w^2 m^2 D_{12} D_{33}) + (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) \pi^4 m^2 L_{cr}^2 D_{11} D_{22} - 3\pi^4 m^2 b_w^3 L_{cr}^2 D_{12}^2 \right] \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned}
T_3 = & -K\pi^4 m^2 L_{cr}^2 \left[ (b_w + 4b_f)(3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3)(L_{cr}^2 b_w K A_{44} A_{55} \right. \\
& + \pi^2 b_w m^2 A_{55} D_{33}) - 3\pi^2 L_{cr}^2 b_w (b_w + 4b_f)^2 A_{44} D_{33} \\
& - 3\pi^2 L_{cr}^2 b_w^2 (b_w + 4b_f) D_{12} A_{44} \\
& \left. + \pi^2 L_{cr}^2 (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) \right] \quad (5.38)
\end{aligned}$$

A carga crítica para um perfil C, como no caso anterior, pode ser obtida resolvendo-se o problema de autovalor  $[[K_e] - N_x[K_G]] = 0$ . Levando à seguinte expressão para a carga crítica (resultante do carregamento ( $P_{cr} = N_{cr}(b_w + 2b_f)$ )):

$$\begin{aligned}
P_{cr} = & \frac{K(b_w + 2b_f)}{3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3} \left[ \frac{3b_w}{m^2} (L_{cr}^2 A_{44} + b_w^2 m^2 A_{55}) \right. \\
& - \frac{3b_w}{m^2} \left( \frac{L_{cr}^4 A_{44} T_1 + b_w^2 m^2 A_{55} T_3}{T_2} \right) \\
& \left. + 4\pi^2 b_f^3 A_{55} \left( \frac{T_2 - T_3}{T_2} \right) - \frac{12b_f L_{cr}^2 A_{44}}{m^2} \left( \frac{L_{cr}^2 T_1 - T_2}{T_2} \right) \right] \quad (5.39)
\end{aligned}$$

A Figura 5.8 mostra as cargas locais de flambagem obtidas pelo uso da teoria clássica de placa (CPT) para os seis materiais usados na análise paramétrica e para a seção de referência dada na Tabela 5.1. Nesse caso, as cargas obtidas pela teoria de primeira ordem (FSDT) são praticamente coincidentes devido à esbeltez da alma e das mesas ( $b_w/t_w = 40$ ,  $b_f/t_f = 20$ ). A placa da alma flamba em um modo com uma meia onda na direção transversal ( $n = 1$ ), similar a uma placa axialmente comprimida em uma direção (Brush et al., 1975), enquanto o número de meias ondas axiais,  $m$ , depende do comprimento do perfil,  $L$ . Para cada valor de  $m$ , a carga de flambagem atinge um valor mínimo para uma determinada relação geométrica,  $L/b_w$ , sendo este mínimo o mesmo para todos os valores de  $m$ , como ocorre em placas esbeltas (Brush et al., 1975). Quando  $m \rightarrow \infty$ ,  $P_{cr}$  tende assintoticamente a esse limite inferior, que é uma função dos parâmetros do material e da geometria da seção transversal. Na Figura 5.9 estão apresentados os valores correspondentes ao limite inferior de cada material. Como se pode observar, não só o limite inferior varia de forma significativa com as características do material, como também os valores da relação  $L/b_w$  relativos aos pontos de mínimo associados a cada valor de  $m$ . Esse limite inferior é geralmente usado como referência nos códigos de projeto: “*Guide for the design and construction of structures made of thin FRP pultruded elements*” (CNR, National Research Council of Italy, 2008) e “*Prospect for new guidance in the design of FRP*” (Ascione et al., 2016). No entanto, à medida que o comprimento da coluna aumenta, atinge-se uma relação  $L/b_w$  limite,  $L_{lim}$ , onde o modo de flambagem muda do modo local de placa para um modo de flambagem global de flexo-torção ou flexão (Mancilla et al., 2015 e Coaquira et al., 2016). Na flambagem local desse tipo de perfil, o valor do módulo de cisalhamento  $G_{12}$  tem uma influência grande. Veja que o perfil com menor carga crítica foi o com menor valor de  $G_{12}$ .

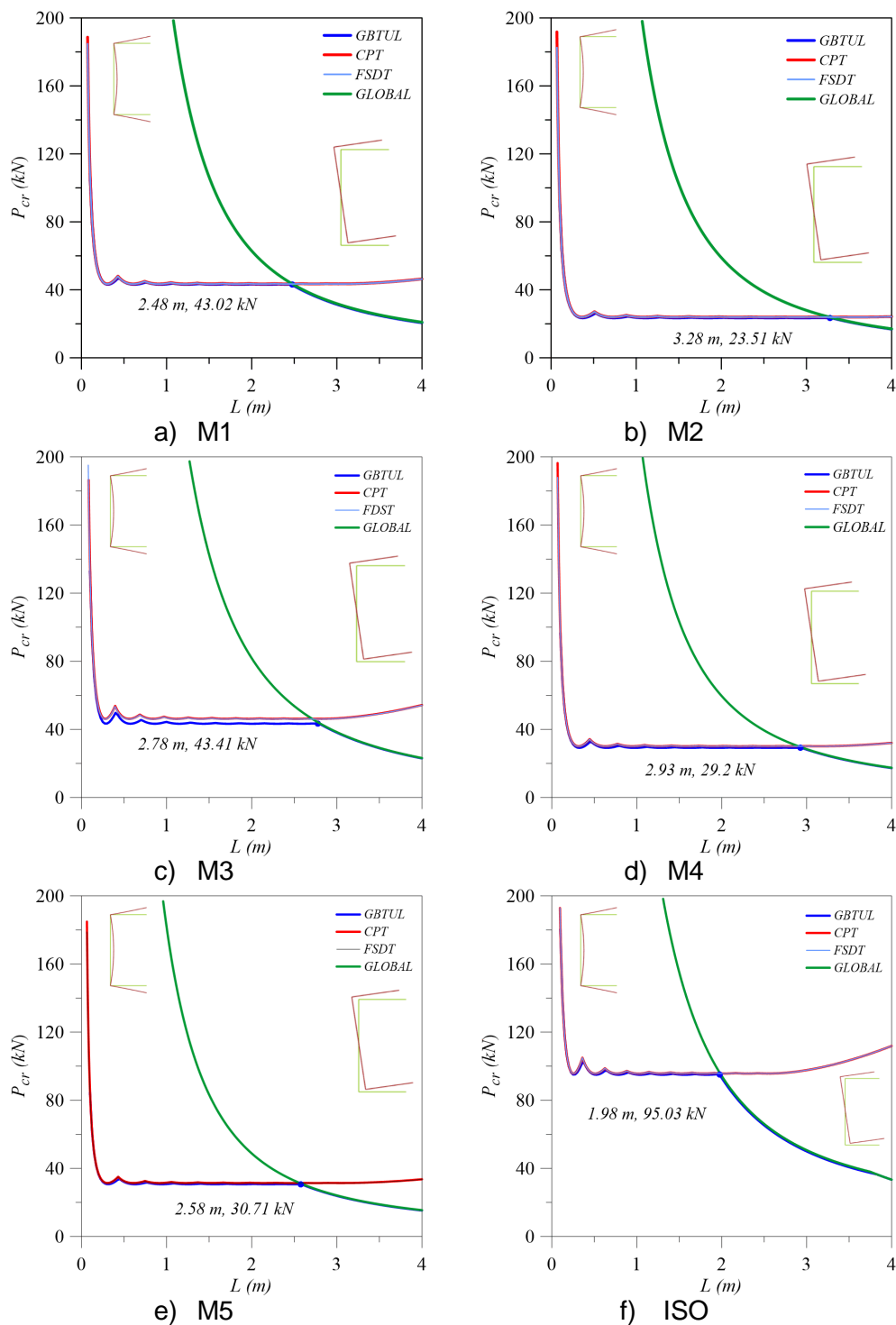


**Figura 5.8: Relação Carga axial vs razão de comprimento e alma do perfil C 200x100x5. Teoria clássica de placas (CPT).**

Na seção seguinte investigam-se os valores de  $L_{lg}$  em função das propriedades geométricas e físicas dos perfis e comparam-se, para validar os resultados e como referência na análise de estabilidade paramétrica, os resultados aqui obtidos na análise global e local para cargas e modos críticos com aqueles obtidos com o software GBTUL.

### 5.3 Resultados e Comparações com o GBTUL

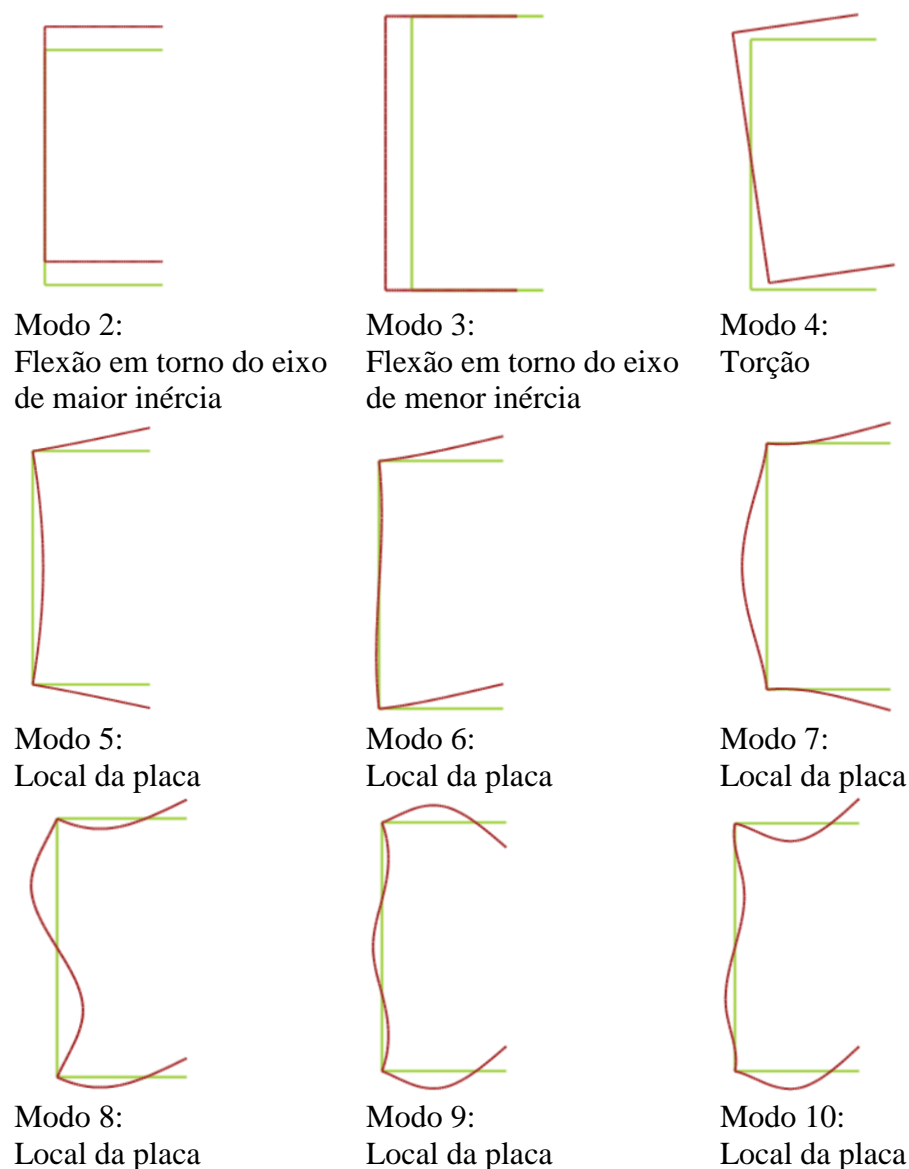
A Figura 5.9 compara a carga crítica obtida pela análise global e a carga crítica obtida pela análise local usando as duas teorias de placa (CPT e FSDT) para os seis materiais considerados na análise paramétrica com os resultados obtidos pelo GBTUL. Em cada figura apresenta-se também o valor com comprimento limite,  $L_{lg}$ , onde o modo crítico muda de local para global, bem como a carga associada a este ponto. Estes valores são obtidos igualando-se as cargas críticas local e global. Verifica-se uma boa concordância entre os resultados aqui obtidos e os fornecidos pelo GBTUL.



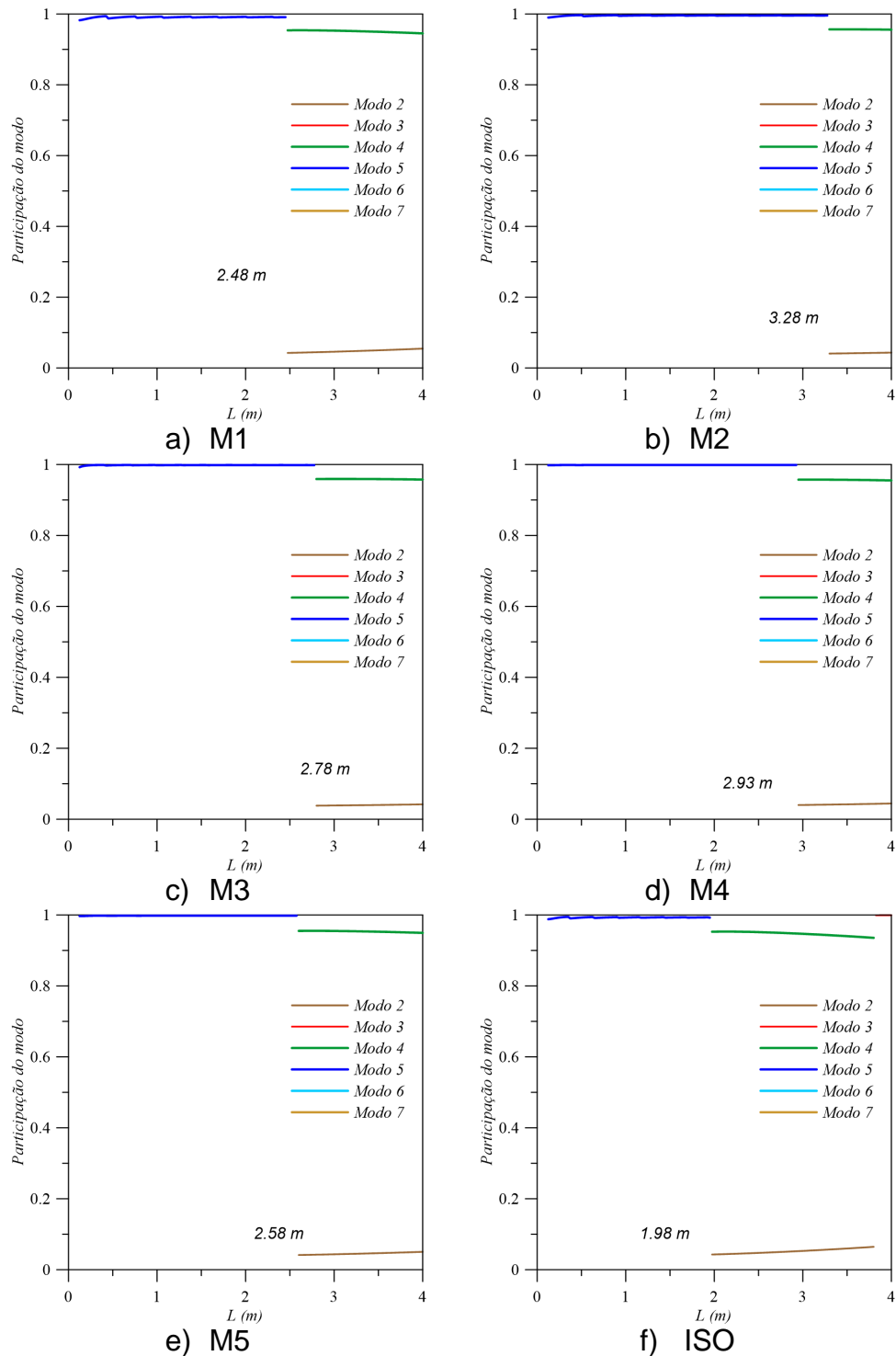
**Figura 5.9: Variação da carga crítica com o comprimento da Viga-coluna , calculados com diferentes teorias e comparadas com resultados do GBTUL, e diferentes materiais, Perfil C 200x100x5.**

Cabe ressaltar que o GBTUL considera em sua formulação para o campo de deslocamentos uma combinação linear de modos locais e globais. A Figura 5.10 ilustra os nove primeiros modos de deformação da seção transversal. Os três primeiros modos correspondem aos modos globais de flexão e torção. Estes modos são similares a aqueles descritos pelas equações (5.1) a (5.3) para o perfil simplesmente apoiado. Os modos seguintes correspondem a modos de deformação de placa. O GBTUL também fornece a participação de cada um desses modos de

deformação para cada valor de  $L$ . A Figura 5.11 mostra a participação modal em função de  $L$  para os seis materiais. Para avaliar as contribuições de um determinado modo de deformação para um modo de flambagem ou vibração de um membro, o programa fornece o valor de seu fator de participação. Verifica-se que inicialmente para perfis curtos a flambagem é dominada pelo modo 5 que é similar ao modo adotado na análise local deste capítulo (ver equações 5.30 e 5.39). Quando o modo de flambagem muda de local para global, os modos dominantes passam a ser os modos dois e quatro, relativos ao modo de flambagem de flexão em torno do eixo de maior inércia e o modo de torção, com predominância do modo de torção, em concordância com os resultados aqui obtidos para os autovetores. Verifica-se uma mudança abrupta da composição modal no comprimento limite,  $L_{lg}$ , similar ao obtido no presente estudo quando se iguala a carga crítica local e global.



**Figura 5.10: Modos de deformação da seção transversal do Perfil C do código GBTUL.**

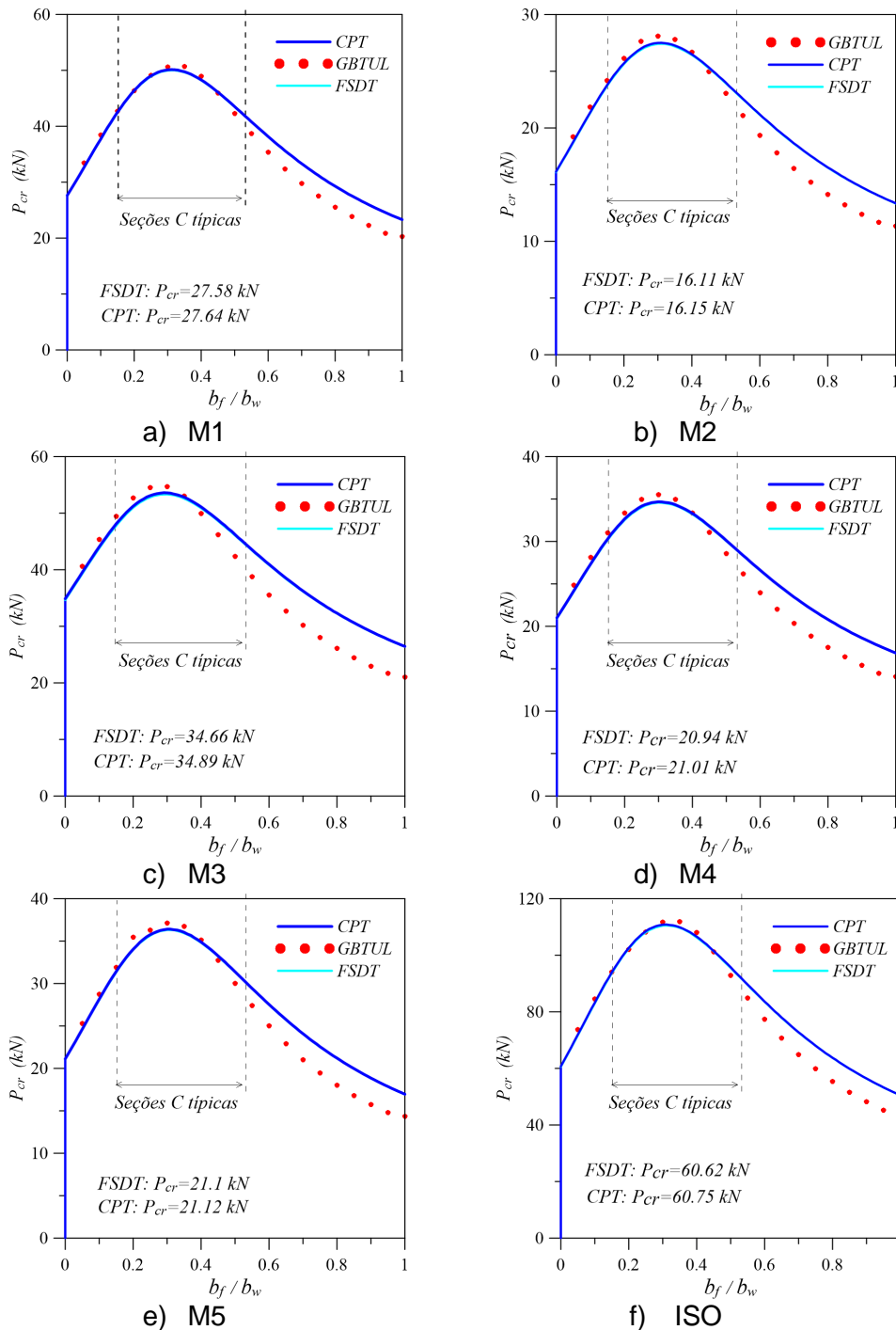


**Figura 5.11: Participação modal no modo de flambagem do modelo GBTUL, para uma viga-coluna simplesmente apoiada de seção C 200x100x5.**

A Figura 5.12 mostra a variação da carga crítica local do perfil C em função do parâmetro geométrico  $b_f/b_w$  para os diferentes materiais. Os resultados analíticos usando as duas teorias de placa são comparados com os obtidos pelo GBTUL (em vermelho). Observa-se boa concordância entre os resultados obtidos com as teorias CPT e FSDT. Na faixa típica de perfis comerciais com seção C de material

composto obtido por pultrusão,  $0.15 < b_f/b_w < 0.53$ . as cargas críticas obtidas são muito próximas às calculadas com o programa GBTUL.

Observa-se também que, à medida que a carga crítica do perfil C aumenta com a largura das mesas,  $b_f$ , até atingir um certo valor máximo que pode ser considerado como o valor ótimo do perfil. Este valor encontra-se na faixa de geometrias usadas comercialmente.



**Figura 5.12: Variação da carga crítica do perfil C em função do parâmetro geométrico  $b_f/b_w$  para diferentes materiais.**

## 6

## Frequências Naturais e Modos de Vibração

Neste capítulo são obtidas analiticamente as frequências naturais e modos de vibração do perfil pultrudado considerando as formulações global e local, investigando-se a influência das características físicas e geométricas do perfil pultrudado nas suas propriedades dinâmicas. Os resultados das análises local e global relativos às frequências naturais são comparados com aqueles obtidos através do programa GBTUL (Bebiano et al., 2008; 2018). As variáveis apresentadas a seguir foram definidas nos Capítulos 3 e 4.

### 6.1

#### Análise Global

Neste trabalho considera-se, sem perda de generalidade, o caso de uma viga-coluna simplesmente apoiada. Considerando os modos de vibração de flexão nas duas direções ortogonais (direções principais) e os modos de torção (assumindo que a rotação  $\theta_x$  é nula nas duas extremidades), tem-se:

$$v(x, t) = v(t) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{x}{L} \right) \quad (6.1)$$

$$w(x, t) = w(t) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{x}{L} \right) \quad (6.2)$$

$$\theta_x(x, t) = \theta_x(t) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{x}{L} \right) \quad (6.3)$$

onde  $v(t)$ ,  $w(t)$ , e  $\theta_x(t)$  são as amplitudes modais dependentes do tempo associadas aos três graus de liberdade e  $m$  é o número de semiondas senoidais na direção axial.

Como nos capítulos anteriores, na formulação global, tem-se que  $E = E_1$  e  $G = G_{12}$  são respectivamente o módulo de Young longitudinal (na direção das fibras do material pultrudado que coincide com o eixo do perfil) e o módulo de cisalhamento do material no plano das chapas do perfil. Linearizando as Equações (3.63) a (3.65) e introduzindo as funções de (5.1)-(5.6) nas equações resultantes, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de movimento da estrutura perfeita e carregada axialmente:

$$\frac{\rho AL^2}{\pi^2} \left( \frac{d^2}{dt^2} v + z_c \frac{d^2}{dt^2} \theta_x \right) + \frac{\pi^2 EI_z m^4}{L^2} v - P m^2 (v + z_c \theta_x) = 0 \quad (6.4)$$

$$\frac{\rho AL^2}{\pi^2} \left( \frac{d^2}{dt^2} w - y_c \frac{d^2}{dt^2} \theta_x \right) + \frac{\pi^2 EI_y m^4}{L^2} w - P m^2 (w - y_c \theta_x) = 0 \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho AL^2}{\pi^2} \left( I_o \frac{d^2}{dt^2} \theta_x + z_c \frac{d^2}{dt^2} v - y_c \frac{d^2}{dt^2} w \right) + \left( \frac{\pi^2 EI_w m^4}{L^2} + GJ m^2 \right) \theta_x \\ - P m^2 [I_o \theta_x - y_c w + z_c v] = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

O sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, pode ser expresso matricialmente como:

$$[M]\{\ddot{U}\} + \{[K_e] - P[K_G]\}\{U\} = 0 \quad (6.7)$$

onde  $\{U\}$  é o vetor de deslocamentos,  $\{\ddot{U}\}$  é o vetor de acelerações,  $[M]$  é a matriz de massa,  $[K_e]$  matriz de rigidez elástica e  $[K_G]$  é a matriz geométrica.

As matrizes de massa, de rigidez elástica são dadas respectivamente por:

$$[M] = \frac{\rho AL^2}{\pi^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ z_c & -y_c & I_o \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2 EI_z m^4}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2 EI_y m^4}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{\pi^2 EI_w m^4}{L^2} + GJ m^2 \right) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Para o cálculo das frequências naturais e modos de vibração da estrutura descarregada, tem-se o problema de autovalor:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K_e]\{U\} = 0 \quad (6.10)$$

A solução da Equação (6.10) é da forma

$$v(t) = \bar{v} e^{i\omega_o t} \quad (6.11)$$

$$w(t) = \bar{w} e^{i\omega_o t} \quad (6.12)$$

$$\theta_x(t) = \bar{\theta}_x e^{i\omega_o t} \quad (6.13)$$

onde  $\omega_o$  é a frequência natural,  $i = \sqrt{-1}$  e  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  e  $\bar{\theta}_x$  são as amplitudes modais.

Introduzindo as Equações (6.11) a (6.13) na Equação (6.10), chega-se ao seguinte problema de autovalor:

$$|[K_e] - \lambda[M]| = 0 \quad (6.14)$$

onde:

$$\lambda = \omega_0^2 \quad (6.15)$$

Neste caso, os autovalores representam o quadrado das frequências naturais e os autovetores os modos de vibração.

Para um perfil C, monossimétrico, onde a ordenada do centro de cisalhamento é nula,  $z_c = 0$ , a matriz resultante, toma a forma:

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi^2 EI_z m^4}{L^2} - \frac{\rho AL^2}{\pi^2} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2 EI_y m^4}{L^2} - \frac{\rho AL^2}{\pi^2} \lambda & y_c \frac{\rho AL^2 m^2}{\pi^2} \lambda \\ 0 & y_c \frac{\rho AL^2 m^2}{\pi^2} \lambda & \left( \frac{\pi^2 EI_w m^4}{L^2} + GJm^2 \right) - I_o \frac{\rho AL^2 m^2}{\pi^2} \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6.16)$$

Observa-se que, para  $z_c = 0$ , a primeira equação se torna desacoplada e o autovalor associado corresponde a um modo de vibração de flexão em torno do eixo  $z$ , que, para a maioria das seções em C, corresponde ao eixo de menor inércia (largura da alma maior ou igual à largura da mesa), sendo dado por:

$$\omega_{1m} = \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}}; \quad m = 1 \dots \infty \quad (6.17)$$

Os outros dois modos de vibração estão associados a dois modos de flexo-torção. Eles são determinados a partir do determinante da submatriz 2x2, que resulta em uma equação característica quadrática em  $\lambda$ . A solução da equação característica é descrita em termos dos parâmetros:

$$A = m^2 \pi^2 GJL^2 + m^4 \pi^4 EI_y I_o + m^4 \pi^4 EI_w \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} B = & \pi^4 m^4 G^2 J^2 L^4 - 2\pi^6 m^6 GJL^2 EI_y I_o + 2\pi^6 m^6 GJL^2 EI_w \\ & + \pi^8 m^8 E^2 I_y^2 I_o^2 - 2\pi^8 m^8 E^2 I_y I_o I_w + m^8 \pi^8 E^2 I_w^2 \\ & + 4y_c^2 \pi^8 m^8 E^2 I_y I_w + 4y_c^2 \pi^6 m^6 EI_y GJL^2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

sendo as duas frequências naturais de flexo-torção associadas a cada valor de  $m$ ,  $\omega_{2m}$  e  $\omega_{3m}$ , dadas respectivamente por:

$$\omega_{2m} = \sqrt{\frac{A - \sqrt{B}}{2(I_o - y_c^2) \rho AL^4}} \quad (6.20)$$

$$\omega_{3m} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{B}}{2(I_o - y_c^2) \rho AL^4}} \quad (6.21)$$

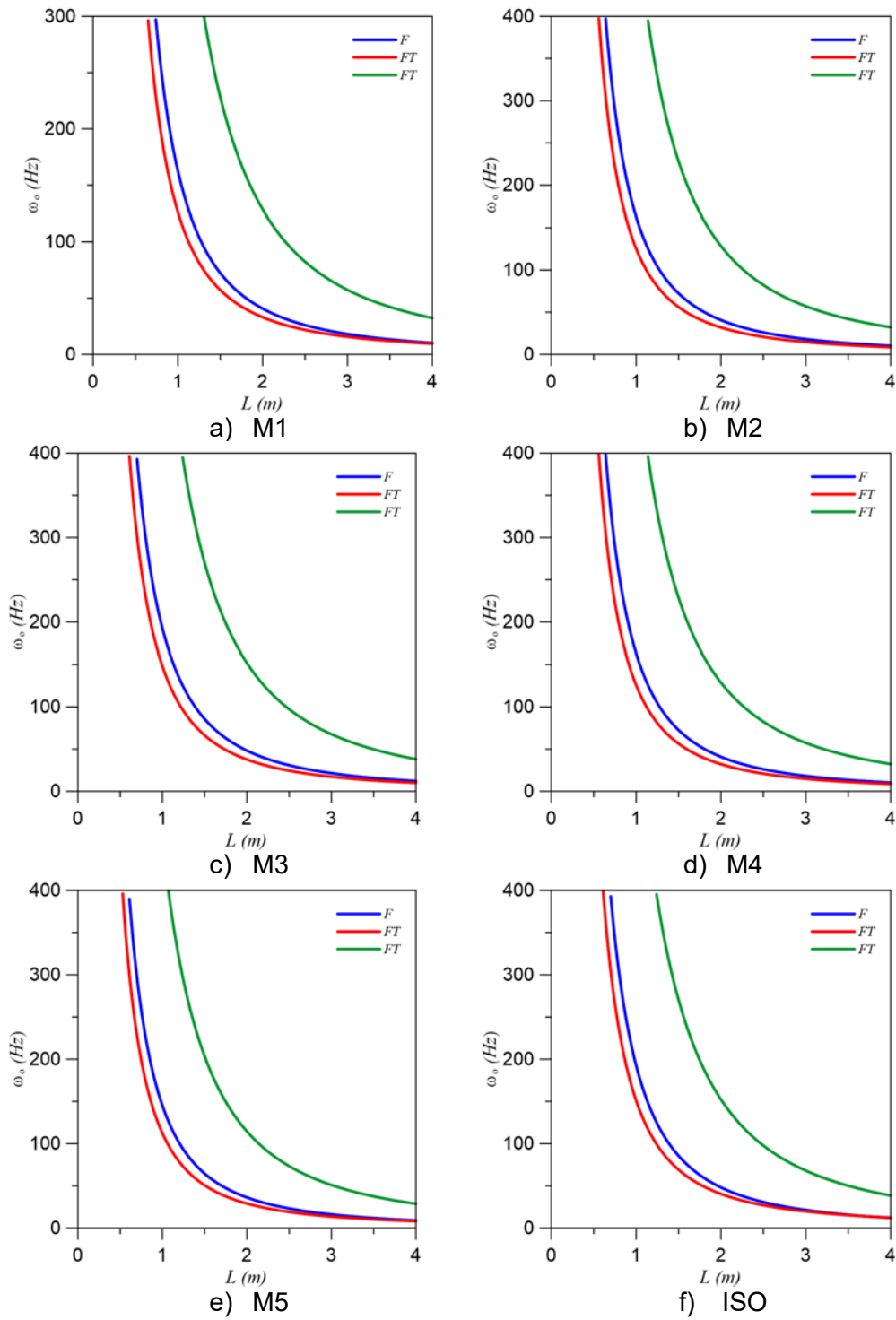
onde  $\omega_{2m} < \omega_{3m}$ .

Como no caso da flambagem, as frequências são diretamente proporcionais a  $m$ . Assim, as menores frequências estão associadas a  $m=1$ . As duas menores frequências são dadas por  $\omega_{11}$  e  $\omega_{21}$ . A menor frequência natural da estrutura (frequência fundamental) depende das características físicas e geométricas do perfil, podendo estar associada a um modo de flexão em torno do eixo de menor inércia ( $F$ ) ou a um modo acoplado de flexo-torção ( $FT$ ), sendo dada por:

$$\omega_0 = \min(\omega_{11}, \omega_{21}) \quad (6.22)$$

A Figura 6.1 mostra a variação das três menores frequências descritas pelas equações (6.17), (6.20) e (6.21) com o comprimento  $L$  para o perfil C 200x100x5 e os seis materiais adotados na análise paramétrica, cujas propriedades físicas e geométricas foram apresentadas no Capítulo 5 (Tabelas 5.1 e 5.2). A massa por unidade de volume varia geralmente entre 1600-2000 kg/m<sup>3</sup>. Para a massa por unidade de volume, também com base em resultados experimentais, é adotado o valor médio  $\rho = 1850 \text{ kg/m}^3$  (Cardoso e Togashi, 2018; Cintra et al., 2019).

Verifica-se que as três frequências decrescem com  $L$ , sendo  $\omega_{31} \gg \omega_{11}, \omega_{21}$ . Para esta geometria, a frequência fundamental em todos os casos corresponde ao modo de flexo-torção no intervalo de  $L$  analisado, embora a diferença entre  $\omega_{11}$  e  $\omega_{21}$  decresça à medida que  $L$  cresce, sendo praticamente iguais para  $L=4m$ , o que pode levar a um fenômeno de ressonância interna. Para cada valor do número de semiondas axiais  $m$ , três raízes são obtidas sendo que elas crescem, como em uma coluna simplesmente apoiada, com o valor de  $m$  (Blevins e Plunkett, 1980). A Tabela 6.1 mostra a variação das três frequências naturais em função do número de semiondas axiais  $m$  para um perfil com  $L=3 \text{ m}$  e material M1.



**Figura 6.1: Variação da frequência natural com o comprimento, para diferentes materiais.**

**Tabela 6.1: Frequências naturais em função do número de semiondas axiais  $m$  para a Viga-Coluna simplesmente apoiada,  $L=3$  m, Material M1**

Modo	Frequências (Hz)			
	$m$			
	1	2	3	4
<i>FT</i>	15.67	57.22	126.33	223.06
<i>F</i>	18.07	72.30	162.67	289.20
<i>FT</i>	57.28	228.23	513.14	912.01

Nas Tabelas 6.2 e 6.3 compara-se a frequência fundamental obtida analiticamente com aquela obtida pelo programa GBTUL para, respectivamente,  $L=2$ m e  $L=3.5$ m, considerando os seis materiais usados na análise paramétrica. Verifica-se que a diferença entre os resultados aqui obtidos e aqueles fornecidos pelo GBTUL são em todos os casos menores que 2% e que esta diferença decresce à medida que  $L$  aumenta, sendo para  $L=3.5$ m menor que 1%.

**Tabela 6.2: Frequência e modo fundamental de vibração (modo local) para os seis materiais,  $L=2.0$  m.**

Material	Modo	$\omega_0$ (Hz)	$\omega_0$ GBTUL (Hz)	$E_1$ (kN/mm <sup>2</sup> )	$G_{12}$ (kN/mm <sup>2</sup> )	$E_1 / G_{12}$	Diferença (%)
<b>M1</b>	FT	33.02	32.70	20.00	5.00	4.0	0.95
<b>M2</b>	FT	31.95	31.38	20.00	2.20	9.1	1.79
<b>M3</b>	FT	37.65	37.33	28.00	2.60	10.8	0.85
<b>M4</b>	FT	32.13	31.76	20.10	2.47	8.1	1.15
<b>M5</b>	FT	29.07	28.78	15.89	3.13	5.1	1.00
<b>ISO</b>	FT	40.41	40.12	28.00	11.38	2.5	0.72

**Tabela 6.3: Frequência e modo fundamental de vibração (modo global) para os seis materiais,  $L=3.5$  m.**

Material	Modo	$\omega_0$ (Hz)	$\omega_0$ GBTUL (Hz)	$E_1$ (kN/mm <sup>2</sup> )	$G_{12}$ (kN/mm <sup>2</sup> )	$E_1 / G_{12}$	Diferença (%)
<b>M1</b>	FT	11.96	11.87	20.00	5.00	4.0	0.68
<b>M2</b>	FT	10.99	10.93	20.00	2.20	9.1	0.52
<b>M3</b>	FT	12.85	12.79	28.00	2.60	10.8	0.43
<b>M4</b>	FT	11.10	11.05	20.10	2.47	8.1	0.50
<b>M5</b>	FT	10.34	10.27	15.89	3.13	5.1	0.62
<b>ISO</b>	FT	15.30	15.17	28.00	11.38	2.5	0.86

A Tabela 6.4 mostra a variação das três menores frequências naturais para  $m = 1$ , com a largura da mesa  $b_f$ , os resultados mostram um crescimento das frequências com a largura das mesas.

**Tabela 6.4: Influência de  $b_f$  na frequência fundamental no caso global, material M1, L=3.5m.**

$b_f$ (cm)	(Hz)		
	$\omega_{01}$	$\omega_{02}$	$\omega_{03}$
6	7.26	10.99	33.82
7	8.77	11.25	35.74
8	10.27	11.49	37.78
8.5	11.03	11.60	38.85
9	11.70	11.78	39.94
10	11.96	13.28	42.17

## 6.2

### Análise Local

#### 6.2.1

#### Frequências Naturais pela Teoria Clássica de Placas

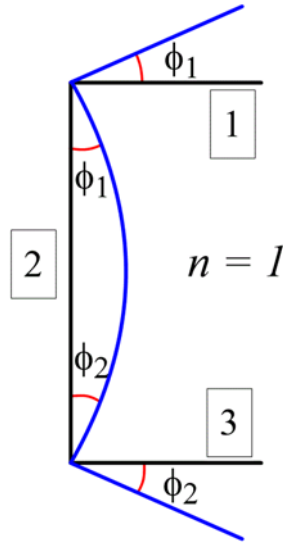
Como no estudo da estabilidade local, considera-se que o perfil é formado por três placas, onde as placas 1 e 3 correspondem às duas mesas e a placa 2 corresponde à alma (ver Figura 6.2). Para determinar as frequências naturais, utilizam-se as seguintes funções de interpolação que atendem às condições de contorno nas duas extremidades do perfil e às condições de continuidade de deslocamentos nas junções mesa-alma:

$$w_1(x, y) = W(t) \frac{\pi}{b_w} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (6.23)$$

$$w_2(x, y) = W(t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b_w}\right), \quad n = 1 \quad (6.24)$$

$$w_3(x, y) = -W(t) \frac{\pi}{b_w} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (6.23)$$

onde  $n$  é o número de semiondas na direção  $y$  ao longo da alma,  $m$ , o número de semiondas na direção axial do perfil e  $W(t)$  é a amplitude modal dependente do tempo. As menores frequências ocorrem para  $n=1$ .



**Figura 6.2: Modo de vibração do perfil C e compatibilidade das rotações nas junções alma-mesa.**

Considerando que as frequências de vibrações transversais são bem menores que as frequências no plano da placa (relativas aos deslocamentos  $u$  e  $v$ ), tem-se que, no caso da teoria clássica de placas, a Equação (4.14b) relativa à energia cinética de cada placa  $T_i$  pode ser reescrita como:

$$T_i = \frac{\rho h}{2} \iint [\dot{w}^2] dx dy \quad (6.26)$$

A energia interna de deformação por flexão de cada placa  $U_{bi}$  considerando as parcelas lineares na Equação (4.12), é dada por:

$$U_{bi} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L (D_{11} w_{,xx}^2 + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} + D_{22} w_{,yy}^2 + D_{66} w_{,xy}^2) dx dy \quad (6.27)$$

Substituindo as funções de interpolação (6.23) a (6.25) em (6.26) e (6.27) e considerando que  $W(t) = \bar{W} e^{i\omega_o t}$ , onde  $\bar{W}$  é a amplitude modal,  $\omega_o$  é a frequência natural e  $i = \sqrt{-1}$ , obtém-se, usando o método de Ritz, o seguinte problema de autovalor:

$$|[K_e] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (6.28)$$

onde  $K_e$  é a matriz de rigidez elástica, dada por:

$$K_e = \pi^4 \left[ \frac{m^4}{12b_w^2 L_{cr}^3} (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) D_{11} + \frac{1}{2b_w} \frac{m^2}{L_{cr}} D_{12} + \frac{1}{4} \frac{L_{cr}}{b_w^3} D_{22} + \frac{m^2}{L_{cr} b_w^2} (b_w + 4b_f) D_{33} \right] \quad (6.29)$$

e  $M$  é a matriz de massa, dada por:

$$M = \frac{\rho h L_{cr}}{12 b_w^2} (3 b_w^3 + 4 \pi^2 b_f^3) \quad (6.30)$$

Tem-se assim que as frequências naturais do perfil descarregado são dadas por

$$\omega_m^2 = \frac{12 b_w^2 \pi^4}{\rho h L_{cr} (3 b_w^3 + 4 \pi^2 b_f^3)} \left[ \frac{m^4}{12 b_w^2 L_{cr}^3} (3 b_w^3 + 4 \pi^2 b_f^3) D_{11} + \frac{1}{2 b_w} \frac{m^2}{L_{cr}} D_{12} + \frac{1}{4} \frac{L_{cr}}{b_w^3} D_{22} + \frac{m^2}{L_{cr} b_w^2} (b_w + 4 b_f) D_{33} \right] \quad (6.31)$$

onde se observa a influência das características geométricas e características do material pultrudado  $D_{ij}$  nas frequências de vibração. Observa-se que a frequência cresce com o número de semiondas longitudinais  $m$ .

### 6.2.2

#### Frequências Naturais pela Teoria de Primeira Ordem

Novamente, considerando que as frequências de vibrações transversais são bem menores que as frequências no plano da placa (relativas aos deslocamentos  $u$  e  $v$ ), tem-se que a energia interna de deformação pela teoria linear de primeira ordem é dada, a partir da expressão (4.34), por:

$$U_{bi} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L \left[ D_{11} (\psi_{x,x})^2 + 2 D_{12} \psi_{x,x} \psi_{y,y} + D_{22} (\psi_{y,y})^2 + D_{66} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x})^2 + K A_{44} (w_{,y} + \psi_y)^2 + K A_{55} (w_{,x} + \psi_x)^2 \right] dx dy \quad (6.32)$$

Desprezando a inércia a rotação, a energia cinética é dada, também neste caso, segundo a equação (6.26). As funções de forma para a alma são dadas por:

$$w_2(x, y) = W(t) \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{b_w} \right) \quad (6.33)$$

$$\psi_{x2}(x, y) = X(t) \cos \left( \frac{m \pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{b_w} \right) \quad (6.34)$$

$$\psi_{y2}(x, y) = Y(t) \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{\pi y}{b_w} \right) \quad (6.35)$$

que atende as condições de bordo simplesmente apoiado em  $x = 0$  e  $x = L$ .

Para as funções de forma para as mesas, impondo a compatibilidade de rotações na junção alma-mesa, tem-se:

$$w_1(x) = W(t) \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{L} \right) \frac{\pi y}{b_w} \quad (6.36)$$

$$\psi_{x1}(x, y) = X(t) \cos \left( \frac{m \pi x}{L} \right) \frac{\pi y}{b_w} \quad (6.37)$$

$$\psi_{y1}(x, y) = Y(t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{1}{2} \quad (6.38)$$

A função de Lagrange do perfil é assim dada por:

$$L = \sum_{i=1}^3 L_i = \sum_{i=1}^3 (T_i - U_i) \quad (6.39)$$

Considerando que  $W(t) = \bar{W}e^{i\omega_o t}$ ,  $X(t) = \bar{X}e^{i\omega_o t}$  e  $Y(t) = \bar{Y}e^{i\omega_o t}$ , e aplicando o método de Ritz, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} - \omega^2 \bar{\lambda}_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{W} \\ \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.40)$$

onde os coeficientes  $\lambda_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  são funções das constantes elásticas do material e das características geométricas do perfil C.

Pode-se obter a partir das duas últimas equações  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  em função do deslocamento transversal  $\bar{W}$ , saber:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{12} \\ \lambda_{23} & \lambda_{33} & \lambda_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{W} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.41)$$

Introduzindo  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  na primeira equação, obtém-se um problema de autovalor reduzido em função de  $\omega^2$  e  $\bar{W}$ , na forma:

$$[[K_e] - \omega^2 [M]] \bar{W} = 0 \quad (6.42)$$

onde  $K_e$  e  $M$  são a matriz de rigidez elástica e de massa, respectivamente, que são dadas por:

$$M = \frac{\rho h L_{cr}}{12 b_w^2} (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) \quad (6.43)$$

$$K_e = K\pi^2 \left[ \frac{L_{cr}^2 A_{44} + b_w^2 m^2 A_{55}}{4b_w L_{cr}} - \frac{(L_{cr}^4 A_{44} T_1 + b_w^2 m^2 A_{55} T_3)}{4b_w L_{cr} T_2} + \frac{\pi^2 m^2 b_f^3 A_{55}}{3b_w^2 L_{cr}} \left( \frac{T_2 - T_3}{T_2} \right) - \frac{b_f L_{cr} A_{44}}{b_w^2} \left( \frac{L_{cr}^2 T_1 - T_2}{T_2} \right) \right] \quad (6.44)$$

onde os coeficientes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  são dados por:

$$\begin{aligned}
T_1 = -K\pi^4 b_w m^2 \Big[ & (b_w + 4b_f)(3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3)(L_{cr}^2 K A_{44} A_{55} \\
& + \pi^2 m^2 (A_{44} D_{11} - A_{55} D_{33})) \\
& - (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) b_w \pi^2 m^2 A_{55} D_{12} \\
& + 3\pi^2 L_{cr}^2 (b_w + 4b_f)^2 A_{44} D_{33} \Big]
\end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned}
T_2 = -\pi^4 m^2 \Big[ & (b_w + 4b_f)(3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3)(L_{cr}^4 b_w K^2 A_{44} A_{55} \\
& + K\pi^2 L_{cr}^2 b_w m^2 (A_{44} D_{11} + A_{55} D_{33}) \\
& + \pi^4 b_w m^4 D_{11} D_{33}) + 3K\pi^2 L_{cr}^4 b_w (b_w + 4b_f)^2 A_{44} D_{33} \\
& + (b_w + 4b_f)(3\pi^4 L_{cr}^4 D_{33} D_{22} - 6\pi^4 L_{cr}^2 b_w^2 m^2 D_{12} D_{33}) \\
& + (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) \pi^4 m^2 L_{cr}^2 D_{11} D_{22} - 3\pi^4 m^2 b_w^3 L_{cr}^2 D_{12}^2 \Big]
\end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned}
T_3 = -K\pi^4 m^2 L_{cr}^2 \Big[ & (b_w + 4b_f)(3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3)(L_{cr}^2 b_w K A_{44} A_{55} \\
& + \pi^2 b_w m^2 A_{55} D_{33}) - 3\pi^2 L_{cr}^2 b_w (b_w + 4b_f)^2 A_{44} D_{33} \\
& - 3\pi^2 L_{cr}^2 b_w^2 (b_w + 4b_f) D_{12} A_{44} \\
& + \pi^2 L_{cr}^2 (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3) \Big]
\end{aligned} \quad (6.47)$$

Assim, tem-se a seguinte expressão para o quadrado das frequências naturais:

$$\begin{aligned}
\omega_m^2 = \frac{12b_w^2 K \pi^2}{\rho h L_{cr} (3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3)} \Big[ & \frac{L_{cr}^2 A_{44} + b_w^2 m^2 A_{55}}{4b_w L_{cr}} \\
& - \frac{L_{cr}^4 A_{44} T_1 + b_w^2 m^2 A_{55} T_3}{4b_w L_{cr} T_2} + \frac{\pi^2 m^2 b_f^3 A_{55}}{3b_w^2 L_{cr}} \left( \frac{T_2 - T_3}{T_2} \right) \\
& - \frac{b_f L_{cr} A_{44}}{b_w^2} \left( \frac{L_{cr}^2 T_1 - T_2}{T_2} \right) \Big]
\end{aligned} \quad (6.48)$$

A Figura 6.3 mostra a variação das frequências naturais do modo local descritas pela Equação (6.48) com o comprimento  $L$  para valores selecionados de semiondas axiais  $m$ , considerando o perfil C 200x100x5 e o material M1, Cujas propriedades físicas e geométricas foram apresentadas no Capítulo 5 (Tabelas 5.1 e 5.2). Observa-se que a frequência decresce, como esperado, com o comprimento da coluna,  $L$ , e com o número de semiondas axiais,  $m$ . Assim, a frequência fundamental é sempre obtida para  $m=1$ . Também se observa que a diferença entre as frequências diminui à medida que o comprimento da coluna aumenta. Entretanto, a partir de um certo comprimento limite, o comportamento passa a ser dominado pelo modo global de flexão ou flexo-torção, como será mostrado a seguir. A Tabela 6.5 compara os resultados aqui obtidos com aqueles fornecidos pelo GBTUL para  $L=0.5m$ .

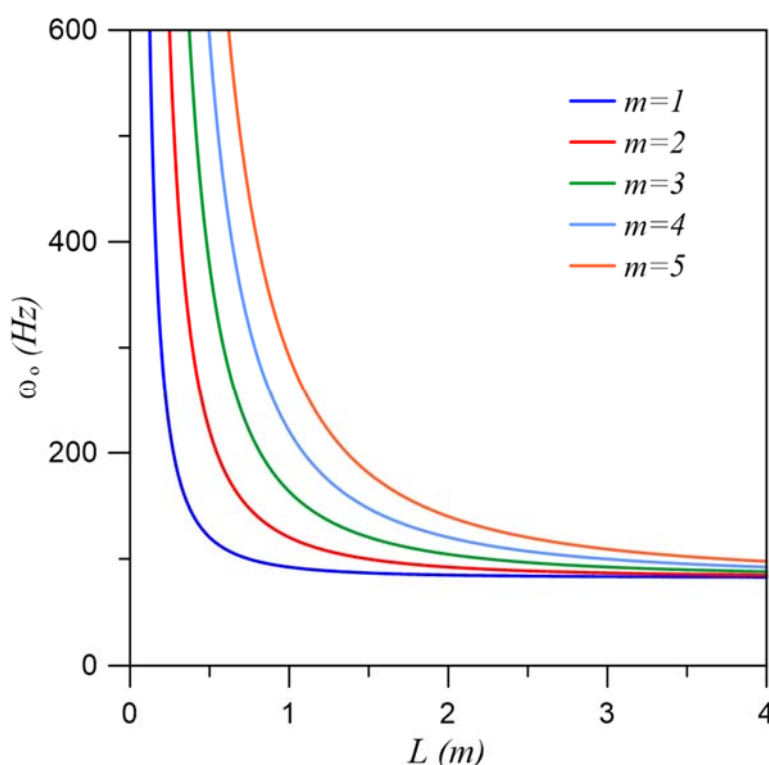


Figura 6.3: Variação da frequência com o comprimento para diferentes números de meia ondas,  $m=1..5$ . FSDT, material M1. Perfil 200x100x5.

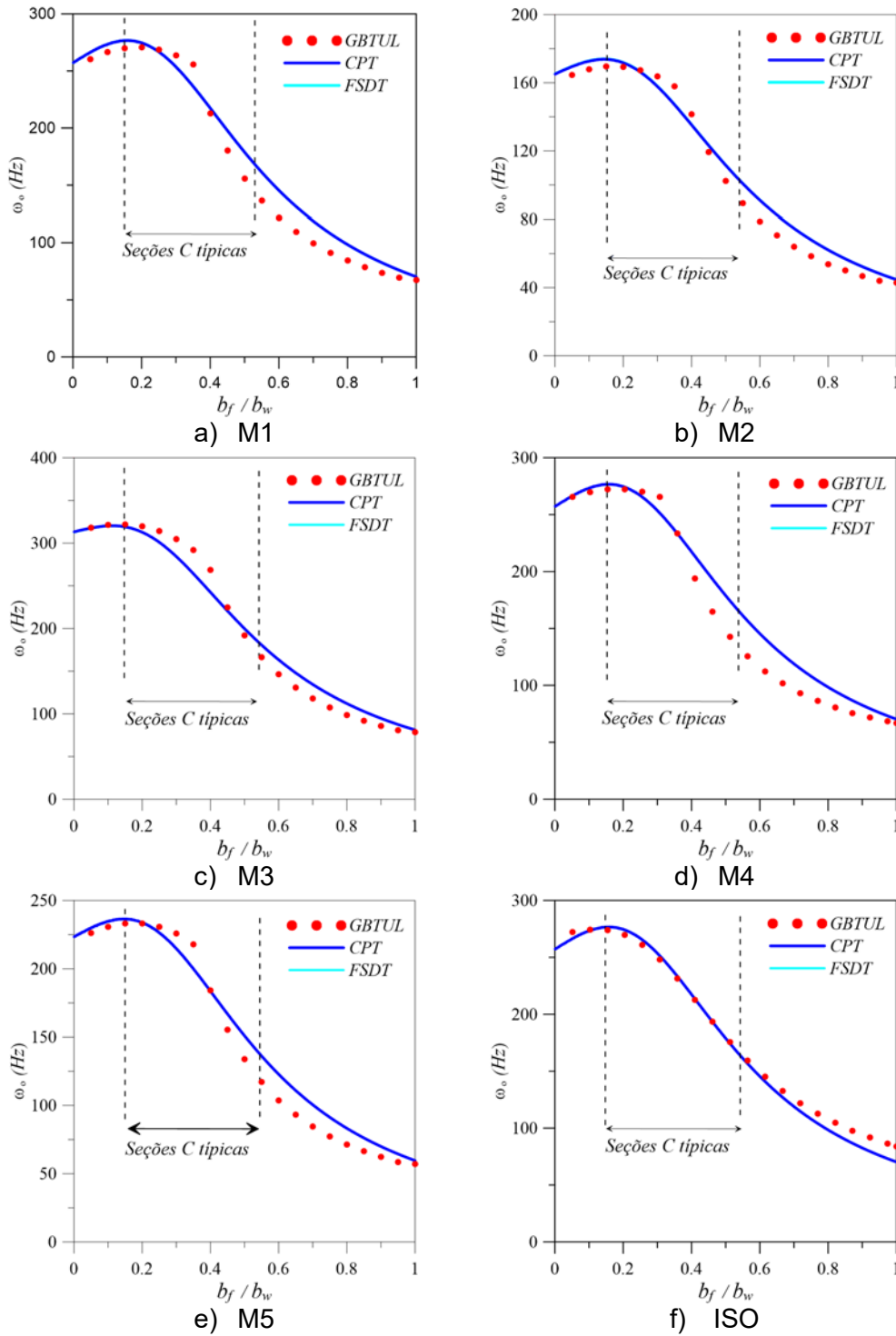
Tabela 6.5: Frequência e modo fundamental de vibração (modo local) para os seis materiais,  $L=0.5$  m.

Material	Modo GBTUL (Fig. 5.9)	$\omega_0$ (Hz)	$\omega_0$ GBTUL (Hz)	Diferença (%)
M1	Modo 5	120.18	119.46	0.60
M2	Modo 5	85.07	84.44	0.74
M3	Modo 5	136.57	131.56	3.67
M4	Modo 5	101.15	99.23	1.90
M5	Modo 5	102.87	101.36	1.47
ISO	Modo 5	190.96	188.37	1.36

### 6.2.3

#### Influência da Geometria da Seção

A Figura 6.4 mostra a influência do parâmetro geométrico  $b_f/b_w$  na frequência fundamental do perfil. A frequência fundamental do perfil C (que corresponde a  $m=1$ ) foi calculada usando a teoria clássica de placas (CPT) e a teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT), sendo os resultados obtidos comparados com resultados do modelo GBTUL. Novamente verifica-se a concordância entre os resultados obtidos com as teorias CPT e FSDT, e uma boa comparação com resultados do GBTUL na faixa de valores  $b_f/b_w$  correspondente à maioria dos perfis comerciais.



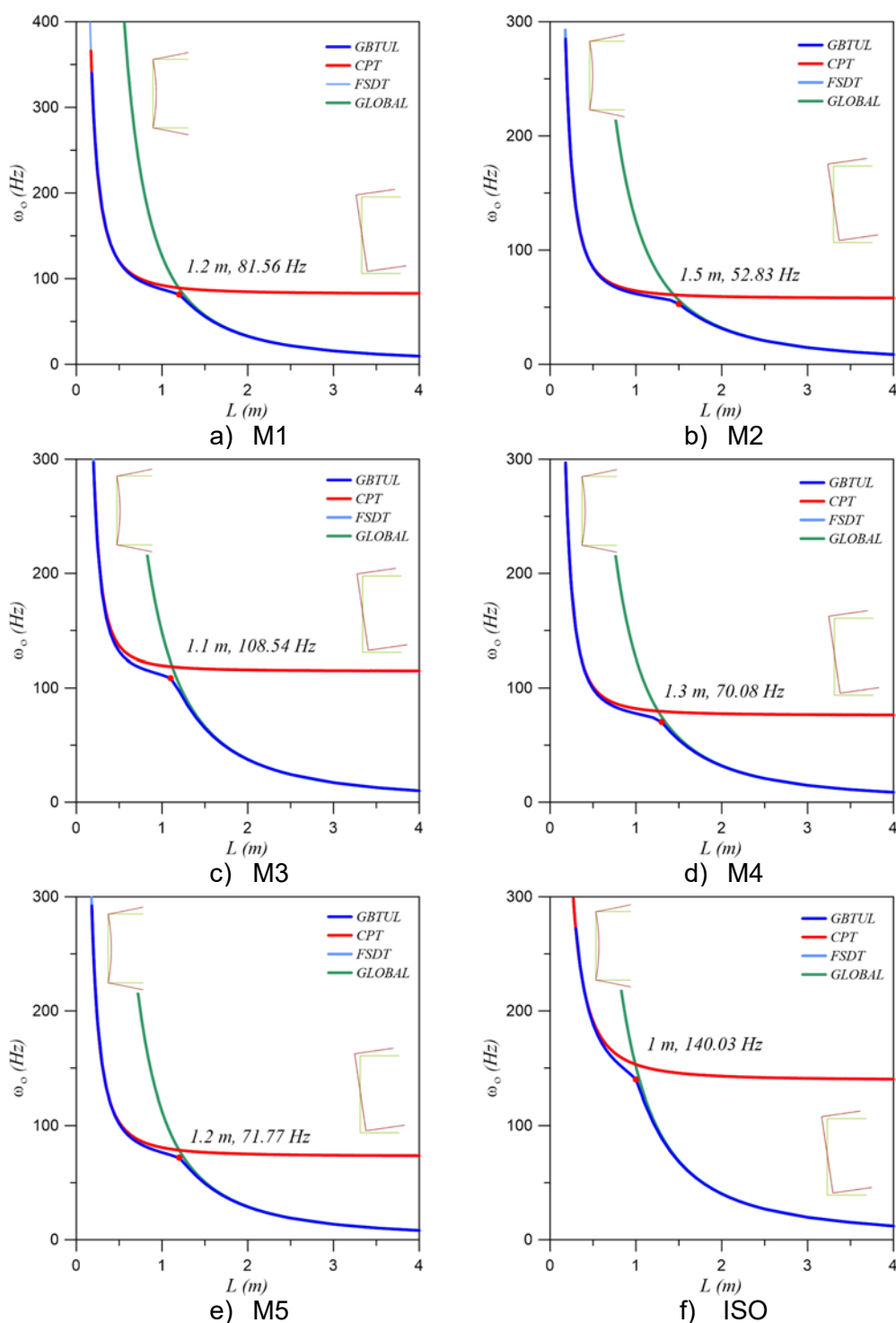
**Figura 6.4: Variação da frequência fundamental do perfil C em função do parâmetro geométrico  $b_f / b_w$  para diferentes materiais ortotrópico.**

### 6.3

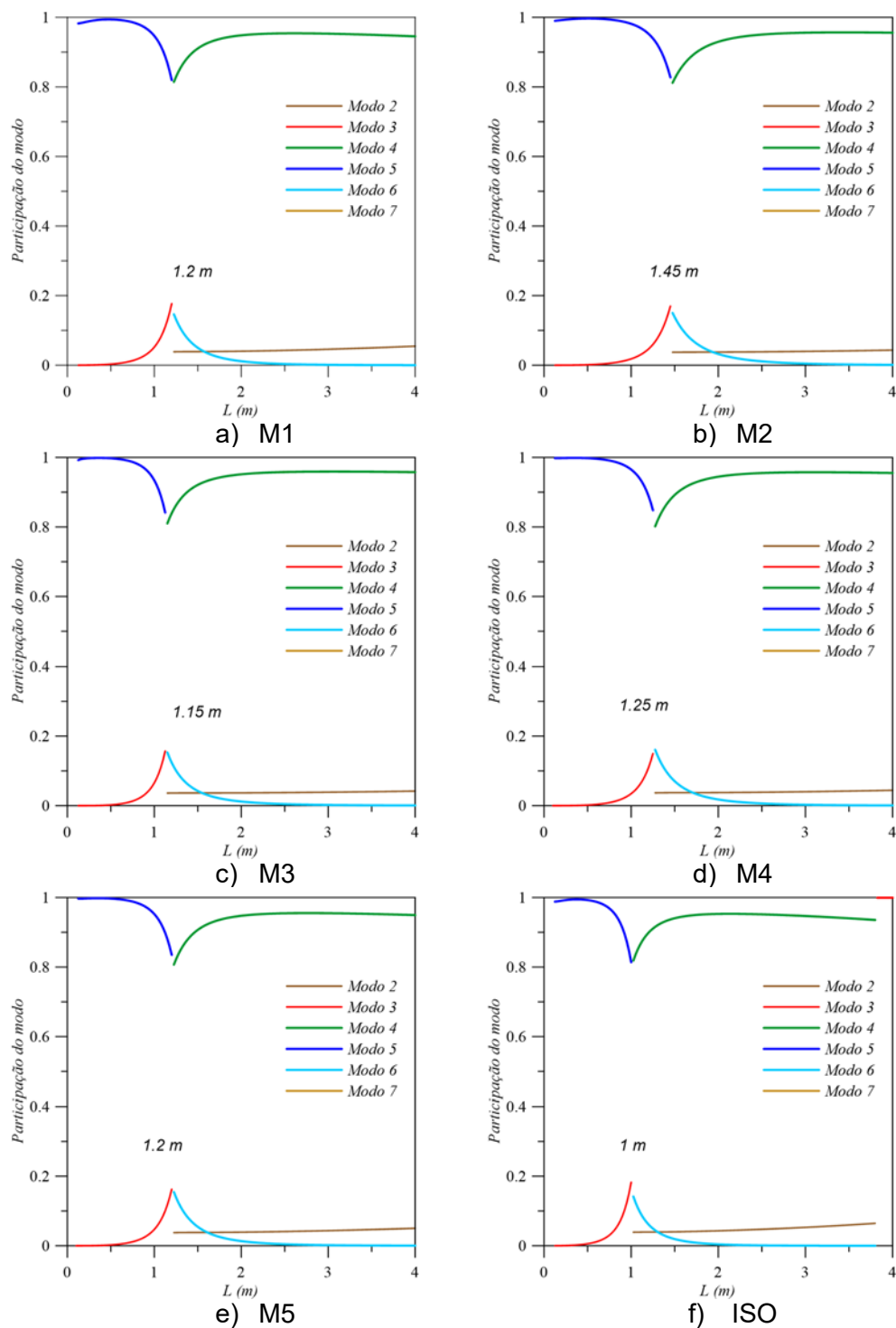
#### Frequência Fundamental e Comparações com o GBTUL

A Figura 6.5 compara a frequência fundamental obtida pela análise global e pela análise local usando as duas teorias de placa (CPT e FSDT) para os seis materiais considerados na análise paramétrica com os resultados obtidos pelo GBTUL. Em cada figura apresenta-se também o valor com comprimento limite,  $L_{lg}$ , onde o modo de vibração fundamental muda de local para global, bem como a frequência associada a este ponto. Esses valores são obtidos igualando-se a frequência fundamental local e global. Verifica-se uma boa concordância entre os resultados aqui obtidos e os fornecidos pelo GBTUL. Comparando-se com o comprimento limite obtido para a carga crítica (ver Figura 5.8), observa-se que no caso dinâmico o comportamento local muda para global em valores bem menores de  $L$ . Cabe ressaltar que, no caso dinâmico, coexistem modos de vibração locais e globais e a sequência de modos depende das características físicas e geométricas da seção. Observa-se em todos os casos pouca diferença entre os resultados obtidos pelas duas teorias de placas (CPT e FSDT).

Como comentado no capítulo anterior, o GBTUL considera em sua formulação para o campo de deslocamentos uma combinação linear de modos de deformação locais e globais. A Figura 5.9 do capítulo anterior ilustra os nove primeiros modos de deformação da seção transversal. Os três primeiros modos correspondem aos modos globais de vibração de flexão e torção da seção transversal. Estes modos são similares aos descritos pelas Equações (6.17), (6.20) e (6.21) para o perfil simplesmente apoiado. Os modos seguintes correspondem a modos de deformação de placa. O GBTUL também fornece a participação de cada um desses modos de deformação em função do comprimento  $L$ . A Figura 6.6 mostra a participação modal em função de  $L$  para os seis materiais. Para avaliar as contribuições de um determinado modo de deformação para um modo de flambagem ou vibração de um membro, o programa fornece o valor de seu fator de participação modal. Verifica-se que, para perfis curtos, a flambagem é dominada pelo modo 5, que é similar ao modo adotado na análise local deste capítulo. Quando o comprimento se aproxima do valor limite, há um crescimento da participação do modo local de flexão em torno do eixo de menor inércia, modo 3. Quando se ultrapassa o comprimento limite  $L_{lg}$  observa-se a participação dominante do modo 4, que corresponde ao modo de torção, e do modo 2, que corresponde ao modo de flexão em torno do eixo de maior inércia. Também nota-se a participação do modo local 6 na proximidade do comprimento limite, que corresponde a um modo de placa com duas semiondas na direção transversal da alma, cuja importância decai com  $L$ . Verifica-se uma mudança abrupta da composição modal no comprimento limite,  $L_{lg}$ .



**Figura 6.5: Variação da frequência natural com o comprimento da Viga-Coluna, calculados com diferentes teorias de placas e comparadas com resultados do GBTUL, e diferentes materiais, Perfil C 200x100x5.**



**Figura 6.6: Participação modal no modo de vibração do modelo GBTUL, para uma Viga-Coluna simplesmente apoiada de seção C 200x100x5 e diferentes materiais pultrudados.**

## 6.4 Relação Carga Axial-Frequência

### 6.4.1 Análise Global

Sabe-se que em estruturas suscetíveis a flambagem há uma grande influência do pré-carregamento estático nas frequências de vibração. Para colunas de comprimento médio a longas, as menores frequências, como observado anteriormente, estão associadas aos modos globais.

Para o cálculo das frequências naturais e modos de vibração da estrutura carregada, tem-se o problema de autovalor:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [[K_e] - P[K_G]]\{U\} = 0 \quad (6.49)$$

onde a matriz de massa e rigidez elástica são dadas respectivamente por (6.8) e (6.9) e a matriz de rigidez geométrica é dada por:

$$[K_G] = m^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ z_c & -y_c & I_o \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

A Figura 6.7 mostra a variação das três primeiras frequências naturais ( $m=1$ ) obtidas pela formulação global com a carga axial compressiva  $P$ , para uma barra com  $L=4$  m, enquanto a Figura 6.8 mostra os resultados para  $L=8$  m. Tendo em vista a similaridade dos resultados, são apresentadas somente as curvas para os materiais M1 a M3. À medida que o valor da carga de compressão aumenta, os valores das frequências diminuem até chegar à carga de bifurcação em cada modo. Nota-se que há uma grande influência do carregamento nas frequências de vibração. Para efeito prático, quando se atinge a primeira carga crítica, um dos autovalores se torna negativo e ocorre a flambagem, passando a estrutura a vibrar em torno de uma configuração de equilíbrio pós-crítica. Precisa-se, portanto, de uma formulação não linear para a análise deste problema. Verifica-se em quase todos os casos uma proximidade entre os resultados para o primeiro modo de flexão (em azul) e o primeiro modo de flexo-torção (em vermelho), indicando a possibilidade de um acoplamento não linear entre estes dois modos.

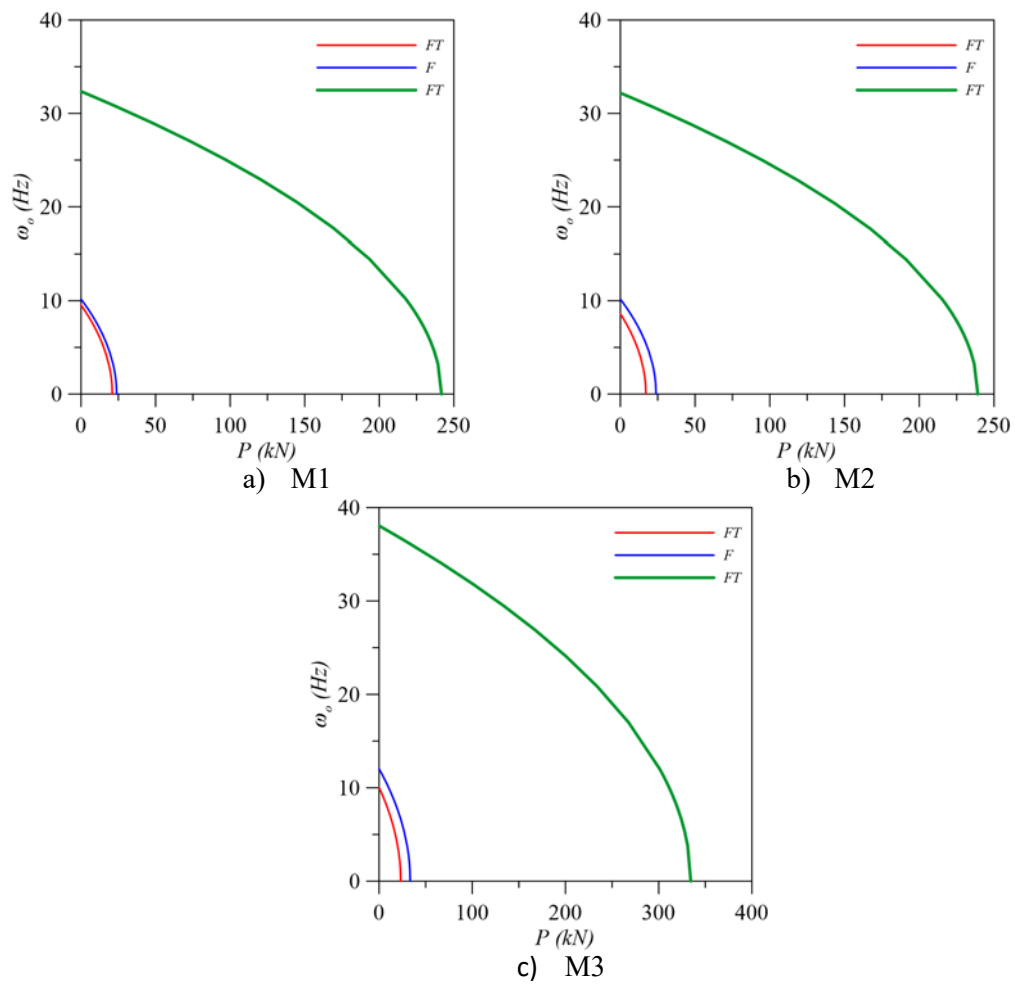
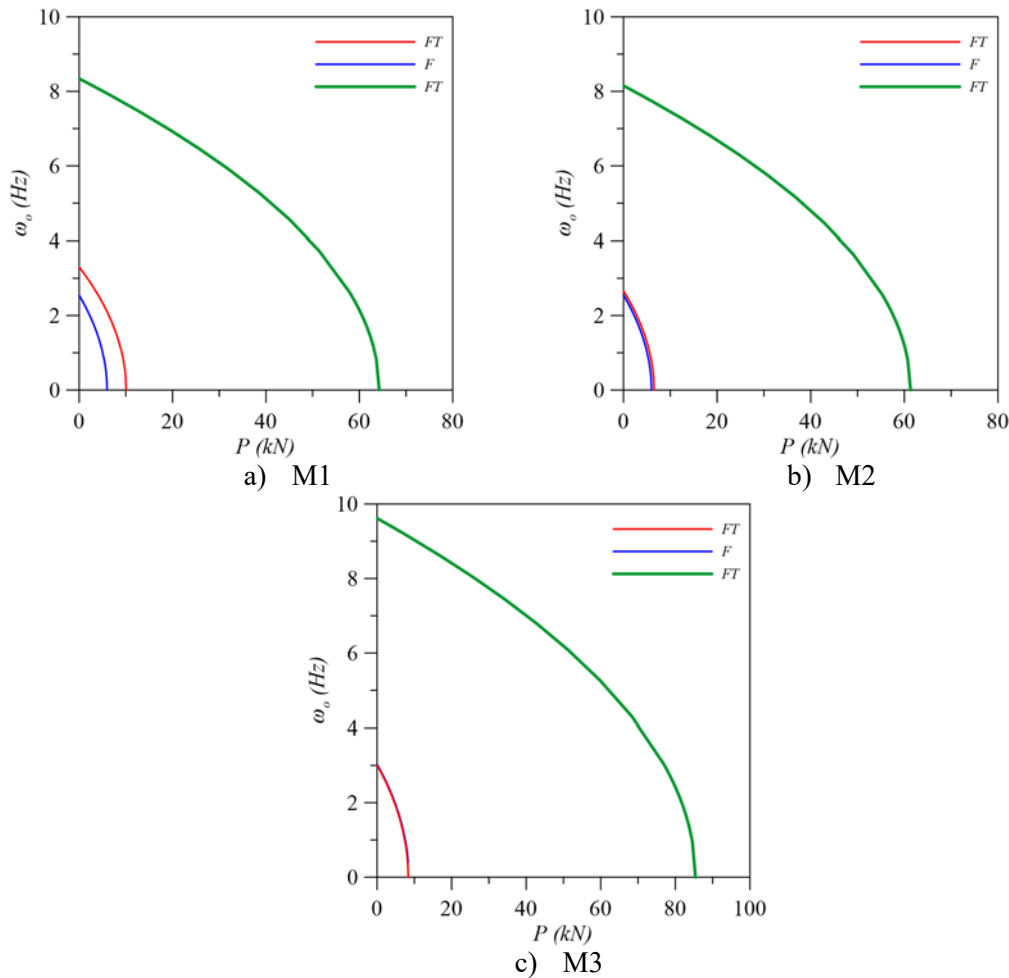


Figura 6.7: Variação das frequências naturais com a carga axial,  $L=4\text{m}$ .



**Figura 6.8: Variação das frequências naturais com a carga axial  $L=8m$ .**

#### 6.4.2 Análise Local

Para colunas curtas, as menores frequências estão associadas aos modos locais, como observado anteriormente. Para o cálculo das frequências naturais e modos de vibração da estrutura carregada, tem-se o problema de autovalor:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [[K_e] - P[K_G]]\{U\} = 0 \quad (6.51)$$

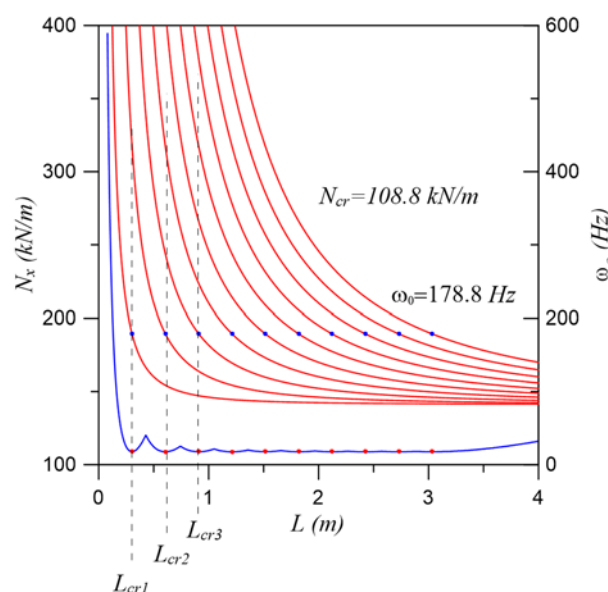
Os coeficientes de rigidez elástica e massa para a teoria clássica de placas são dados respectivamente por (6.29) e (6.30), enquanto que para a teoria de cisalhamento de primeira ordem são dados por (6.44) e (6.43). O coeficiente de rigidez geométrica para a teoria clássica é dado por (5.29) e para a teoria de primeira ordem, por (5.35).

A Figura 6.9 mostra, para o material M1, a variação da carga crítica (em azul) e frequências naturais da estrutura descarregada (em vermelho) em função do comprimento do perfil para valores crescentes do número de semiondas axiais  $m$ . Como visto no capítulo anterior, o número de semiondas axiais associada ao

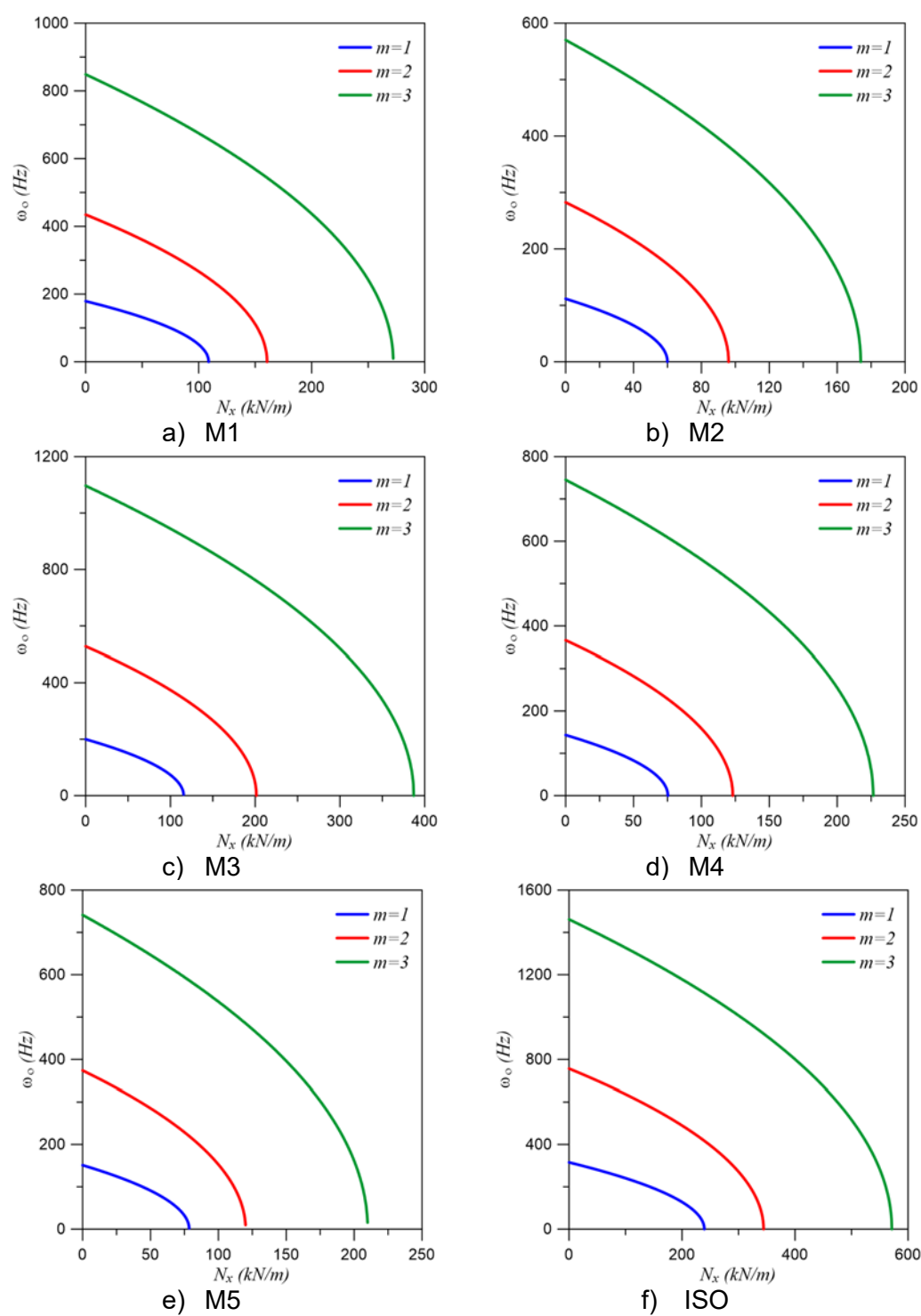
modo crítico cresce à medida que cresce o comprimento do perfil, atingindo um valor mínimo para cada valor de  $m$  associado a um comprimento crítico dado por

$$L_{crm} = m \left[ \frac{(3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3)E_1}{3E_2} \right]^{1/4} \quad (6.52)$$

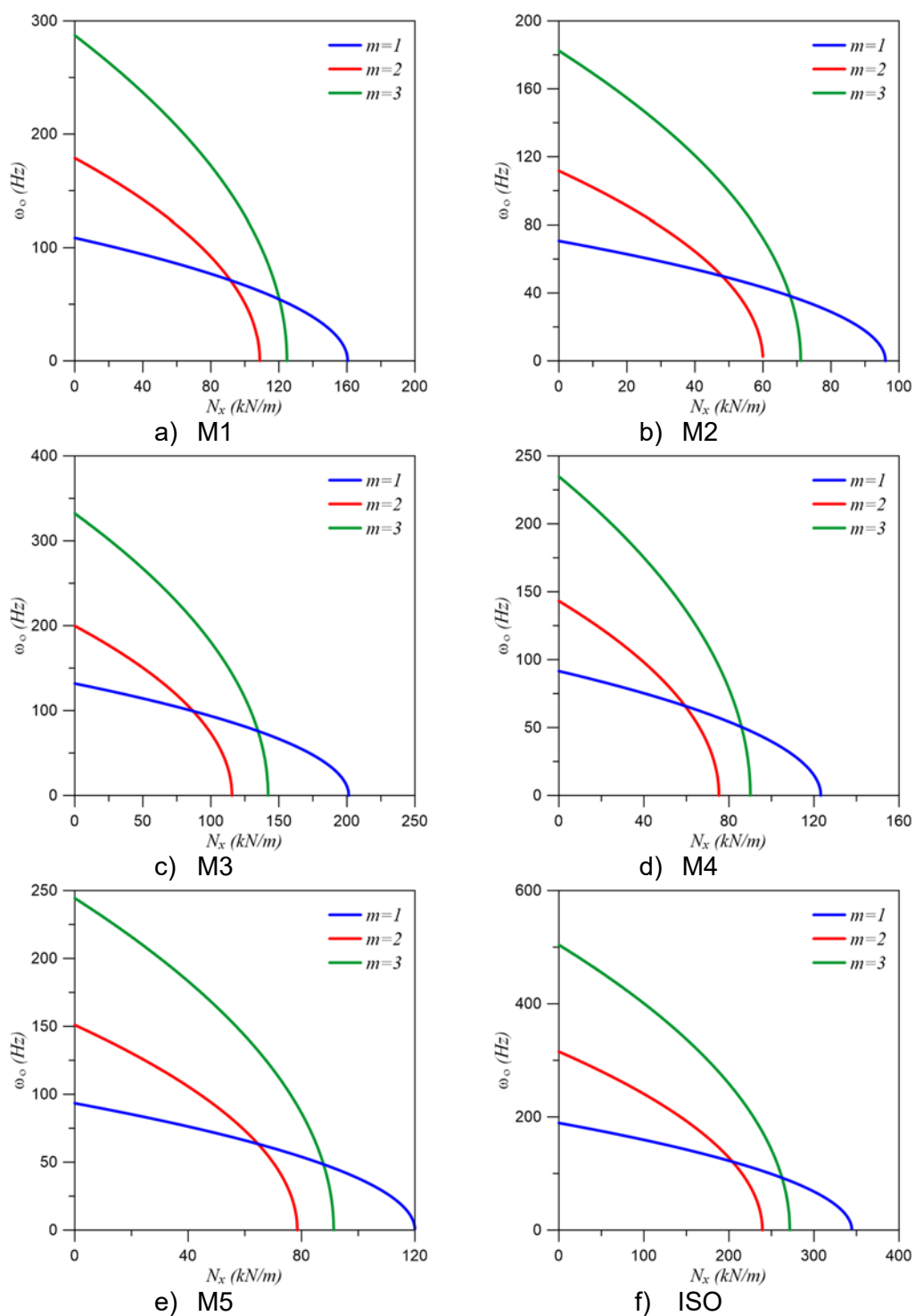
que é função das características físicas e geométricas do perfil. Os três primeiros valores estão identificados pelas retas tracejadas na Figura 6.9. Observa-se que, para o mesmo valor de  $m$ , a frequência natural correspondente a cada comprimento crítico tem o mesmo valor, no presente caso 178.8Hz. Assim espera-se que o número de semiondas axiais associados à frequência fundamental mude com a carga axial para valores de  $m > 1$  e  $L > L_{cr1}$ . Investiga-se a seguir a influência do carregamento axial nas três primeiras frequências naturais da estrutura carregada para os três primeiros comprimentos críticos. Observa-se na Figura 6.10 que para  $L = L_{cr1}$  a frequência fundamental, tal como a carga crítica, ocorre sempre para  $m=1$ , decrescendo com a carga axial compressiva  $N_x$  e tornando-se nula quando a carga axial atinge o valor crítico. Sendo que as frequências crescem com  $m$ . Para  $L = L_{cr2}$ , como se observa na Figura 6.11, a frequência fundamental está inicialmente associada a  $m=1$ , como na estrutura descarregada, mas, a partir de um certo valor da carga axial compressiva  $N_x$ , que depende das características do material pultrudado, a frequência fundamental passa a ser associada a  $m=2$ . Esta é a primeira frequência a se tornar nula para o menor valor da carga axial  $N_x$ , em concordância com o fato de que o modo crítico para este comprimento tem duas semiondas. Finalmente, para  $L = L_{cr3}$ , como se observa na Figura 6.12, o número de semiondas associado à frequência fundamental cresce com a carga axial compressiva, sendo que a frequência associada a  $m=3$  é a primeira a se tornar nula, concordando com o modo crítico desta geometria. Para  $L = L_{cr2}$  e  $L = L_{cr3}$  observam-se situações em que, para  $N_x < N_{cr}$  duas frequências se igualam levando a uma possível ressonância interna 1:1. As Figuras 6.13 a 6.15 mostram os resultados considerando a teoria de placas de primeira ordem, onde se observam os mesmos fenômenos.



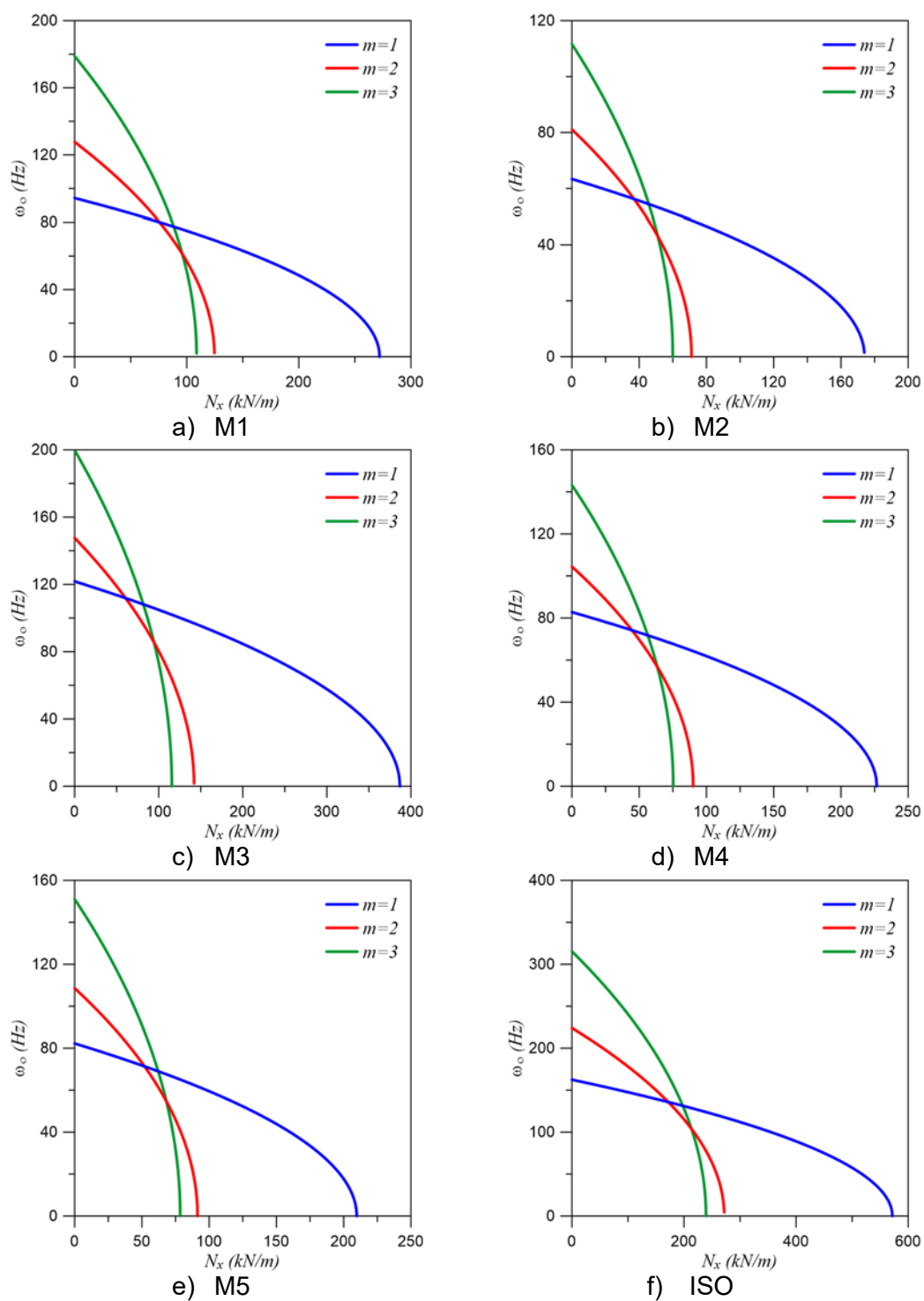
**Figura 6.9: Frequências naturais e cargas críticas para o material M1 obtidos pela formulação local.**



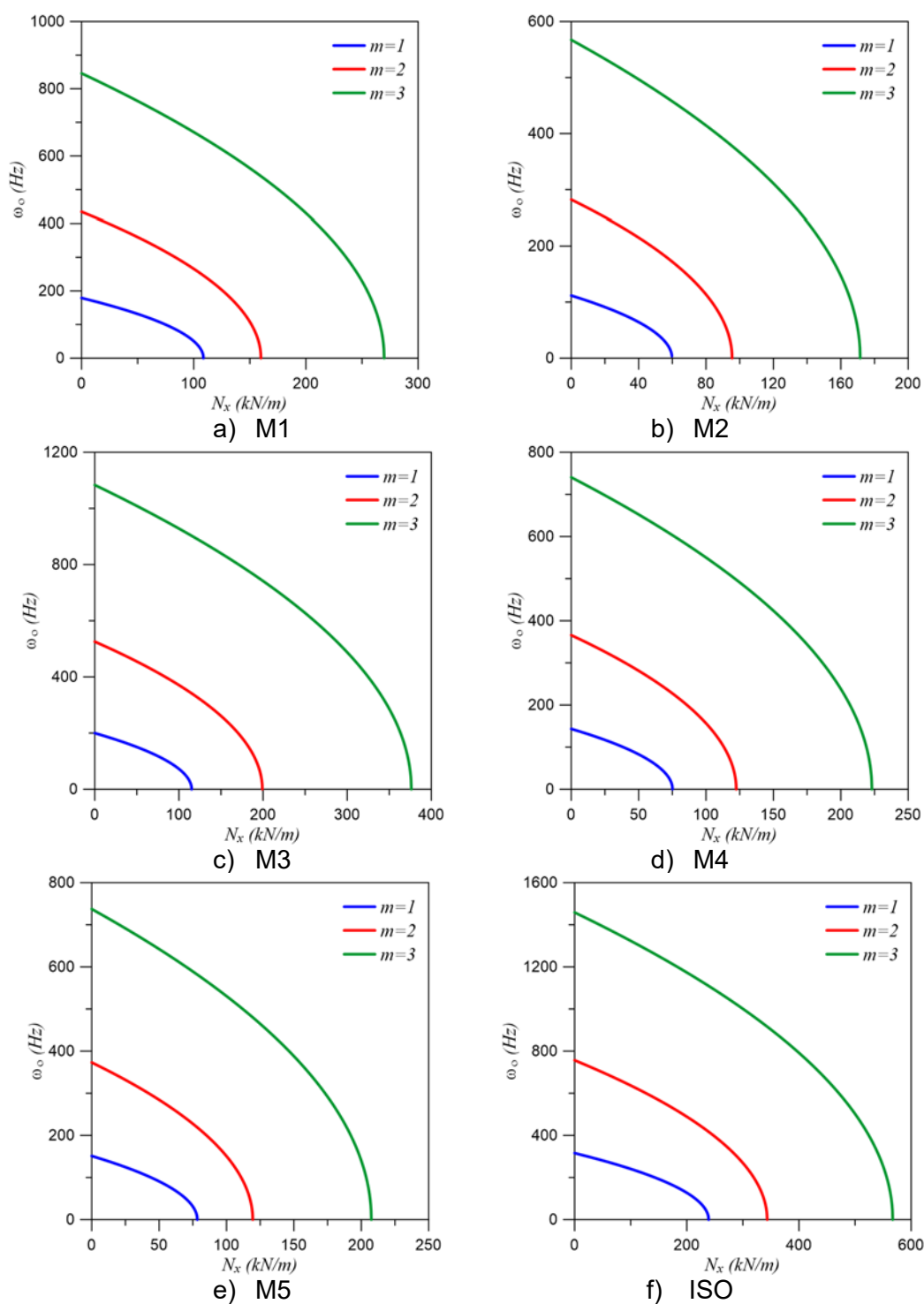
**Figura 6.10: Variação das frequências naturais com a carga axial para  $L = L_{cr1}$ .  $m = 1$ , CPT.**



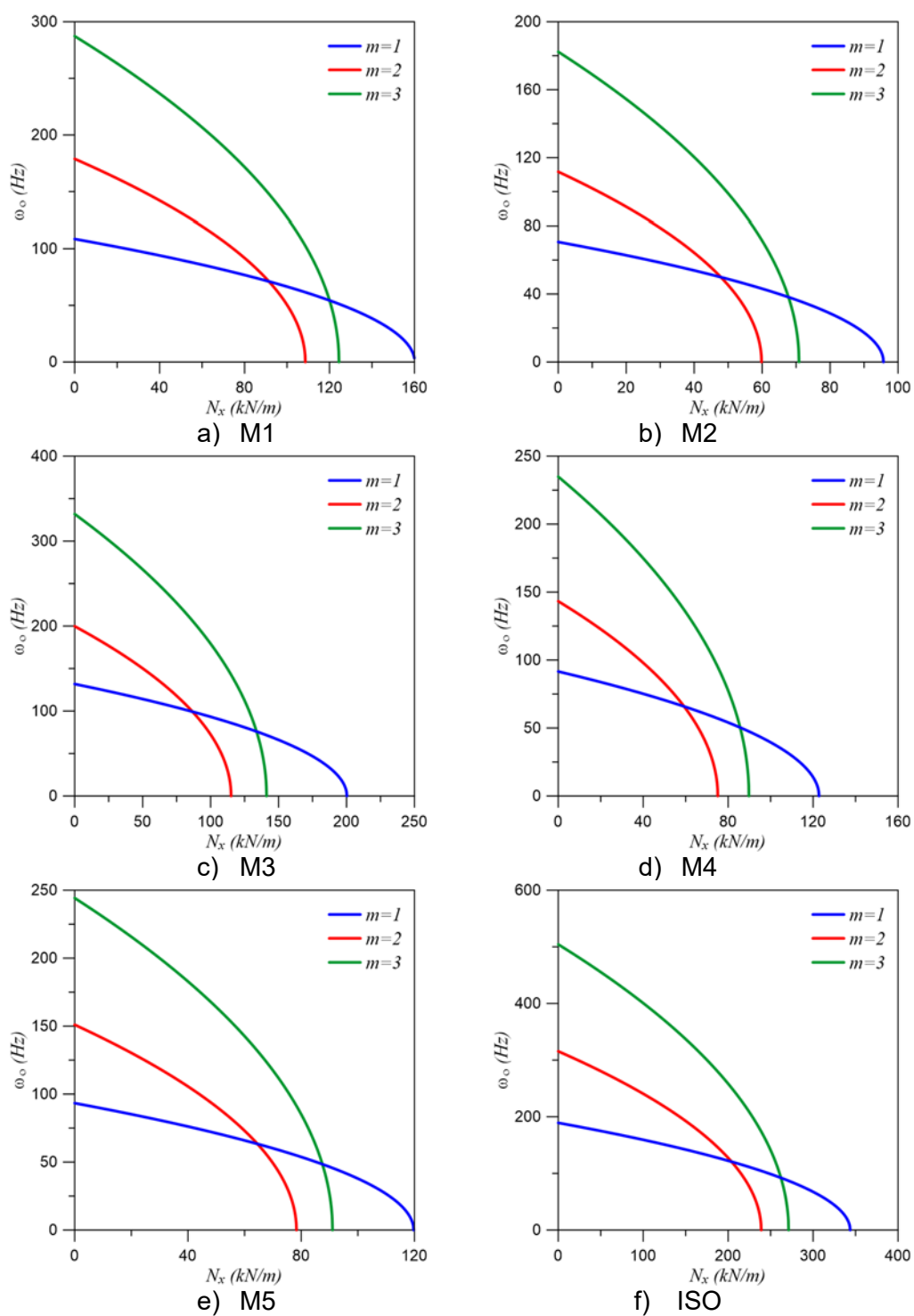
**Figura 6.11: Variação das frequências naturais com a carga axial para  $L = L_{cr2}$ ,  $m = 2$ , CPT.**



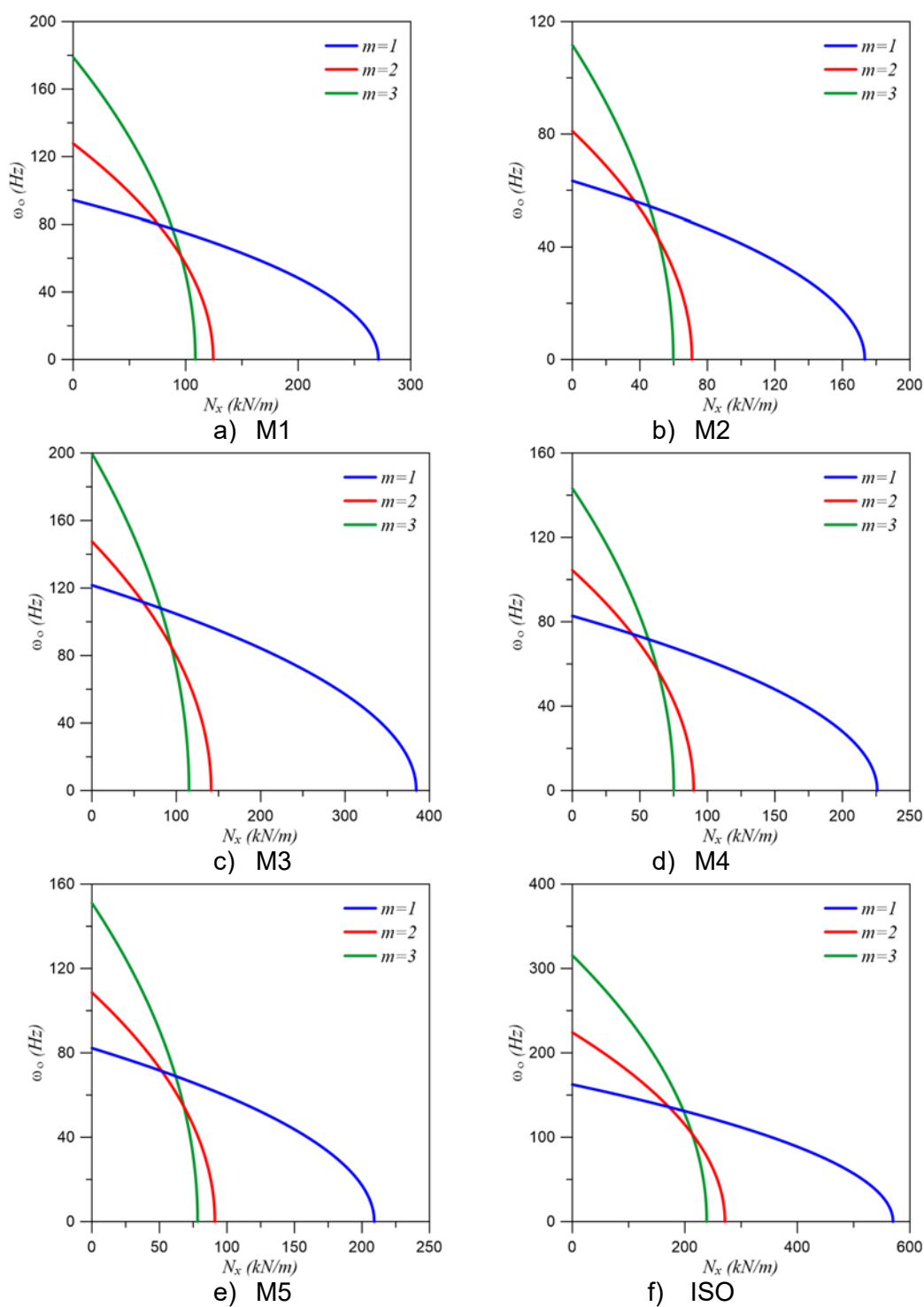
**Figura 6.12: Variação das frequências naturais com a carga axial para  $L = L_{cr3}$ ,  $m = 3$ , CPT.**



**Figura 6.13: Variação das frequências naturais com a carga axial para  $L = L_{cr1}$ ,  $m = 1$ , FSDT.**



**Figura 6.14:** Variação das frequências naturais com a carga axial *para*  $L = L_{cr2}$ ,  $m = 2$ , FSDT.



**Figura 6.15: Variação das frequências naturais com a carga axial para  $L = L_{cr3}$ ,  $m = 3$ , FSDT.**

## 7

## Análise do Comportamento Pós-Crítico e Sensibilidade a Imperfeições

Neste capítulo são inicialmente deduzidas as equações não lineares de equilíbrio que descrevem o caminho pós-crítico da estrutura perfeita e os caminhos não lineares de equilíbrio da estrutura imperfeita. Inicialmente são deduzidas as equações discretizadas com base nas formulações global e local e, a seguir, apresentam-se os resultados da análise paramétrica, destacando-se os três tipos de comportamento do perfil em função do seu comprimento, a saber, instabilidade no modo local, instabilidade no modo global de flexo-torção e instabilidade no modo global de flexão em torno do eixo de menor inércia. As variáveis apresentadas a seguir foram definidas nos Capítulos 3 e 4 (ver lista de símbolos).

## 7.1

### Equações Não Lineares de Equilíbrio - Análise Global

As equações diferenciais parciais não lineares de movimento para a análise do comportamento global de uma coluna de paredes delgadas considerando imperfeições e o efeito de uma carga axial de compressão,  $N$ , foram deduzidas no Capítulo 3, Equações (3.63 – 3.65). Eliminando os termos relativos à inércia, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 EI_z \left( v^{(4)} + 3v'v''v''' + v''^3 + \frac{v^{(4)}v'^2}{2} \right) \\
 - N(v'' + z_c\theta_x'' + y_c(\theta_x\theta_x'' + \theta_x'^2)) \\
 + (EI_z - EI_y)(w^{(4)}\theta_x + 2w'''\theta_x' + w''\theta_x'' \\
 - v^{(4)}\theta_x^2 - 4v'''\theta_x\theta_x' - 2v''\theta_x\theta_x'' - 2v''\theta_x'^2) \\
 - EI_z \left( w_o^{(4)}\theta_{ox} + 2w_o'''\theta_{ox}' + w_o''\theta_{ox}'' \right. \\
 \left. - v_o^{(4)}\left(\frac{\theta_{ox}^2}{2} + \frac{\theta_x^2}{2}\right) - 2v_o'''\left(\theta_{ox}\theta_x' + \theta_x\theta_{ox}'\right) \right. \\
 \left. - v_o''(\theta_{ox}\theta_{ox}'' + \theta_x\theta_x'') - v_o''(\theta_{ox}'^2 + \theta_x'^2) \right) \\
 + EI_y \left( w_o^{(4)}\theta_x + 2w_o'''\theta_x' + w_o''\theta_x'' - v_o^{(4)}(\theta_{ox}\theta_x) \right. \\
 \left. - 2v_o'''\left(\theta_x\theta_{ox}' + \theta_{ox}\theta_x'\right) - v_o''(\theta_{ox}\theta_x'' + \theta_x\theta_{ox}'') \right. \\
 \left. - 2v_o''(\theta_{ox}'\theta_x') \right) = 0
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
& EI_y \left( w^{(4)} + 3w'w''w''' + w''^3 + \frac{w^{(4)}w'^2}{2} \right) \\
& - N(w'' - y_c \theta_x'' + z_c (\theta_x \theta_x'' + \theta_x'^2)) \\
& + (EI_z - EI_y)(v^{(4)} \theta_x + 2v''' \theta_x' + v'' \theta_x'' \\
& + w^{(4)} \theta_x^2 - 4w''' \theta_x \theta_x' + 2w'' \theta_x \theta_x'' + 2w' \theta_x'^2) \\
& - EI_z \left( v_o^{(4)} \theta_{ox} + 2v_o''' \theta_{ox}' + v_o'' \theta_{ox}'' \right. \\
& - w_o^{(4)} \left( \frac{\theta_{ox}^2}{2} + \frac{\theta_x^2}{2} \right) - 2w_o''' (\theta_{ox} \theta_{ox}' + \theta_x \theta_x') \\
& \left. - w_o'' (\theta_{ox} \theta_{ox}'' + \theta_x \theta_x'') - w_o' (\theta_{ox}'^2 + \theta_x'^2) \right) \\
& + EI_y \left( v_o^{(4)} \theta_x + 2v_o''' \theta_x' + v_o'' \theta_x'' - w_o^{(4)} (\theta_{ox} \theta_x) \right. \\
& - 2w_o''' (\theta_x \theta_{ox}' + \theta_{ox} \theta_x') - w_o'' (\theta_{ox} \theta_x'' + \theta_x \theta_{ox}'') \\
& \left. - 2w_o' (\theta_{ox}' \theta_x') \right) = 0
\end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}
& EI_\omega \theta_x^{(4)} - GJ \theta_x'' - \frac{3}{2} EI_t \theta_x'^2 \theta_o'' \\
& - N(I_o \theta_x'' - y_c (w'' + v'' \theta_x) + z_c (v'' + w'' \theta_x)) \\
& + (EI_z - EI_y)(v'' w'' - v''^2 \theta_x + w''^2 \theta_x) \\
& - EI_z (w_o'' w'' \theta_{ox} + w'' v_o'' - v_o'' v'' \theta_x) \\
& + EI_y (w_o'' w'' \theta_x + v'' w_o'' - v_o'' v'' \theta_{ox}) = 0
\end{aligned} \tag{7.3}$$

onde  $E = E_{11}$  e  $G = G_{12}$  são respectivamente o módulo de Young longitudinal (na direção das fibras do material pultrudado que coincide com o eixo do perfil) e o módulo de cisalhamento do material no plano das chapas do perfil.

Para obtenção dos caminhos não lineares de equilíbrio usam-se as seguintes funções de aproximação:

$$v(x) = v \operatorname{sen} \left( \pi \frac{x}{L} \right) \tag{7.4}$$

$$w(x) = w \operatorname{sen} \left( \pi \frac{x}{L} \right) \tag{7.5}$$

$$\theta(x) = \theta_x \operatorname{sen} \left( \pi \frac{x}{L} \right) \tag{7.6}$$

onde  $v$ ,  $w$ , e  $\theta_x$  são as amplitudes modais. Cabe ressaltar que as funções (7.4) a (7.6) são a solução analítica das equações linearizadas de equilíbrio crítico e que, portanto, descrevem com precisão o caminho pós-crítico na vizinhança da carga de bifurcação.

Considerando que a forma da imperfeição geométrica com maior influência no comportamento não linear de equilíbrio é aquela que tem a mesma forma dos modos críticos, tem-se que as imperfeições geométricas iniciais são descritas pelas seguintes funções:

$$v_o(x) = v_o \operatorname{sen}\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (7.7)$$

$$w_o(x) = w_o \operatorname{sen}\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (7.8)$$

$$\theta_{ox}(x) = \theta_{ox} \operatorname{sen}\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (7.9)$$

onde  $v_o$ ,  $w_o$ ,  $\theta_{ox}$  são as amplitudes das imperfeições.

Aplicando o método de Galerkin, obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas não lineares de equilíbrio:

$$\begin{aligned} EI_z \frac{\pi^4}{2L^3} \left[ v - v_o + \frac{\pi^2}{8L^2} (v^3 - v_o^3) \right] - P \frac{\pi}{L} \left[ \frac{\pi}{2} (v + z_c \theta_x) + \frac{2}{3} y_c \theta_x^2 \right] \\ + (EI_z - EI_y) \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} w \theta_x - \frac{3}{8} \pi v \theta_x^2 \right) - 2 \frac{L}{\pi} q_y \\ + EI_y \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} w_o \theta_x - \frac{1}{8} \frac{\pi^3}{L^2} v_o \theta_{ox} \theta_x \right) \\ - EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} w_o \theta_{ox} - \frac{3}{16} \pi v_o (\theta_{ox}^2 + \theta_x^2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} EI_y \frac{\pi^4}{2L^3} \left[ w - w_o + \frac{\pi^2}{8L^2} (w^3 - w_o^3) \right] - P \frac{\pi}{L} \left[ \frac{\pi}{2} (w - y_c \theta_x) + \frac{2}{3} z_c \theta_x^2 \right] \\ + (EI_z - EI_y) \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} v \theta_x + \frac{3}{8} \pi w \theta_x^2 \right) - 2 \frac{L}{\pi} q_z \\ + EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} v_o \theta_x + \frac{3}{8} \pi w_o \theta_{ox} \theta_x \right) \\ + EI_y \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} v_o \theta_{ox} + \frac{3}{16} \pi w_o (\theta_{ox}^2 + \theta_x^2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\pi^4}{L^3} EI_w (\theta_x - \theta_{ox}) + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{L} GJ (\theta_x - \theta_{ox}) + \frac{3}{16} \frac{\pi^4}{L^3} EI_t (\theta_x^3 - \theta_{ox}^3) \\ + EI_z \frac{\pi^4}{2L^3} \left[ v - v_o + \frac{\pi^2}{8L^2} (v^3 - v_o^3) \right] \\ - P \frac{\pi}{L} \left[ \frac{\pi}{2} I_o \theta_x - y_c \left( \frac{\pi}{2} w - \frac{4}{3} v \theta_x \right) + z_c \left( \frac{\pi}{2} v + \frac{4}{3} w \theta_x \right) \right] \\ + (EI_z - EI_y) \frac{\pi^3}{L^3} \left[ \frac{4}{3} v w - \frac{3}{8} \pi (v^2 \theta_x - w^2 \theta_x) \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{L}{\pi} q_z (\pi e_z \theta_x - 4 e_y) \\ - EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{3}{8} \pi w_o w \theta_{ox} + \frac{4}{3} w v_o - \frac{3}{8} \pi v_o v \theta_x \right) \\ + EI_y \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{3}{8} \pi w_o w \theta_x + \frac{4}{3} w_o v - \frac{3}{8} \pi v_o \theta_{ox} v \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Que são funções das amplitudes modais  $v$ ,  $w$ , e  $\theta_x$  e da magnitude das imperfeições da estrutura  $v_o$ ,  $w_o$ , e  $\theta_{ox}$ .

Tem-se assim um sistema de três equações algébricas não lineares que podem ser resolvidas, por exemplo através do método de Newton-Raphson, juntamente com técnicas de continuação para obtenção dos caminhos não lineares de equilíbrio. Observa-se a presença de termos não lineares quadráticos e cúbicos.

## 7.2

### Equações Não Lineares de Equilíbrio - Análise Local

#### 7.2.1

##### Teoria Clássica de Placas

Pela teoria clássica de placas, o funcional não linear relativo à energia interna de deformação,  $U$ , é dado por:

$$\begin{aligned}
 U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L \left[ A_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right)^2 \right. \\
 + 2A_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{o,y} \right) \\
 + A_{22} \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{o,y} \right)^2 \\
 + A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{o,y} + w_{,y} w_{o,x} + w_{,x} w_{,y})^2 \\
 \left. + D_{11} \kappa_x^2 + 2D_{12} \kappa_x \kappa_y + D_{22} \kappa_y^2 + 4D_{66} \kappa_{xy}^2 \right] dx dy
 \end{aligned} \quad (7.13)$$

e o potencial das cargas aplicadas,  $\Omega$ , para uma placa sob compressão axial pode ser escrita como:

$$\Omega = -N_x \int_0^b \int_0^L \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) dx dy \quad (7.14)$$

onde  $N_x$  é a carga aplicada por unidade de comprimento aplicada nas extremidades do perfil.

#### 7.2.1.1

##### Funções de Forma

Para a dedução de funções de interpolação consistentes, levando em conta os acoplamentos modais associados à não linearidade geométrica, usa-se a técnica de perturbações descrita por Gonçalves et al. (2016) que leva a modelos reduzidos precisos para a análise de cascas e placas (Gonçalves et al., 2008).

Para usar o método de Ritz, funções de forma para  $u, v$  e  $w$  precisam ser prescritas. Estas funções têm que atender às condições de contorno forçadas do problema.

Com base no modo de flambagem local da estrutura, as funções de forma da alma são dadas por:

$$w(x, y) = W \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b_w}\right) \quad (7.15)$$

$$u(x, y) = U \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b_w}\right) \quad (7.16)$$

$$v(x, y) = V \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{b_w}\right) \quad (7.17)$$

onde se observa que os termos relativos ao deslocamento no plano da placa  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  têm o dobro do número de ondas do modo crítico em virtude das não linearidades quadráticas observadas nas Equações (4.18a) e (4.18b).

As funções de aproximação dos deslocamentos das mesas, levando em conta o efeito das não linearidades e da compatibilidade de deslocamentos na junção mesa-alma, são dadas por:

$$w(x, y) = W \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{\pi y}{b_w} \quad (7.18)$$

$$u(x, y) = U \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \left(1 - \left(\frac{y}{b_w}\right)^2\right) \quad (7.19)$$

$$v(x, y) = V \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \frac{y}{b_w} + y^3 \quad (7.20)$$

Considera-se que a imperfeição tem a forma do modo crítico da estrutura, sendo dada para a alma e mesas, respectivamente, por:

$$w_o(x, y) = W_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b_w}\right) \quad (7.21)$$

$$w_o(x, y) = W_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{\pi y}{b_w} \quad (7.22)$$

onde  $W_o$  é a magnitude da imperfeição geométrica inicial.

Assim, tem-se a energia potencial do perfil dada por:

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \Pi_i = \sum_{i=1}^3 (U_i + \Omega_i) \quad (7.23)$$

Substituindo as funções (7.15) a (7.22) em (7.23) e efetuando a integral ao longo do domínio de cada placa, obtém-se o funcional discretizado função das amplitudes modais  $W$ ,  $U$  e  $V$ . Aplicando o método de Ritz, obtém-se o sistema de equações não lineares:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial V} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial W} = 0 \quad (7.24)$$

A primeira e segunda equação são lineares em  $U$  e  $V$  e podem ser resolvidas para os deslocamentos  $U$  e  $V$  em função do  $W$ ,

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

Introduzindo os valores de  $U$ ,  $V$  na terceira equação, obtém-se a equação que descreve o caminho pós-crítico.

A expressão resultante é bastante longa, mas como exemplo ilustrativo, introduzindo as constantes elásticas do material M1, as propriedades geométricas do perfil C 200x100x5 e  $L=L_{cr}$ , a equação toma a forma:

$$P = \frac{9.24W^3 + 18.50WW_0^2 + 43.52W + 27.75W^2W_0}{W + W_0} \quad (7.26)$$

Considerando a imperfeição nula, o caminho pós-crítico assume a forma parabólica, típica de placas, relativa a uma bifurcação simétrica estável (Shen, 2017).

## 7.2.2

### Teoria de Primeira Ordem

Pela teoria de primeira ordem, o funcional não linear relativo à energia interna de deformação da estrutura imperfeita,  $U$ , é dado por:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L & \left[ A_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right)^2 \right. \\ & + 2A_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right. \\ & + \left. w_{,y} w_{o,y} \right) + A_{22} \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{o,y} \right)^2 \\ & + A_{66} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{o,y} + w_{,y} w_{o,x} + w_{,x} w_{,y})^2 \\ & + D_{11} (\psi_{x,x})^2 + 2D_{12} \psi_{x,x} \psi_{y,y} + D_{22} (\psi_{y,y})^2 \\ & + D_{66} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x})^2 + KA_{44} (w_{,y} + \psi_y)^2 \\ & \left. + KA_{55} (w_{,x} + \psi_x)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (7.27)$$

O potencial das cargas aplicadas,  $\Omega$ , para uma placa sob compressão axial pode ser escrita como:

$$\Omega = -N_x \int_0^b \int_0^L \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} \right) dx dy \quad (7.28)$$

onde  $N_x$  é a carga aplicada por unidade de comprimento.

### 7.2.2.1

#### Funções de Forma

Para usar o método de Ritz, funções de forma para  $u, v, w, \psi_x, \psi_y$  precisam ser prescritas. Estas funções têm que atender às condições de contorno forçadas do problema.

As funções de forma da alma são dadas por:

$$w(x, y) = W \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b_w} \right) \quad (7.29)$$

$$u(x, y) = U \operatorname{sen} \left( \frac{2m\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{2n\pi y}{b_w} \right) \quad (7.30)$$

$$v(x, y) = V \cos \left( \frac{2m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2n\pi y}{b_w} \right) \quad (7.31)$$

$$\psi_x(x, y) = X \frac{m\pi}{L} \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b_w} \right) \quad (7.32)$$

$$\psi_y(x, y) = Y \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b_w} \right) \quad (7.33)$$

As funções de forma das mesas têm a seguinte forma:

$$w(x, y) = W \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \frac{n\pi y}{b_w} \quad (7.34)$$

$$u(x, y) = U \operatorname{sen} \left( \frac{2m\pi x}{L} \right) \left( 1 - \left( \frac{y}{b_w} \right)^2 \right), \quad (7.35)$$

$$v(x, y) = V \cos \left( \frac{2m\pi x}{L} \right) \frac{y}{b_w} + y^3 \quad (7.36)$$

$$\psi_x(x, y) = X \frac{m\pi}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b_w}\right) \quad (7.37)$$

$$\psi_y(x, y) = Y \frac{n\pi}{b_w} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b_w}\right) \quad (7.38)$$

Considerando novamente que a imperfeição tem a forma do modo crítico da estrutura, ela é descrita por (7.21) e (7.22).

### 7.2.2.2 Caminho Pós-crítico

A energia potencial total do perfil é dada pela soma da energia potencial total das três placas, ou seja:

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \Pi_i = \sum_{i=1}^3 (U_i + \Omega_i) \quad (7.39)$$

onde  $U_i$  e  $\Omega_i$  são a energia interna de deformação e a energia devido a carga externa, respectivamente.

Usando as funções de forma de cada placa do perfil C e para a imperfeição geométrica, e integrando-se o funcional no domínio, obtém-se a energia potencial de cada placa do perfil C. Somando as três parcelas obtém-se a energia potencial total do perfil C,  $\Pi = \Pi(U, V, W, X, Y)$ , função das cinco amplitudes modais. Aplicando o método de Ritz, tem-se o sistema de equações não lineares:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial W} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Y} = 0 \quad (7.40)$$

Como no caso anterior, a primeira e segunda equação são lineares em  $U$  e  $V$  e podem ser resolvidas para os deslocamentos  $U$  e  $V$  em função do  $W$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.41)$$

De forma semelhante, a quarta e quinta equação são lineares em  $X$  e  $Y$  e podem ser resolvidas para os deslocamentos  $X$  e  $Y$  em função do  $W$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{44} & \lambda_{45} & \lambda_{43} \\ \lambda_{54} & \lambda_{55} & \lambda_{53} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.42)$$

Introduzindo os deslocamentos  $U$ ,  $V$ ,  $X$  e  $Y$  na terceira equação, obtém-se a equação não linear do perfil em função da amplitude  $W$ .

A expressão resultante é extremamente longa. Como exemplo ilustrativo, introduzindo as constantes elásticas do material M1 e as propriedades geométricas do perfil C, a equação toma a forma:

$$P = \frac{16.71WW_0^2 + 25.071W^2W_0 + 43.4457W - 31.8057W_0 + 8.357W^3}{W_0 + W} \quad (7.43)$$

Novamente, considerando a imperfeição nula, o caminho pós-crítico assume a forma parabólica típica de placas (Shen, 2017). Assim, observa-se que pelas duas teorias o perfil pultrudado exibe uma bifurcação simétrica estável. Entretanto a rigidez pós-crítica depende das características geométricas do perfil e das constantes do material pultrudado, como apresentado a seguir.

### 7.3

#### Mudanças no Modo de Flambagem com o Comprimento do Perfil

Como observado no Capítulo 5, o modo de flambagem do perfil C muda, para uma dada seção e material, com o comprimento do perfil. Para a seção de referência usada na análise paramétrica (Tabela 5.1), a Tabela 7.1 mostra, para os seis materiais em estudo, o comprimento limite em que o modo de flambagem muda de local para global de flexo-torção e de global de flexo-torção para flexão em torno do eixo de menor inércia.

A seguir se estuda para cada um destes casos o caminho pós-crítico e sensibilidade a imperfeições.

**Tabela 7.1: Comprimento onde os modos de flambagem muda de local para global,  $L_{lg}$ , e de flexo-torção para flexão,  $L_{ftf}$ .**

Material	$L_{lg}$ (m)	$L_{ftf}$ (m)	$E_1$ (kN/mm <sup>2</sup> )	$G_{12}$ (kN/mm <sup>2</sup> )	$E_2$ (kN/mm <sup>2</sup> )
<b>M1</b>	2.48	4.78	20.00	5.00	10.00
<b>M2</b>	3.28	7.20	20.00	2.20	5.00
<b>M3</b>	2.78	7.84	28.00	2.60	19.30
<b>M4</b>	2.93	6.81	20.10	2.47	8.62
<b>M5</b>	2.58	5.38	15.89	3.13	7.75
<b>ISO</b>	1.98	3.75	28.00	11.38	28.00

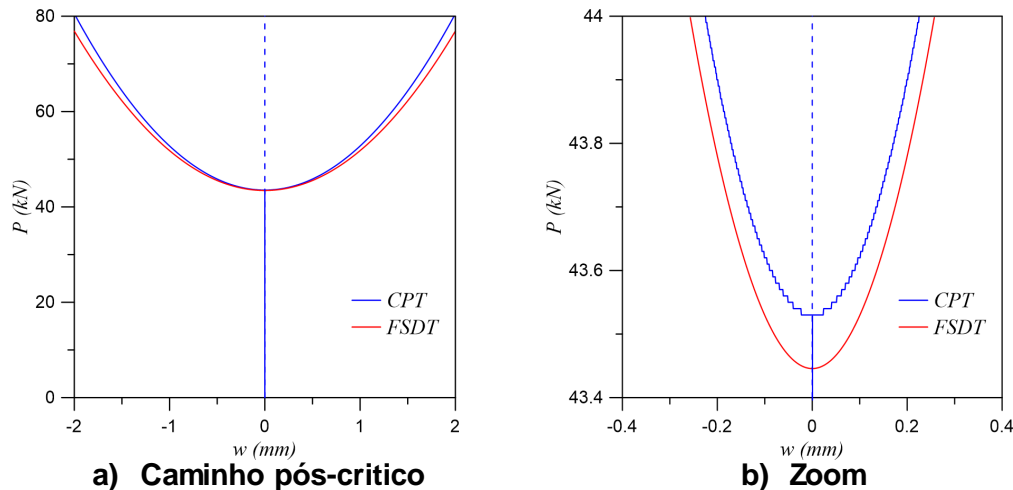
### 7.4

#### Comportamento Pós-crítico e Sensibilidade a Imperfeições na Flambagem Local

Como visto no Capítulo 5, o número de semiondas axiais associada ao modo crítico cresce à medida que cresce o comprimento do perfil, atingindo um valor mínimo para cada valor de  $m$  associado a um comprimento crítico dado por

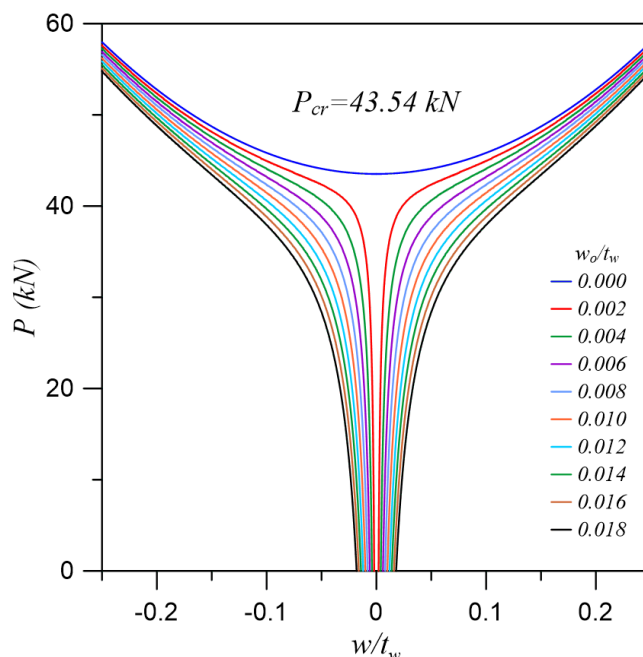
$$L_{crm} = m \left[ \frac{(3b_w^3 + 4\pi^2 b_f^3)E_1}{3E_2} \right]^{1/4} \quad (7.44)$$

Inicialmente, compara-se na Figura 7.1(a), usando-se as Equações (7.26) e (7.43) o caminho pós-crítico obtido pela teoria clássica de placas (azul) e teoria de primeira ordem (vermelho) para o material M1 e  $L=L_{cr1}$ . O perfil apresenta uma bifurcação simétrica estável com uma leve rigidez pós-crítica. Verifica-se no zoom em torno do ponto de bifurcação que para valores esperados da amplitude modal  $w$  que os resultados praticamente coincidem. A pequena diferença entre as duas soluções é ilustrada no zoom da Figura 7.1(b) (diferença de 0.20%). Para todos os valores de  $L_{crm}$  o resultado é o mesmo, vide Figura 5.7. A resultante da carga axial usada nas figuras a seguir é dada por  $P = N_x(b_w + 2b_f)$ .



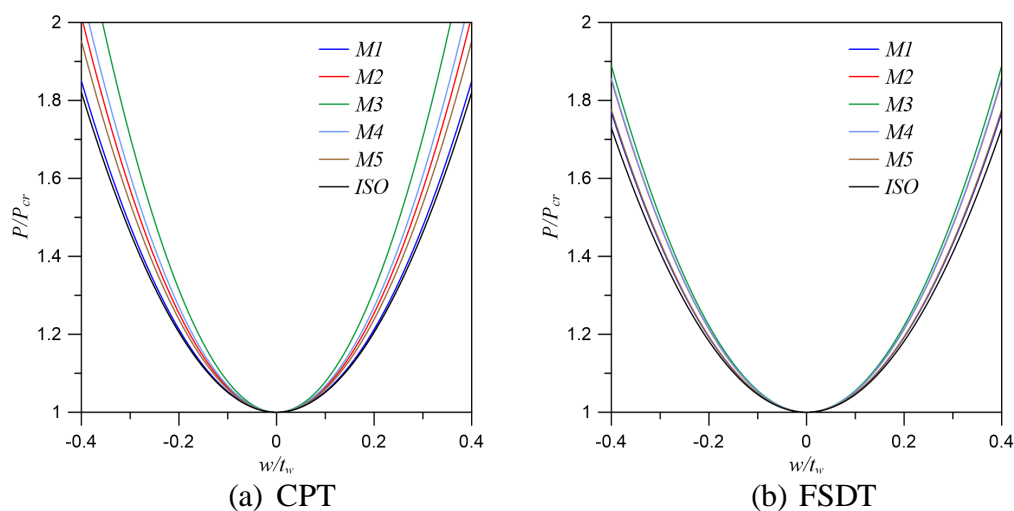
**Figura 7.1: Comparação do caminho pós-crítico de equilíbrio pela teoria clássica de placas e pela teoria de primeira ordem, Material M1.  $L=L_{cr}$ .**

Os resultados apresentados na Figura 7.2, são obtidos usando as equações (7.26), e ilustra o caminho pós-crítico obtido pela teoria clássica de placas para o material M1 e  $L=L_{cr1}$ , bem como os caminhos não lineares de equilíbrio para valores crescentes de imperfeição inicial da forma do modo crítico. Os valores foram normalizados com relação à espessura da alma  $t_w$ . Para cada nível de imperfeição usa-se tanto o valor positivo quanto o negativo de  $w_o$ , obtendo-se os caminhos não lineares característicos de uma bifurcação simétrica estável. Observa-se que a imperfeição gera deflexões nas chapas do perfil que crescem com o carregamento, sendo seu efeito particularmente importante quando a carga se aproxima do valor crítico onde as deflexões crescem de forma mais acentuada. Usando a convenção usual, as linhas contínuas representam caminhos de equilíbrio estáveis.



**Figura 7.2: Caminho pós-crítico de equilíbrio pela teoria clássica de placas e caminhos não lineares de equilíbrio da estrutura imperfeita. Material M1.  $L=L_{cr}$ .**

A Figura 7.3(a) compara os caminhos pós-críticos dos seis materiais usando a CPT, enquanto a Figura 7.3(b) compara os caminhos pós-críticos obtidos usando a FSDT. Observa-se que o material tem influência na rigidez pós-crítica do perfil, sendo maior para o material M3 e menor para o material isotrópico. Cabe lembrar que em muitas aplicações as normas permitem a aplicação de cargas superiores à crítica em estruturas formadas por placas tendo em vista sua rigidez pós-crítica, embora este não seja ainda o caso das normas de perfis pultrudados.



**Figura 7.3: Comparação dos caminhos pós-críticos dos seis materiais. (a) CPT, (b) FSDT.  $L=L_{cr}$ .**

No Apêndice I encontram-se os caminhos de equilíbrio da estrutura imperfeita para os seis materiais estudados, onde se observa a influência da magnitude da imperfeição na resposta não linear do perfil, considerando, respectivamente, a

CPT e a FSDT. As imperfeições são as mesmas usadas na Figura 7.2. Em todos os casos observa-se o mesmo tipo de comportamento.

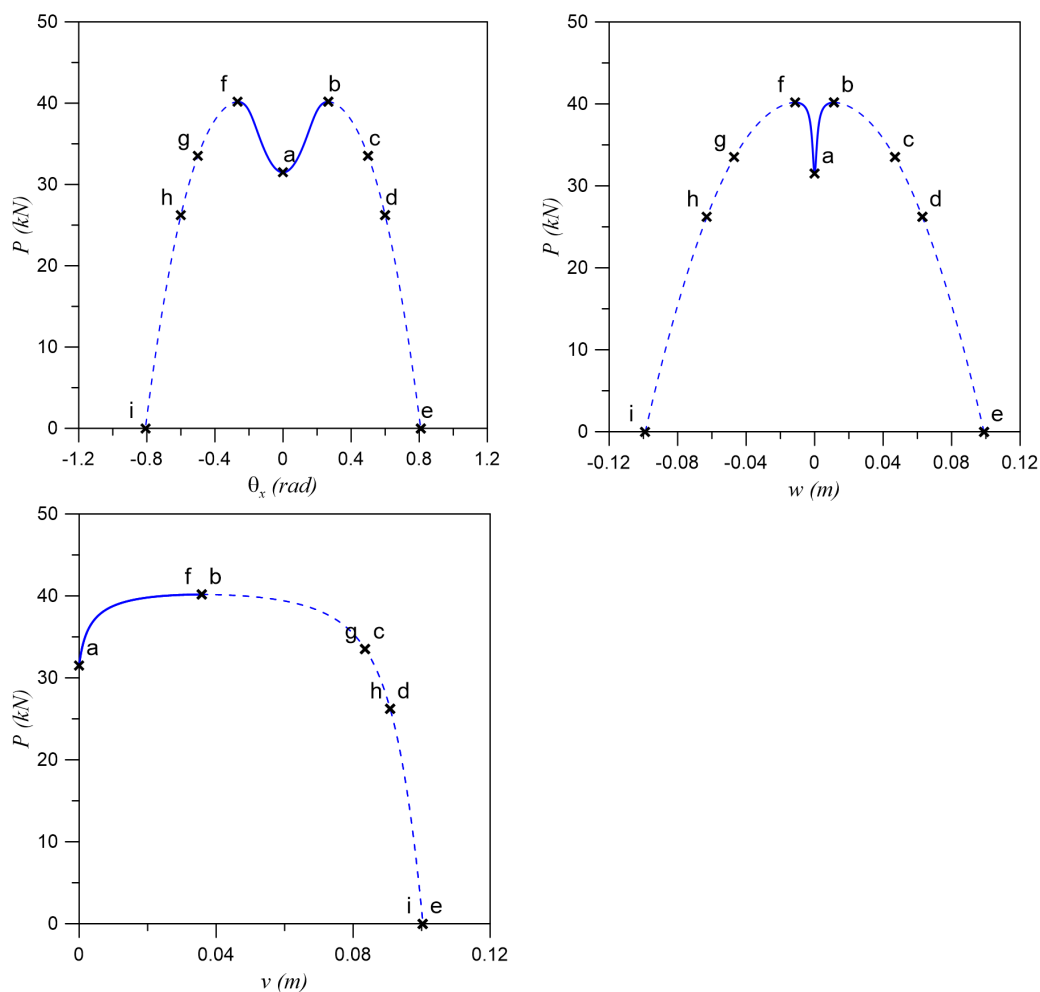
## 7.5

### Comportamento Pós-crítico e Sensibilidade a Imperfeições na Flambagem Global por Flexo-Torção

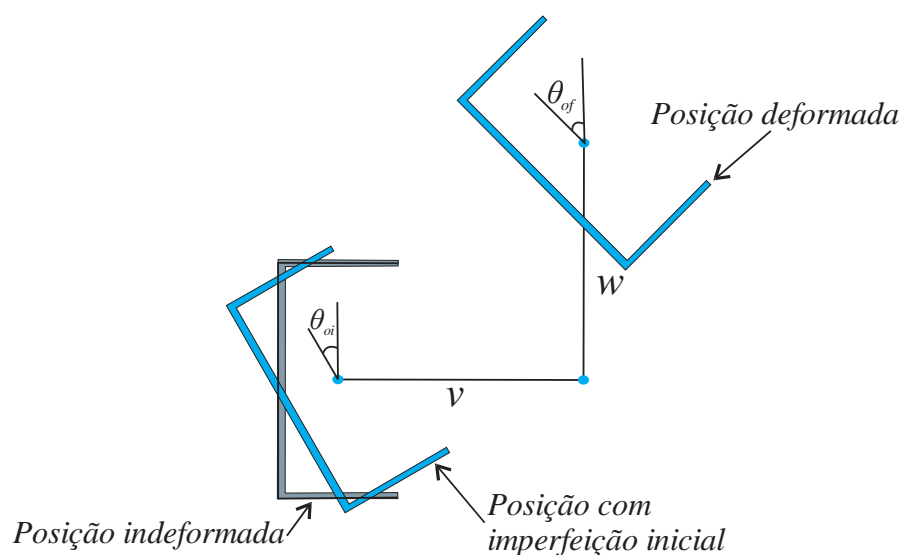
A Figura 7.4 mostra três projeções do caminho pós-crítico obtido com o controle de deslocamento (no caso a rotação) para o material M1 e  $L=3m$ . Os caminhos de equilíbrio  $(P, \theta)$  e  $(P, w)$  são simétricos e  $(P, v)$  é restrito a valores positivos de deslocamento. O perfil apresenta uma bifurcação estável. A carga de compressão axial cresce a partir da carga crítica, até atingir a carga limite, a partir da qual passa a decrescer, tornando-se a seguir o caminho pós-crítico instável.

No modelo da flambagem global, uma das hipóteses é que o contorno da seção transversal permanece rígido no seu próprio plano, como ilustra a Figura 7.5. A seção transversal no meio da viga-coluna sofre as máximas amplitudes de translação e rotação. Os deslocamentos obtidos pelo método de Newton-Raphson correspondem exatamente aos deslocamentos transversais do centro de gravidade no meio do perfil, destacados na figura, e à rotação da seção em torno do eixo do perfil (amplitudes modais).

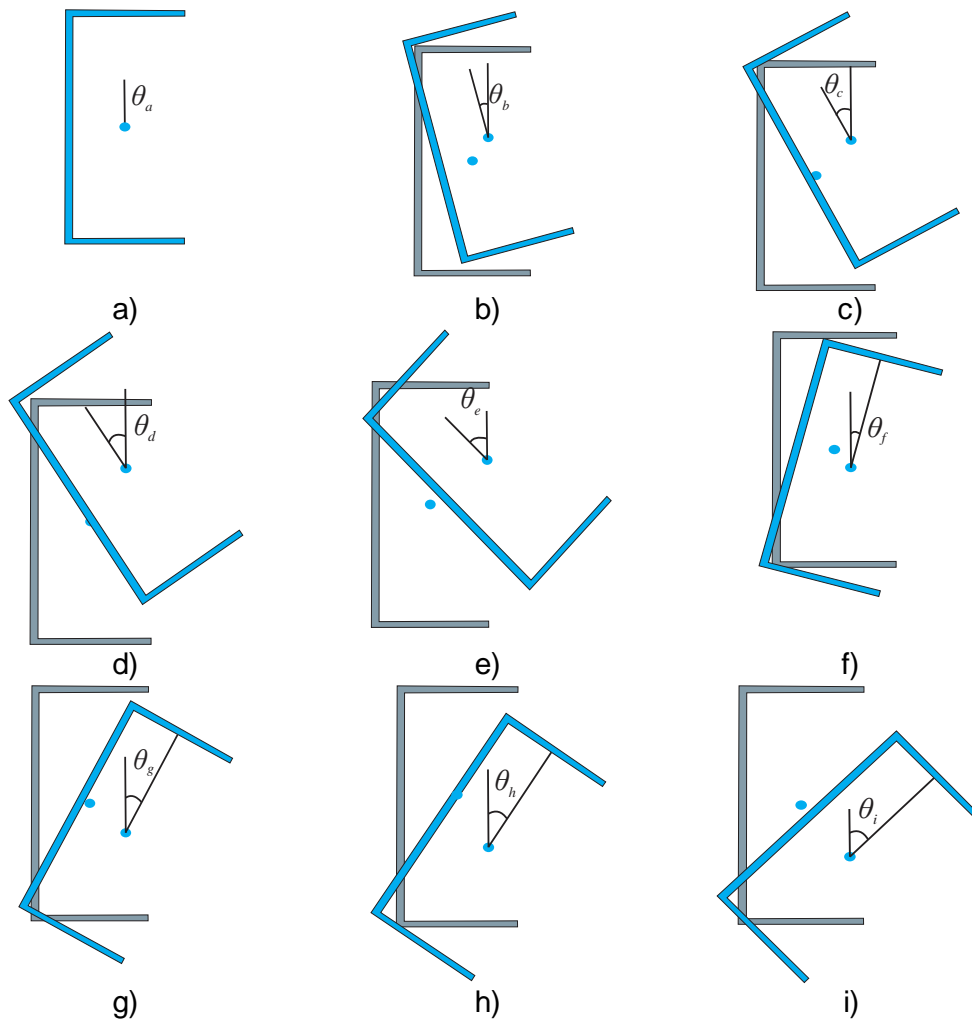
A Figura 7.6 mostra, de acordo com os pontos destacados ao longo dos caminhos de equilíbrio, a evolução da posição da seção transversal no meio do perfil. As seções transversais mostram que na posição “a” a estrutura atingiu a carga crítica e a seção transversal continua em sua posição inicial. Na posição “b”, relativo à carga limite, nota-se que o perfil é submetido a uma rotação e a deslocamentos transversais nas duas direções. Após o valor da carga de compressão axial atingir um valor limite, o valor da carga decresce abruptamente, tornando-se a estrutura instável. Cabe lembrar que o modo de flexo-torção está associado aos deslocamentos  $w$  (flexão em torno do eixo de maior inércia) e  $\theta_x$ . Observa-se que após o ponto limite há um crescimento acentuado do deslocamento  $v$ , o que indica um crescimento da flexão em torno do eixo de menor inércia (posições  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ). As posições de  $f$  a  $i$  ilustram a simetria do caminho pós-crítico em relação a  $w$  e  $\theta_x$ .



**Figura 7.4:** Caminho pós-crítico de equilíbrio do perfil C 200x100x5, Material M1.  $L = 3m$ .

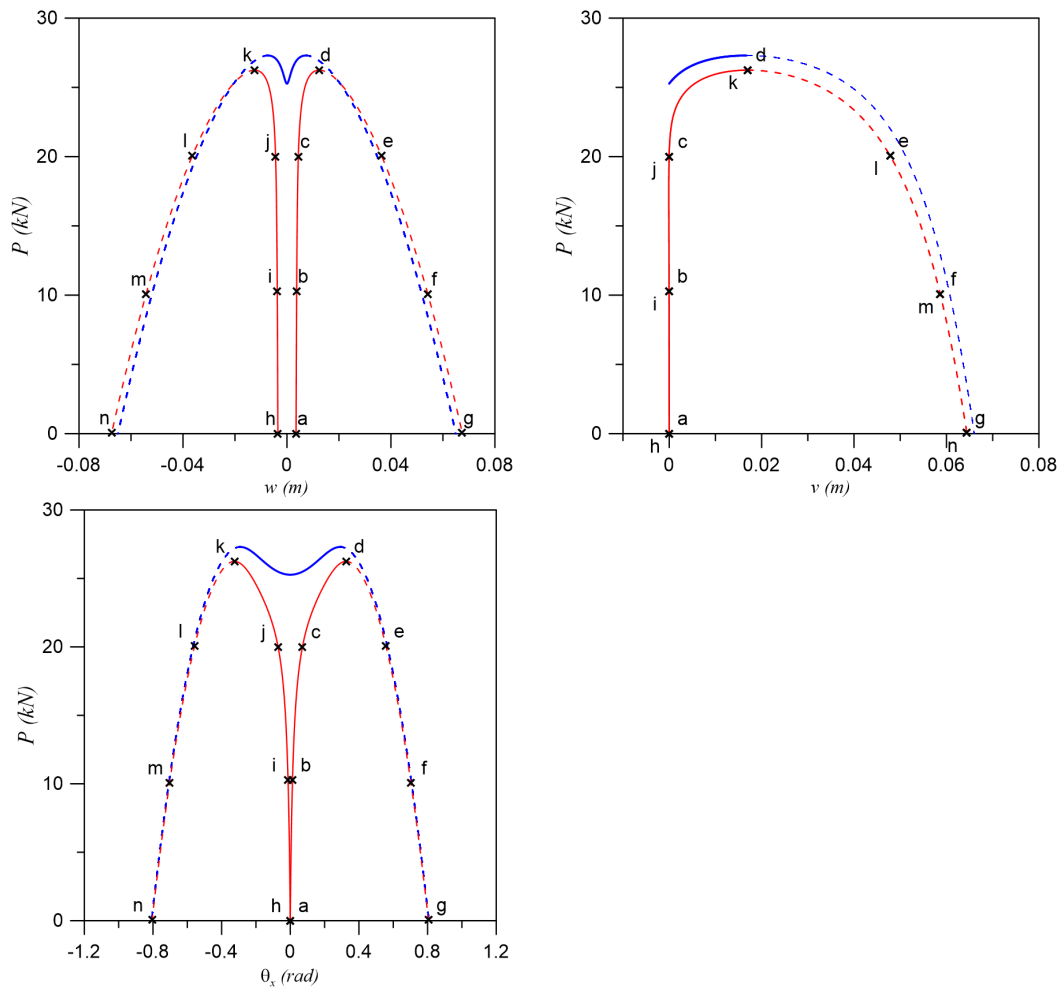


**Figura 7.5:** Deslocamento da seção transversal no modo global de flexo-torção. Deslocamentos do centro de gravidade.

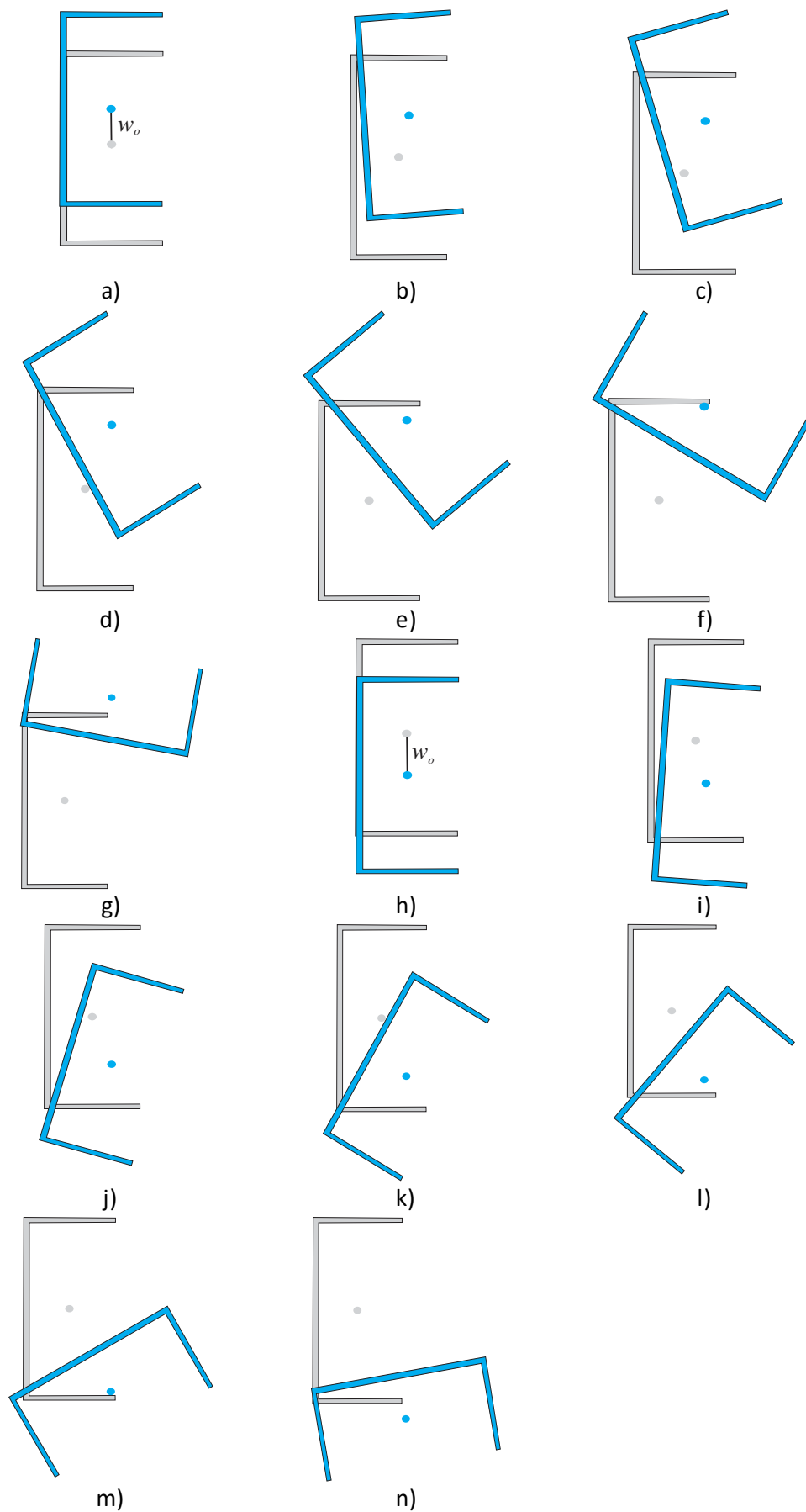


**Figura 7.6: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho pós-crítico de equilíbrio.**

A Figura 7.7 mostra o efeito de uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo de flexão em torno do eixo maior de inércia com magnitude  $w_o = 0.0035m$ . Os caminhos de equilíbrio para a coluna imperfeita apresentam um comportamento estável até atingir a carga limite, após a qual o caminho torna-se instável. Como no caso local, considera-se tanto uma imperfeição inicial positiva quanto negativa. A carga limite para a estrutura imperfeita é menor que a carga limite da estrutura perfeita. A Figura 7.8 mostra a evolução da posição da seção ao longo dos caminhos não lineares da estrutura imperfeita.



**Figura 7.7:** Caminho de equilíbrio do perfil C 200x100x5, Material M1, com imperfeição  $w_o = 0.0010L$ ,  $L = 3.5m$ .



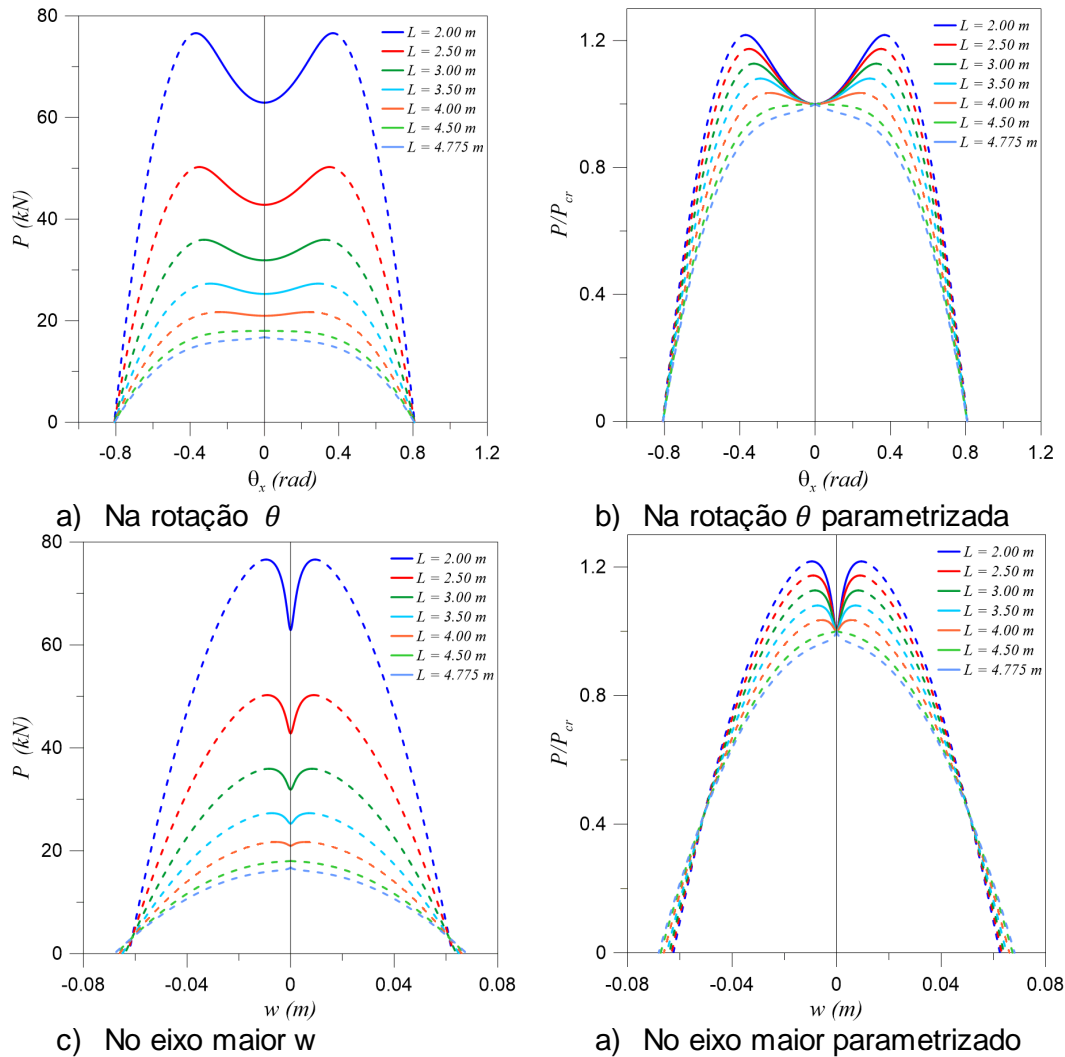
**Figura 7.8: Deslocamento da seção C 200x100x5. material M1. com imperfeição inicial  $w_o = 0.0035m$ ,  $L = 3.5m$ .**

## 7.6

### Efeito do Comprimento do Perfil no Caminho Pós-crítico de Flexo-Torção

A variação do caminho de equilíbrio pós-crítico de uma coluna sem imperfeições com o comprimento do perfil  $C$  é estudada para o Material M1. Varia-se o comprimento entre o comprimento onde a flambagem muda de local para global, de flexo-torção,  $L_{lg}$ , e o comprimento onde o modo de flambagem global muda de flexo-torção para flexão,  $L_{ftf}$  (ver Tabela 7.1).

Da análise da estabilidade linearizada, sabe-se que o valor da carga crítica decresce com o comprimento do perfil. O caminho pós-crítico para sete comprimentos selecionados são mostrados na Figura (7.9) onde plota-se a carga crítica em função das amplitudes modais. Para efeito de comparação mostra-se tanto o eixo vertical em termos da carga  $P(kN)$  e o eixo vertical com a carga normalizada pelo valor crítico ( $P/P_{cr}$ ). Inicialmente, para perfis mais curtos (ver resposta para  $L=2m$ ) tem-se, como ilustrado no item 7.5. Uma bifurcação simétrica estável com o caminho pós-crítico atingindo um máximo local associado a uma bifurcação por ponto limite onde se torna instável e a carga passa a decrescer. À medida que o comprimento do perfil cresce e a carga crítica diminui, a diferença entre a carga crítica e este ponto limite também reduz sensivelmente e desaparece para  $L=4.5m$ . A partir deste valor, tem-se uma bifurcação simétrica instável.



**Figura 7.9: Caminho pós-crítico, Material M1, Perfil C 200x100x5,  $L_{lg} < L < L_{ftf}$ .**

## 7.7

### Efeito do Material no Caminho Pós-crítico de Flexo-Torção

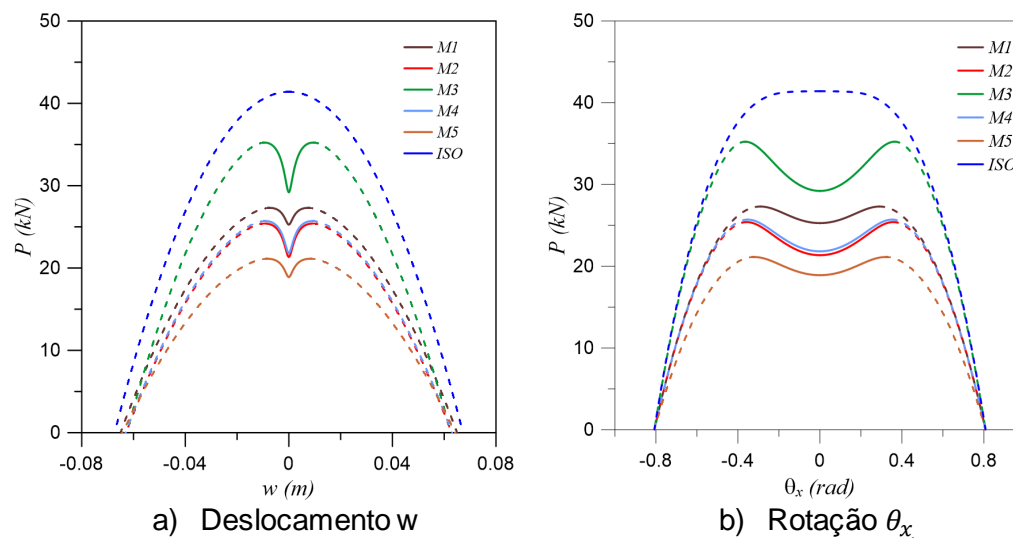
As cargas de bifurcação variam com as características geométricas e propriedades elásticas do material usado na análise. Como foi analisado no Capítulo 5, existe um comprimento crítico para cada material. Na Figura (7.10) é analisada a variação do comportamento do caminho pós-crítico com as propriedades do material pultrudado. O comprimento selecionado é de  $L=3.5\text{m}$ . Para este comprimento, o modo de flambagem para todos os materiais é o de flexo-torção (ver Tabela 7.1).

O modo de flexo-torção está associado ao módulo de Young na direção longitudinal  $E_1$  e ao módulo de cisalhamento  $G_{12}$ . Para o material isotrópico tem-se uma bifurcação simétrica instável, enquanto os materiais pultrudados apresentam uma bifurcação simétrica estável com ponto limite. O resumo das cargas críticas é apresentado na Tabela 7.2.

O material isotrópico, que tem o maior módulo de Young longitudinal e módulo de cisalhamento ( $E_1 = 28.00 \text{ kN/mm}^2$ ,  $G_{12} = 11.38 \text{ kN/mm}^2$ ) apresenta a maior carga crítica. Já o material M5 ( $E_1 = 15.89 \text{ kN/mm}^2$ ,  $G_{12} = 3.13 \text{ kN/mm}^2$ ) apresenta a menor carga crítica. Os materiais M2 e M4 apresentam caminhos pós-críticos bastante semelhantes, com o material M4 apresentando um leve aumento de carga crítica e rigidez pós-crítica. Isto se deve ao fato dos dois materiais apresentarem módulos de Young bem próximos ( $E_1 = 20.00 \text{ kN/mm}^2$  e  $20.10 \text{ kN/mm}^2$ , respectivamente), enquanto o módulo de cisalhamento de M4 é um pouco maior que o módulo de cisalhamento de M2 ( $G_{12} = 2.20 \text{ kN/mm}^2$  e  $G_{12} = 2.47 \text{ kN/mm}^2$ , respectivamente). Já o material M1, que tem o mesmo módulo de Young que o material M2, apresenta uma maior carga crítica e carga limite em virtude do aumento no módulo de cisalhamento ( $G_{12} = 5.00 \text{ kN/mm}^2$  para M1 e  $G_{12} = 2.20 \text{ kN/mm}^2$  para M2). Convém lembrar que o valor de  $G_{12}$  está associado à ortotropia do material pultrudado, portanto leva em consideração o módulo de Young na direção transversal e os dois coeficientes de Poisson.

**Tabela 7.2: Cargas críticas ordenadas em ordem crescente para todos os materiais usadas na análise numérica -  $L=3.5\text{m}$**

Material	$P$ (kN)
M5	<b>18.90</b>
M2	<b>21.35</b>
M4	<b>21.82</b>
M1	<b>25.27</b>
M3	<b>29.21</b>
ISO	<b>41.40</b>

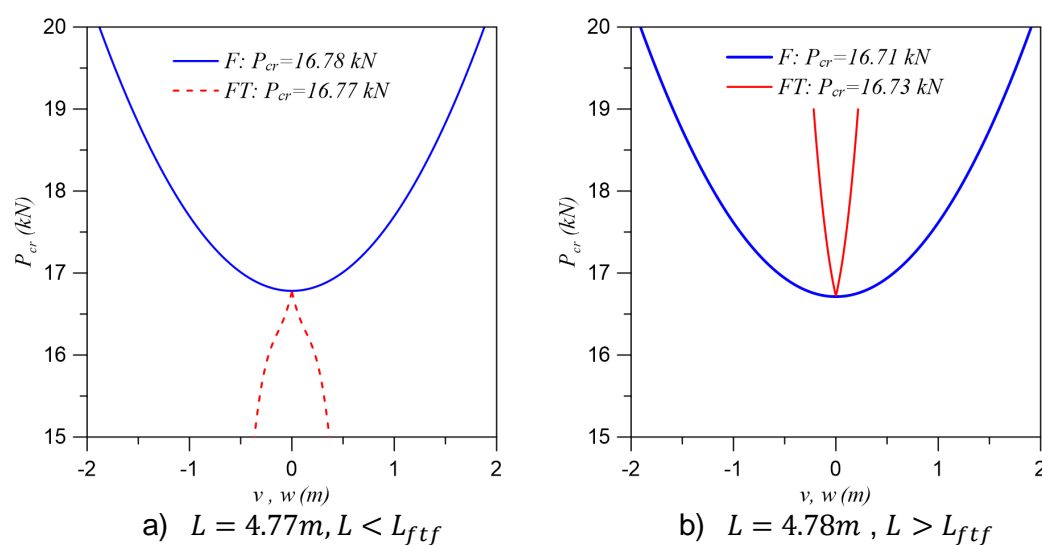


**Figura 7.10: Caminho pós-crítico para uma coluna de  $L=3.5 \text{ m}$  ( $L < L_{ftf}$ ), e diferentes materiais.**

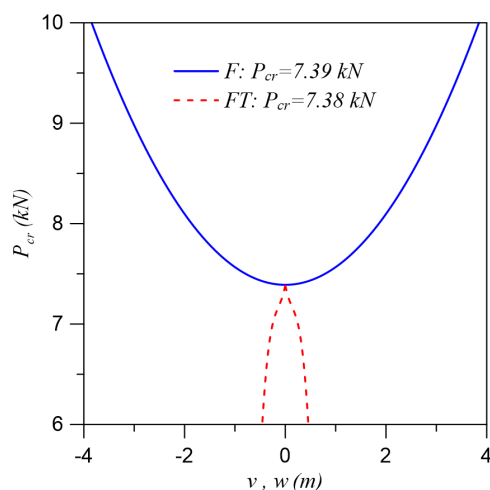
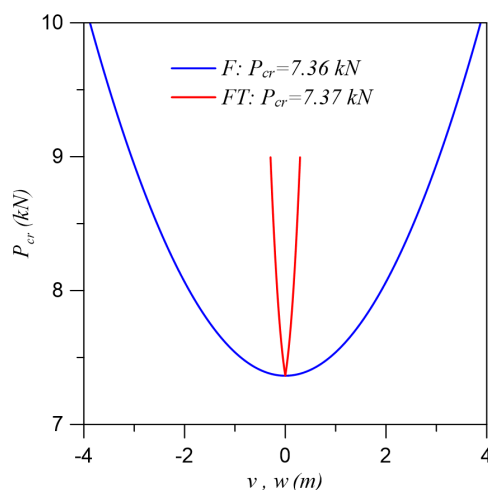
## 7.8

### Caminho Pós-crítico Antes e Depois do Comprimento Limite entre Flexo-torção e Flexão, $L_{ftf}$

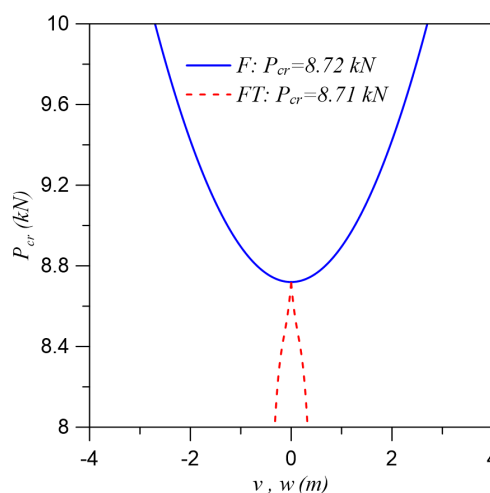
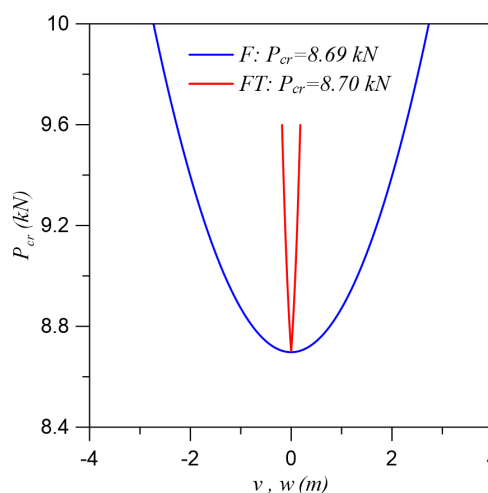
No comprimento crítico ou limite entre flexo-torção e flexão, o modo de flambagem associada à menor carga crítica muda de flexo-torção para flexão. Nas Figuras (7.11) a (7.16) mostram-se dois caminhos de equilíbrio; um associado ao modo de flexo-torção (em vermelho) e o outro de flexão (em azul) para os seis materiais. Para entender o efeito do modo de flambagem no comportamento pós-crítico, mostra-se na figura (a) os caminhos de equilíbrio associados aos dois modos para um comprimento um pouco menor que valor crítico e na figura (b) os caminhos de equilíbrio associados aos dois modos para um comprimento um pouco maior que o valor crítico, como especificado na legenda de cada figura. Mostra-se também em cada gráfico as cargas críticas associadas aos dois modos. Antes do comprimento crítico, o modo de flexo-torção corresponde à menor carga crítica e após o comprimento crítico a carga crítica está associada ao modo de flexão. O comprimento crítico muda bastante com as características do material pultrudado, como observado na Tabela 7.1. Verifica-se uma mudança abrupta no comportamento pós-crítico. Para um comprimento um pouco menor que o valor crítico, o caminho pós-crítico associado ao modo FT é instável com grande declividade inicial, enquanto o caminho associado ao modo de flexão é estável. Para um comprimento um pouco maior que valor crítico ambos os caminhos são estáveis, mas observa-se uma grande diferença na rigidez pós-crítica. Em virtude da proximidade das cargas críticas espera-se que a resposta da estrutura imperfeita leve a uma interação modal com a resposta sendo dependente do tipo e magnitude da imperfeição. À medida que o comprimento do perfil aumenta após o comprimento crítico, tem-se que a diferença entre as duas cargas críticas cresce, sendo o caminho pós-crítico simétrico e estável, com pequena curvatura inicial similar à coluna de Euler.



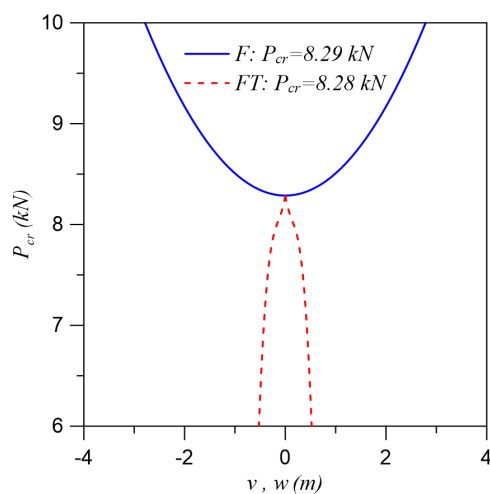
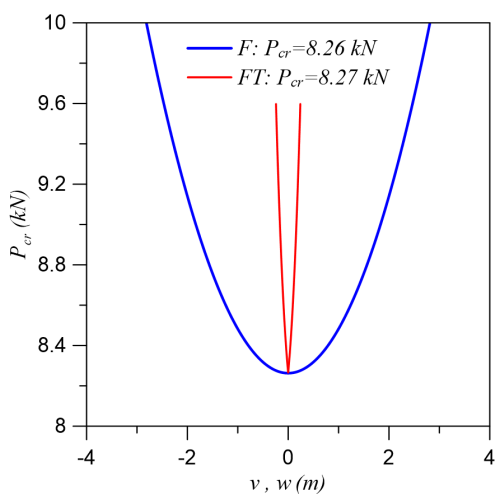
**Figura 7.11: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material M1.**

a)  $L = 7.188m, L < L_{ftf}$ b)  $L = 7.201m, L > L_{ftf}$ 

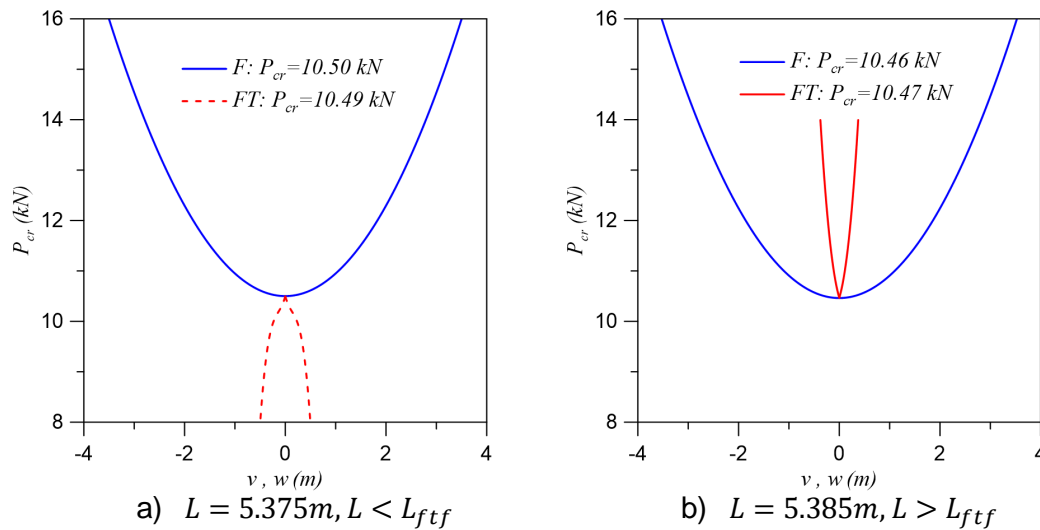
**Figura 7.12: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material M2.**

a)  $L = 7.83m, L < L_{ftf}$ b)  $L = 7.84m, L > L_{ftf}$ 

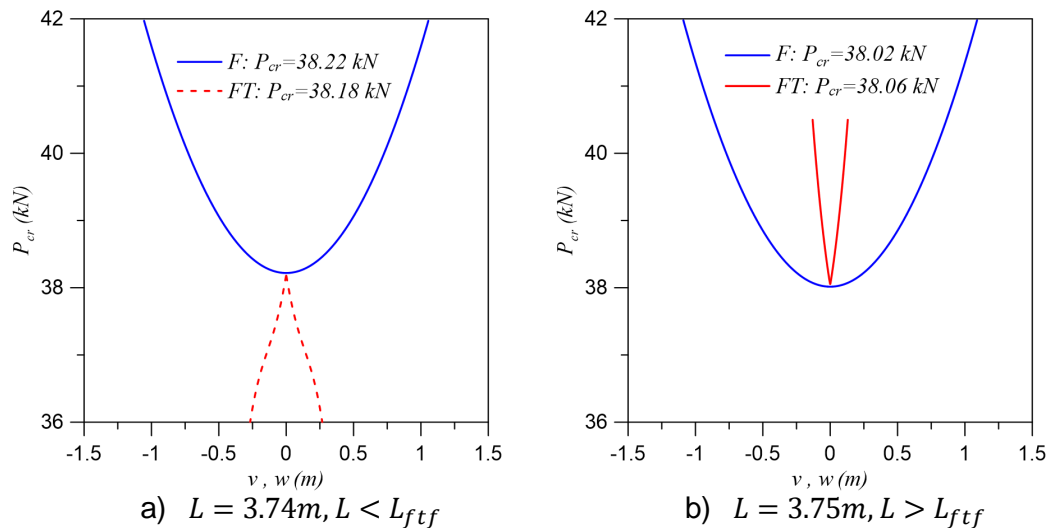
**Figura 7.13: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material M3.**

a)  $L = 6.805m, L < L_{ftf}$ b)  $L = 6.815m, L > L_{ftf}$ 

**Figura 7.14: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material M4.**



**Figura 7.15: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material M5.**



**Figura 7.16: Caminho pós-crítico de equilíbrio antes e depois do comprimento crítico, Material ISO.**

## 7.9














### Influência do Tipo de Imperfeição no Caminho Não Linear de Equilíbrio e Sensibilidade a Imperfeições – Modo de Flexo-Torção

Colunas reais são sempre imperfeitas. Baseadas nas equações não lineares de equilíbrio da estrutura imperfeita, Equações (7.10) a (7.12), obtêm-se aqui soluções numéricas para diferentes tipos e magnitudes de imperfeição. As curvas são obtidas através de controle dos deslocamentos transversais ou rotação.










Com o objetivo de estudar a influência das imperfeições no caminho de equilíbrio da estrutura, neste estudo as imperfeições no eixo de menor inércia são proporcionais ao comprimento do perfil,  $v_o = \pm \alpha L$ , onde:  $\alpha = 0.0001, 0.001, 0.002, 0.004, 0.008, 0.012, 0.016, 0.020, 0.030, 0.040, 0.050, 0.060, 0.080$ . Enquanto isso as imperfeições no eixo de maior inércia são também proporcionais

ao comprimento do perfil,  $w_o = \pm\beta L$ , onde:  $\beta = 0.0002, 0.0004, 0.0006, 0.0010, 0.0015, 0.0020, 0.0030, 0.0040, 0.0050$ . E ainda as imperfeições na rotação se medem em radianos,  $\theta_{ox} = \pm\vartheta\pi/180$ , onde:  $\vartheta = 0.02, 0.04, 0.08, 0.10, 0.20, 0.40, 0.80, 1.00, 2.00, 4.00, 10.00, 20.00, 30.00$ . Nas Tabelas 7.3, 7.4 e 7.5 mostra-se a escala de cores usada para identificar a magnitude da imperfeição em cada caso. Nos caminhos de equilíbrio usa-se a convenção usual onde linhas contínuas denotam os trechos estáveis dos caminhos de equilíbrio e as linhas tracejadas os trechos instáveis. A curva em vermelho indica a variação do ponto limite onde o equilíbrio muda de estável para instável com a magnitude da imperfeição. A estabilidade é verificada usando-se o Princípio da Energia Potencial Mínima.











**Tabela 7.3: Imperfeições em  $v - v_o = \alpha L$**

Magnitude do fator de imperfeição - $\alpha$	Cor
0.0001	
0.0010	
0.0020	
0.0040	
0.0080	
0.0120	
0.0160	
0.0200	
0.0300	
0.0400	
0.0500	
0.0600	
0.0800	

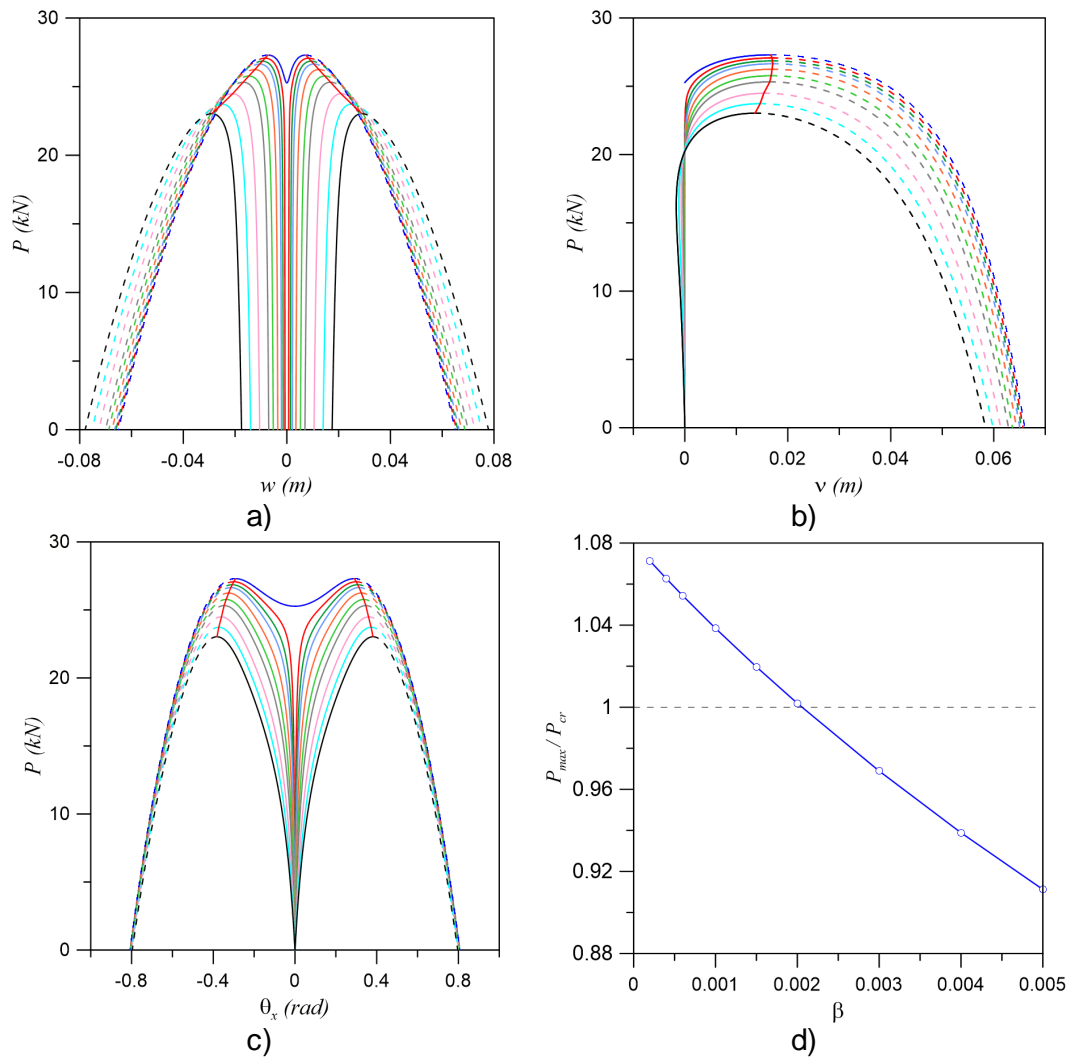
**Tabela 7.4: Imperfeições em  $w - w_o = \beta L$**

Magnitude do fator de imperfeição - $\beta$	Cor
0.0002	
0.0004	
0.0006	
0.0010	
0.0015	
0.0020	
0.0030	
0.0040	
0.0050	

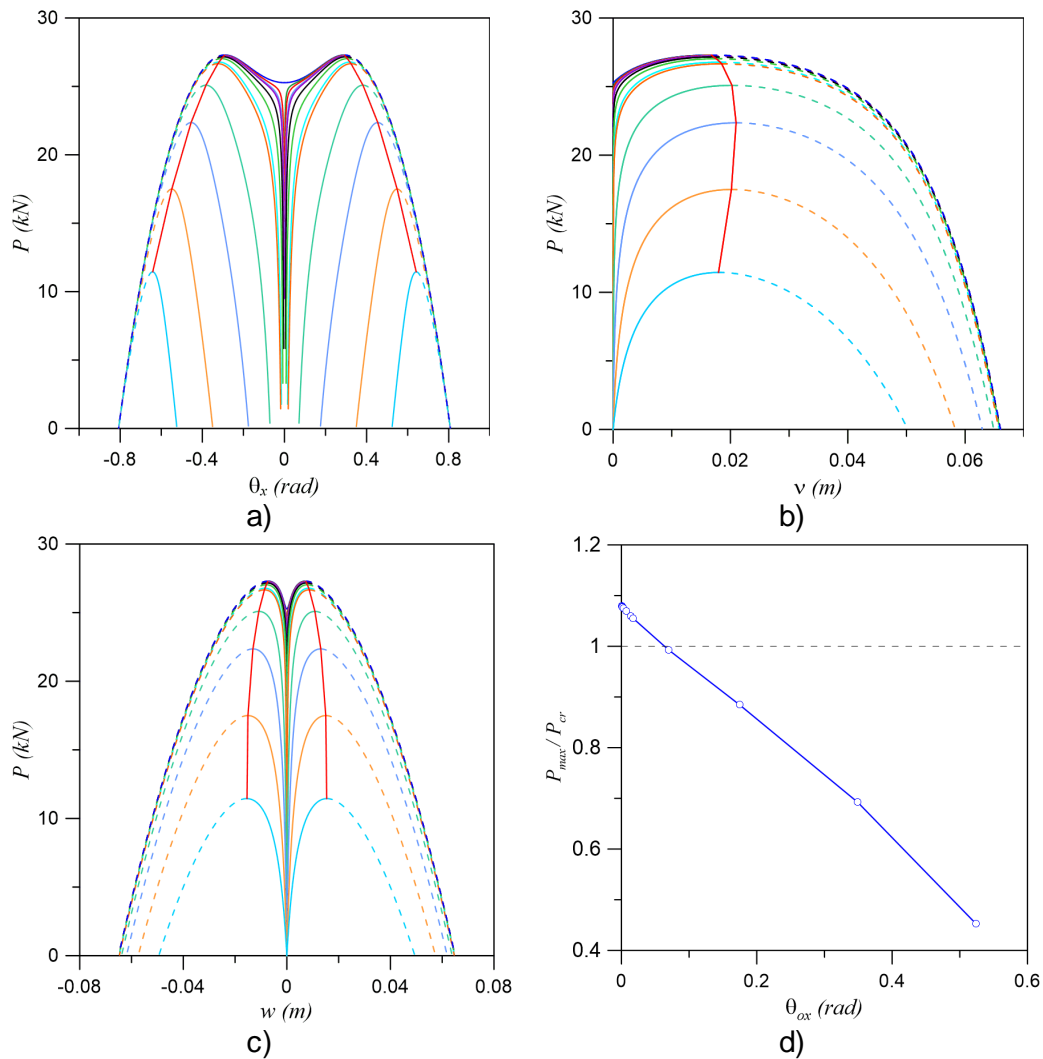
**Tabela 7.5: Imperfeições em  $\theta_x - \theta_{ox} = \vartheta\pi/180$** 

Magnitude do fator de imperfeição - $\vartheta$	Cor
0.02	
0.04	
0.08	
0.10	
0.20	
0.40	
0.80	
1.00	
4.00	
10.0	
20.0	
30.00	

A Figura 7.17 mostra os caminhos de equilíbrio considerando uma imperfeição  $w_o$ , enquanto a Figura 7.18 mostra os caminhos de equilíbrio considerando uma imperfeição  $\theta_{ox}$ . Os caminhos de equilíbrio  $(P, w)$  e  $(P, \theta_x)$  são simétricos, e o caminho de equilíbrio  $(P, v)$  é restrito a valores positivos. Além dos caminhos de equilíbrio, as Figuras 7.17(d) e 7.18(d) apresentam a curva de sensibilidade a imperfeições. O caminho pós-crítico de equilíbrio da coluna perfeita, é estável até alcançar a carga limite, onde se inicia o caminho de equilíbrio instável, com o valor da carga decrescendo com os deslocamentos. Uma consequência importante é que a coluna perfeita tem uma carga máxima  $P_{lim}$  maior que  $P_{cr}$ . A estrutura imperfeita apresenta um caminho não linear de equilíbrio com um ponto limite separando os trechos estáveis e instáveis. São mostradas as respostas para imperfeições positivas e negativas. Entretanto à medida que a imperfeição cresce, a carga máxima  $P_{lim}$  decresce e, a partir de um certo nível de imperfeição passa a ser menor que  $P_{cr}$ . Assim, observa-se uma sensibilidade da coluna a imperfeições. A estrutura é particularmente sensível a imperfeições na forma do modo de torção, podendo apresentar carga bem inferiores à carga crítica. A curva de sensibilidade a imperfeições  $\left(\frac{P}{P_{cr}}, \beta\right)$  inicia com grande inclinação inicial que vai diminuindo até alcançar um valor mínimo após o qual a carga limite volta a crescer. Por outro lado, a curva de sensibilidade a imperfeições  $\left(\frac{P}{P_{cr}}, \theta_{ox}\right)$  é sempre decrescente com uma inclinação quase constante.

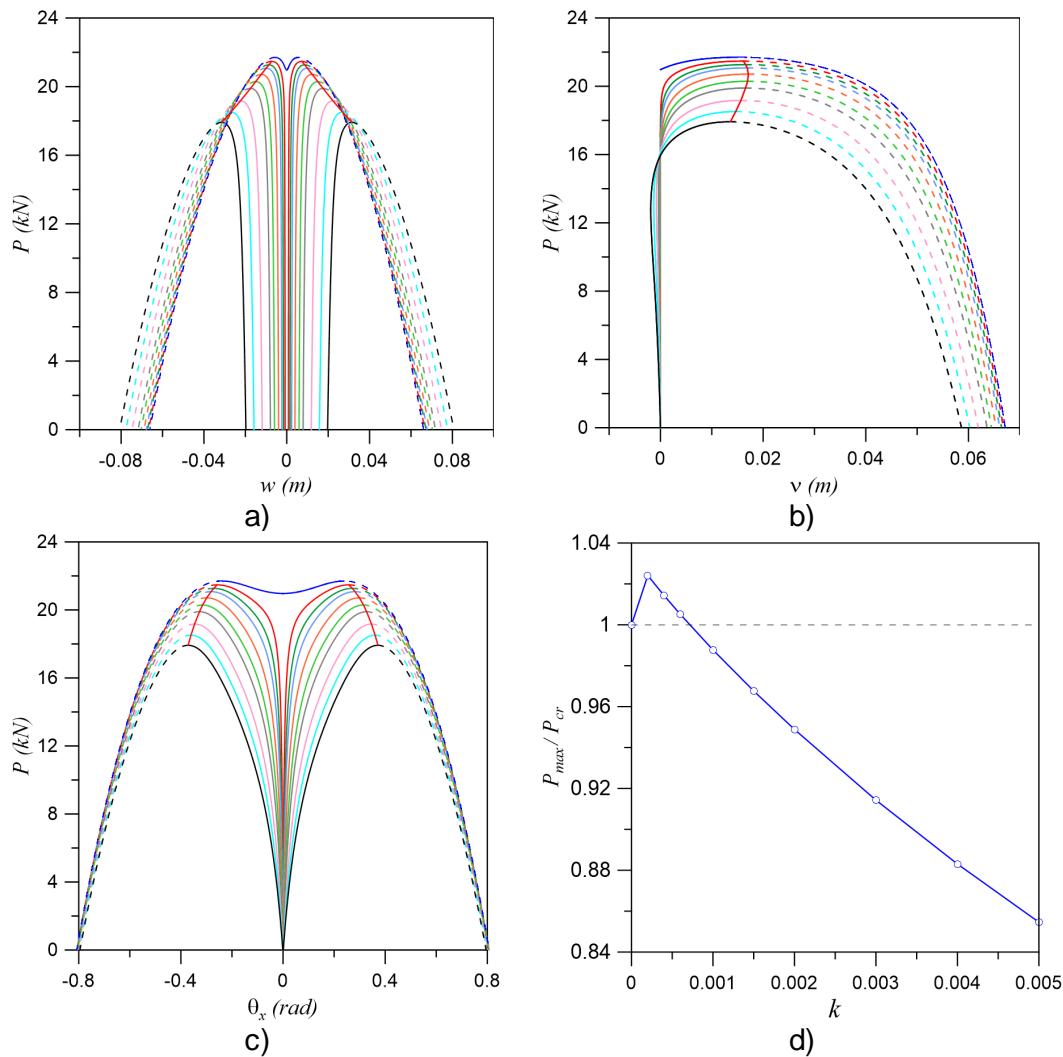


**Figura 7.17: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $w_o$  sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x100x5,  $L=3.5\text{m}$ .**



**Figura 7.18: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $\theta_{ox}$  sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.**

A Figura 7.19 mostra os caminhos de equilíbrio considerando uma imperfeição na forma do modo crítico, isto é, com componentes  $w_o$  e  $\theta_{ox}$ , sendo estas proporcionais ao respectivo autovetor na forma  $k(0, -0.986L, -0.162)$ , onde  $k$  é o fator de proporcionalidade apresentado na figura. Observa-se que imperfeições na forma do modo crítico de flexo torção levam a uma grande sensibilidade a imperfeições, com a curva de sensibilidade apresentando uma grande declividade inicial (Figura 7.19d).

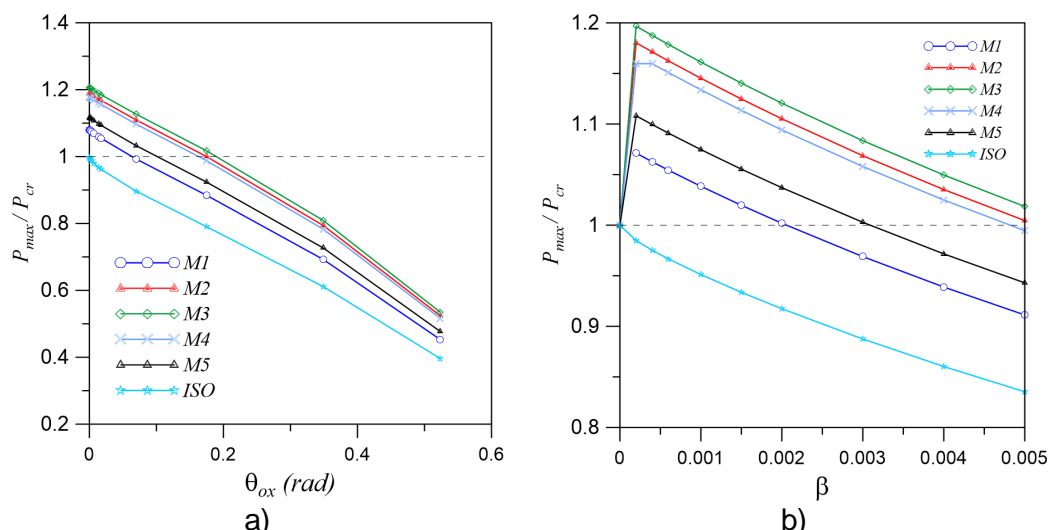


**Figura 7.19: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição na forma do modo crítico  $k(0, -0.986L, -0.162)$  sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x100x5,  $L=4m$ .**

### 7.9.1

#### Influência do Material na Sensibilidade a Imperfeições, $L=3.5m$ .

A Figura 7.20 apresenta as curvas de sensibilidade a imperfeições iniciais em função de  $\beta = w_o/L$  e  $\theta_{ox}$ . No caso da coluna com material isotrópico a carga máxima é também a carga crítica, já que, como mostrado na Figura 7.10, o material isotrópico apresenta uma bifurcação simétrica instável associada ao modo de flexo-torção. No caso da coluna com materiais ortotrópicos a carga máxima é a carga limite, que é para todos os materiais maior que a correspondente carga crítica. Entretanto, em todos os casos, como observado nas Figuras 7.17 a 7.20, a partir de um certo nível de imperfeição a carga limite passa a ser menor que a carga crítica de bifurcação.



**Figura 7.20: Sensibilidade dos resultados obtidos para os seis materiais usados na análise, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.**

## 7.10

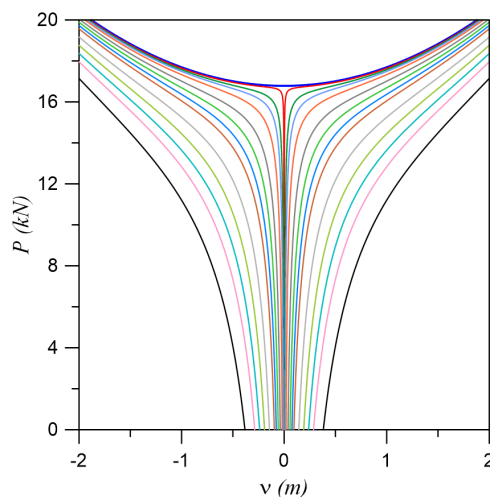
### Análise da Coluna Imperfeita sob Compressão Axial com Comprimento Crítico

No comprimento crítico as cargas críticas associadas aos modos de flexão e de flexo-torção são as mesmas. Neste comprimento, o modo de flambagem fundamental muda de flexo-torção para o modo de flexão.

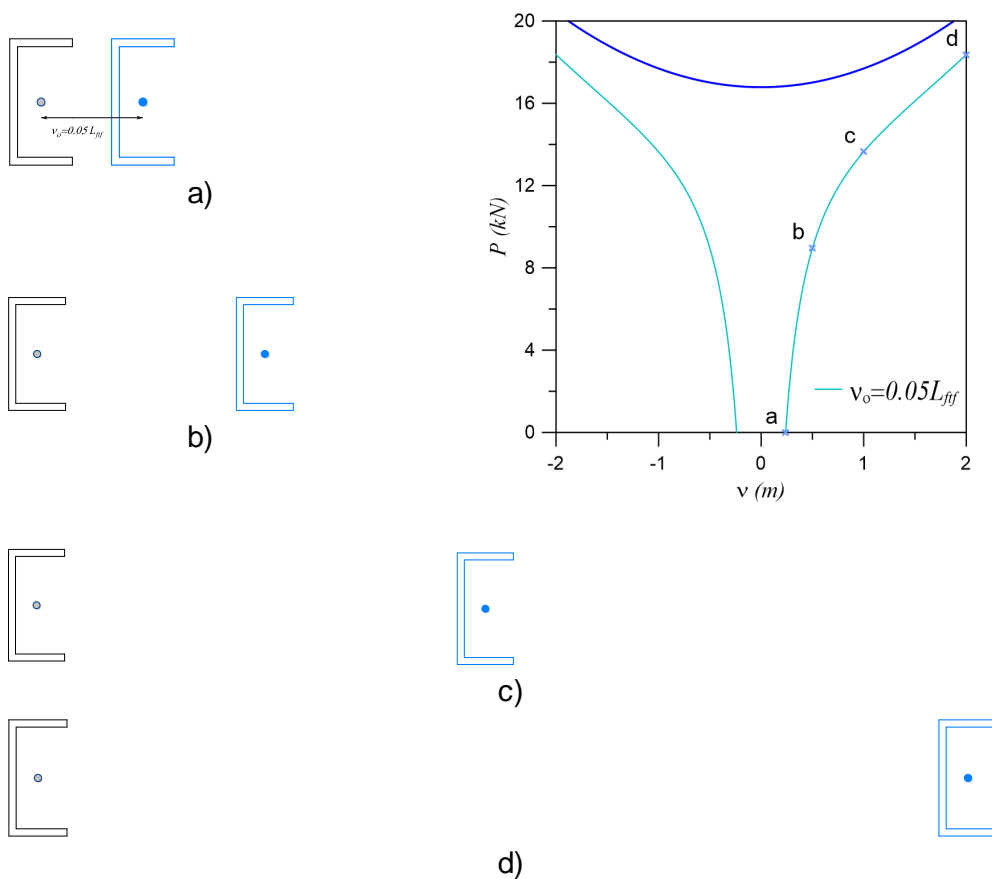
Nas Figuras 7.21, 7.23 e 7.26 mostram-se os caminhos não lineares de equilíbrio da estrutura imperfeita com imperfeições em, respectivamente,  $v_o$ ,  $w_o$  e  $\theta_{ox}$  (ver Tabelas 7.3, 7.4 e 7.5). Para imperfeição em  $v_o$ , o modo de flexão é dominante e a estrutura apresenta um caminho pós-crítico estável, sendo os deslocamentos  $w$  e  $\theta_x$  nulos, como ilustra a Figura 7.22. Para imperfeições em  $w_o$  e  $\theta_{ox}$  para todos os materiais, o comportamento pós-crítico da estrutura imperfeita é instável, sendo dominado pelo modo de flexo-torção, como ilustram as Figuras 7.24 e 7.25 para uma imperfeição em  $w_o$  e as Figuras 7.27 e 7.28 para uma imperfeição em  $\theta_{ox}$ . A Figura 7.29 mostra as curvas de sensibilidade a imperfeições dos seis materiais para os casos de imperfeições em  $w_o$  e  $\theta_{ox}$ .

**Tabela 7.6: Comprimento Crítico, o modo de flambagem de flexão e flexo-torção são os mesmos.**

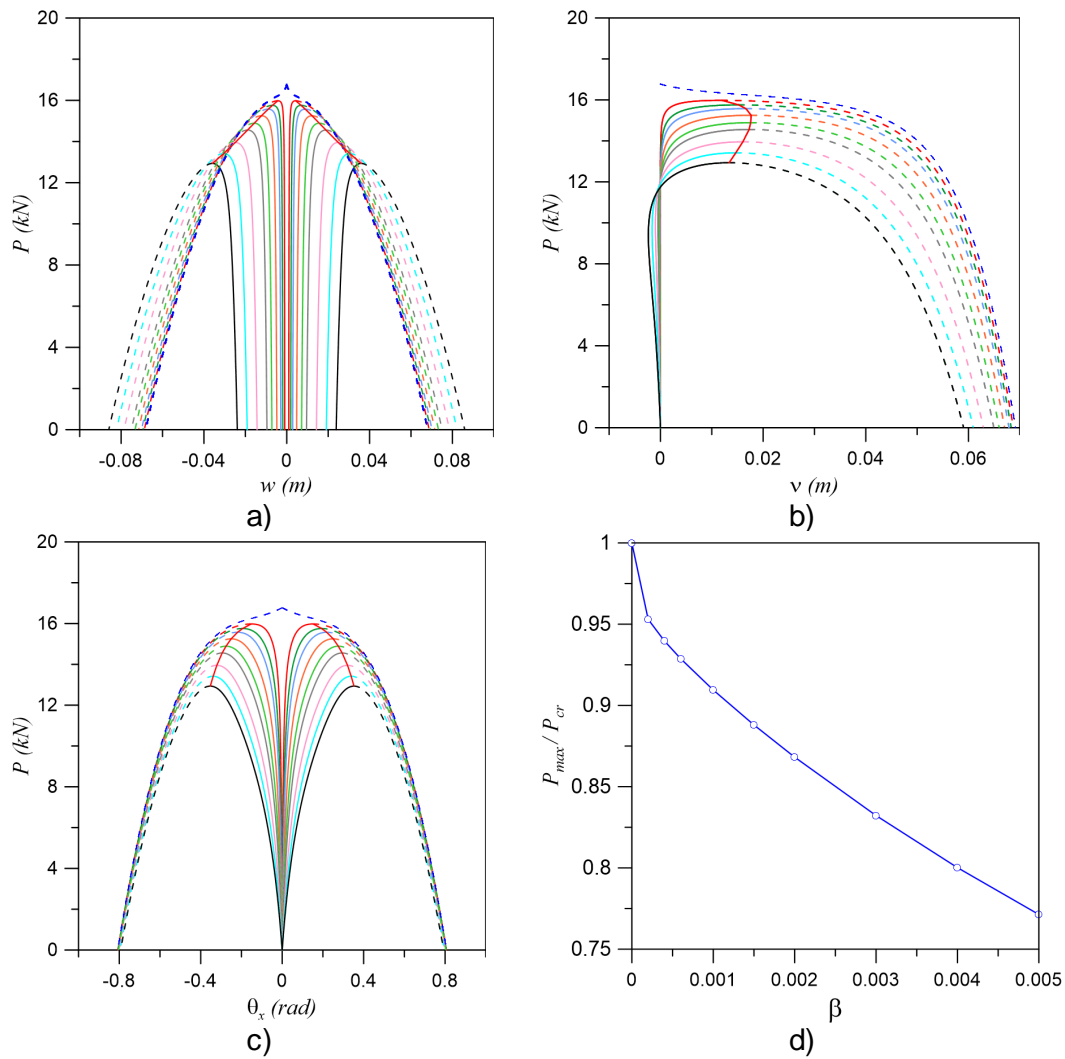
Material	$L_{ff}$ (m)	$P$ (kN)
M1	4.77	16.74
M2	7.20	7.36
M3	7.84	8.70
M4	6.81	8.27
M5	5.38	10.48
ISO	3.75	38.11



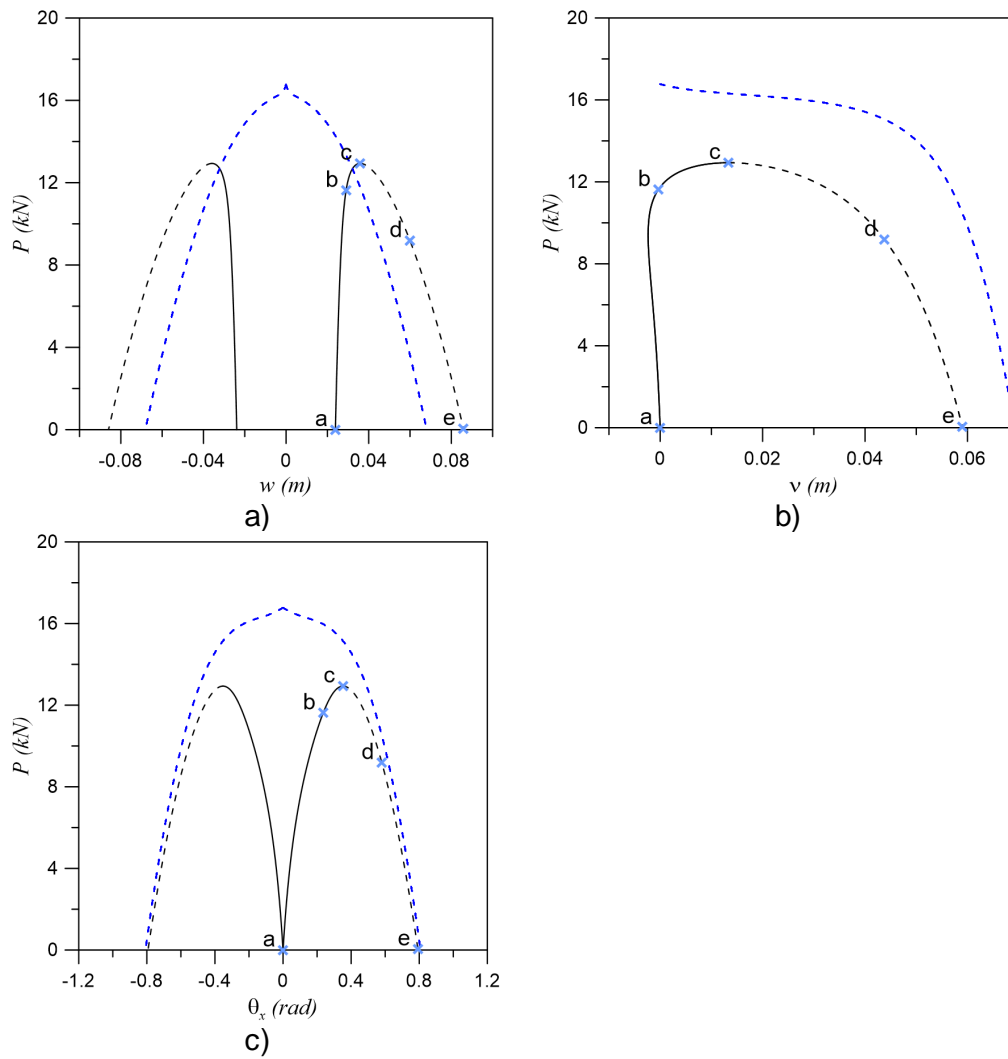
**Figura 7.21: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $v_o$  sob carga axial, Material M1, Perfil C 200x100x5,  $L = L_{ftf}$**



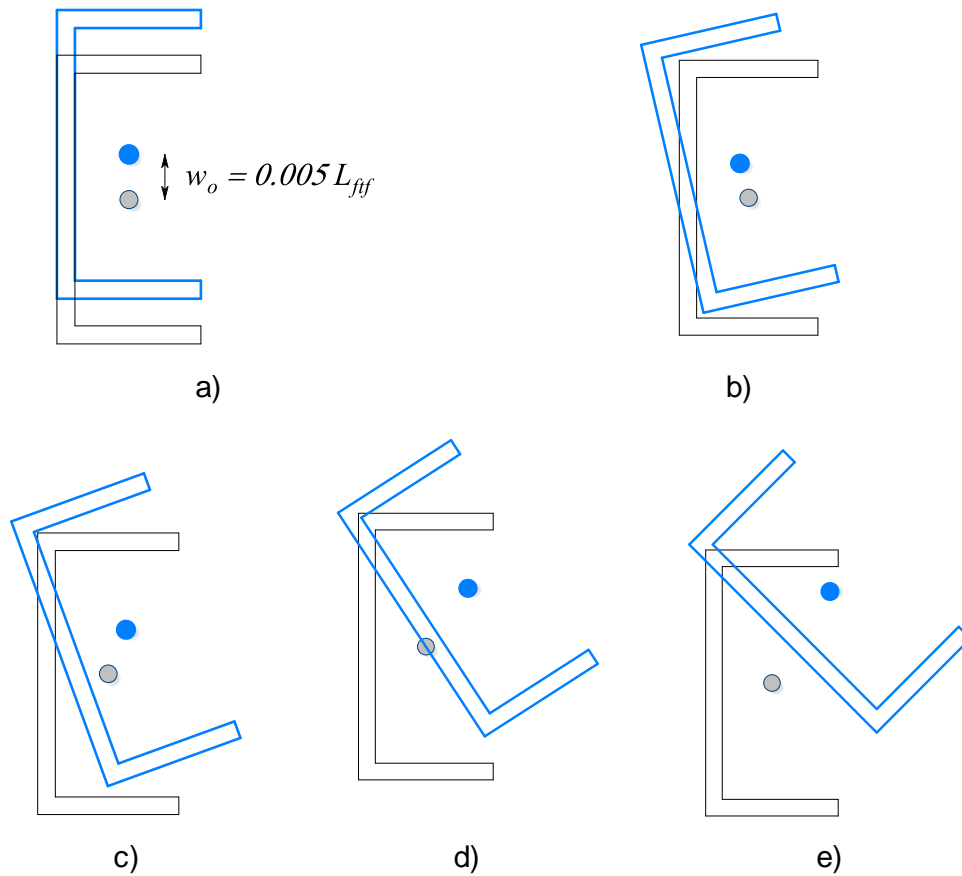
**Figura 7.22: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, perfil C 200x100x5, material M1, imperfeição  $v_o = 0.05 L_{ftf}$ ,  $L = L_{ftf}$ .**



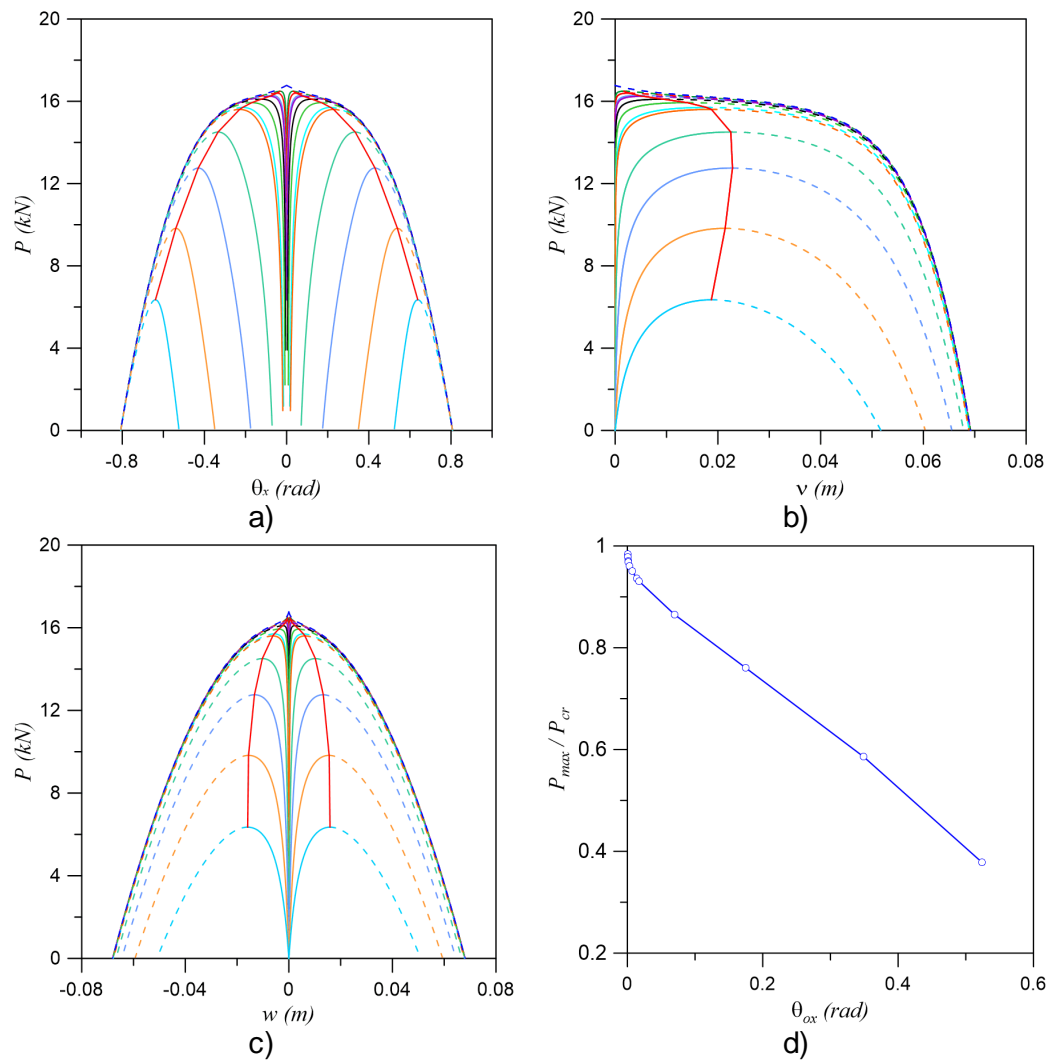
**Figura 7.23: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $w_o$  sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x100x5,  $L = L_{ftf}$ .**



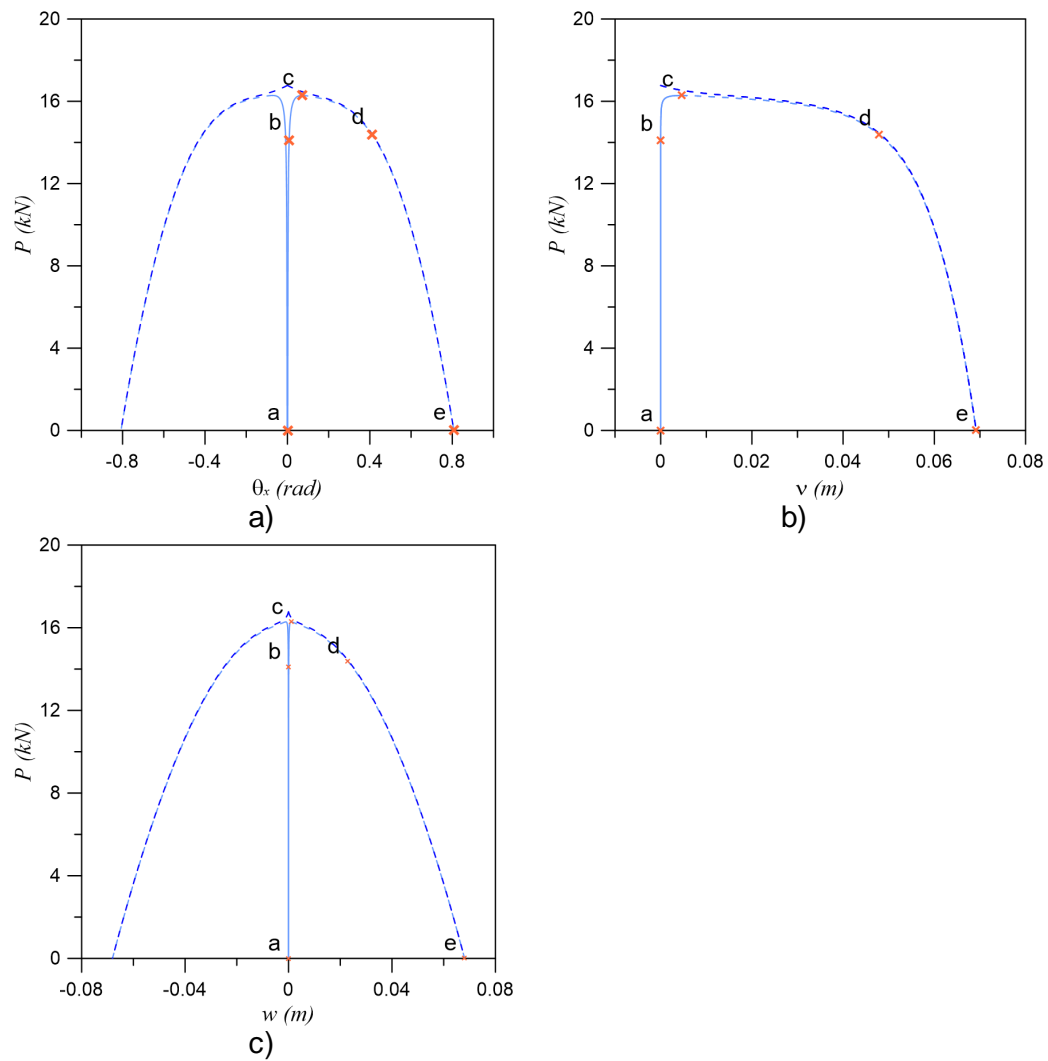
**Figura 7.24: Caminho de equilíbrio imperfeito do perfil C 200x100x5. Material M1, imperfeição  $w_o = 0.0050L_{ftf}$ ,  $L = L_{ftf}$ .**



**Figura 7.25: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, material M1, imperfeição  $w_o = 0.0050 L_{ftf}$ ,  $L = L_{ftf}$ .**



**Figura 7.26: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $\theta_{ox}$  sob carga axial, Material M1, Perfil C 200x100x5,  $L = L_{ftf}$ .**



**Figura 7.27:** Caminho de equilíbrio imperfeito do perfil C 200x100x5, material M1, imperfeição  $\theta_{ox} = 0.08^\circ$ ,  $L = L_{ftf}$ .

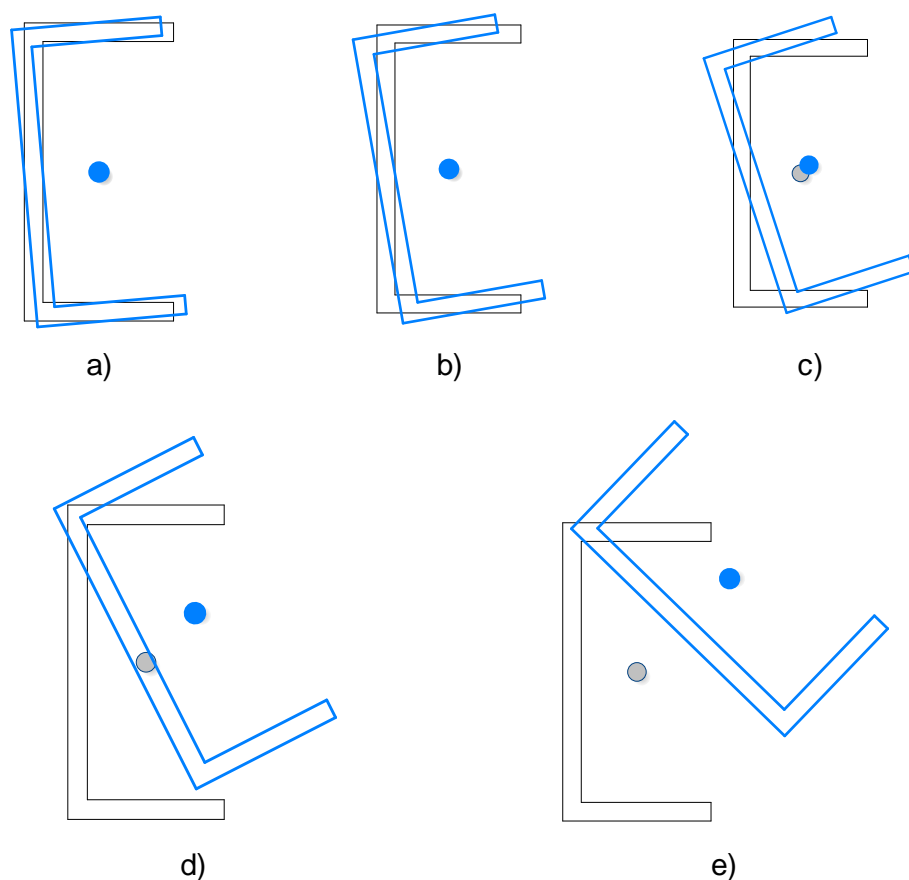


Figura 7.28: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, material M1, imperfeição  $\theta_{ox} = 0.08^\circ$ ,  $L = L_{ftf}$ .

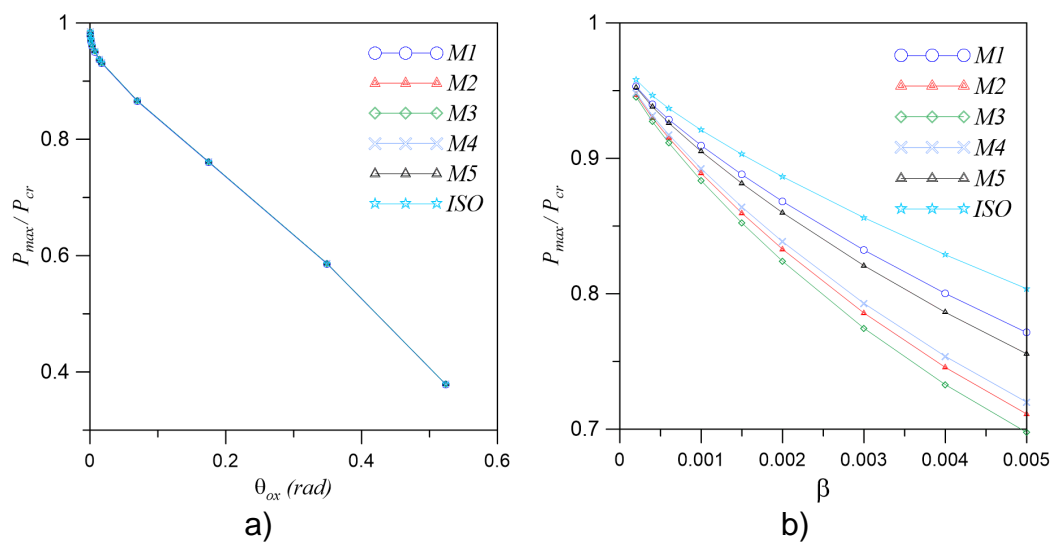
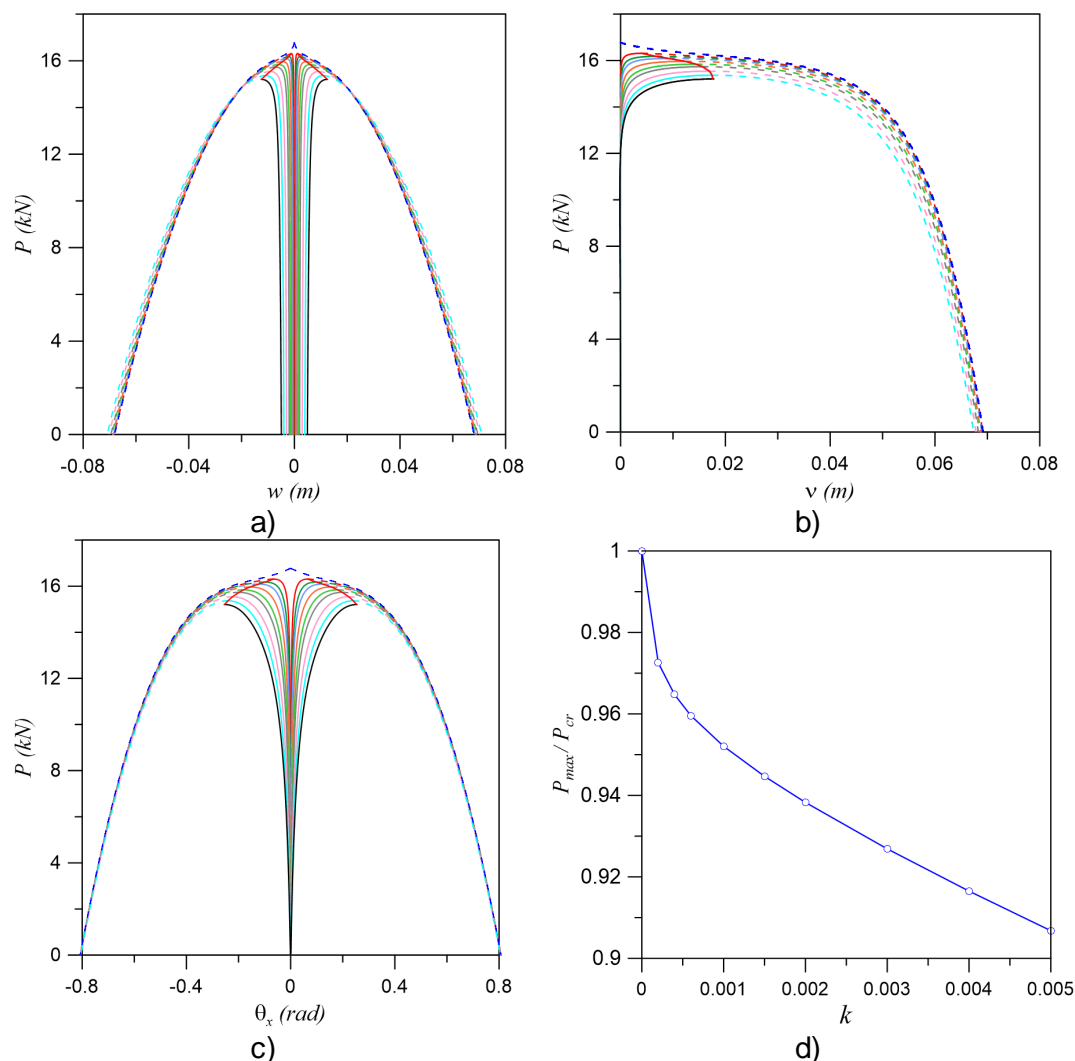
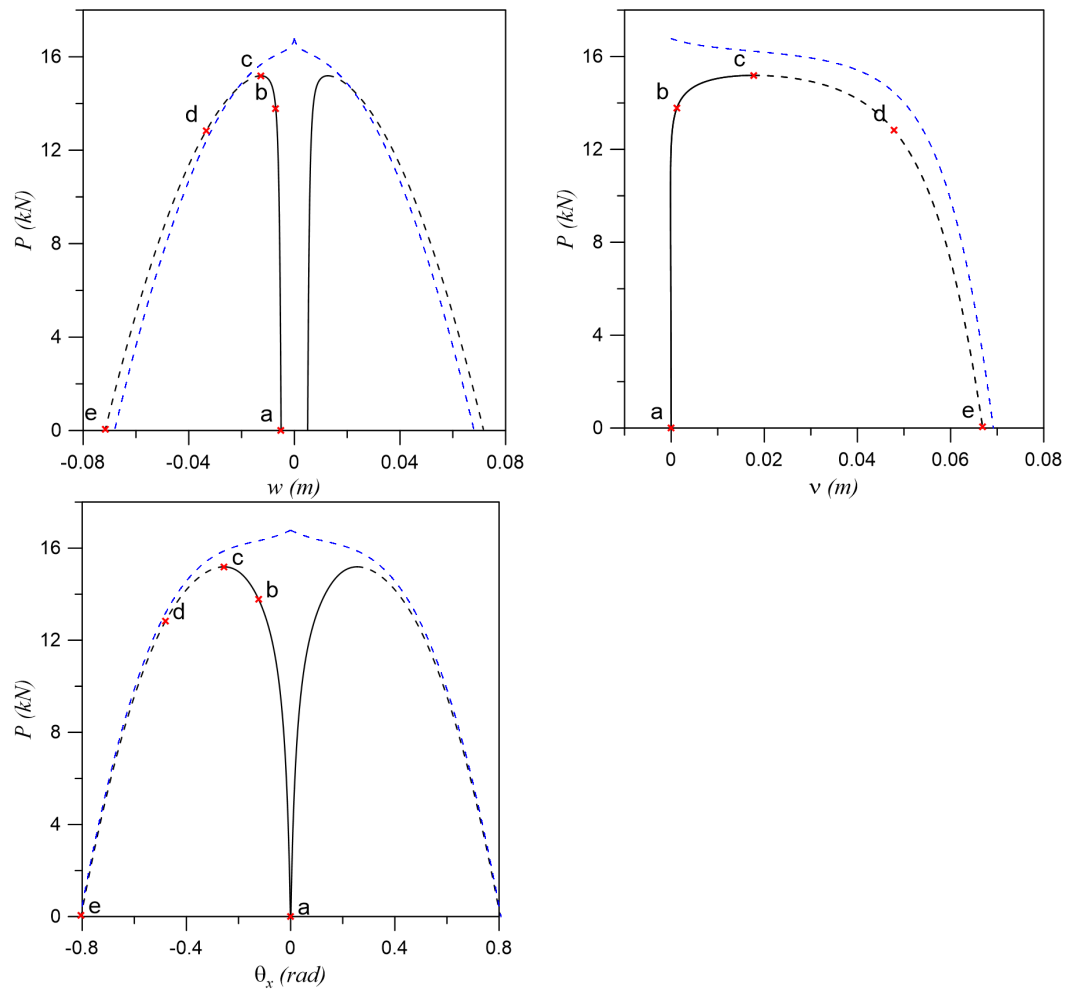


Figura 7.29: Sensibilidade dos resultados obtidos para os seis materiais usados na análise, Perfil C 200x100x5,  $L = L_{ftf}$ .

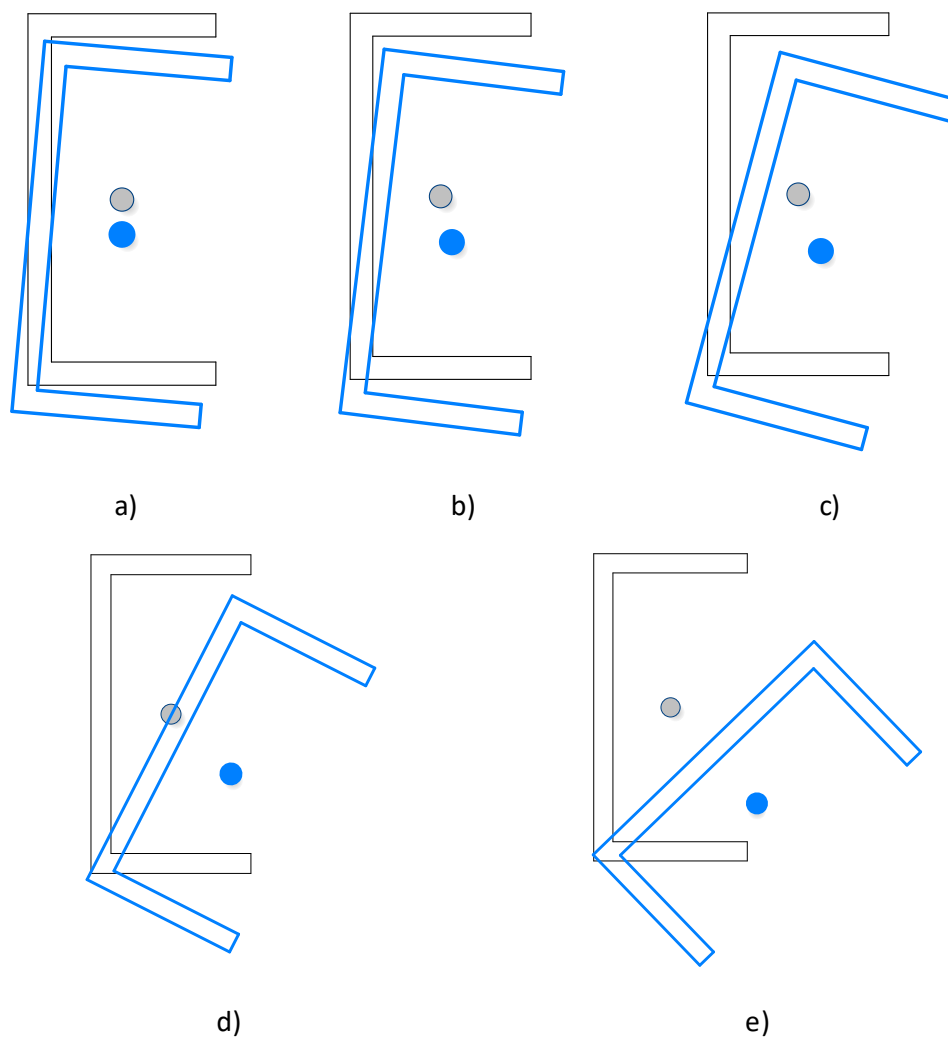
A Figura 7.30 mostra a resposta da estrutura com imperfeição na forma do modo crítico  $k(0, -0.987, -0.160)$  onde se observa o predomínio do comportamento em flexo-torção. O modo crítico é normalizado de modo que a norma do vetor tem uma magnitude de 1.0. As Figuras 7.31 e 7.32 ilustram o movimento da seção transversal a meia altura do perfil ao longo do caminho não linear de equilíbrio. A Figura 7.33 mostra as curvas de sensibilidade a imperfeições, onde se observa um decréscimo de até 9.5% na capacidade de carga da estrutura.



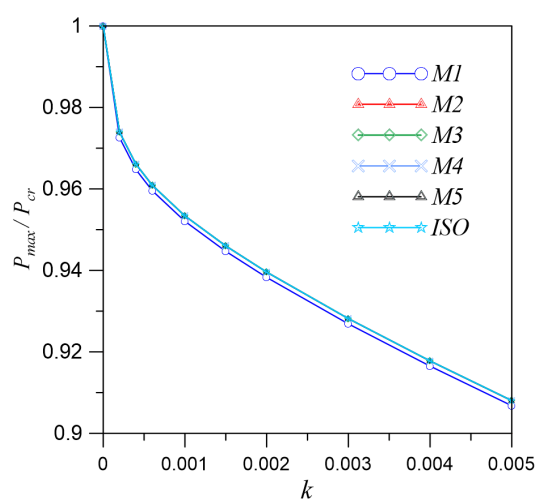
**Figura 7.30: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no modo crítico sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x100x5,  $L = L_{ftf}$ .**



**Figura 7.31: Caminho de equilíbrio imperfeito do perfil C 200x100x5, Material M1, imperfeição  $k(0, -0.987, -0.160)$ ,  $k = 0.005$ ,  $L = L_{fft}$ .**



**Figura 7.32: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, Material M1, imperfeição  $k(0, -0.987, -0.160)$ ,  $k = 0.005$ ,  $L = L_{ftf}$ .**



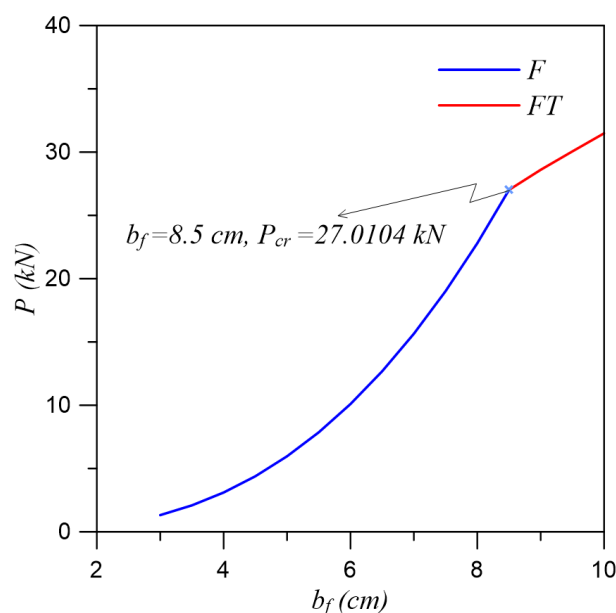
**Figura 7.33: Sensibilidade dos resultados obtidos para os seis materiais usados na análise, no modo e comprimento crítico, Perfil C 200x100x5.  $L = L_{ftf}$ .**

### 7.11

#### Influência da Largura da Mesa no Comportamento Pós-crítico

Neste item estuda-se a influência da largura das mesas  $b_f$  no comportamento pós-crítico e sensibilidade a imperfeições. Usa-se na análise paramétrica um perfil com dimensões C 200x $b_f$ x5, L=3m e material M1. As propriedades geométricas da seção transversal mudam com a largura das mesas, por conseguinte mudam o valor carga crítica e a forma do modo crítico. Consequentemente mudam o comportamento pós-crítico e a sensibilidade a imperfeições.

Na Figura (7.34) mostra-se a variação da carga e modo crítico com a largura das mesas  $b_f$ . Para  $b_f = 0$  tem-se uma placa apoiada nas extremidades e livre nos outros dois bordos, o que leva a um comportamento pós-crítico similar ao da coluna de Euler. Assim os resultados mostram que para pequenos valores de  $b_f$ , a menor carga crítica está associada ao modo de flexão (linha azul) até que para  $b_f = 85\text{mm}$  as cargas críticas de flexão e flexo torção coincidem e para valores maiores de  $b_f$  o modo crítico passa a ser associado o modo de flexo-torção (linha vermelha).



**Figura 7.34: Variação da carga crítica com a largura da mesa, modos de flambagem, Material M1, Perfil C 200x $b_f$ x5, L=3m.**

Na Figura 7.35 mostram-se os caminhos de equilíbrio da coluna imperfeita sob compressão axial para valores de largura de mesa  $b_f < 8,5\text{cm}$ , onde se observa em todos os casos uma bifurcação simétrica estável típica do modo de flexão em torno do eixo de menor inércia. As curvas da estrutura com imperfeições na forma do modo crítico com magnitude  $v_o = \pm \alpha L$  (Tabela 7.3). Quando a magnitude da imperfeição se aproxima a zero,  $v_o \rightarrow 0$ , as soluções tendem assintoticamente à solução da estrutura perfeita. Curvas que intersectam o eixo horizontal são conhecidas como curvas de equilíbrio naturais. Cada curva corresponde a um

valor de imperfeição  $v_o$ . Neste caso os deslocamentos  $w$  e  $\theta_x$  são nulos, como ilustra a Figura 7.36.

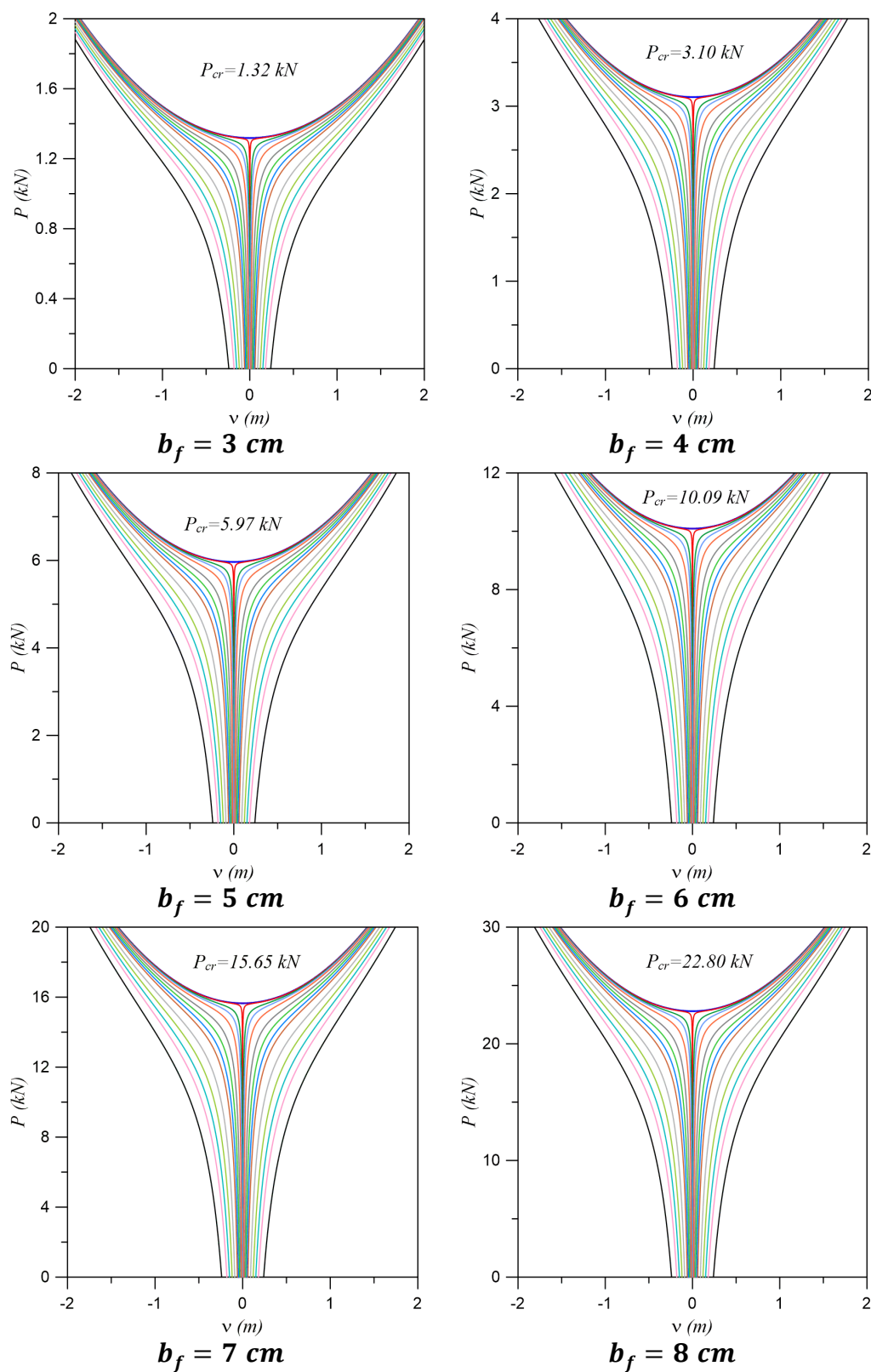
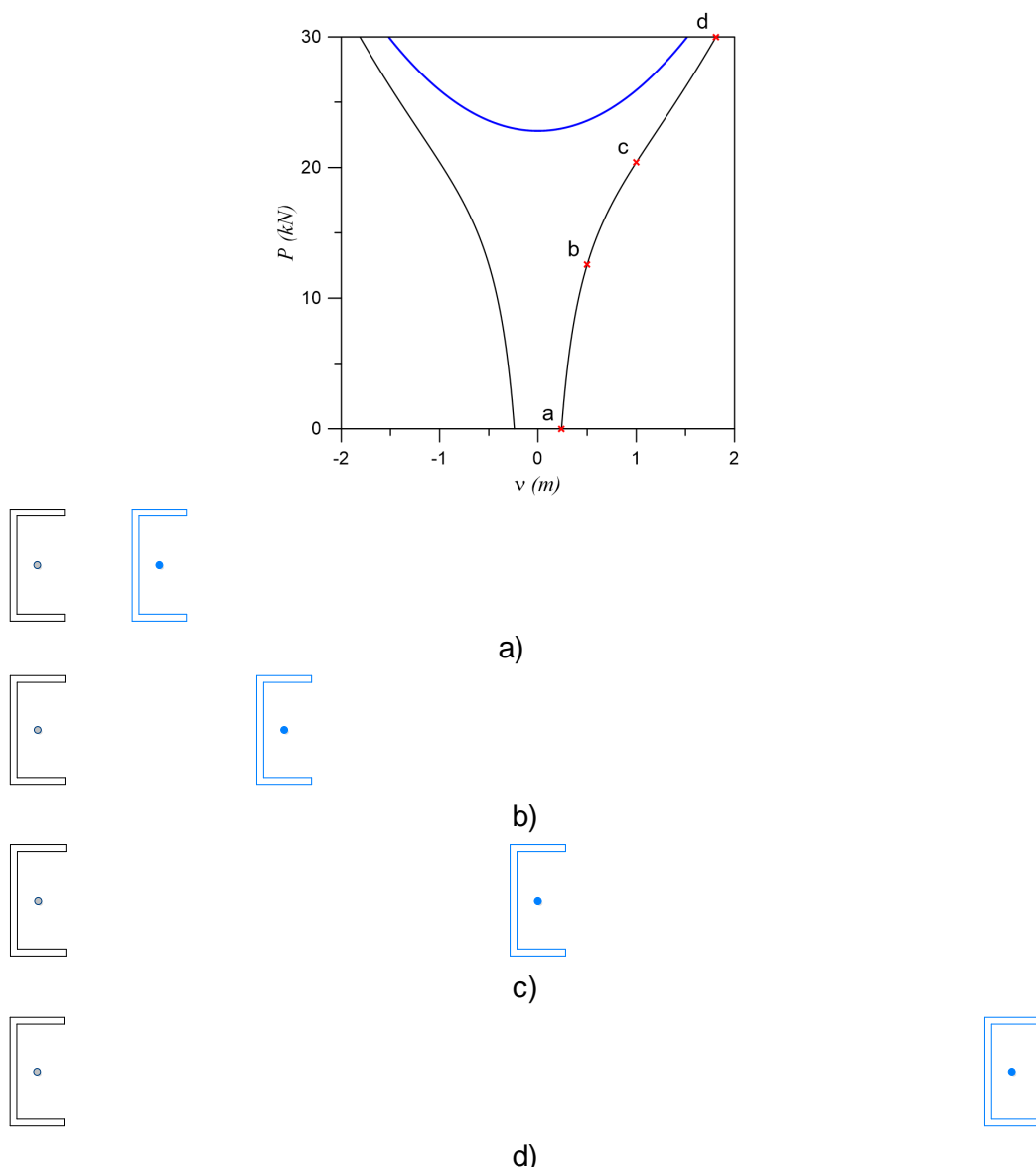
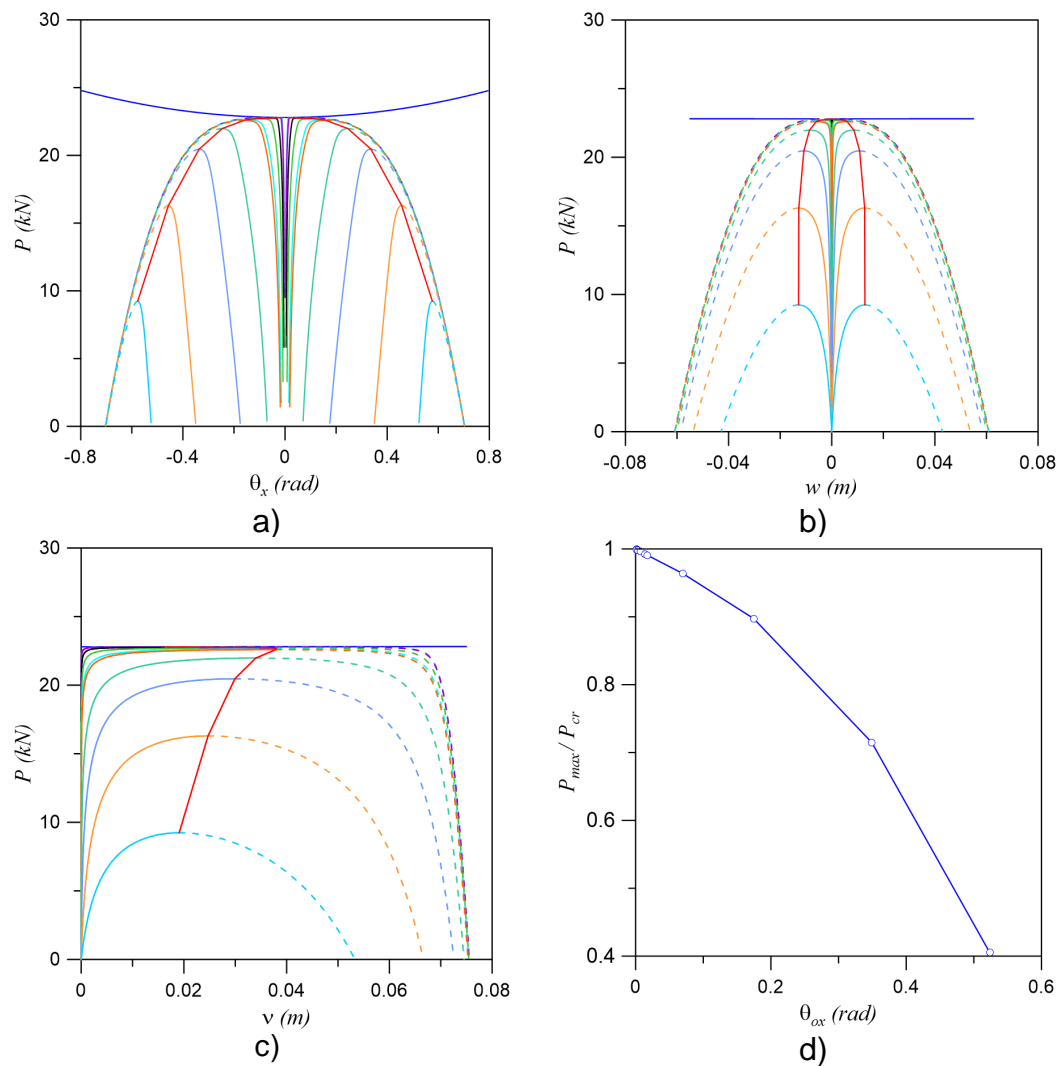


Figura 7.35: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição em  $v_o$  sob carga axial, material M1, Perfil C 200x **$b_f$** x5, L=3m.

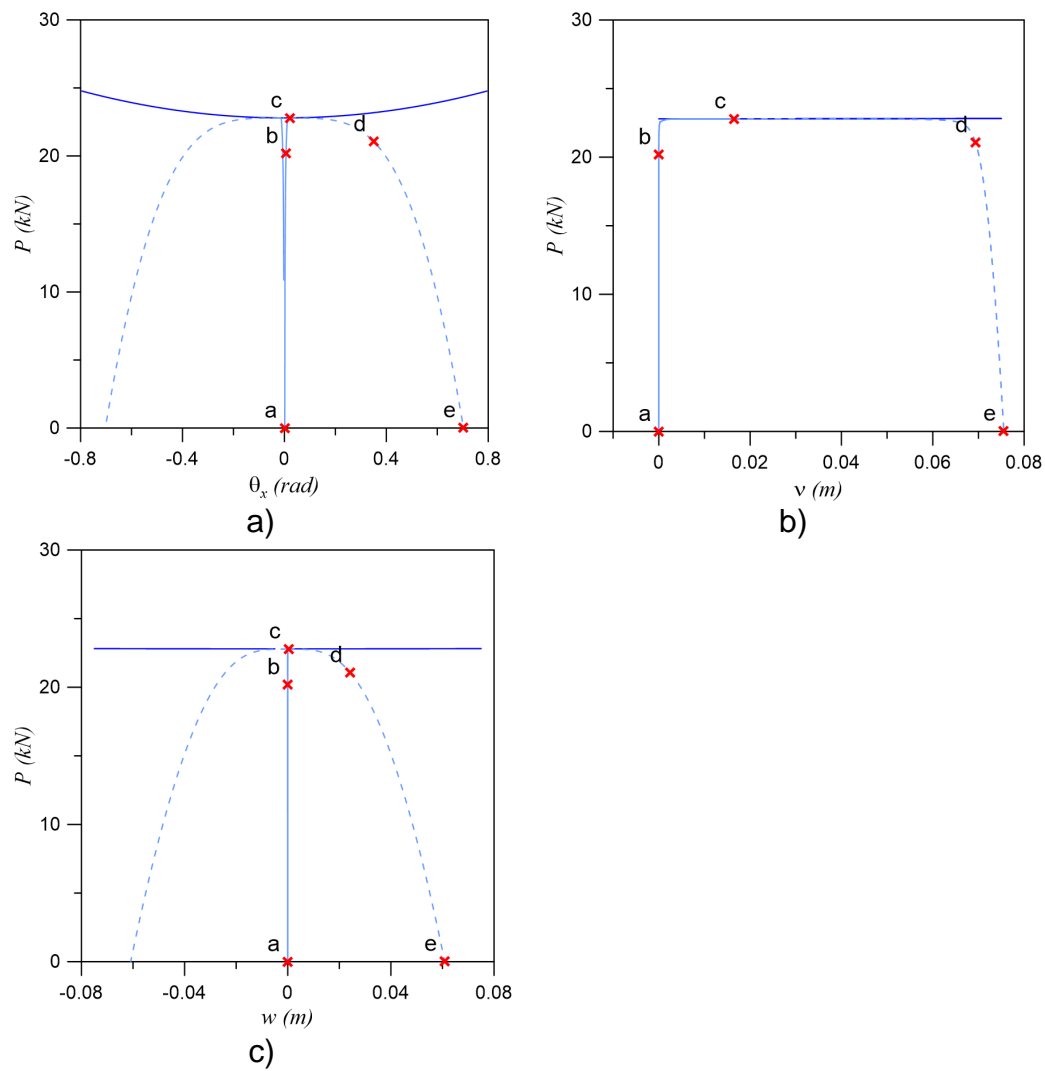


**Figura 7.36: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, perfil C 200x80x5, Material M1, imperfeição  $v_o = 0.08 L_{ftf}$ .**

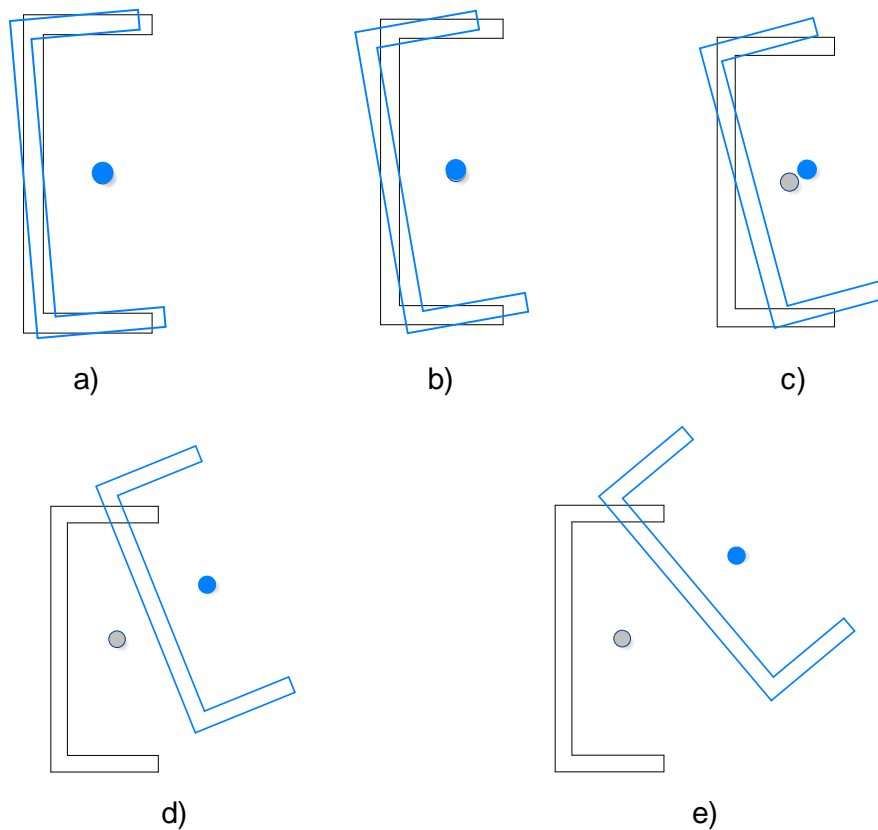
A Figura 7.37 mostra para  $b_f = 8\text{cm}$  os caminhos de equilíbrio típicos de perfis com imperfeições na forma do modo de torção com magnitude dada em radianos por  $\theta_{ox} = \pm\vartheta\pi/180$  e  $\vartheta = 0.02, 0.04, 0.08, 0.10, 0.20, 0.40, 0.80, 1.00, 2.00, 4.00$  e  $b_f < 8,5\text{cm}$ . Neste caso nota-se a influência significativa da torção no caminho não linear da estrutura imperfeita, apresentando para  $\theta_{ox} \neq 0$  um caminho de equilíbrio com ponto limite e sensibilidade a imperfeições. Nota-se que, quando  $\theta_{ox} \rightarrow 0$ , os caminhos de equilíbrio da coluna imperfeita tendem ao caminho fundamental de equilíbrio. Os caminhos de equilíbrio são estáveis e simétricos para  $\theta_{ox} = \pm\vartheta\pi/180$  até alcançar o ponto limite a partir do qual a carga decresce com o deslocamento tornando-se a resposta instável. Neste caso os três deslocamentos são diferentes de zero para o caso imperfeito, como ilustram as Figuras 7.38 e 7.39.



**Figura 7.37: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $\theta_{ox}$  sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x80x5,  $L=3m$ ,  $b_f = 8cm$ .**

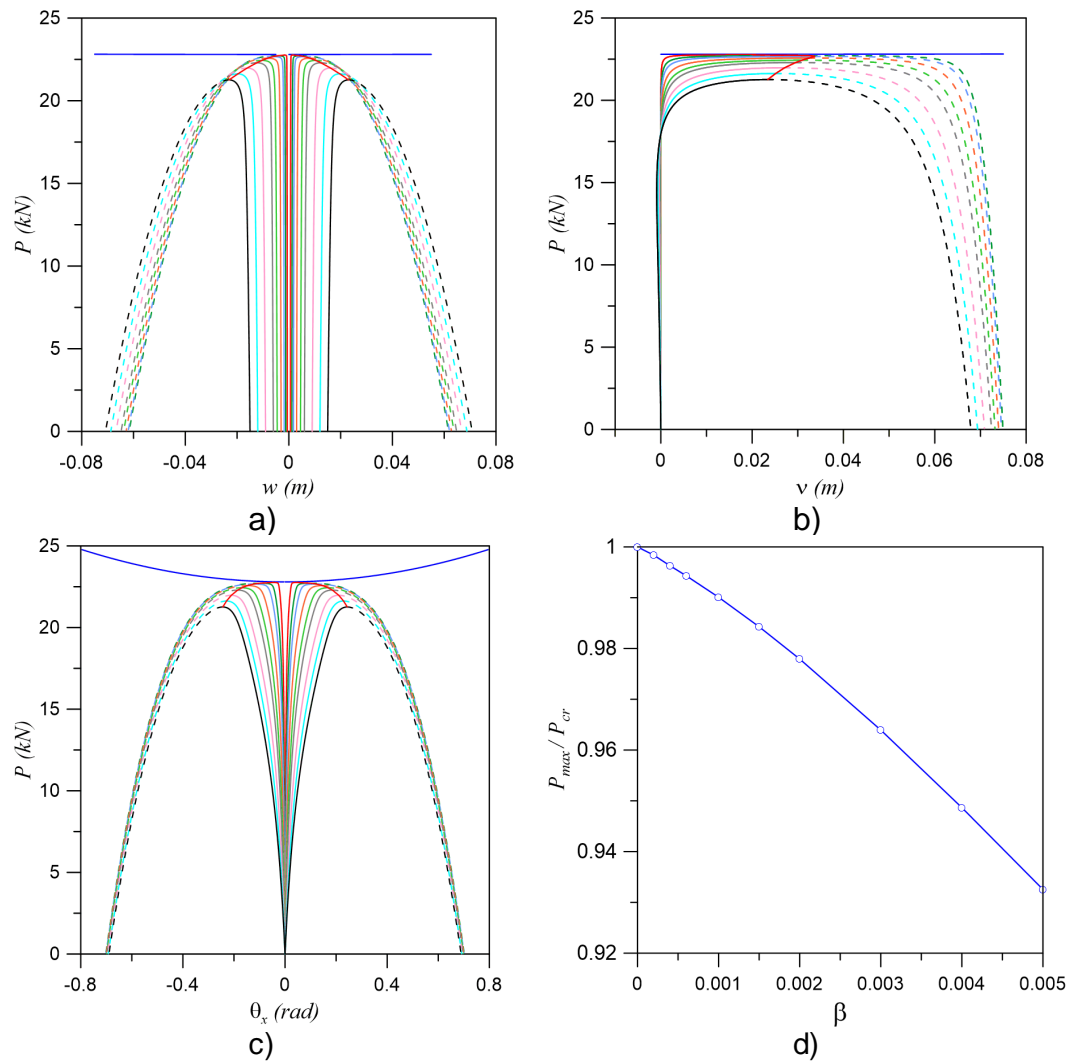


**Figura 7.38: Caminho de equilíbrio imperfeito do perfil C 200x80x5. material M1, imperfeição  $\theta_{ox} = 0.08^\circ$ ,  $L = 3m$ .**



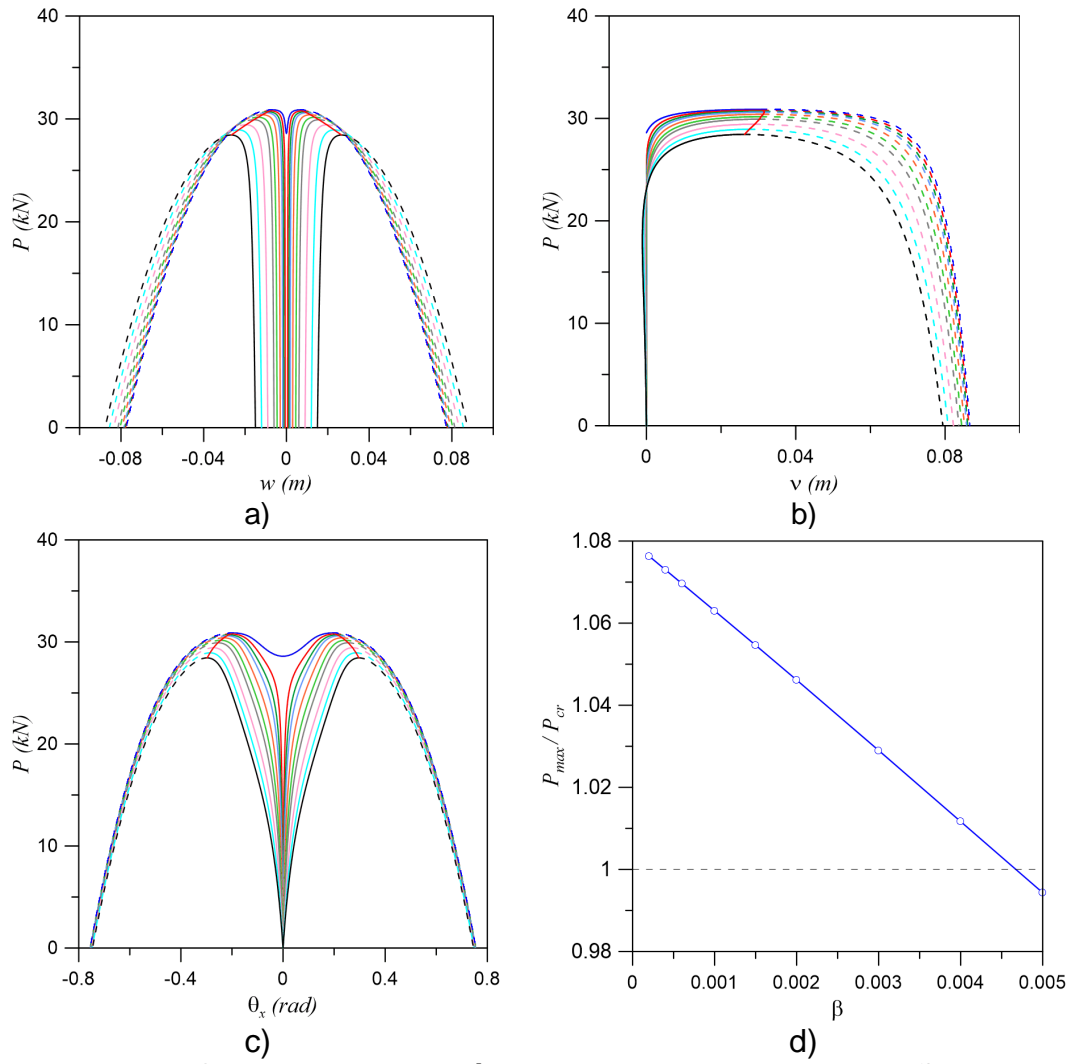
**Figura 7.39: Deslocamento da seção transversal ao longo do caminho de equilíbrio imperfeito, perfil C 200x80x5, Material M1, imperfeição  $\theta_{ox} = 0.08^\circ$ ,  $L = 3m$ .**

Os caminhos de equilíbrio com imperfeições na forma do modo de flexão em torno do eixo de maior de inércia com magnitude  $w_o = \pm\beta L$  apresentaram problemas de convergência para a maioria dos valores de  $b_f$  e  $\beta$ , e levaram a resultados de difícil interpretação. A Figura 7.40 mostra a resposta para  $\beta = 0.0002, 0.0004, 0.0006, 0.0010, 0.0015, 0.0020, 0.0030, 0.0040, 0.0050$  e  $b_f = 8cm$  onde se observa que os caminhos se aproximam assintoticamente da solução da estrutura perfeita.

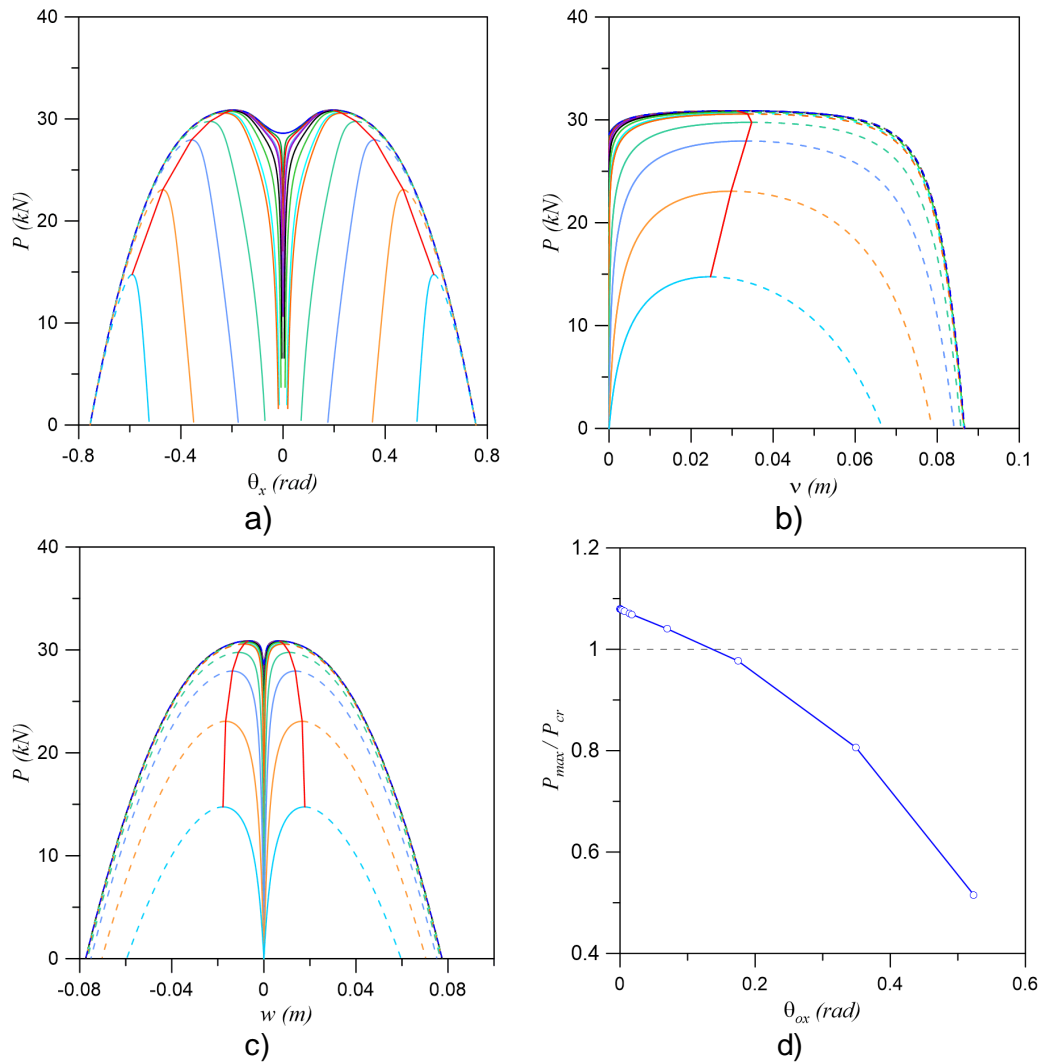


**Figura 7.40: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $w_o$  sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x10 $b_f$ x5,  $L=3m$ ,  $b_f = 8cm$ .**

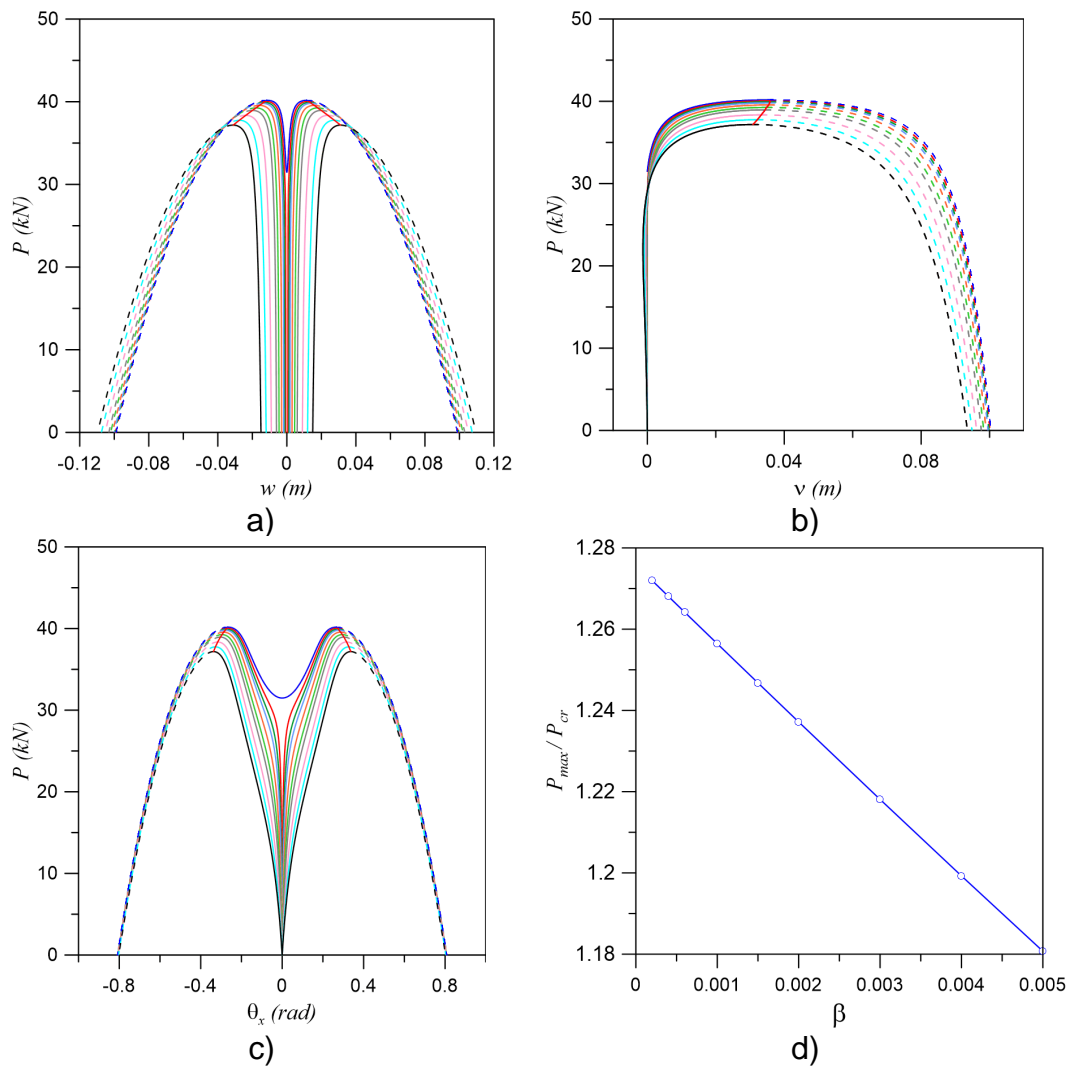
Para larguras de mesa  $b_f > 8.5cm$ , a menor carga crítica associada é de flexo-torção. As Figuras 7.41 a 7.44 ilustram o comportamento da estrutura para este caso considerando  $b_f = 9cm$  e  $b_f = 10cm$ .



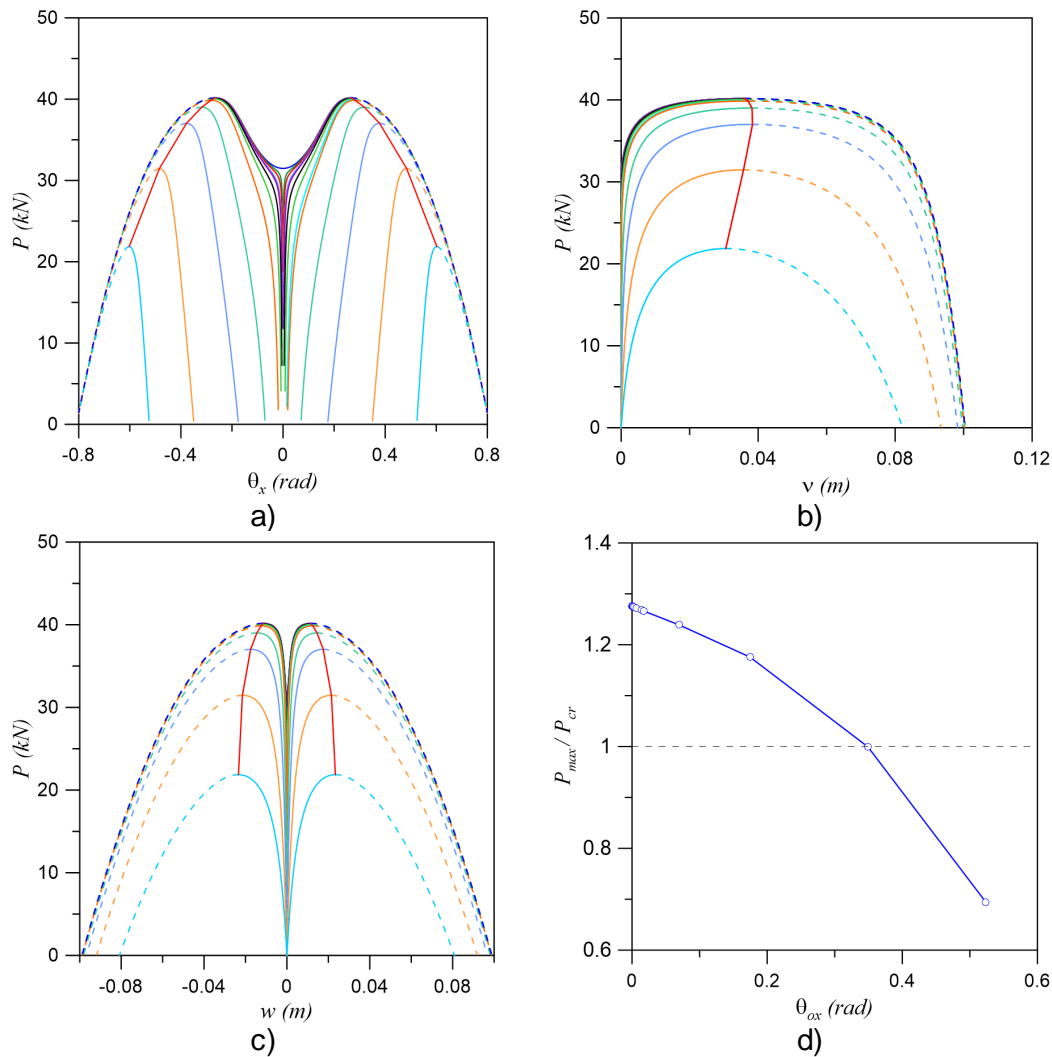
**Figura 7.41: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $w_o$  sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x10 $b_f$ x5, L=3m,  $b_f = 9$ cm.**



**Figura 7.42: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $\theta_{ox}$  sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x10 $b_f$ x5, L=3m,  $b_f = 9$ cm.**



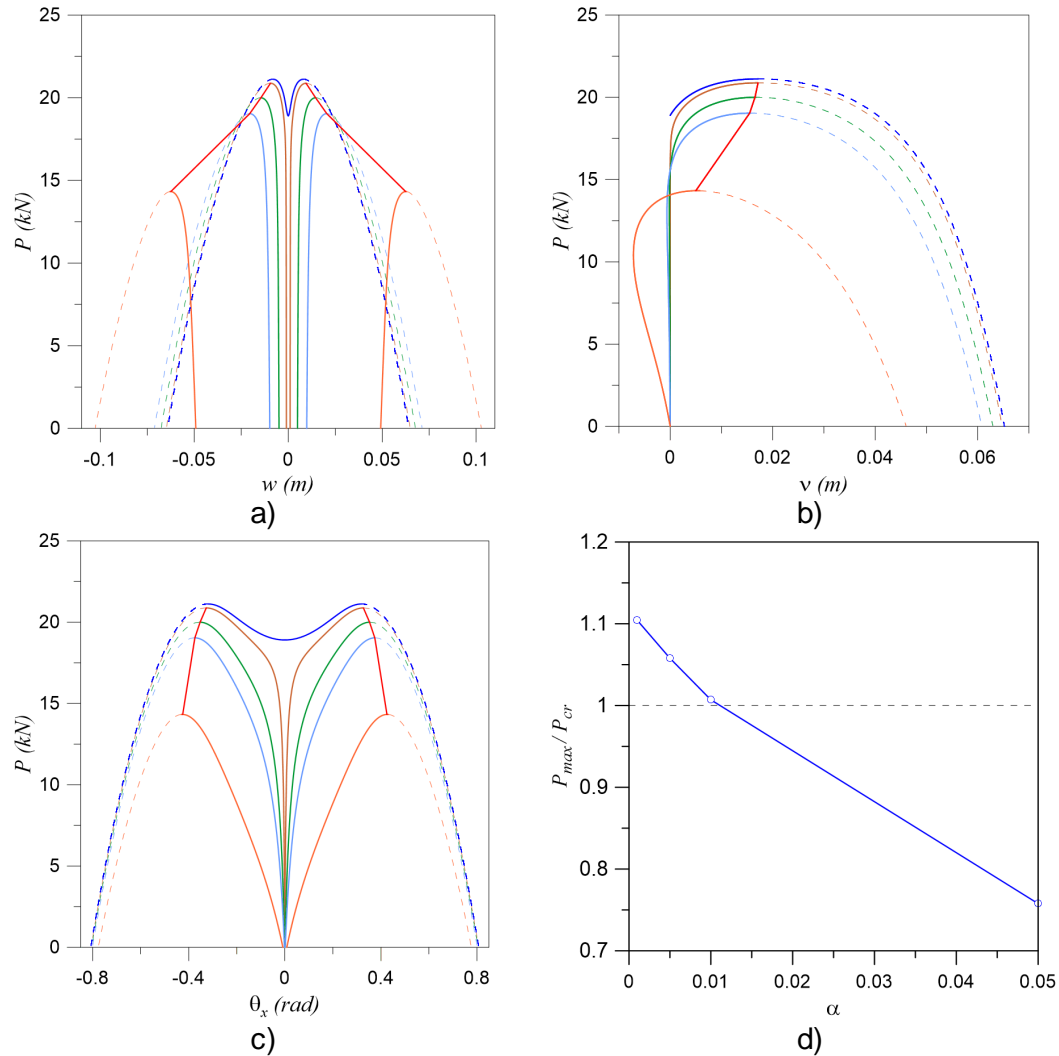
**Figura 7.43: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $w_o$  sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x10 $b_f$ x5, L=3m,  $b_f = 10cm$ .**



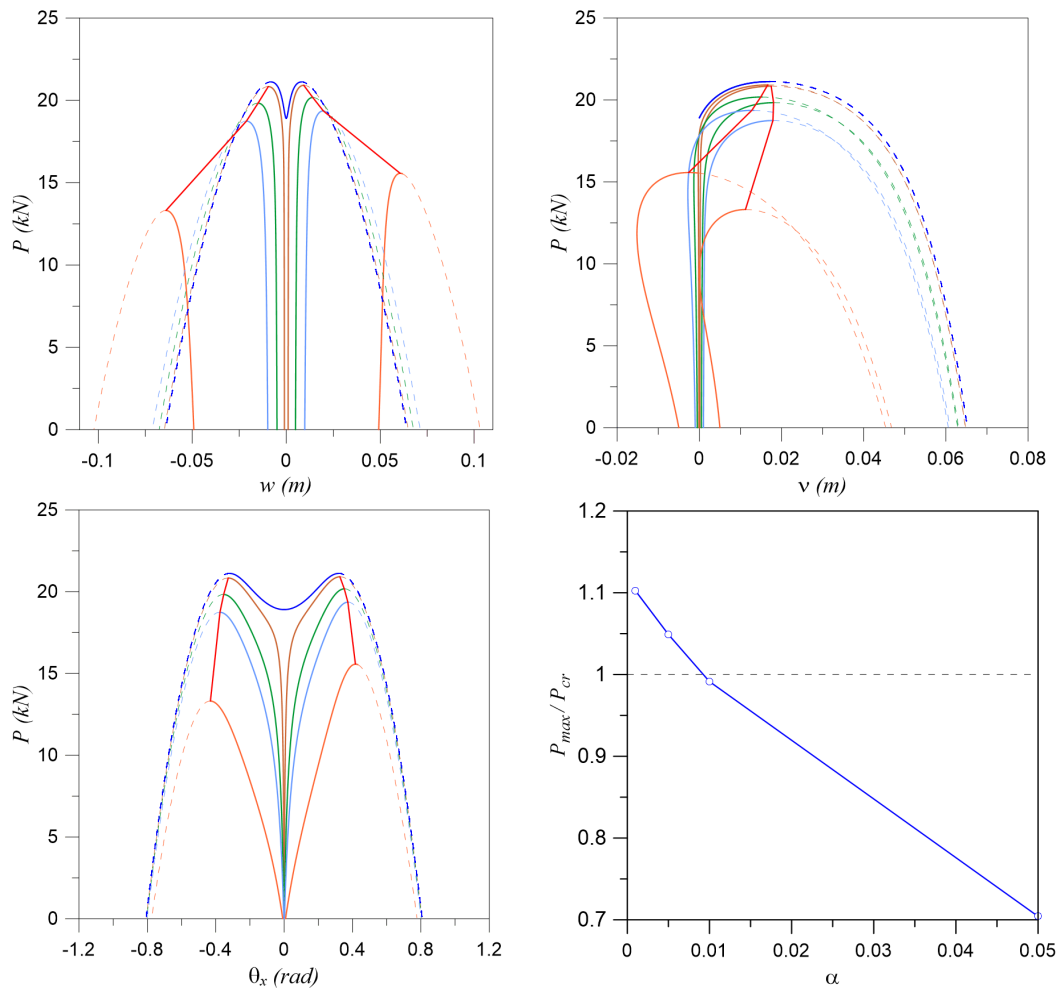
**Figura 7.44: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $\theta_{ox}$  sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M1, Perfil C 200x10 $b_f$ x5, L=3m,  $b_f = 10$ cm.**

A seguir estuda-se a influência de imperfeições na forma do modo crítico de flexo-torção na forma  $(v, w, \theta) = \alpha \cdot (0, -0.986, -0.164)$ , onde  $\alpha = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05$  é um fator que multiplica o autovetor normalizado. A Figura 7.45 mostra os caminhos não lineares de equilíbrio e a sensibilidade a imperfeições para o material M5 e  $L=3.5$ m. Observa-se uma sensibilidade a imperfeições similar a aquela mostrada na Figura 7.44 onde se considera uma imperfeição em  $\theta_{ox}$ . Adicionalmente, considera-se um caso de imperfeição que provoque o acoplamento dos modos de flexão e flexo torção na forma  $(v, w, \theta) = \alpha \cdot (0.1, -0.986, -0.164)$ , com componentes nas três variáveis. A Figura 7.46 mostra os caminhos de equilíbrio considerando  $\alpha = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05$  considerando o material M5, e  $L=3.5$ m. Observa-se novamente uma grande sensibilidade a imperfeições que uma acentuada queda da capacidade de carga da coluna sob carga axial. Finalmente se considera uma imperfeição na forma do modo de flambagem em torno do eixo de menor inércia, com magnitude crescente, e uma pequena imperfeição de torção que é mantida constante. A Figura 7.47 mostra os resultados para uma imperfeição da forma  $(v_o, w_o, \theta_{ox}) = (\alpha, -0.01, 0)$  e  $\alpha = \pm 0.001$ ,

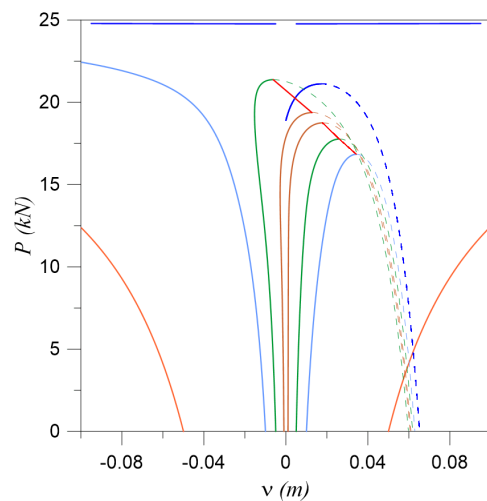
$\pm 0.005$ ,  $\pm 0.01$ ,  $\pm 0.05$ . Observa-se que imperfeições positivas e negativas levam a comportamentos distintos, apresentando a resposta um comportamento assimétrico e sensibilidade a imperfeições.



**Figura 7.45: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no modo crítico,  $(v_o, w_o, \theta_{ox}) = \alpha \cdot (0, -0.986, -0.164)$ ,  $\alpha = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05$ , sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M5, Perfil C 200x100x5,  $L=3.5\text{m}$ .**



**Figura 7.46: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição nas três direções,  $(v_o, w_o, \theta_{ox}) = \alpha \cdot (0.1, -0.986, -0.164)$ ,  $\alpha = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05$ , sob carga axial, (d) Curva de sensibilidade a imperfeições, Material M5, Perfil C 200x100x5,  $L=3.5\text{m}$ .**



**Figura 7.47: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no eixo de menor e de maior inercia,  $(v_o, w_o, \theta_{ox}) = (\alpha, -0.01, 0)$ ,  $\alpha = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05$ , sob carga axial, Material M5, Perfil C 200x100x5,  $L=3.5\text{m}$ .**

## 8

### Vibrações Não Lineares e Instabilidade Paramétrica

A instabilidade paramétrica de estruturas sob cargas harmônicas é um tópico importante em várias áreas da engenharia. A instabilidade paramétrica de estruturas como colunas, placas e cascas tem sido objeto de diversos estudos, sendo um dos tópicos mais importantes na área de instabilidade dinâmica e vibrações não lineares (Bolotin, 1964; Nayfeh e Mook, 1979; Xie, 2006; Fossen e Nijmeijer, 2011). O fenômeno é matematicamente descrito por equações diferenciais homogêneas com coeficientes dependentes do tempo conhecidas como equações de Mathieu-Hill.

A teoria linear prediz que, após atingir a carga crítica dinâmica, a estrutura apresenta um movimento oscilatório de amplitude exponencialmente crescente, o que leva ao colapso (Richards, 2012). Os termos não lineares podem levar, após o crescimento inicial da magnitude de vibrações, a respostas permanentes com magnitude finita ou a soluções que continuam divergindo para infinito (escape).

Para magnitudes de força inferiores ao valor crítico, a solução linear converge para a posição inicial de equilíbrio (solução trivial das equações de movimento) no caso amortecido, ou apresenta uma solução quase periódica no caso não amortecido (Richards, 2012). Considerando os termos não lineares e de amortecimento podem-se ter, além da solução trivial, soluções não triviais. Assim, apenas uma análise não linear do sistema amortecido é capaz de descrever corretamente o fenômeno.

Neste capítulo estuda-se a estabilidade do perfil sob uma carga axial harmônica. Usando a formulação local e global são obtidas as regiões de instabilidade paramétrica em função da frequência e magnitude da força de excitação harmônica e estuda-se a influência do material, amortecimento e geometria da seção transversal nas fronteiras de instabilidade paramétrica. Os diagramas de bifurcação são obtidos empregando técnicas de continuação (Seydel, 1988) e o método da força bruta (Parker e Chua, 2012), e a estabilidade das soluções é subsequentemente investigada usando a teoria de Floquet (Del Prado, 2001; Silva, 2008). A análise de bifurcações permite identificar as bifurcações associadas às fronteiras de instabilidade paramétrica no espaço de controle de força, bem como a existência de soluções coexistentes. Em seguida, é investigada a evolução das bacias de atração das soluções coexistentes em função da magnitude da força, a fim de avaliar a integridade dinâmica da solução estável desejada (solução trivial) (Orlando, 2010). A presente abordagem numérica, com base nas equações não lineares, independe da suposição de pequena magnitude de excitação, não linearidade ou amortecimento usadas frequentemente na literatura, quando se lineariza as equações de movimento e

resolve-se de forma aproximada as equações de Mathieu-Hill (Xie, 2012; Richards, 2012; Kovacic et al., 2018).

## 8.1

### Análise Local: Discretização e Determinação das Equações Não Lineares de Movimento

Para a análise da instabilidade local utilizam-se as equações não lineares de movimento obtidas no Capítulo 4 usando a CPT e a FSDT. Considera-se que a excitação axial é da forma (Coaquira et al., 2020):

$$N(t) = N_s + N_d \sin(\Omega_f t) \quad (8.1)$$

onde  $N_s$  é a carga axial estática por unidade de comprimento,  $N_d$  é a magnitude da excitação harmônica e  $\Omega_f$  é a frequência de excitação. Dividindo a carga aplicada pela carga crítica estática,  $N_{cr}$ , (ver Capítulo 5) e considerando um tempo adimensional  $\tau = \omega_0 t$ , onde  $\omega_0$  é a menor frequência natural do perfil (ver Capítulo 6), a excitação axial adimensional assume a forma:

$$\bar{Q}_x(\tau) = Q_s + Q_d \sin(\delta \tau) \quad (8.2)$$

onde  $Q_s = N_s/N_{cr}$  é o fator de carga estática;  $Q_d = N_d/N_{cr}$  é o fator de carga dinâmica e  $\delta = \Omega_f/\omega_0$  é a razão de frequências. Além disso, na análise a seguir  $\xi$  é o coeficiente de amortecimento viscoso adimensional.

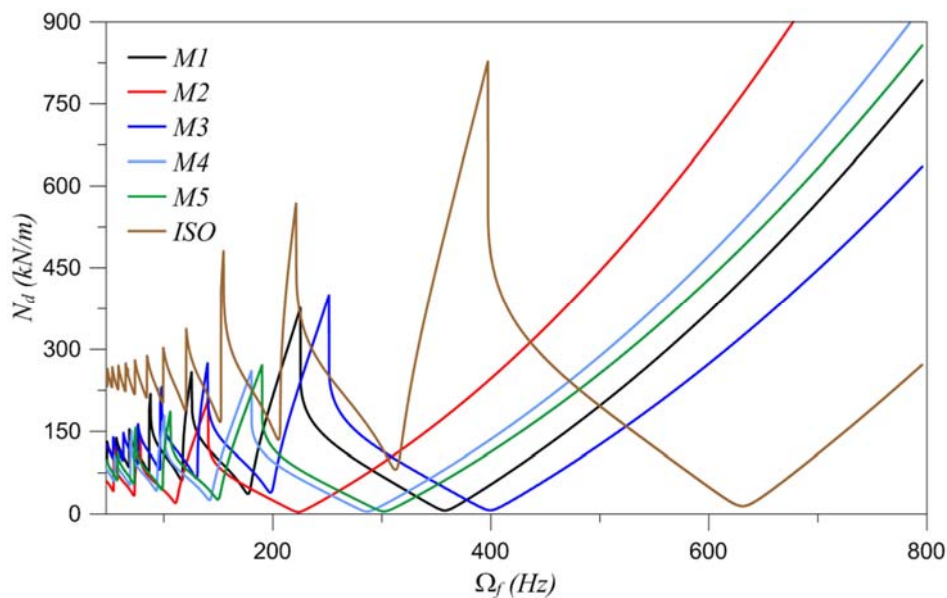
As análises de instabilidade paramétrica local apresentadas a seguir são restritas a  $L < L_{lg}$ , para que não haja nenhum tipo de interação entre o modo local e global na resposta. A menor carga crítica,  $N_{cr}$ , correspondente ao modo local ( $L < L_{lg}$ ), e a frequência fundamental,  $\omega_0$ , para cada material são mostradas na Tabela 8.1. Na análise numérica, para cada material, o comprimento adotado é aquele em que a carga crítica atinge o primeiro mínimo local com  $m = 1$ .

**Tabela 8.1: Carga crítica axial e frequência fundamental em função das propriedades do material.**

	M1	M2	M3	M4	M5	ISO
$N_{cr}$ (kN/m)	108.80	59.90	115.50	75.32	78.49	239.30
$\omega_0$ (Hz)	178.80	111.56	199.74	143.24	150.88	315.45

A Figura 8.1 mostra as fronteiras de instabilidade paramétrica da solução trivial no espaço de controle de força e frequência de excitação ( $N_d, \Omega_f$ ) para os seis materiais selecionados. A taxa de amortecimento é adotada como  $\xi = 1.45\%$ , dentro da faixa de resultados experimentais disponíveis para materiais pultrudados (Boscato e Russo,

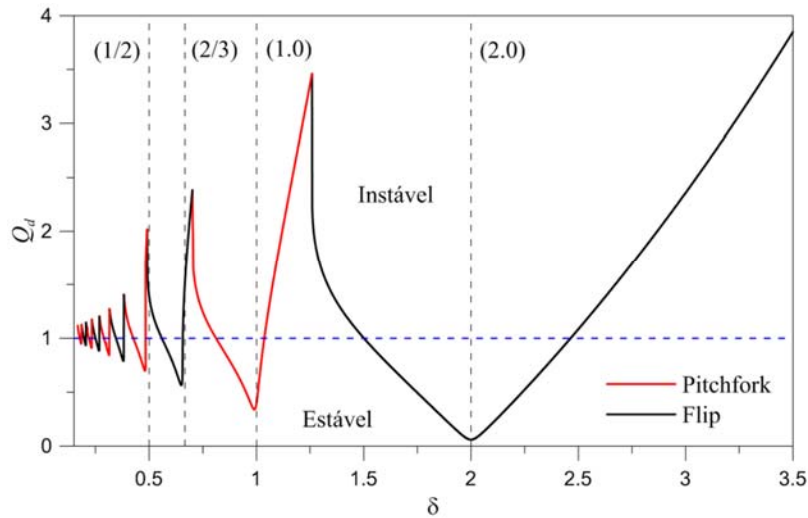
2009; Song et al., 2004; Ahmadi et al., 2018). Há uma diminuição palpável na carga crítica dinâmica do perfil pultrudado quando comparada com o material isotrópico. Observa-se também que as fronteiras de instabilidade paramétrica se movem para a esquerda em virtude da diminuição da frequência fundamental (Tabela 8.1). Essa diminuição se deve à baixa resistência do PRF na direção transversal ( $E_2 \ll E_1$ ) e ao baixo módulo de cisalhamento. O módulo de cisalhamento tem uma influência pronunciada na resposta da placa com uma borda livre (flanges) e, portanto, em seções do tipo C com uma alma relativamente larga. Tanto para o caso não amortecido quanto para o amortecido, os limites de estabilidade podem ser obtidos aproximadamente resolvendo a equação linear de Mathieu-Hill por métodos de perturbação (Xie, 2012; Richards, 2012; Kovacic et al., 2018). No entanto, no presente caso, esses limites são obtidos resolvendo a equação não linear de movimento do sistema amortecido por técnicas de continuação em conjunto com a teoria de Floquet para um grande número de frequências de excitação e aumentando gradativamente a magnitude da força enquanto se mantém constante a frequência da excitação. O limite da instabilidade corresponde à carga máxima em que a solução trivial se torna instável (total desaparecimento de sua bacia de atração). As soluções estáveis também são verificadas usando o método da força bruta quando necessário. Este procedimento permite identificar respostas complexas, como soluções quase periódicas e caóticas, e soluções periódicas estáveis de várias ordens difíceis de ser obtidas por algoritmos de continuação. As equações diferenciais com coeficientes periódicos, usadas na presente análise numérica, são apresentadas no Apêndice IV para as duas teorias de placas.



**Figura 8.1:** Diagrama de bifurcação do mapa de Poincaré no plano de frequência de excitação vs. magnitude de excitação,  $\xi = 1.45\%$ , (consulte a Tabela 5.2).

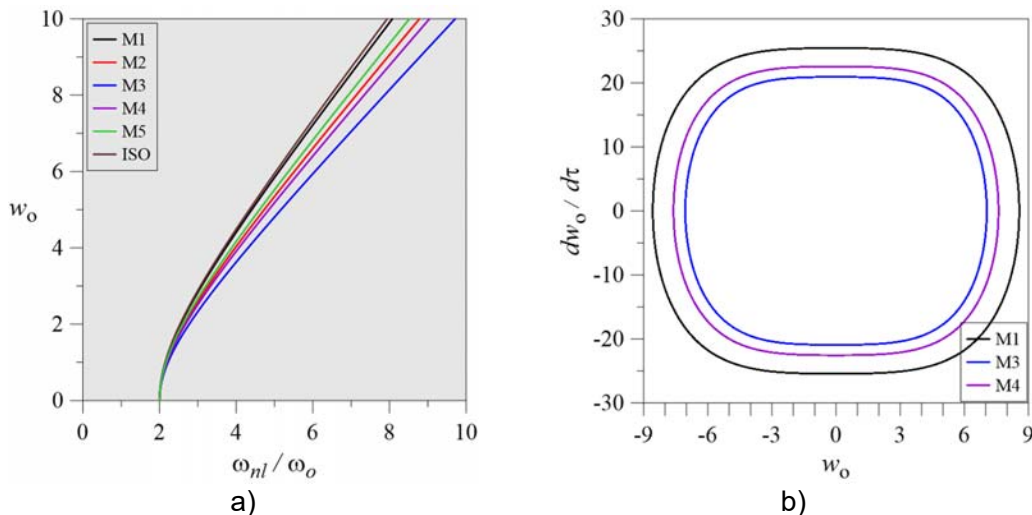
Para os seis materiais escolhidos, na Figura 8.2, são mostradas as curvas de transição que separam soluções estáveis e instáveis parametrizando a frequência de excitação

pela menor frequência natural de cada material,  $\delta = \Omega_f/\omega_o$ , e a magnitude de excitação pela carga crítica,  $Q_d = P_d/P_{cr}$ , correspondente a cada material (ver Capítulos 5 e 6). Observa-se que todas as curvas da Figura 8.2 estão sobrepostas, mostrando que a carga dinâmica de flambagem local é uma função da carga crítica estática, frequência natural e taxa de amortecimento. A linha azul horizontal tracejada corresponde à carga crítica estática ( $Q_{acr} = N_d/N_{cr} = 1.0$ ). Para o caso não amortecido, as regiões de instabilidade (línguas) emanam dos pontos  $\delta = \Omega_f/\omega_o = 2/n$  para  $n = 1, 2, 3 \dots$ . A região principal de ressonância paramétrica ocorre na vizinhança de  $\delta = \Omega_f/\omega_o = 2.0$ , ou seja, a frequência da força igual ao dobro da frequência de excitação. No caso ideal sem amortecimento, a carga crítica é zero em  $\delta = 2.0$ . A segunda região de instabilidade à esquerda corresponde a  $\delta = \Omega_f/\omega_o = 1.0$  e é denominada região de ressonância fundamental. Essas duas regiões são geralmente consideradas as mais relevantes na dinâmica estrutural. As outras regiões de instabilidade à esquerda correspondem a ressonâncias de ordem superior e se acumulam à medida que  $\delta \rightarrow 0$  e  $Q_d \rightarrow 1$  (carga crítica estática). Nas duas principais regiões de ressonância do sistema amortecido, a configuração reta da coluna torna-se instável sob magnitudes de cargas axiais harmônicas consideravelmente mais baixas que a carga estática de flambagem. Por exemplo, a menor carga crítica para  $\xi = 1.45\%$  é 94% menor que no caso estático. Esses resultados evidenciam as perigosas consequências da instabilidade paramétrica em sistemas estruturais levemente amortecidos. No entanto, como mostrado aqui, mesmo em ressonâncias de ordem superior, pode ocorrer instabilidade paramétrica antes da flambagem de Euler. Identifica-se também na Figura 8.2 o tipo de bifurcação associado às fronteiras de instabilidade paramétrica através da teoria de Floquet. Estas fronteiras são alternadamente associadas a bifurcações por duplicação de período (*flip*, em preto) e por quebra de simetria (*pitchfork*, em vermelho). No entanto, os termos não lineares das equações de Mathieu são diferentes, mesmo na forma parametrizada, levando a diferentes sequências de bifurcação para cada material. Observa-se, entretanto, que entre as duas regiões principais de ressonância as cargas de escape e instabilidade paramétrica podem atingir valores bem maiores que a carga crítica estática, podendo este fato ser positivamente usado no controle de vibrações.



**Figura 8.2:** Limites de estabilidade no espaço de controle de força normalizado,  $\xi = 1.45\%$ .

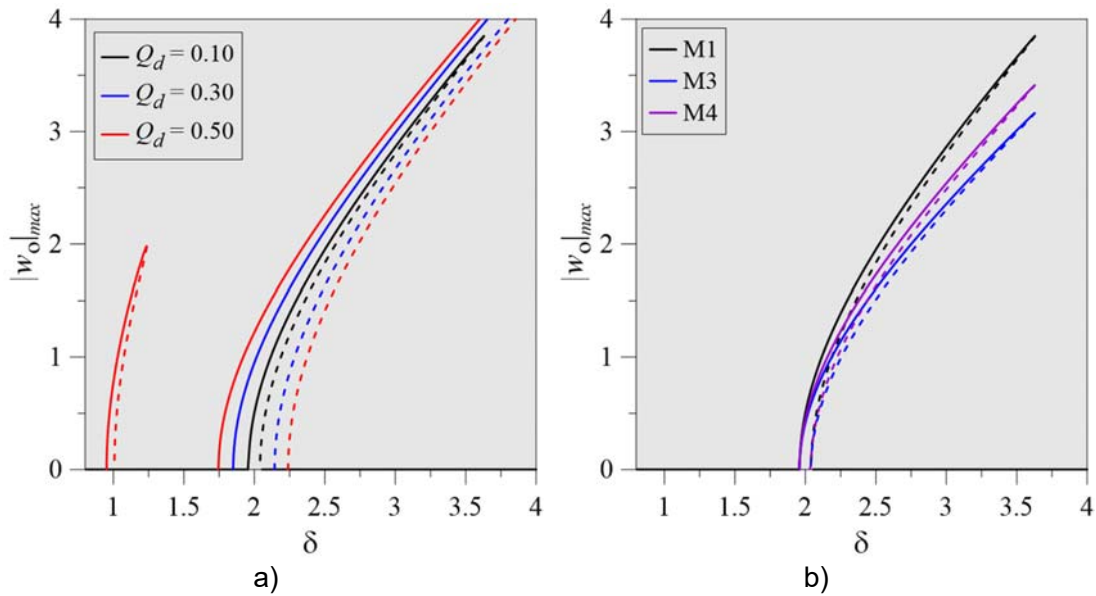
A Figura 8.3a mostra as relações não lineares frequência-amplitude para os seis materiais. Eles são obtidos pelo método do chute (*shooting method*) iniciando cada curva a partir de  $2\omega_0$  (Seydel, 1994; Nayfeh e Balachandran, 1995; Liu e Zhou, 2018). Aqui  $\omega_{nl}$  é a frequência não linear dependente da amplitude. A Figura 8.3b mostra a influência do material nas amplitudes de vibração. A coluna pultrudada exibe um comportamento não linear com ganho de rigidez (comportamento *hardening*), que controla as bifurcações ao longo das sucessivas curvas ascendentes e descendentes da fronteira de instabilidade paramétrica, conforme mostrado a seguir.



**Figura 8.3:** (a) Relação não-linear de frequência-amplitude em função das propriedades do material; (b) Planos de fase para  $\delta = 7.0$ .

A Figura 8.4a mostra os diagramas de bifurcação obtidos através de técnicas de continuação, variando o parâmetro de frequência,  $\delta$ , e mantendo constante o parâmetro de magnitude de excitação  $Q_d$ , enquanto a Figura 8.4b mostra a influência

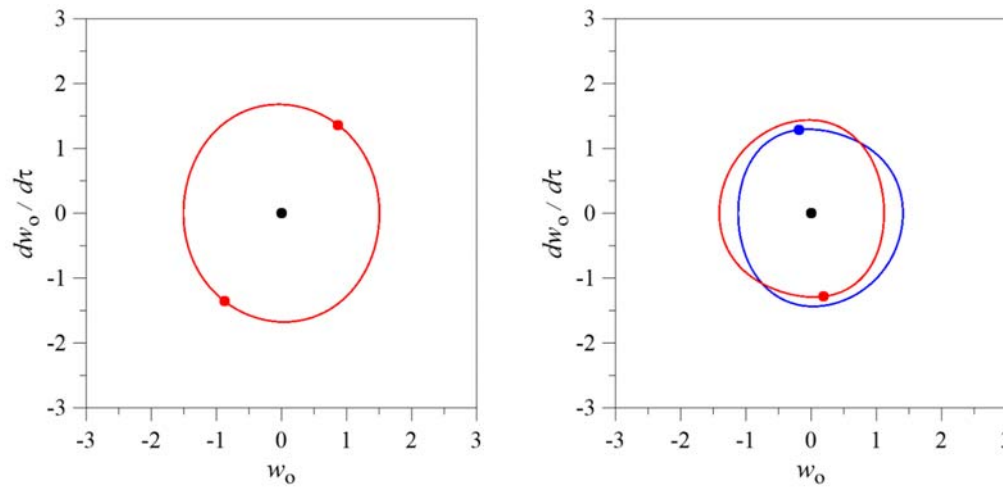
do material no diagrama de bifurcação para  $Q_d = 0.10$ . Como no Capítulo 7, as linhas contínuas mostram pontos fixos (soluções) localmente estáveis, enquanto as tracejadas indicam pontos fixos instáveis.



**Figura 8.4: (a) Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle o parâmetro de frequência de excitação  $\delta$  para valores crescentes da grandeza de excitação,  $Q_d$ , Material M1; (b) Influência do material no diagrama de bifurcação para  $Q_d = 0.10$  na principal região de ressonância paramétrica,  $\xi = 1.45\%$ .**

Os resultados mostram que na principal região de ressonância paramétrica, à medida que  $\delta$  aumenta e atravessa a curva de transição esquerda, a solução trivial se torna instável devido a uma bifurcação flip supercrítica (subsequentemente identificada como FSP) e surge uma solução estável cujo período é o dobro do período da excitação (ver Figura 8.5a - ressonância 2:1). Esse movimento cresce em amplitude à medida que  $\delta$  continua a aumentar e, quando a curva de transição à direita é cruzada; a solução trivial se torna estável novamente devido a uma bifurcação flip subcrítica (FSB) e surge uma solução instável cujo período é o dobro do período da excitação. Esse cenário de bifurcação leva a uma região à direita da fronteira instável onde podem coexistir pelo menos duas soluções estáveis, a solução trivial e a solução periódica estável  $2T$  (no presente trabalho, a notação  $kT$  é adotada para classificar uma solução periódica com um período igual a  $k$  vezes o período de forçamento). A segunda região de instabilidade na vizinhança de  $\delta = \Omega_z/\omega_o = 1.0$ , a curva de transição à esquerda corresponde a bifurcações pitchfork supercríticas (PSP), enquanto o lado direito é o lócus de bifurcações pitchfork subcríticas (PSB). Aqui, à medida que  $\delta$  aumenta e cruza a curva de transição esquerda, a solução trivial se torna instável e duas soluções estáveis de período um (ressonância 1:1) surgem, levando a pelo menos duas soluções coexistentes estáveis (ver Figura 8.5b). Quando a curva de transição à direita é ultrapassada, duas soluções instáveis de período um emergem. Assim surge uma região onde pelo menos três atratores coexistentes. Esses

dois cenários de bifurcação se alternam à medida que o parâmetro de frequência  $\delta$  diminui, conforme ilustrado na Figura 8.2. Para um determinado  $Q_d$ , os dois pontos de bifurcação em cada região de instabilidade são localizados simetricamente em relação a  $\delta = 2/n$ . Em cada região de instabilidade, os dois caminhos de bifurcação coalescem em uma bifurcação sela-nó (SN). Essas sequências de bifurcação são típicas de sistemas estruturais não lineares com ganho de rigidez (*hardening*).

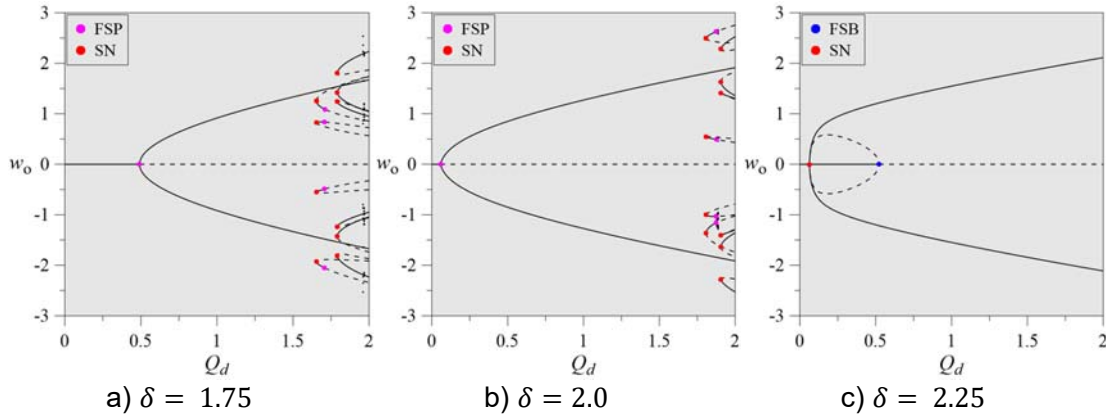


a)  $\delta = 2.25$  and  $Q_d = 0.20$

b)  $\delta = 1.10$  and  $Q_d = 0.50$

**Figura 8.5: a) Resposta típica na região de ressonância paramétrica principal exibindo uma resposta ressonante 2:1; b) Respostas típicas na região de ressonância fundamental exibindo duas respostas ressonantes coexistentes 1:1. Os pontos indicam os pontos fixos do mapa de Poincaré.  $\xi = 1.45\%$ .**

Três diagramas de bifurcação, tendo como parâmetro de controle a magnitude de excitação,  $Q_d$ , na região principal de ressonância paramétrica, para três valores do parâmetro de frequência de excitação,  $\delta$ , são mostrados na Figura 8.6. Para  $\delta = 1.75$  e  $\delta = 2.0$ , a solução trivial se torna instável devido a uma bifurcação flip supercrítica (FSP), que permanece estável em uma grande região de valores de parâmetros  $Q_d$  acima do valor crítico. Para grandes magnitudes de excitação, vários novos ramos da solução são obtidos, delimitados por baixo por bifurcações sela-nó (SN). Algumas dessas soluções sofrem bifurcações flip supercríticas, dando origem a vários atratores coexistentes. Para  $\delta = 2.25$ , por outro lado, a solução trivial sofre uma bifurcação flip subcrítica (FSB) em  $Q_{dcr} = 0.524$ , que se torna estável devido a uma bifurcação sela-nó em  $Q_d = 0.0641$ . Assim, para  $0.0641 \leq Q_{dcr} \leq 0.524$ , soluções estáveis coexistentes são observadas para cargas menores que a crítica, levando a um resultado trivial ou não trivial que depende das condições iniciais, o que não pode ser previsto pela teoria linear.

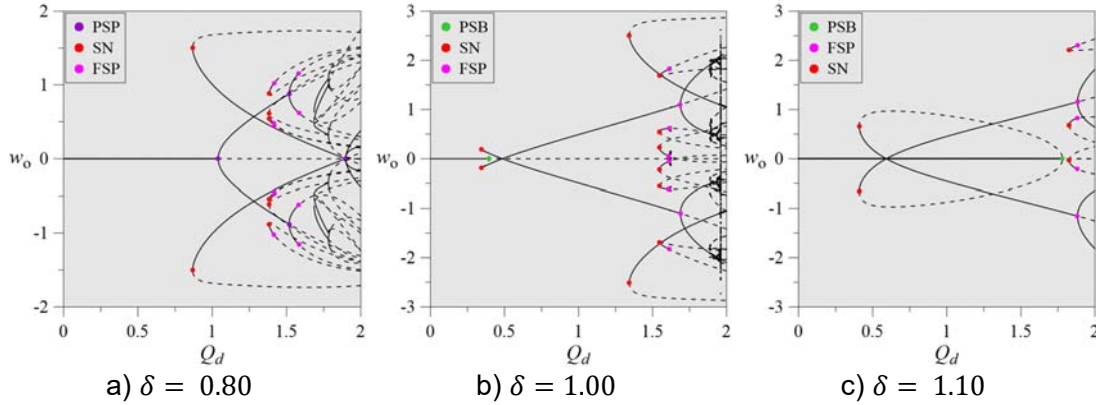


**Figura 8.6: Diagramas de bifurcação do mapa estroboscópico de Poincaré, tendo como parâmetro de controle o parâmetro de magnitude de excitação  $Q_d$  para três valores selecionados da razão de frequência  $\delta$  na principal região de ressonância paramétrica. PSP - Pitchfork supercrítico, PSB - Pitchfork subcrítico, FSP - Flip supercrítico, FSB - Flip subcrítico, SN - Nó de sela.  $\xi = 1.45\%$ .**

A Figura 8.7 mostra diagramas de bifurcação na região de ressonância fundamental. Para  $\delta = 0.80$ , a coluna sofre em  $Q_{d\ cr} = 1.0404$  uma bifurcação pitchfork supercrítica (PSP), levando a duas soluções simétricas de período 1T (ver Figura 8.5b). Cada uma dessas soluções passa por uma bifurcação pitchfork em  $Q_d = 1.5178$ . Para  $Q_d \geq 1.3831$ , vários novos ramos da solução são detectados pelo algoritmo de continuação, decorrentes de bifurcações sela-nó. De particular importância para o projeto são os dois ramos da solução que sofrem uma bifurcação sela-nó em  $Q_d = 0.8687$ , resultando em uma região onde a solução trivial estável coexiste com duas soluções 1T estáveis. Como consequência, no intervalo  $0.8687 \leq Q_d \leq 1.0404$ , a resposta do sistema se torna indeterminada (três soluções estáveis) levando a um resultado trivial ou não trivial função das condições iniciais. Para  $\delta = 1.00$  e  $\delta = 1.10$ , a solução trivial torna-se instável devido a uma bifurcação pitchfork subcrítica (PSB). Novamente, para  $\delta = 1.10$ , a solução para  $Q_d < Q_{d\ cr}$  é indeterminada em uma região grande da magnitude de força  $Q_d$ .

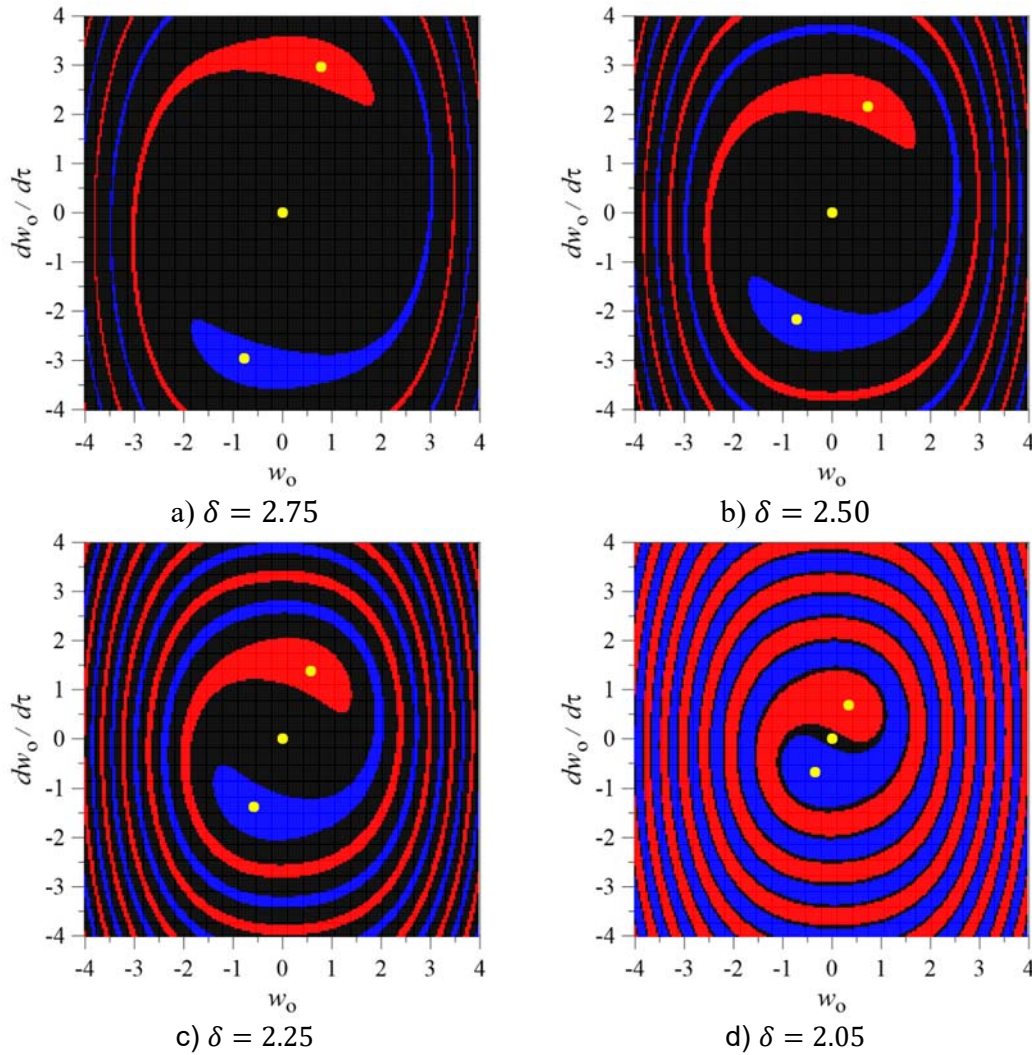
A maioria dos trabalhos sobre instabilidade paramétrica de sistemas estruturais está restrita à determinação das curvas de transição de ressonância paramétrica em função de algum parâmetro de projeto e, a maioria delas utiliza uma versão linearizada das equações de Mathieu-Hill. Análises verdadeiramente não lineares são bastante raras. No entanto, em termos práticos, as informações sobre os limites de estabilidade não são suficientes para avaliar a segurança de uma determinada estrutura. Mesmo os diagramas de bifurcação fornecem uma imagem incompleta do problema, pois são baseados no pressuposto de que o parâmetro de bifurcação varia lentamente. Para avaliar a segurança de uma estrutura na presença de perturbações externas finitas, deve-se analisar também o comportamento das bacias de atração de soluções coexistentes. Pesquisas recentes mostraram que a segurança de uma estrutura em um ambiente dinâmico sujeito a distúrbios finitos depende não apenas da estabilidade local de suas soluções, mas também da bacia contínua em torno de cada atrator, a

erosão total de uma determinada bacia levando ao desaparecimento da solução (Lenci e Rega, 2019; Benedetti et al., 2020).



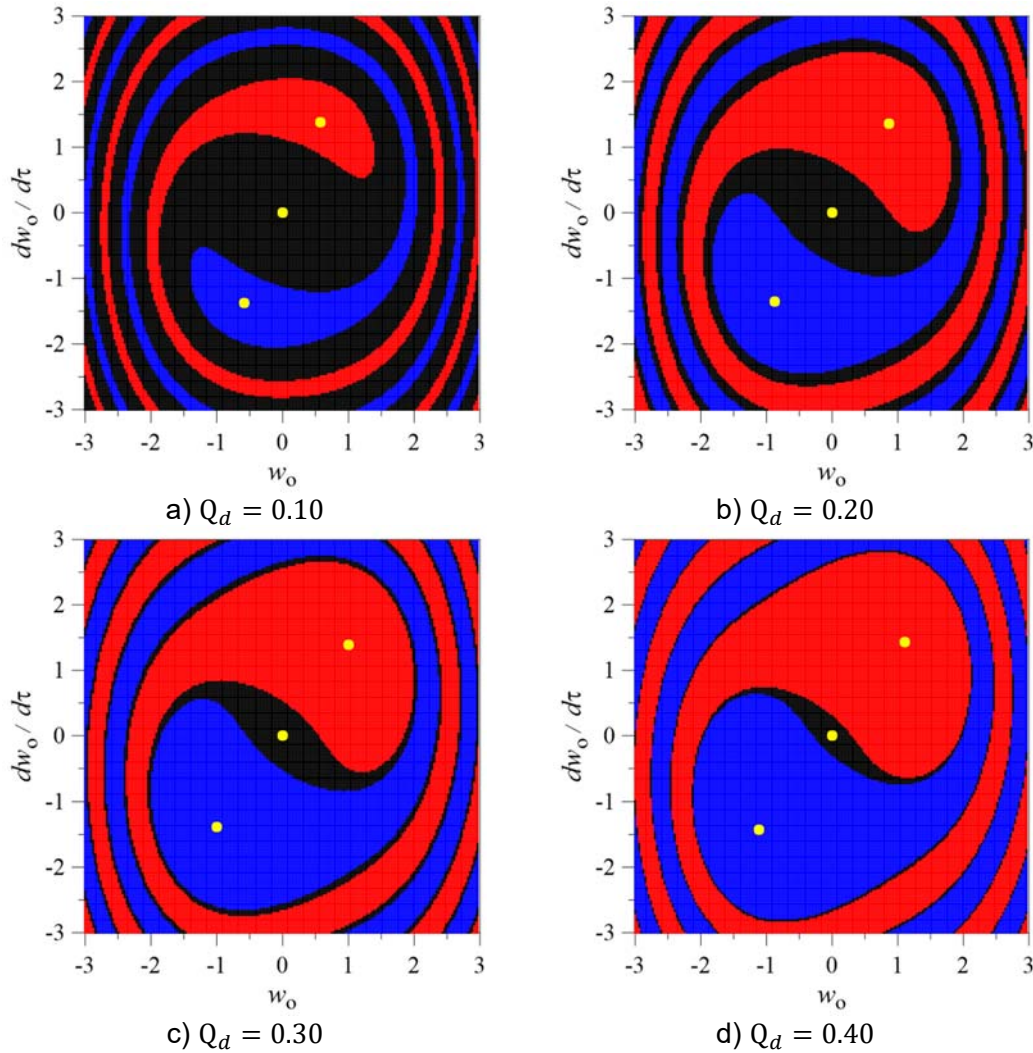
**Figura 8.7:** Diagramas de bifurcação do mapa estroboscópico de Poincaré, tendo como parâmetro de controle o parâmetro de magnitude de excitação  $Q_d$  para três valores selecionados da razão de frequência  $\delta$  na região de ressonância fundamental. PSP - Pitchfork supercrítico, PSB - Pitchfork subcrítico, FSP - Flip supercrítico, FSB - Flip subcrítico, SN - Nó de sela.  $\xi = 1.45\%$ .

Para ilustrar esse conceito, a Figura 8.8 mostra a evolução da bacia de atração para valores selecionados do parâmetro de frequência de excitação  $\delta$  e  $Q_d = 0.10$  (ver Figura 8.4). Para esta magnitude de excitação, a faixa instável dentro da língua é muito estreita. No entanto, após a bifurcação flip subcrítica, existem duas soluções coexistentes, a solução trivial e a solução estável 2T. Na Figura 8.8, a região em preto corresponde às condições iniciais no espaço de fase que convergem para a solução trivial quando  $t \rightarrow \infty$ , enquanto as regiões em vermelho e azul correspondem ao atrator periódico 2T. Os pontos amarelos são os pontos fixos do mapa de Poincaré. Conforme observado na Figura 8.8, à medida que  $\delta$  diminui, os resultados mostram a rápida erosão da bacia de atração da solução trivial. Assim, a coluna pode se tornar instável, mesmo que o ponto  $(\delta, Q_d)$  esteja localizado na região estável da Figura 8.2. A não linearidade da coluna é uma função dos parâmetros do material (ver Figura 8.3 e 8.4b). À medida que a não linearidade aumenta, a probabilidade de instabilidade da solução trivial aumenta devido à diminuição da distância entre os atratores triviais e não triviais.



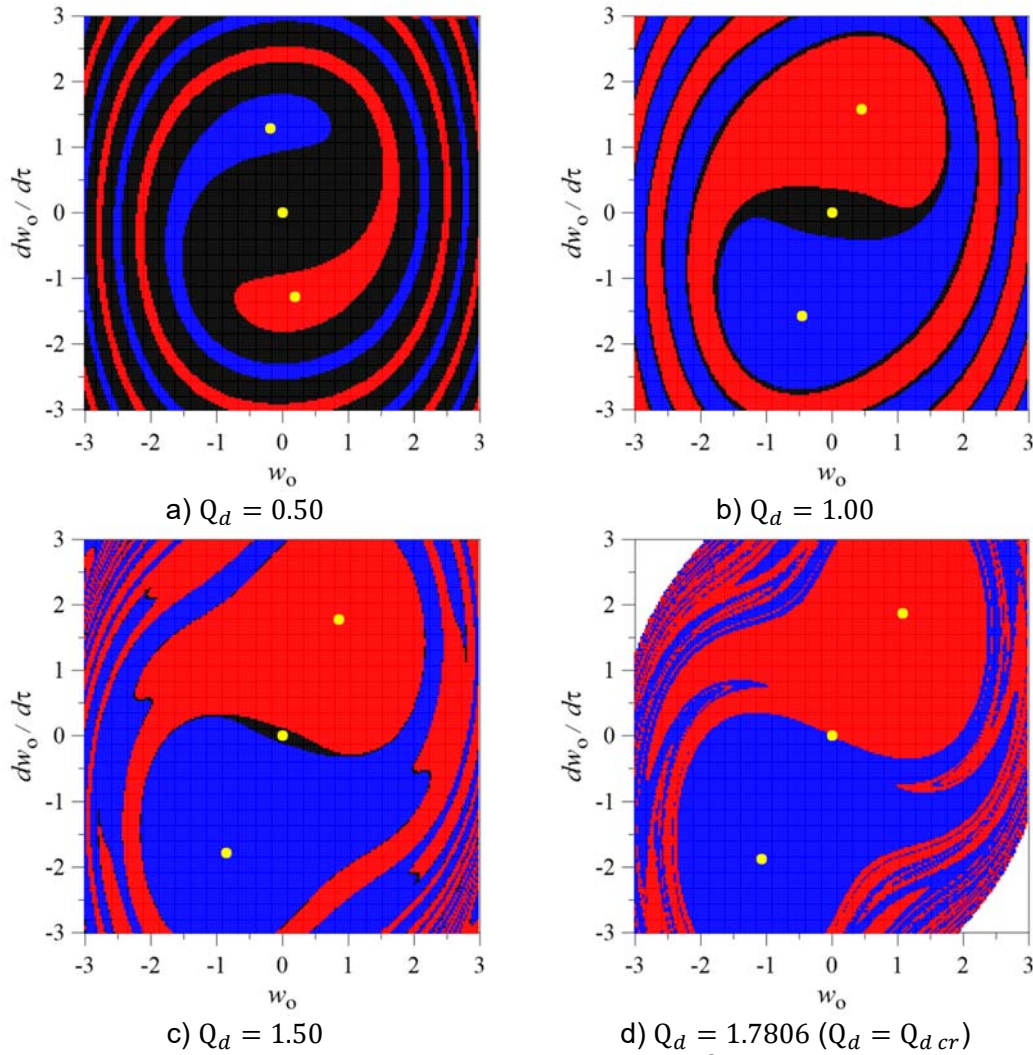
**Figura 8.8: Evolução das bacias de atração para valores selecionados do parâmetro de frequência de forçamento,  $\delta$ ,  $Q_d = 0.10$ ,  $\xi = 1.45\%$ .**

Quando a magnitude de excitação  $Q_d$  aumenta, mantendo constante a razão de frequência  $\delta$ , sempre que ocorre uma bifurcação subcrítica, a solução trivial coexiste com as soluções não triviais estáveis, mesmo que o ponto  $(\delta, Q_d)$  esteja localizado abaixo da curva de transição. A Figura 8.9 mostra a evolução da bacia de atração para  $\delta = 2.25$  (veja o diagrama de bifurcação na Figura 8.6c). Em  $Q_d = 0.0641$ , uma bifurcação sela-nó ocorre em um nível de carga muito menor que a carga crítica ( $Q_{dcr} = 0.524$ ) e, assim, à medida que  $Q_d$  aumenta além desse nível de carga, existem duas soluções concorrentes e novamente uma rápida erosão da bacia associado à solução trivial estável é observada quando  $Q_d$  se aproxima de  $Q_{dcr}$ .



**Figura 8.9: Evolução das bacias de atração das duas soluções coexistentes variando a magnitude da força escalada  $Q_d$  como parâmetro de bifurcação,  $\delta = 2.25$ , (principal região de ressonância paramétrica),  $\xi = 1.45\%$ .**

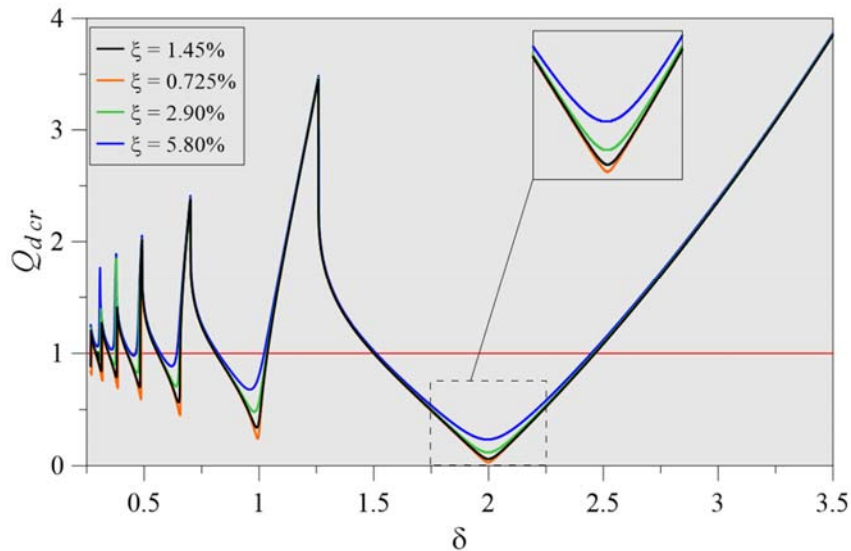
A evolução da bacia de atração para  $\delta = 1.10$  (veja o diagrama de bifurcação na Figura 8.7c) é ilustrada na Figura 8.10. Aqui a bifurcação pitchfork na qual a solução trivial se torna instável ocorre em  $Q_d = 1.7806$  enquanto a bifurcação sela-nó ocorre em  $Q_d = 0.4091$ , muito menor que a carga crítica dinâmica. Nesse intervalo, coexistem três soluções: a trivial (região em preto) e os dois atratores periódicos 1T (regiões azul e vermelha). Os presentes resultados mostram que, para um projeto seguro, é obrigatória uma análise detalhada das bifurcações, juntamente com a análise da evolução e erosão de bacias coexistentes, principalmente nas regiões abaixo do limite de estabilidade, onde ocorrem soluções coexistentes.



**Figura 8.10: Evolução das bacias de atração das três soluções coexistentes variando a amplitude de excitação escalada  $Q_d$  como parâmetro de bifurcação.  $\delta = 1.10$  (região de ressonância fundamental).  $\xi = 1.45\%$ .**

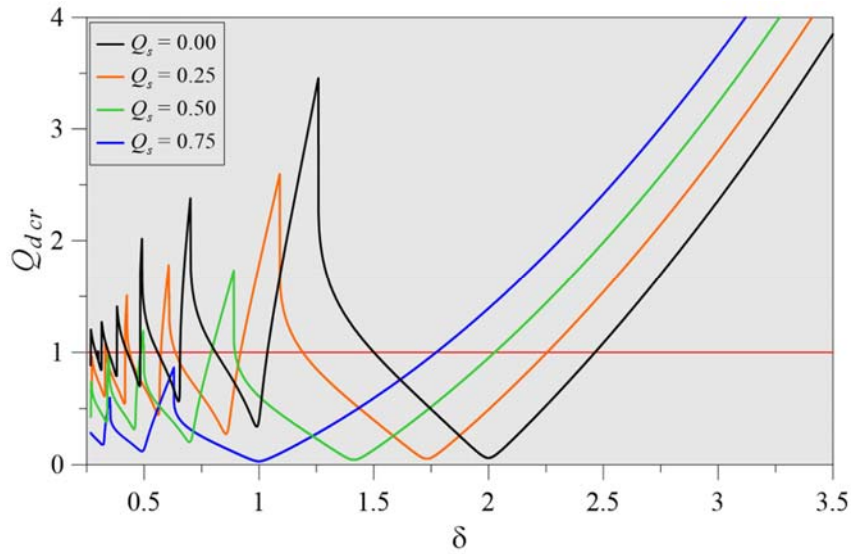
Faltam informações sobre as características de amortecimento dos perfis de FRP. Com base nos poucos resultados experimentais, o seguinte intervalo é adotado na análise paramétrica:  $0.075 \leq \xi \leq 0.58$  (Boscato e Russo, 2009; Song et al., 2004; Ahmadi et al., 2018, Wei et al., 2019). A Figura 8.11 mostra as curvas de transição obtidas para quatro valores dos coeficientes de amortecimento nesse intervalo. A influência do amortecimento é afastar as curvas de transição do eixo horizontal, aumentando assim a carga crítica e diminuindo ligeiramente a largura das regiões de instabilidade. O efeito é particularmente visível em torno de pontos  $\delta = 2/n$ . Longe desses pontos, o efeito do amortecimento praticamente desaparece. Na forma parametrizada, existe uma relação funcional entre a menor força crítica ( $Q_{d\ cr}$ ) e o fator de amortecimento. Nas três primeiras regiões de instabilidade da direita, a carga crítica mínima é dada, respectivamente, por  $Q_{d\ cr} \cong 4.13\xi$ ,  $Q_{d\ cr} \cong 0.89\sqrt{\xi}$  e  $Q_{d\ cr} \cong 1.067\sqrt[3]{\xi}$ . Mesmo para uma alta taxa de amortecimento ( $\xi = 0.58$ ), cargas

dinâmicas de flambagem muito menores que a carga estática crítica são observadas nas principais regiões de ressonância, indicando que um amortecimento muito maior é necessário para se evitar instabilidade paramétrica.



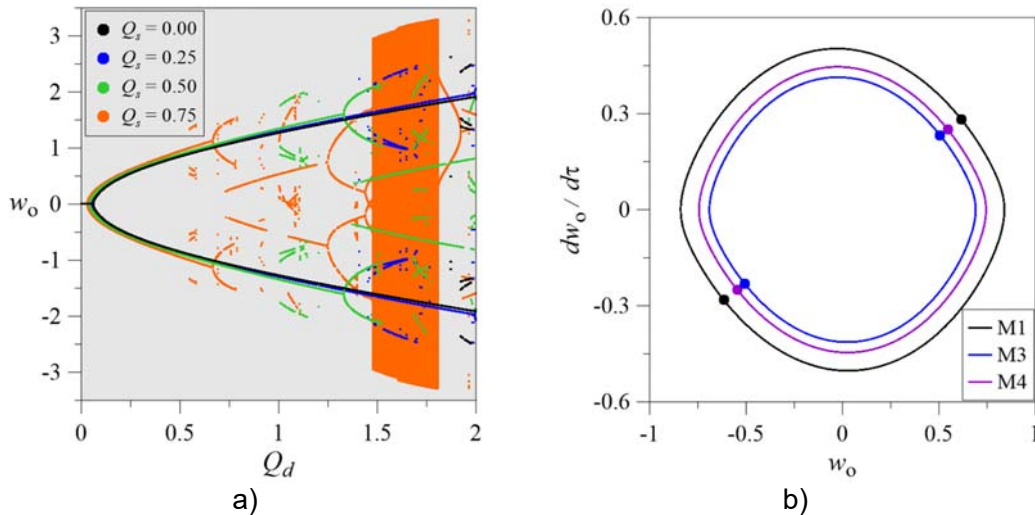
**Figura 8.11: Influência do parâmetro de amortecimento viscoso linear,  $\xi$ , nos limites de estabilidade no espaço de controle de força normalizado.**

Os sistemas estruturais são geralmente construídos para suportar cargas estáticas específicas. Portanto, é importante estudar o efeito de uma carga estática inicial nos limites de estabilidade e nos diagramas de bifurcação. A Figura 8.12 mostra os limites de instabilidade com o aumento dos valores do parâmetro de carga compressiva estática não dimensional  $Q_s$ . À medida que  $Q_s$  aumenta, as regiões de instabilidade se movem para a esquerda devido à diminuição da frequência fundamental da coluna carregada,  $\omega_p$ , como mostrado no Capítulo 6. Como em muitas estruturas, existe uma relação linear da frequência fundamental ao quadrado com a carga estática, ou seja,  $\omega_p^2 = \omega_0^2(1 - Q_s)$ . Além disso, a carga crítica dinâmica para uma determinada taxa de amortecimento  $\xi$  diminui gradativamente com a carga estática. Por exemplo, para  $Q_s = 0.75$ ,  $Q_{d\ cr}$  é metade do valor do caso não carregado ( $Q_{d\ cr} \propto \sqrt{1 - Q_s}$ ).



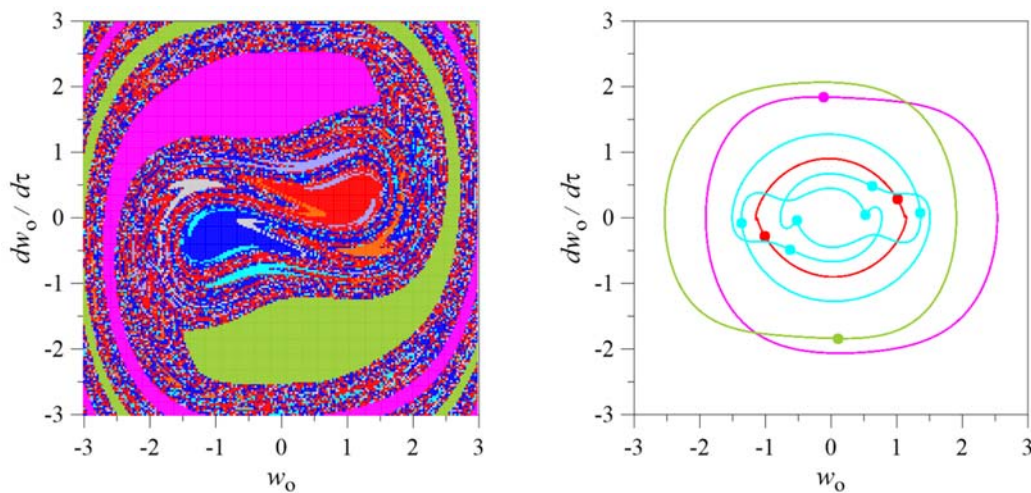
**Figura 8.12:** Influência da pré-carga estática,  $Q_s$ , no limite da instabilidade paramétrica no espaço de controle de força normalizado.  $\xi = 1.45\%$ .

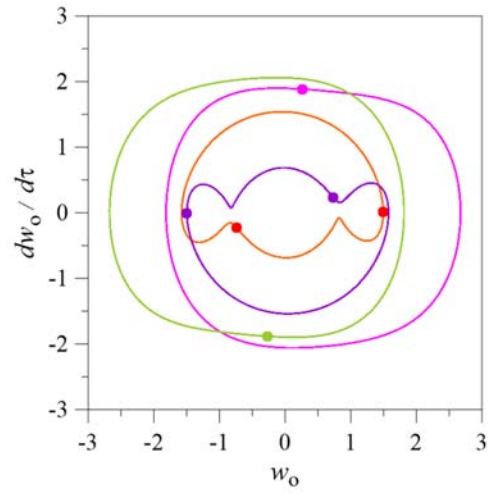
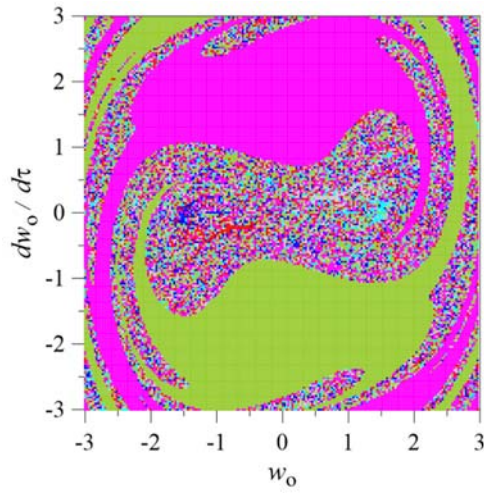
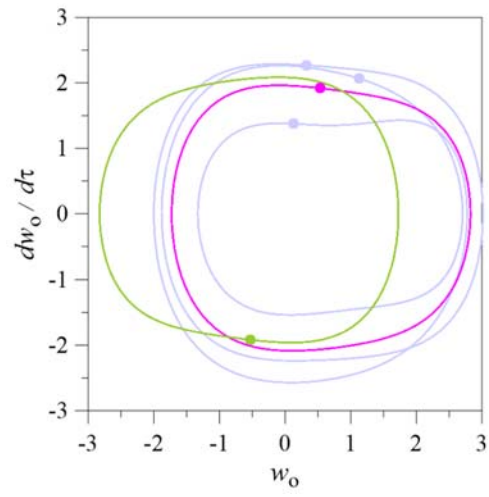
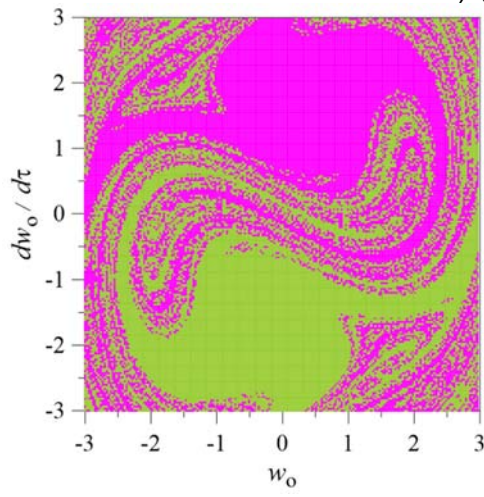
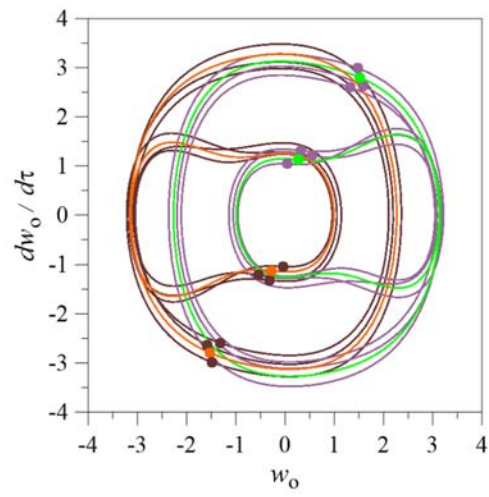
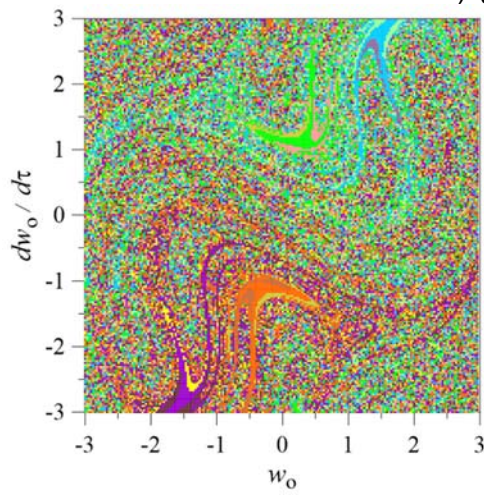
Além disso, sequências de bifurcações cada vez mais complexas são observadas à medida que a carga estática aumenta, aumentando os efeitos da não linearidade geométrica, conforme ilustrado na Figura 8.13a, aumentando o número de atratores coexistentes com uma consequência direta na topologia das bacias de atração. O material afeta a amplitude da vibração e os parâmetros críticos, como ilustrado na Figura 8.13 b).

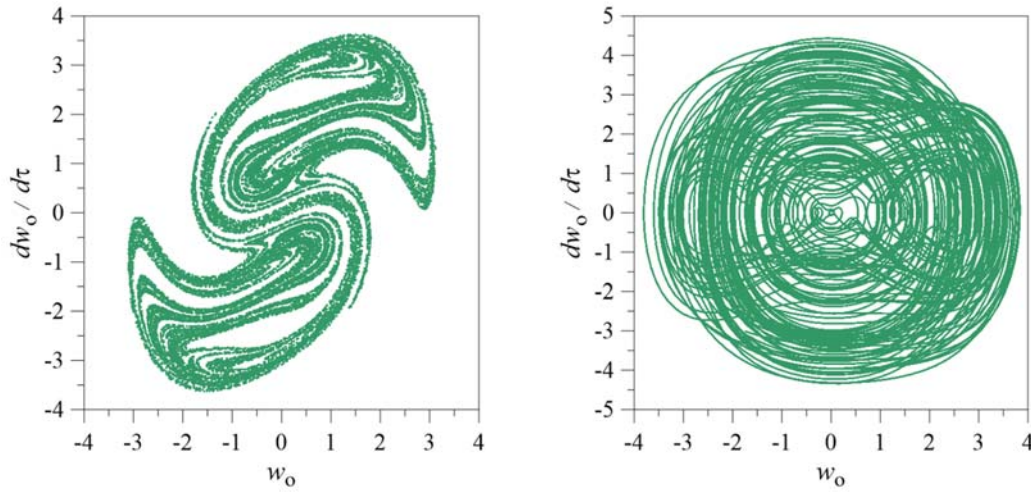


**Figura 8.13:** a) Diagramas de bifurcação do mapa estroboscópico de Poincaré tendo como parâmetro de controle o parâmetro de magnitude de excitação  $Q_d$  para aumentar a pré-carga estática na principal região de ressonância paramétrica. Material M1. b) Influência do material na magnitude da vibração,  $Q_d = 0.25$ .  $\xi = 1.45\%$ .

Para  $Q_s = 0.75$ , a Figura 8.14 mostra as bacias de atração e as soluções estáveis coexistentes para valores crescentes da magnitude de excitação  $Q_d$  e  $\delta = \Omega_f/\omega_o = 1.0$  ( $\Omega_f/\omega_p = 2.0$ ). Inicialmente, apenas a solução 2T resultante da bifurcação é observada. No entanto, para  $Q_d = 0.55$ , quatro atratores são detectados: a solução 2T original (pequena amplitude), uma resposta de amplitude média de período seis e duas soluções 1T simétricas de grande amplitude. A bacia de atração já exibe uma grande região fractal e a maioria das condições iniciais converge para as duas soluções 1T de grande amplitude, que apresentam grandes bacias não corrompidas ao redor dos seus atratores, indicando elevados fatores de integridade dinâmica. Quando a magnitude de excitação aumenta para  $Q_d = 0.76$ , as duas soluções 1T de grande amplitude permanecem, a solução 6T desaparece e a solução 2T original sofre uma bifurcação invertida, levando a duas novas soluções 2T com bacias de atração desprezíveis. Em  $Q_d = 1.00$ , as duas soluções 1T dominam a bacia de atração, embora uma solução 3T seja detectada com uma bacia desprezível. Em  $Q_d = 1.39$ , duas soluções 2T coexistem com duas soluções 6T e a bacia se torna altamente fractal. Neste caso os fatores de integridade dinâmica de todas as soluções coexistentes são praticamente nulos, o que leva a uma imprevisibilidade total. Há uma grande janela caótica entre  $Q_d = 0.7584$  e  $Q_d = 1.9648$ . Um atrator caótico típico desta região é ilustrado na Figura 8.37e (observe a influência subjacente dos pontos fixos na Figura 8.37d na estrutura do atrator caótico da Figura 8.37e). Assim, uma variedade de movimentos periódicos é observada, dependendo dos parâmetros  $(\delta, Q_d)$ . Portanto, a probabilidade de instabilidade paramétrica aumenta à medida que a carga estática aumenta, bem como a existência de um número crescente de atratores coexistentes e limites da bacia fractal, levando a baixos fatores de integridade dinâmica. Deve-se mencionar que os códigos de projeto permitem a aplicação de cargas axiais superiores à carga crítica estática em estruturas de placas devido à rigidez pós-crítica geralmente alta ( $E^* = 0.5E$  para uma placa isotrópica) e à redistribuição de tensões na faixa de pós-flambagem (Ziemian, 2010). No caso de perfis pultrudados ainda não há especificações sobre a rigidez pós-crítica.

a)  $Q_d = 0.55$

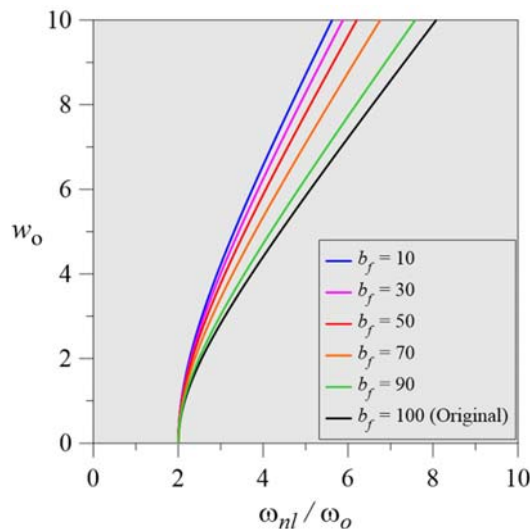
b)  $Q_d = 0.76$ c)  $Q_d = 1.00$ d)  $Q_d = 1.39$



e)  $Q_d = 1.60$

**Figura 8.14: Bacias de atração e soluções coexistentes para a coluna pré-carregada na principal região de ressonância paramétrica para valores crescentes da magnitude de excitação  $Q_d$ .  $Q_s=0.75$  e  $\delta = \Omega_f/\omega_o = 1.0$  ( $\Omega_f/\omega_p = 2.0$ ). Os pontos correspondem aos pontos fixos do mapa de Poincaré.  $\xi = 1.45\%$ .**

Os resultados apresentados até agora foram obtidos para uma geometria de seção transversal com  $b_f/b_w = 0.5$ . A proporção  $b_f/b_w$  é um importante parâmetro de projeto que influencia a frequência natural e a carga crítica, como visto nos capítulos anteriores. No entanto, no espaço parametrizado, todas as curvas de transição são sobrepostas (Figura 8.2), dependendo apenas da taxa de amortecimento (Figura 8.11). Por outro lado, os termos não lineares são diferentes, conforme ilustrado pelas relações não lineares frequência-amplitude, Figura 8.15, onde a não linearidade do tipo hardening aumenta com a largura da mesa  $b_f$



**Figura 8.15: Relação frequência-amplitude para valores crescentes da largura do flange  $b_f$  (em mm).  $b_w = 200\text{mm}$ .**

## 8.2

### Análise Global: Discretização e Determinação das Equações Não Lineares de Movimento.

Como no caso local, no estudo da instabilidade dinâmica global da coluna considera-se uma carga axial da forma:

$$P(t) = P_s + P_d \sin(\Omega_f t) \quad (8.3)$$

em que  $P_s$  é a carga axial estática,  $P_d$  é a magnitude da excitação harmônica e  $\Omega_f$  é a frequência de excitação. Dividindo a carga aplicada pela carga crítica estática,  $P_{cr}$ , e considerando um tempo adimensional  $\tau = \omega_0 t$ , onde  $\omega_0$  é a menor frequência natural, a excitação axial adimensional assume a forma:

$$Q(\tau) = Q_s + Q_d \sin(\delta \tau) \quad (8.4)$$

sendo  $Q_s = P_s/P_{cr}$  o fator de carga estática,  $Q_d = P_d/P_{cr}$  o fator de carga dinâmica e  $\delta = \Omega_f/\omega_0$  a razão de frequências. Além disso, na análise a seguir  $\xi$  é o coeficiente de amortecimento viscoso adimensional.

Substituindo as funções (6.1) a (6.3) que descrevem o campo de deslocamentos em função do tempo e as funções (5.4) a (5.6) que descrevem as imperfeições geométricas iniciais nas equações não lineares de movimento (3.63) a (3.65), obtém-se, aplicando o método de Galerkin, o seguinte sistema de três equações diferenciais não lineares de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{mL}{2} \left( \frac{d^2}{dt^2} v + z_c \frac{d^2}{dt^2} \theta \right) + EI_z \frac{\pi^4}{2L^3} \left[ v - v_o + \frac{\pi^2}{8L^2} (v^3 - v_o^3) \right] \\ - P(t) \frac{\pi}{L} \left[ \frac{\pi}{2} (v + z_c \theta_x) + \frac{2}{3} y_c \theta_x^2 \right] \\ + (EI_z - EI_y) \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} w \theta_x - \frac{3}{8} \pi v \theta_x^2 \right) - 2 \frac{L}{\pi} q_y \\ + EI_y \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} w_o \theta_x - \frac{1}{8} \frac{\pi^3}{L^2} v_o \theta_{ox} \theta_x \right) \\ - EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} w_o \theta_{ox} - \frac{3}{16} \pi v_o (\theta_{ox}^2 + \theta_x^2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{mL}{2} \left( \frac{d^2}{dt^2} w - y_c \frac{d^2}{dt^2} \theta_x \right) + EI_y \frac{\pi^4}{2L^3} \left[ w - w_o + \frac{\pi^2}{8L^2} (w^3 - w_o^3) \right] \\
& - P(t) \frac{\pi}{L} \left[ \frac{\pi}{2} (w - y_c \theta_x) + \frac{2}{3} z_c \theta_x^2 \right] \\
& + (EI_z - EI_y) \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} v \theta_x + \frac{3}{8} \pi w \theta_x^2 \right) - 2 \frac{L}{\pi} q_z \\
& + EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} v_o \theta_x + \frac{3}{8} \pi w_o \theta_{ox} \theta_x \right) \\
& + EI_y \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{4}{3} v_o \theta_{ox} + \frac{3}{16} \pi w_o (\theta_{ox}^2 + \theta_x^2) \right) = 0
\end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{mL}{2} \left( I_o \frac{d^2}{dt^2} \theta_x + z_c \frac{d^2}{dt^2} v - y_c \frac{d^2}{dt^2} w \right) + \frac{1}{2} \frac{\pi^4}{L^3} EI_w (\theta_x - \theta_{ox}) + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{L} GJ (\theta_x - \theta_{ox}) \\
& + \frac{3}{16} \frac{\pi^4}{L^3} EI_t (\theta_x^3 - \theta_{ox}^3) + EI_z \frac{\pi^4}{2L^3} \left[ v - v_o + \frac{\pi^2}{8L^2} (v^3 - v_o^3) \right] \\
& - P(t) \frac{\pi}{L} \left[ \frac{\pi}{2} I_o \theta_x - y_c \left( \frac{\pi}{2} w - \frac{4}{3} v \theta_x \right) + z_c \left( \frac{\pi}{2} v + \frac{4}{3} w \theta_x \right) \right] \\
& + (EI_z - EI_y) \frac{\pi^3}{L^3} \left[ \frac{4}{3} v w - \frac{3}{8} \pi (v^2 \theta_x - w^2 \theta_x) \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{L}{\pi} q_z (\pi e_z \theta_x - 4 e_y) \\
& - EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{3}{8} \pi w_o w \theta_{ox} + \frac{4}{3} w v_o - \frac{3}{8} \pi v_o v \theta_x \right) \\
& + EI_y \frac{\pi^3}{L^3} \left( \frac{3}{8} \pi w_o w \theta_x + \frac{4}{3} w_o v - \frac{3}{8} \pi v_o \theta_{ox} v \right) = 0
\end{aligned} \tag{8.7}$$

As equações anteriores formam um sistema de três equações não lineares acopladas, com coeficientes dependentes do tempo (periódicos) que devem ser resolvidas através de métodos numéricos. A linearização das Equações (8.5) a (8.7) forma um sistema de equações de Mathieu-Hill que ocorre normalmente no estudo da estabilidade do movimento de sistemas não lineares autônomos (Xie, 2006; Kovacic, 2018).

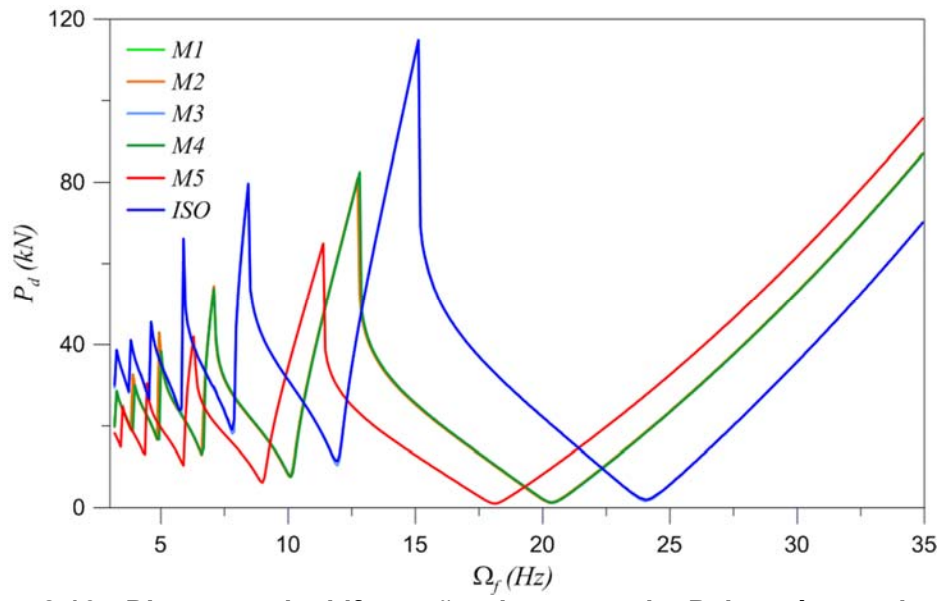
### 8.2.1

#### Fronteiras de Instabilidade Paramétrica da Coluna Perfeita

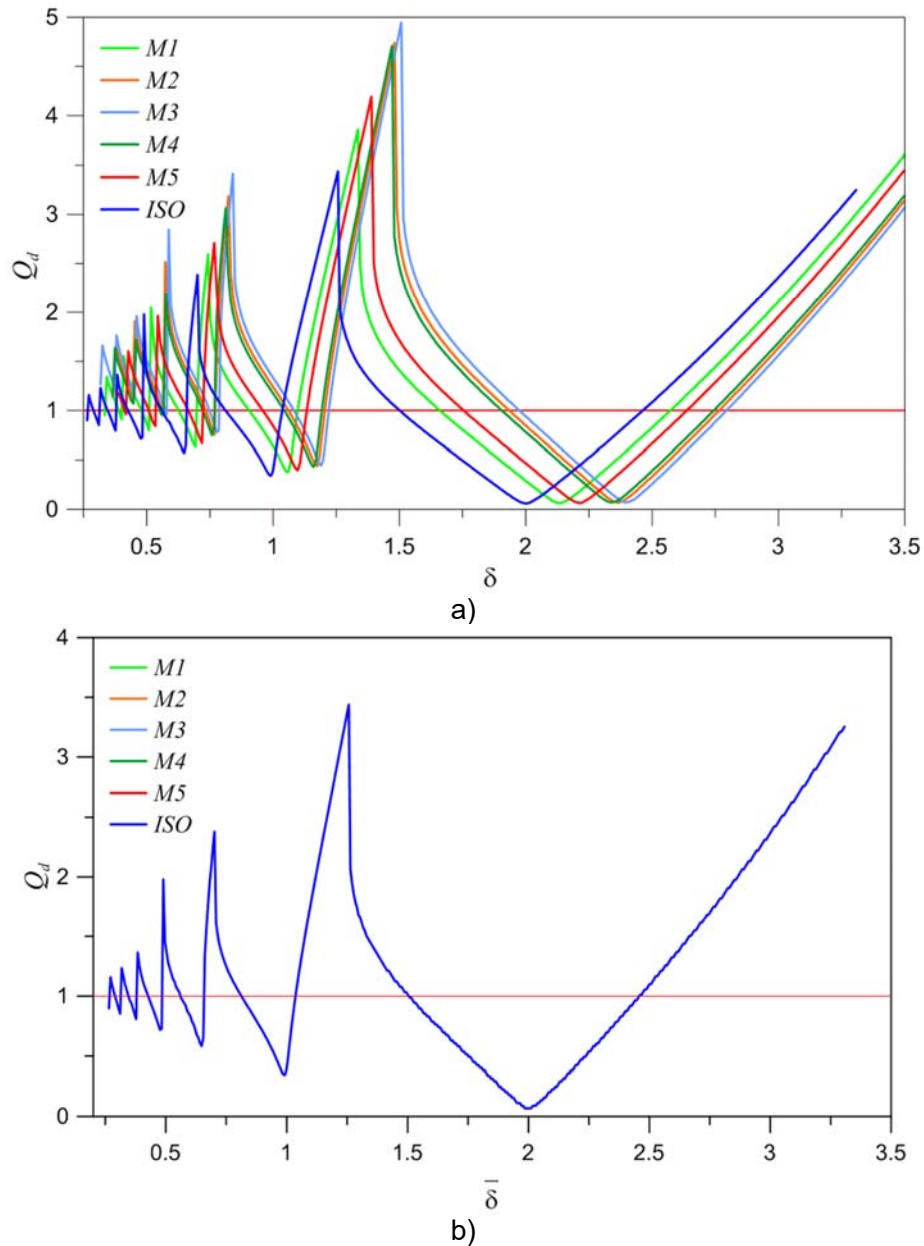
Inicialmente considera-se o perfil C200x100x5 cujas dimensões e propriedades geométricas são apresentadas na Tabela 5.1, com  $L = 4m$  ( $L > L_{lg}$ ) e uma taxa de amortecimento  $\xi = 1.45\%$ . Para esse comprimento e seção, a flambagem estática está associada ao modo de flexo-torção (ver Figura 5.8). As equações para os seis materiais são mostradas explicitamente no Apêndice IV. A Figura 8.16 mostra as curvas de transição que separam soluções estáveis e instáveis para os seis materiais. Nota-se a grande influência do módulo de elasticidade longitudinal,  $E_1$ , na carga crítica dinâmica e na frequência fundamental. À medida que  $E_1$  diminui a frequência fundamental também diminui deslocando as curvas de instabilidade paramétrica para a esquerda. As fronteiras de estabilidade paramétrica associadas a um mesmo módulo de elasticidade longitudinal,  $E_1$ , são sobrepostas (ver Tabela 5.1). Por exemplo, os

materiais M3 e ISO têm a mesma fronteira, o mesmo acontece com os materiais M1, M2 e M4.

Para os seis materiais escolhidos, a Figura 8.17a mostra as curvas de transição que separam soluções estáveis e instáveis parametrizando a frequência de excitação pela menor frequência natural (frequência fundamental) de cada material,  $\delta = \Omega_f/\omega_0$ , que está associada ao modo de flexo-torção para todos os materiais, e a magnitude de excitação pela carga crítica,  $Q_d = P_d/P_{cr}$ , correspondente a cada material (ver Capítulos 5 e 6). Observa-se que a menor carga crítica dinâmica, em torno de  $\Omega_f = 2\omega_0$ , para os seis materiais é praticamente a mesma decrescendo levemente com  $E_1$ . O efeito de  $E_1$  aumenta nas regiões seguintes à esquerda. Para o material isotrópico as regiões de instabilidade (línguas) emanam dos pontos  $\delta = \Omega_f/\omega_0 = 2/n$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Assim a principal região de ressonância paramétrica ocorre na vizinhança de  $\delta = 2$  e a região de ressonância fundamental na vizinhança de  $\delta = 1$ , que são as mais relevantes na dinâmica estrutural, onde a carga crítica dinâmica é bem inferior à carga crítica estática (reta vermelha horizontal). Por exemplo, no caso do material isotrópico para  $\xi = 1.45\%$  a carga crítica dinâmica é 6% da carga crítica estática. No caso dos materiais ortotrópicos, as regiões de instabilidade emanam de diferentes valores de  $\delta$ . À medida que a frequência natural diminui, as regiões de instabilidade se movem para a direita em virtude da normalização da frequência de excitação (ver Tabela 6.3). Já se for usado como referência no processo de adimensionalização da frequência de excitação não a frequência fundamental, mas a frequência associada ao modo de flexão que é a segunda menor frequência ( $\bar{\delta} = \Omega_f/\omega_f$ ), todas as curvas se superpõem como ilustra a Figura 8.17b, independente do valor de  $b_f$ . Isto mostra que a fronteira de instabilidade paramétrica está associada ao modo de vibração em torno do eixo de inércia mínima. Isto será demonstrado mais à frente na análise dos diagramas de bifurcação.



**Figura 8.16:** Diagrama de bifurcação do mapa de Poincaré no plano de frequência de excitação vs. magnitude de excitação,  $L=4m$ ,  $\xi = 1.45\%$ .

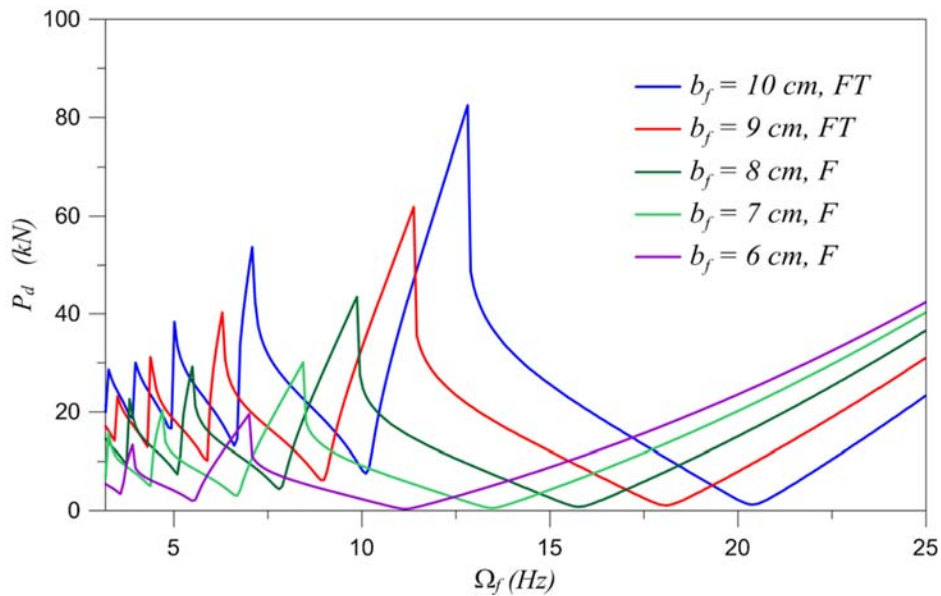


**Figura 8.17: Limites de estabilidade normalizado,  $L=4m$ ,  $\xi = 1.45\%$ : (a) frequência de excitação normalizada com respeito à frequência fundamental; (b) frequência de excitação normalizada com respeito à menor frequência de flexão**

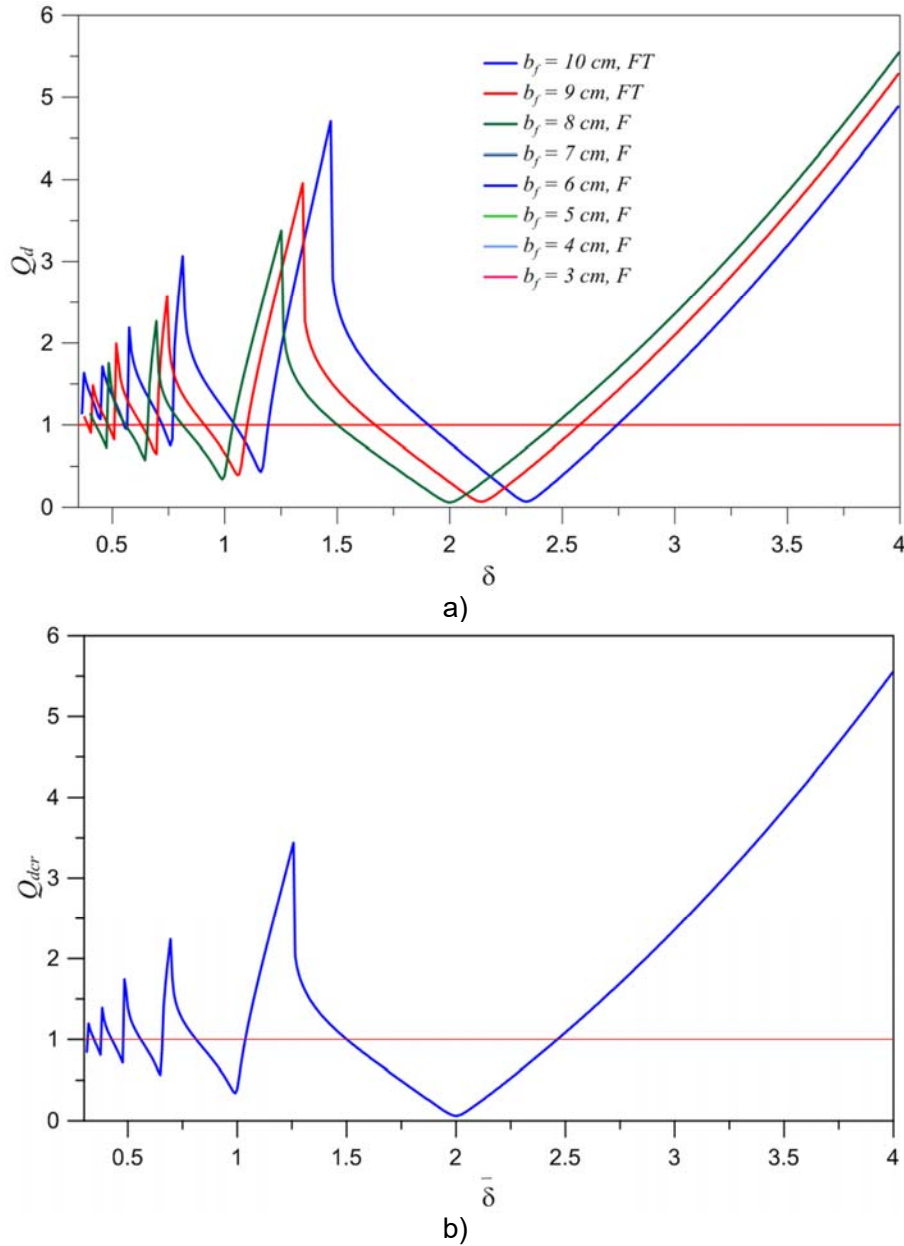
A análise da influência da largura da mesa,  $b_f$ , nas fronteiras de estabilidade é mostrada na Figura 8.18, para o material M4, em função das variáveis dimensionais  $\Omega_f$  e  $P_d$ . Como observado no Capítulo 5, para  $b_f < 8.5cm$  o modo crítico é o modo de flexão em torno do eixo de menor inércia, enquanto para  $b_f > 8.5cm$  o modo crítico é o modo de flexo-torção. Observa-se o aumento da carga crítica dinâmica com o aumento de  $b_f$ . Também se verifica um deslocamento das fronteiras de

instabilidade para a direita em função do aumento da frequência fundamental com o aumento de  $b_f$ .

Na Figura 8.19a, as fronteiras de estabilidade são mostradas em função das variáveis adimensionais  $\delta$  e  $Q_d$ . Observa-se que as curvas de transição associadas ao modo de flexão são sobrepostas ( $b_f$  variando de 3cm a 8cm). Já para mesas maiores, onde o modo de flambagem passa a ser o modo de flexo torção ( $b_f = 9\text{cm}$  e  $b_f = 10\text{cm}$ ), as regiões de instabilidade se movem para a direita com o aumento de  $b_f$ . Já se for usada como referência no processo de adimensionalização a frequência associada ao modo de flexão ( $\bar{\delta} = \Omega_f/\omega_f$ ), todas as curvas se superpõem, como ilustra a Figura 8.19b, independente do valor de  $b_f$ . Novamente, isto mostra que a fronteira de instabilidade paramétrica está associada ao modo de vibração em torno do eixo de menor inércia.



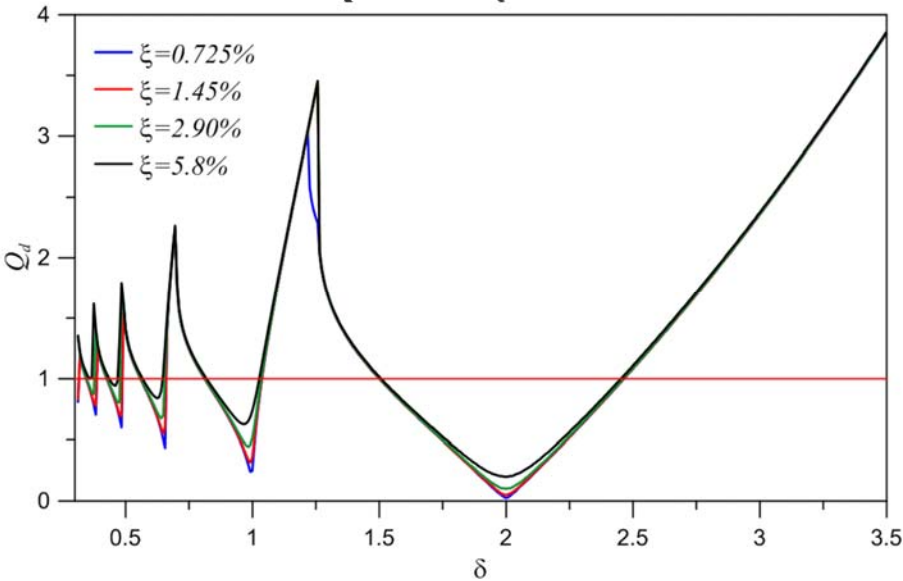
**Figura 8.18: Análise da influência do parâmetro  $b_f$  nas fronteiras de instabilidade, Material M4,  $L=4\text{m}$ ,  $\xi = 1.45\%$ .**



**Figura 8.19: Análise da influência da relação  $b_f/b_w$  nas fronteiras de instabilidade, Material M4,  $L=4m$ ,  $\xi = 1.45\%$ .(a) frequência de excitação normalizada com respeito à frequência fundamental; (b) frequência de excitação normalizada com respeito à menor frequência de flexão**

A influência do amortecimento nas fronteiras de instabilidade é analisada na Figura 8.20 variando o amortecimento dentro de uma faixa de valores compatível com o material pultrudado (Boscato e Russo, 2009; Song et al., 2004; Ahmadi et al., 2018, Wei et al., 2019). Mais uma vez, considera-se o material M4 e  $L = 4m$ . Os resultados mostram que o amortecimento tem basicamente influência na vizinhança próxima ao valor mínimo de cada região de instabilidade, aumentando a carga crítica. Na região

principal de instabilidade paramétrica ( $\delta \cong 2$ ), a carga crítica mínima é dada aproximadamente por  $Q_{d\ cr} \cong 3.4483\xi$ . Já na região de ressonância fundamental ( $\delta \cong 1$ ) a carga crítica mínima é dada aproximadamente por  $Q_{d\ cr} \cong 2.3343\xi^{0.4662}$ . Na terceira região, em torno de  $\delta \cong 2/3$ , o valor mínimo é dado aproximadamente por  $Q_{d\ cr} \cong 2.0596\xi^{0.3144}$ . Como na análise local, mesmo considerando uma alta taxa de amortecimento ( $\xi = 0.58$ ), cargas críticas dinâmicas muito menores que a carga estática crítica são observadas nas principais regiões de ressonância, como se pode observar na Tabela 8.2, onde são apresentadas as cargas críticas mínimas em função da taxa de amortecimento nas três primeiras regiões de instabilidade.

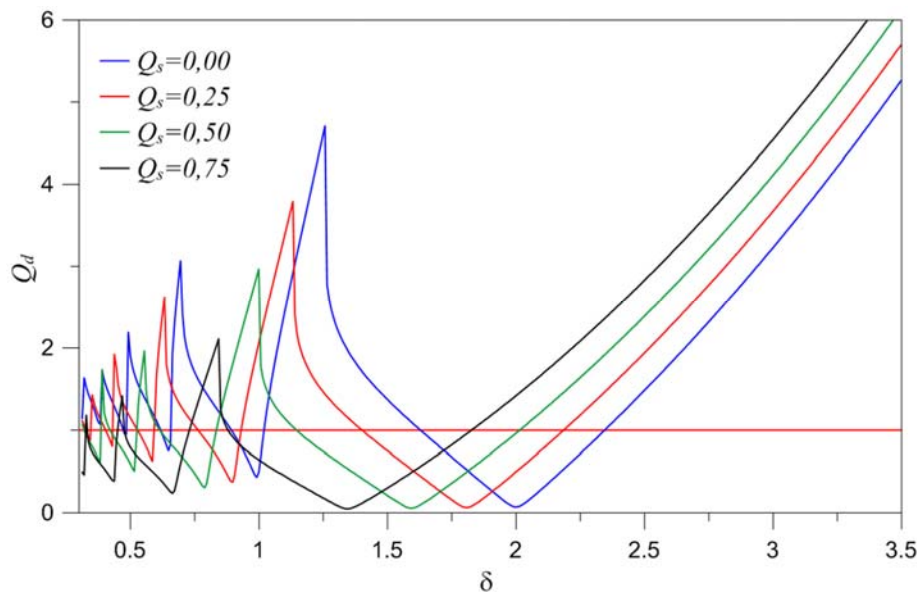


**Figura 8.20: Análise da influência do amortecimento nas fronteiras de instabilidade. Material M4, L=4m,  $\xi = 1.45\%$ .**

**Tabela 8.2: Variação da carga crítica mínima nas três primeiras regiões de instabilidade paramétrica. Material M4, L=4m.**

Região	$\xi$	$Q_{dcr}$	$\delta$
$\delta \cong 2/3$	0.00725	0.435	0.656
	0.0145	0.55	0.648
	0.029	0.675	0.640
	0.058	0.84	0.624
$\delta \cong 1$	0.00725	0.24	0.992
	0.0145	0.315	0.992
	0.029	0.445	0.984
	0.058	0.628	0.968
$\delta \cong 2$	0.00725	0.025	1.999
	0.0145	0.05	1.999
	0.029	0.1	1.999
	0.058	0.2	1.999

A Figura 8.21 mostra a influência da carga compressiva estática não dimensional,  $Q_s$ , nas curvas de transição que separam soluções estáveis das instáveis. A carga compressiva estática,  $Q_s$ , produz, como mostrado no Capítulo 6, a diminuição da frequência fundamental da coluna carregada. Assim, as regiões de instabilidade se movem para a esquerda. A relação linear da frequência fundamental ao quadrado com a carga estática é dada por  $\delta^2 = 2.9537(1 - Q_s) + 1.0587$ . Além disso, a carga estática segue uma relação quadrática com a carga crítica dinâmica, sendo dada por  $Q_s = 477.39Q_{dcr}^2 - 88.568Q_{dcr} + 3.9648$ .

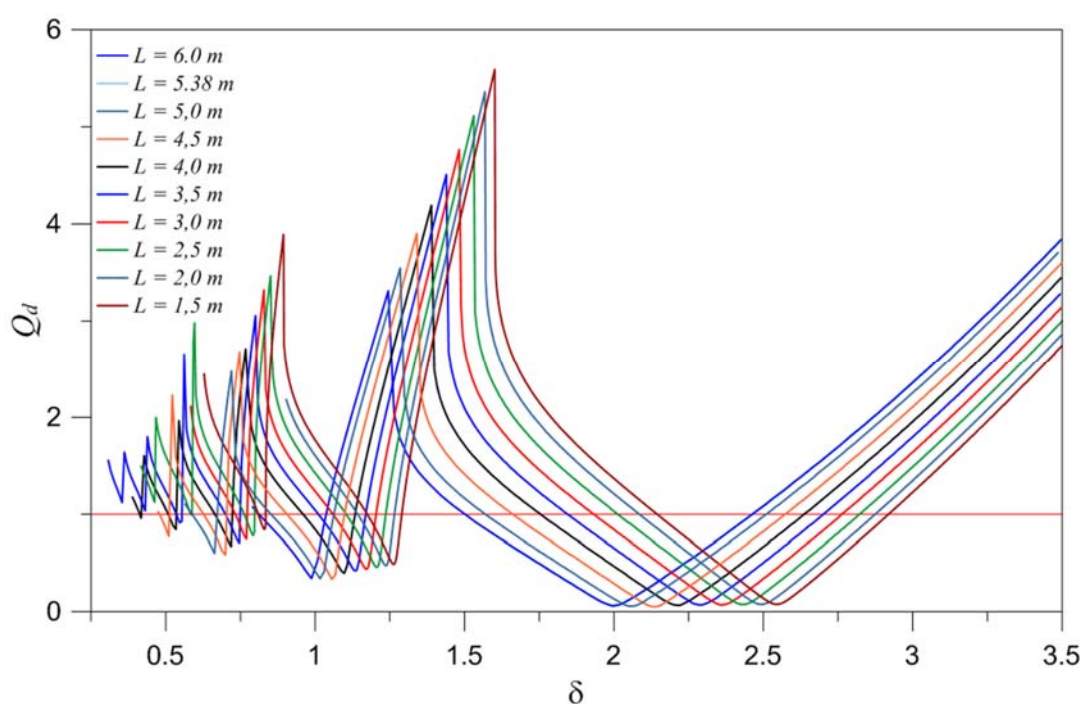


**Figura 8.21: Análise da influência da carga estática nas fronteiras de instabilidade, Material M4,  $L=4m$ ,  $\xi = 1.45\%$ .**

Estuda-se agora a influência do comprimento da coluna nas fronteiras de instabilidade paramétrica. A Tabela 8.3 mostra a variação das duas menores frequências de vibração com o comprimento do perfil,  $L$ , considerando o material M5. A Figura 8.22 mostra as curvas de transição para diferentes comprimentos da coluna simplesmente apoiada. Inicialmente, a frequência fundamental para comprimentos menores que  $L_{ftf}$  está associada ao modo de flexo-torção. Para  $L = L_{ftf} = 5.38m$  as duas menores frequências tem o mesmo valor. Já para  $L > L_{ftf}$ , a frequência fundamental está associada ao modo de flexão em torno do eixo de menor inércia. Na Figura 8.22 mostra-se que as curvas de transição dos comprimentos associados ao modo de flexão estão sobrepostas, e suas regiões principais de instabilidade paramétrica emanam do fator de frequência  $\delta = 2$ . À medida que o comprimento da coluna diminui suas regiões de instabilidade se movem para a direita e emanam de diferentes valores de  $\delta$ , mostrando mais uma vez a diferença entre os modos de flexão e flexo-torção.

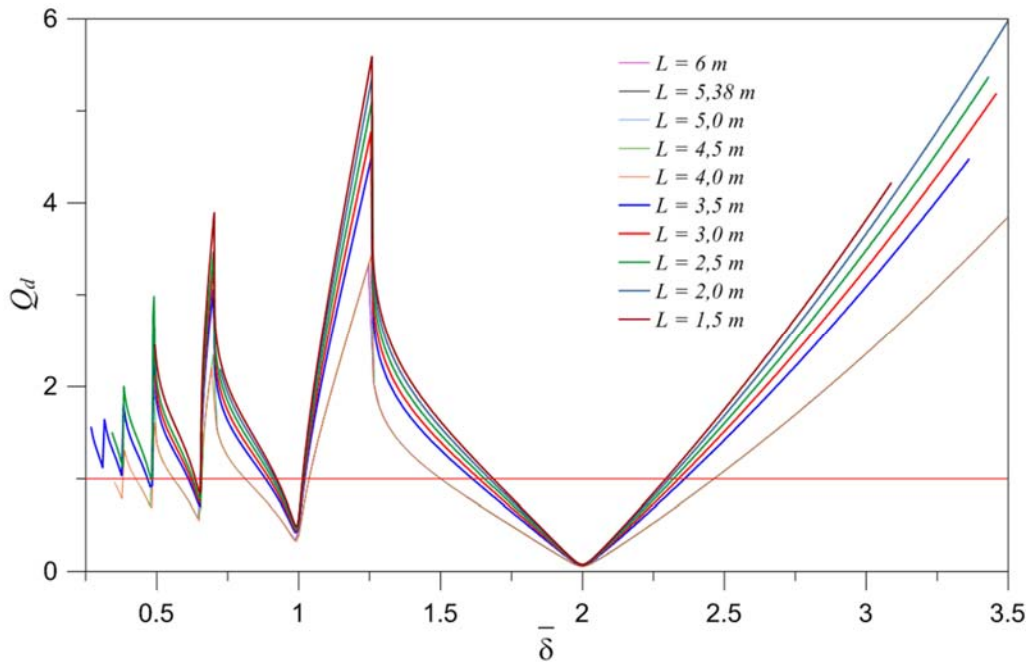
**Tabela 8.3: Variação da frequência natural com o comprimento.**  $L_{ftf} = 5.38m$ .

$L$ (m)	Modo Crítico	$\omega_{o1}$ (Hz)	$\omega_{o2}$ (Hz)	$\omega_{o2}/\omega_{o1}$	$2\omega_{o2}/\omega_{o1}$
1.5	<b>FT</b>	<b>50.64</b>	64.44	1.27	2.55
2.0	<b>FT</b>	<b>29.07</b>	36.25	1.25	2.49
2.5	<b>FT</b>	<b>19.08</b>	23.20	1.22	2.43
3.0	<b>FT</b>	<b>13.63</b>	16.11	1.18	2.36
3.5	<b>FT</b>	<b>10.34</b>	11.84	1.14	2.29
4.0	<b>FT</b>	<b>8.19</b>	9.06	1.11	2.21
4.5	<b>FT</b>	<b>6.71</b>	7.16	1.07	2.13
5.0	<b>FT</b>	<b>5.64</b>	5.80	1.03	2.06
<b>5.38</b>	<b>FT, F</b>	<b>5.01</b>	5.01	1.00	2.00
6.0	<b>F</b>	<b>4.03</b>	4.22	1.05	2.10



**Figura 8.22: Análise da influência do comprimento da coluna nas fronteiras de estabilidade, Material M5,  $\xi = 1.45\%$ .**

A Figura 8.23 mostra as fronteiras de estabilidade em função das variáveis adimensionais  $\bar{\delta}$  e  $Q_d$ . Para  $L \geq 4m$  as fronteiras de estabilidade ficam sobrepostas. Já para  $L < 4m$  observa-se uma influência marcante do comprimento nas fronteiras de estabilidade aumentando a carga crítica à medida que  $L$  decresce e diminuindo a região instável. Entretanto a carga crítica mínima é praticamente a mesma.



**Figura 8.23: Análise da influência do comprimento da coluna nas fronteiras de estabilidade, Material M5,  $\xi = 1.45\%$ . Força normalizada.**

## 8.2.2

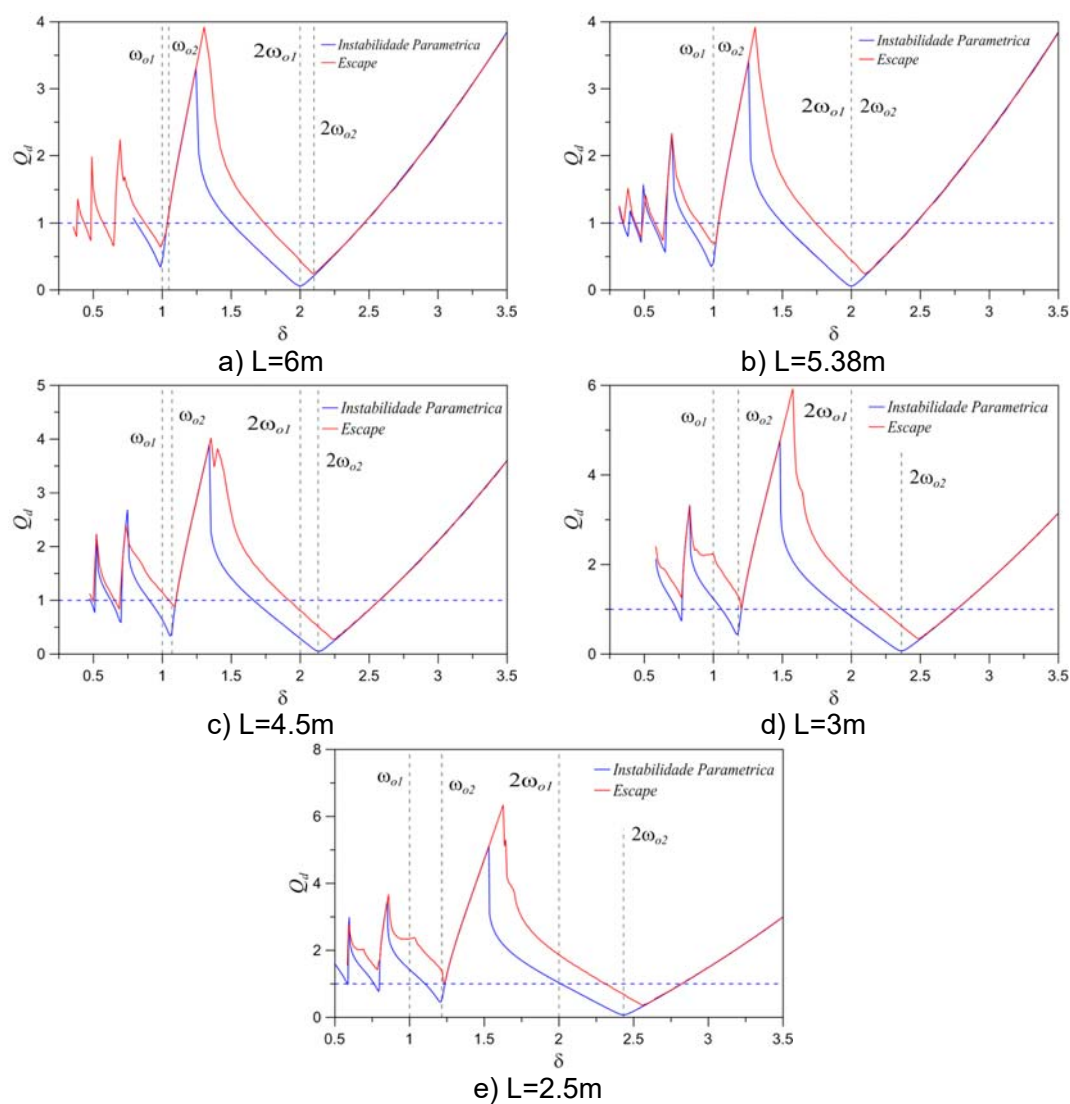
### Fronteiras de Escape e Bifurcações

Do mesmo modo que a instabilidade paramétrica, onde a solução trivial se torna instável. Em certas estruturas sob uma carga axial harmônica, pode existir para cada valor de frequência de excitação,  $\delta$ , uma carga máxima ou de escape,  $Q_e$ , onde os deslocamentos crescem indefinidamente e a resposta vai para infinito, conhecida como fronteira de escape (Thompson e Ueda, 1989; Gonçalves et al., 2007; Orlando et al., 2019).

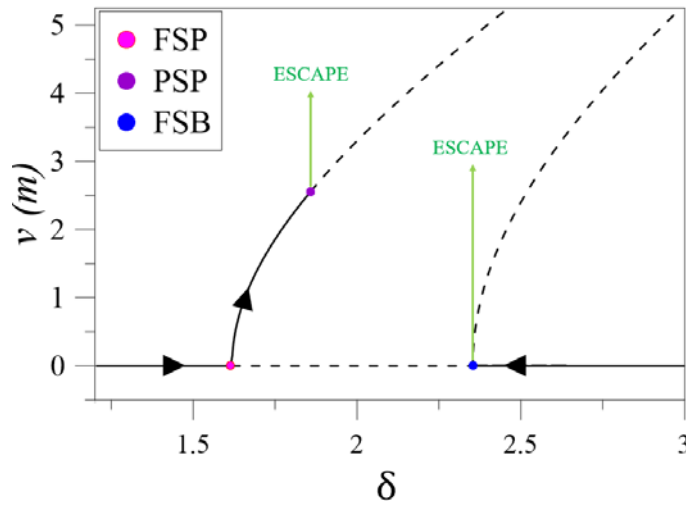
As fronteiras de escape e instabilidade paramétrica para o material M5 para diferentes valores de comprimento longitudinal são mostradas nas Figuras 8.24. Mostram-se também, além da carga crítica estática, as duas menores frequências naturais e seu dobro. A curva de escape está sempre sobreposta ou acima da curva de instabilidade paramétrica. Quando as curvas de escape (vermelho) e instabilidade paramétrica (azul) são sobrepostas significa que a carga de instabilidade paramétrica,  $Q_d$ , e a carga de escape,  $Q_e$ , têm o mesmo valor, indicando a presença de uma **bifurcação instável**. Por outro lado quando a curva escape se situa acima da curva de instabilidade paramétrica, existe um intervalo de carga entre ambas as curvas onde a solução não trivial é estável. Verifica-se também que na região principal de ressonância paramétrica em torno de  $\delta = 2$ , as cargas de escape são menores que a carga crítica estática, indicando o colapso da estrutura. Na região de ressonância em torno de  $\delta = 1$  o escape ocorre para cargas menores que a carga crítica estática para  $L > 3m$ . Verifica-se que os valores mínimos em cada região estão associados à

frequência de flexão em torno do eixo de menor inércia. Observa-se, entretanto, que entre as duas regiões principais de ressonância as cargas de escape e instabilidade paramétrica podem atingir valores bem maiores que a carga crítica estática, podendo este fator ser positivamente usado no controle de vibrações (Thompson e De Souza, 1996). Cabe destacar que o fenômeno de escape não foi detectado na análise local para colunas curtas.

A Figura 8.25 mostra o diagrama de bifurcação considerando a frequência de excitação como parâmetro de controle para  $Q_d = 0.75$  e  $L = 5,38m$ , variando  $\delta$  na região principal de instabilidade paramétrica. Os resultados mostram que na região principal de ressonância paramétrica, à medida que  $\delta$  aumenta e ultrapassa a curva de transição esquerda, a solução trivial se torna instável devido a uma bifurcação flip supercrítica e surge uma solução estável cujo período é o dobro do período da excitação (ver Figura 8.4b - ressonância 2:1) até que ocorre uma bifurcação pitchfork supercrítica. Depois da bifurcação pitchfork (PSP) supercrítica o trecho estável é muito pequeno e logo a seguir ocorre o escape. À medida que  $\delta$  continua a aumentar e, quando a curva de transição à direita é cruzada; a solução trivial se torna estável novamente devido a uma bifurcação flip subcrítica (FSB) e surge uma solução instável cujo período é o dobro do período da excitação. Neste ponto, ao decrescer  $\delta$  ocorre simultaneamente a instabilidade paramétrica e o escape, já que não há nenhuma solução estável à esquerda. Observa-se, pois, que para um dado nível de carregamento existe uma região onde nenhuma solução estável é encontrada, levando ao colapso do perfil.



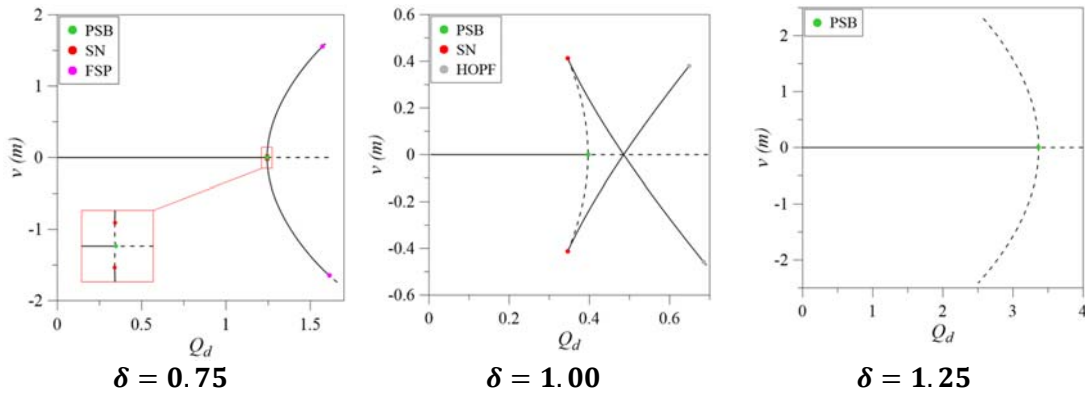
**Figura 8.24: Fronteiras de estabilidade normalizado para diferentes comprimentos. Material M5,  $\xi = 1.45\%$ .**



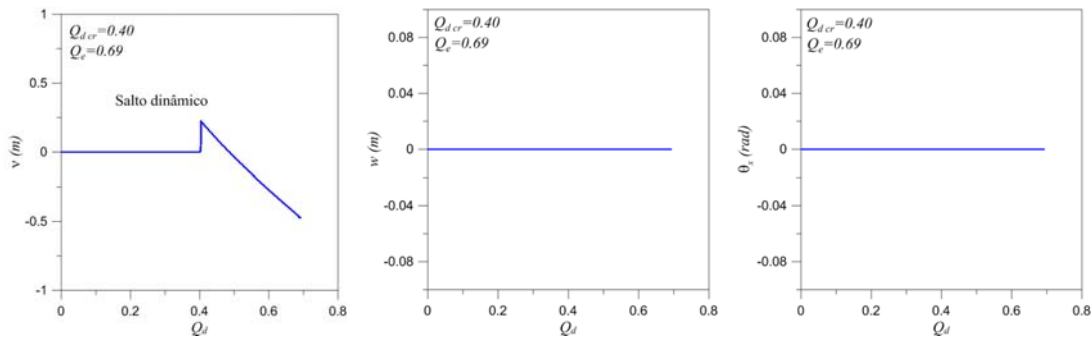
**Figura 8.25: Curva de ressonância, Material M5,  $L=5.38m$ ,  $Q_d = 0.75$ .**

A Figura 8.26 mostra três diagramas de bifurcação para  $L = 5,38m$  considerando a força  $Q_d$  como parâmetro de controle para valores selecionados do parâmetro de frequência  $\delta$  na região de ressonância fundamental. Para este comprimento as duas menores frequências coincidem. Para  $\delta = 0.75$  a estrutura se torna instável em virtude de uma bifurcação pitchfork subcrítica, que logo se torna estável devido a uma bifurcação sela-nó (ver zoom) dando origem a duas soluções estáveis de período 1T. Cada uma destas soluções se torna instável em virtude de uma bifurcação flip supercrítica e, logo a seguir, ocorre o escape. Para  $\delta = 1.00$ , onde ocorre a menor carga crítica dinâmica, a solução trivial se torna instável em virtude de uma bifurcação pitchfork subcrítica, dando origem a duas soluções instáveis de período 1T. Cada uma destas soluções se torna estável em virtude de uma bifurcação sela-nó dando origem a um longo trecho onde diferentes soluções estáveis coexistem. Para perturbações finitas após SN, a solução permanente é função das condições iniciais, como mostrado a seguir através das bacias de atração. Estas soluções se tornam instáveis através de uma bifurcação tipo Hopf, onde um par complexo-conjugado de autovalores deixa de círculo unitário, levando ao escape (Thompson e Stewart, 2002; Del Prado, 2001). Cabe observar que os pontos de bifurcação secundários não são simétricos. Em um experimento, quando se aumenta gradativamente a magnitude da força e atinge-se o ponto PSP há um salto dinâmico para uma das soluções de período 1T, como ilustra a Figura 8.27a. Para  $\delta = 1.25$  a solução trivial também se torna instável em virtude de uma bifurcação pitchfork subcrítica, dando origem a duas soluções instáveis de período 1T, mas, ao contrário do caso anterior, nenhuma outra solução estável é encontrada, justificando a sobreposição das fronteiras de instabilidade paramétrica e escape nesta região. Cabe esclarecer que o algoritmo, após cada incremento de carga perturba todas as coordenadas no espaço de fase. Entretanto para  $\delta = 1.00$  e  $\delta = 1.25$ , após a bifurcação PSB, as perturbações em  $w$  e  $\theta_x$ , associadas ao modo de

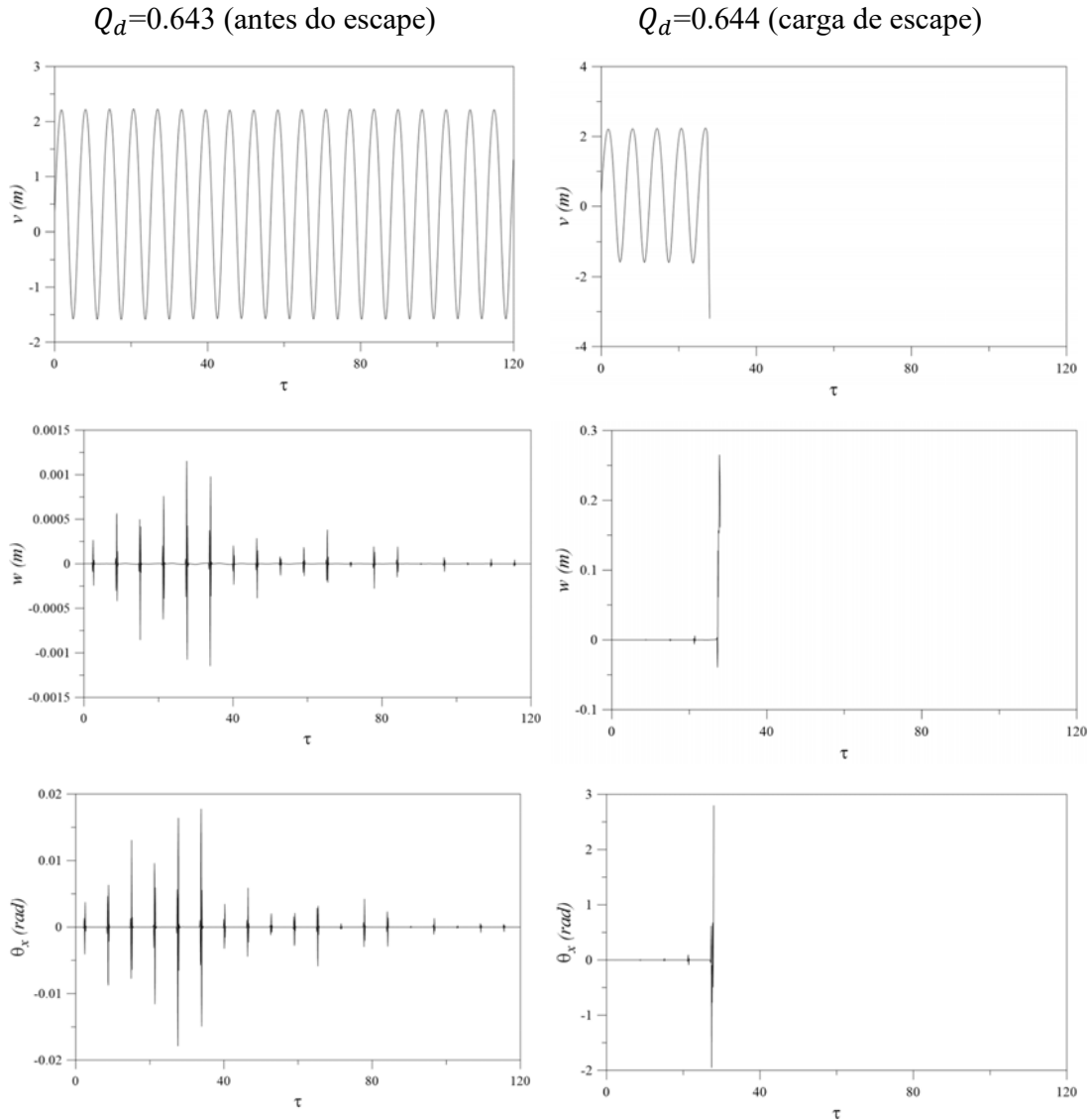
flexo-torção, decrescem assintoticamente para zero, enquanto o deslocamento em  $v$ , associado ao modo de flexão, diverge para a solução não trivial (Figura 8.27). As perturbações em  $w$  e  $\theta_x$ , associadas ao modo de flexo-torção passam a crescer quando ocorre o escape, indicando que o escape está associado à excitação do modo de flexo-torção, como ilustra a Figura 8.28, que mostra a resposta no tempo dos três graus de liberdade antes do escape ( $Q_d = 0.643$ ) e no momento do escape ( $Q_d = 0.644$ ) para  $\delta = 1.00$ , tendo como base a bifurcação Hopf localizada nas coordenadas  $v \approx 0.6435$ ,  $w = 0.0$  e  $\theta_x = 0.0$ , (ver Figura 8.26). Verifica-se também que a assimetria observada nas bifurcações secundárias se deve à excitação do modo de flexo-torção.



**Figura 8.26: Diagramas de bifurcação, Material M5, L=5.38m, Região de ressonância fundamental,  $\delta = 1.00$ .**

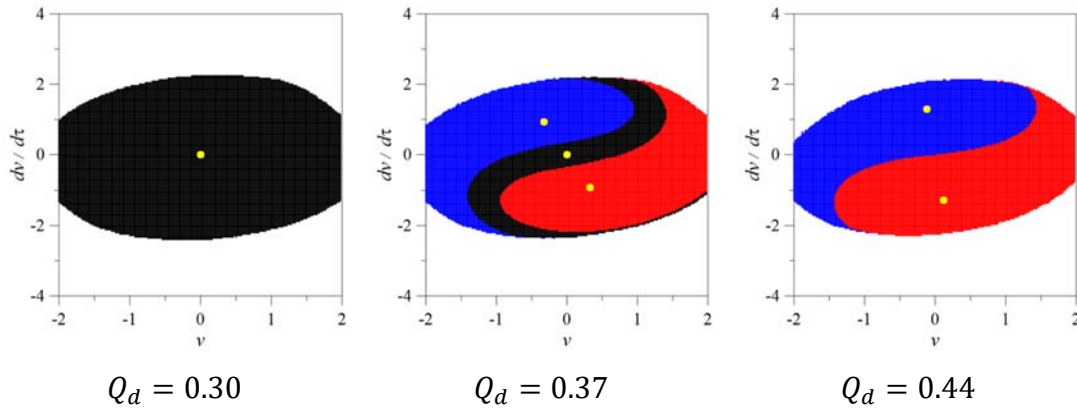


**Figura 8.27: Diagramas de bifurcação, Material M5, L=5.38m,  $\delta = 1.00$ .**

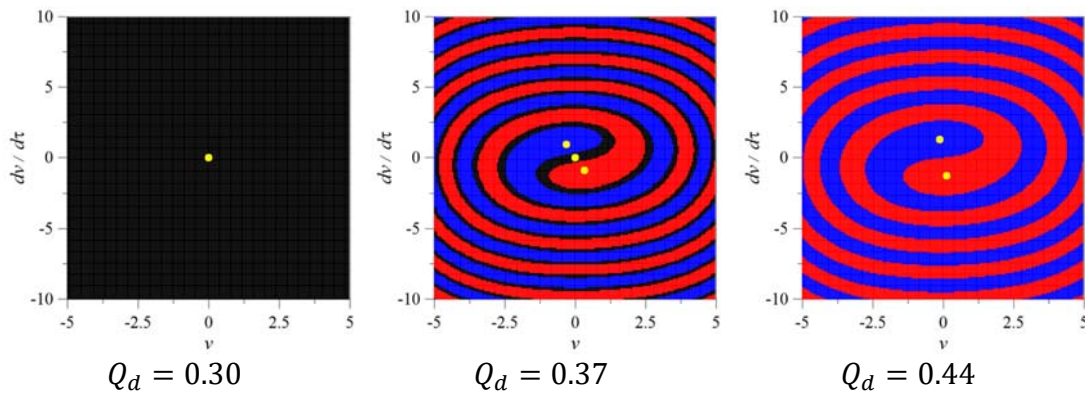


**Figura 8.28: Resposta no tempo dos três graus de liberdade antes e na bifurcação referente ao escape, Material M5,  $L=5.38\text{m}$ ,  $\delta = 1.00$ .**

A Figura 8.29 mostra para  $\delta = 1.00$  as seções da bacia de atração (plano  $v$  vs.  $dv/d\tau$ ) para três valores de  $Q_d$ . A região em preto corresponde à solução trivial, as regiões em azul e vermelho às duas soluções de período  $1T$ , enquanto a região em branco corresponde a condições iniciais que levam ao escape (excitação do modo de flexo-torção). A Figura 8.30 mostra as seções da bacia de atração não considerando perturbações nos graus de liberdade  $w$  e  $\theta_x$ , onde não se observa o escape. Este resultado indica a importância do modo de flexo-torção na instabilidade do perfil.

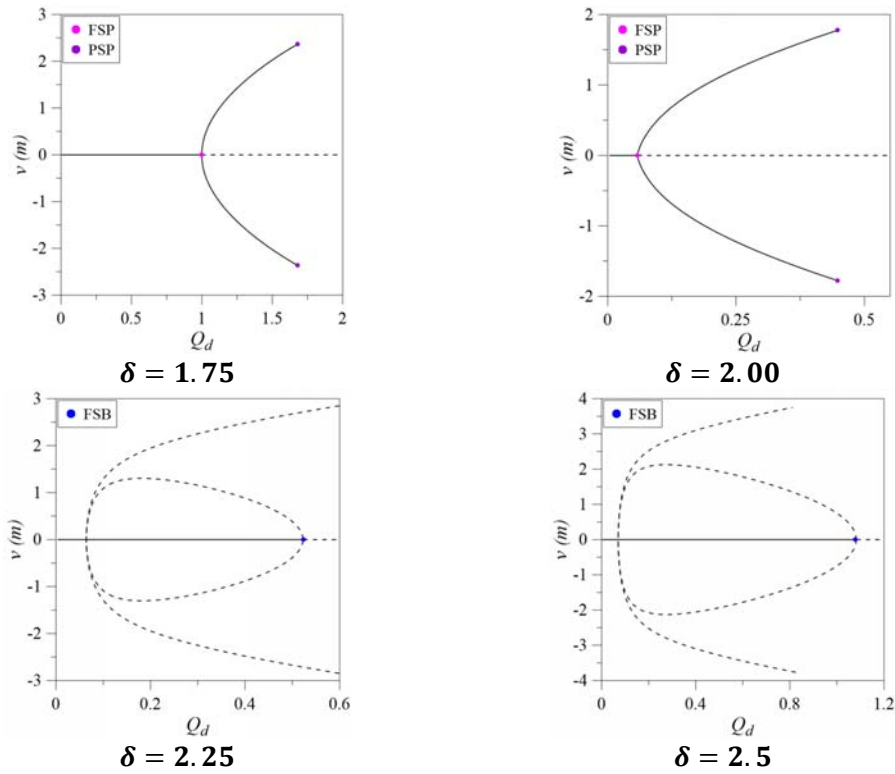


**Figura 8.29: Bacias de atração, Material M5, L=5.38m,  $\delta = 1.00$ .**

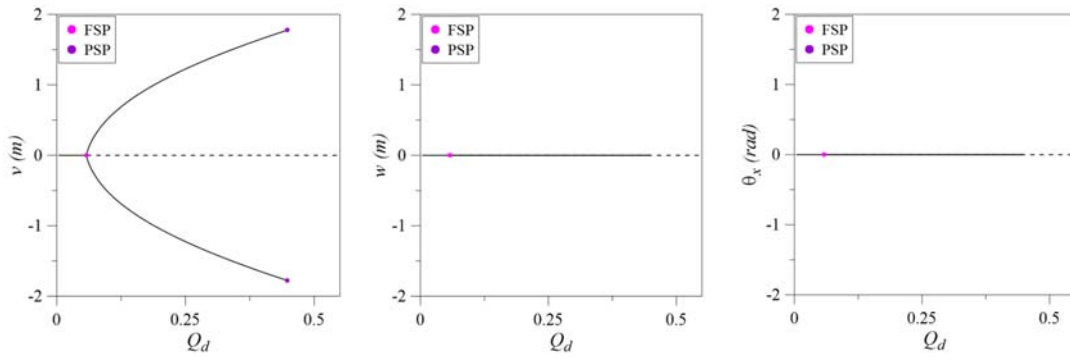


**Figura 8.30: Bacias de atração, Material M5, L=5.38m,  $\delta = 1.00$  (não considerando perturbações nos graus de liberdade  $w$  e  $\theta_x$ ).**

A Figura 8.31 mostra quatro diagramas de bifurcação considerando a força  $Q_d$  como parâmetro de controle para valores selecionados do parâmetro de frequência  $\delta$  na região de principal de ressonância paramétrica em torno de  $\delta = 2$ . Para  $\delta = 1.75$ , a estrutura se torna instável em virtude de uma bifurcação flip supercrítica, dando origem uma solução estável de período  $2T$ , que se torna instável em virtude de uma bifurcação flip supercrítica e logo a seguir ocorre o escape. O mesmo se observa para  $\delta = 2.00$ , onde ocorre a menor carga crítica dinâmica nesta região. Como no caso anterior, após a bifurcação FSB, as perturbações em  $w$  e  $\theta_x$ , associadas ao modo de flexo-torção, decrescem assintoticamente para zero, enquanto o deslocamento em  $v$ , associado ao modo de flexão, diverge para a solução não trivial, (ver Figura 8.32). As perturbações em  $w$  e  $\theta$ , associadas ao modo de flexo-torção passam a crescer quando ocorre o escape. Para  $\delta = 2.25$  e  $\delta = 2.50$  a solução trivial se torna instável em virtude de uma bifurcação flip subcrítica, dando origem a uma solução instável de período  $2T$ . Nenhuma outra solução estável é encontrada, justificando a sobreposição das fronteiras de instabilidade paramétrica e escape nesta região.



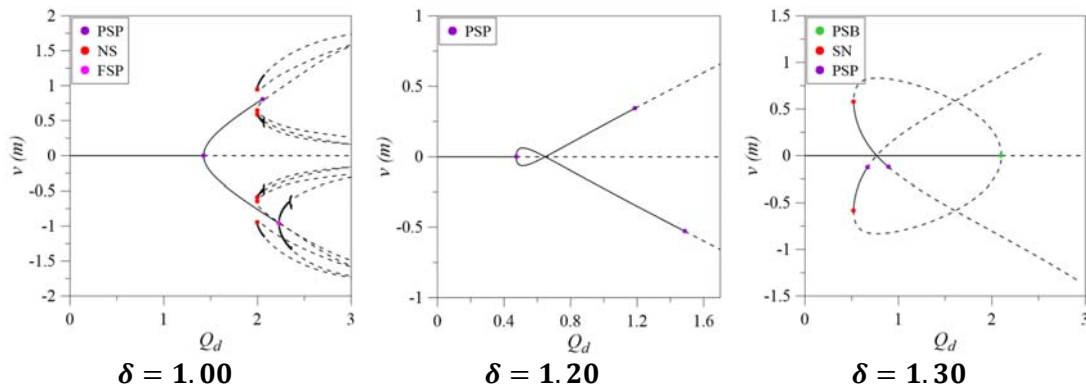
**Figura 8.31: Diagramas de bifurcação, Material M5,  $L=5.38m$ , (Região principal de ressonância paramétrica em torno de  $\delta = 2.00$ ).**



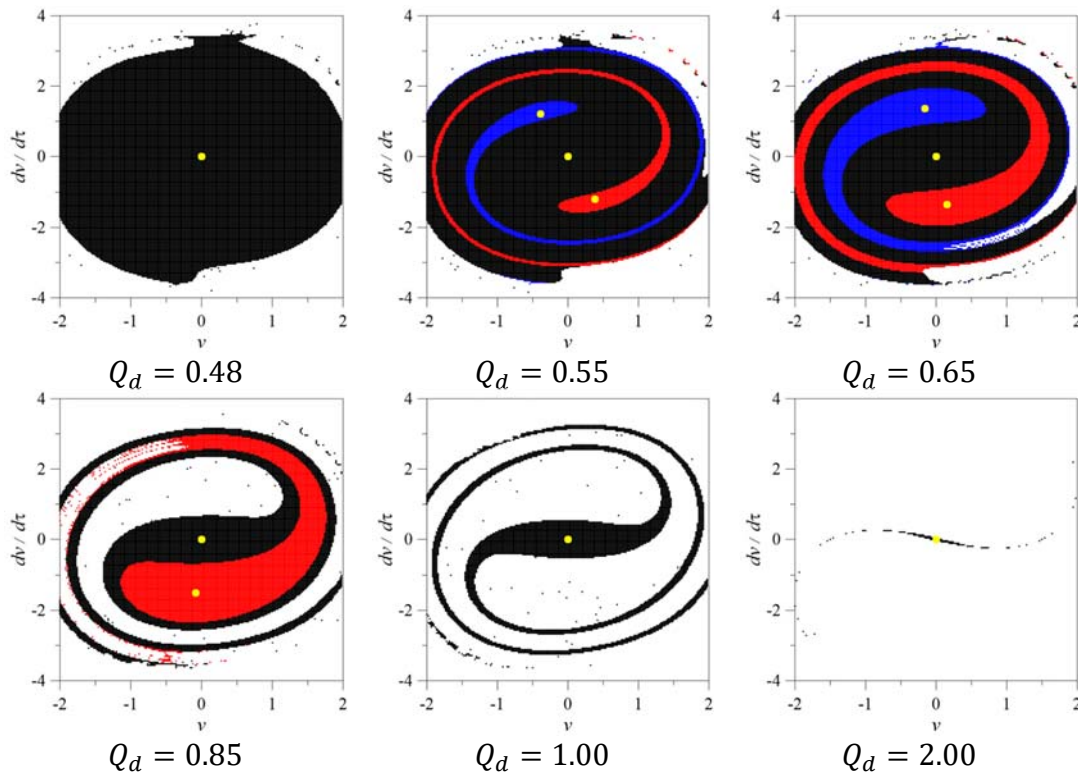
**Figura 8.32: Diagramas de bifurcação, Material M5,  $L=5.38m$ ,  $\delta = 2$ .**

A Figura 8.33 mostra três diagramas de bifurcação para  $L = 2.50m$ , considerando a força  $Q_d$  como parâmetro de controle, para valores selecionados do parâmetro de frequência  $\delta$  na região de ressonância fundamental. Para este comprimento, a menor frequência está associada ao modo de flexo-torção, responsável pelo aparecimento de um vale secundário na Figura 8.24e. Novamente, a instabilidade paramétrica ocorre devido a uma bifurcação pitchfork, dando origem a duas soluções de período  $1T$ .

Neste caso a assimetria dos diagramas de bifurcação após esta bifurcação ainda é mais evidente que no caso anterior, destacando a influência da flexo-torção no comportamento dinâmico da estrutura. Essa assimetria se reflete de forma marcante nas bacias de atração, como ilustra a Figura 8.34 para  $\delta = 1.30$ , onde se usa a mesma convenção de cores da Figura 8.29. Para  $Q_d = 0.48$  tem-se apenas a solução trivial ou escape, mas já se nota uma pequena assimetria na fronteira entre as duas regiões. Para  $Q_d = 0.55$ , aparecem mais duas regiões associadas às duas soluções estáveis de período 1T (regiões em vermelho e azul). Para  $Q_d = 0.65$  a assimetria aumenta com a região em azul sendo bem menor que a região em vermelho. Para  $Q_d = 0.85$ , a região em azul desaparece, restando apenas uma das soluções de período 1T. Para  $Q_d = 1.00$ , as duas soluções não triviais desaparecem e observa-se uma erosão acentuada da bacia associada à solução trivial. Finalmente, para  $Q_d = 2.00$  ( $Q_d < Q_{dcr}$ ), a bacia associada à solução trivial tem uma área desprezível, indicando baixa integridade dinâmica. Ou seja, apesar da solução trivial ser ainda matematicamente estável (autovalores dentro do círculo unitário), pequenas perturbações levam ao escape.

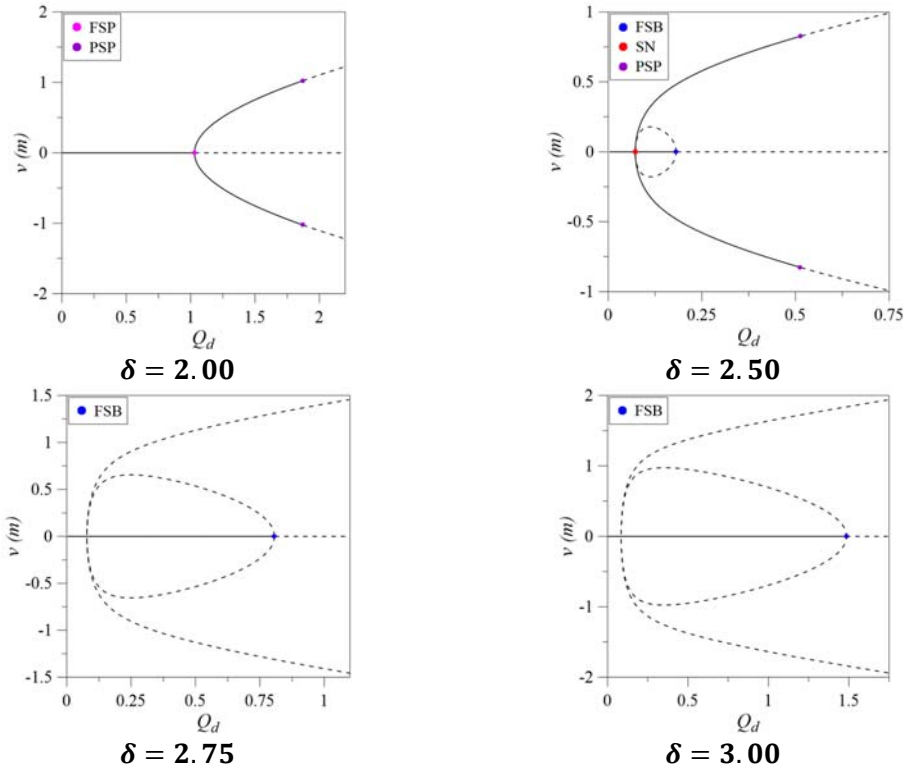


**Figura 8.33: Diagramas de bifurcação, Material M5, L=2.5m, (Região de ressonância fundamental,  $\delta = 1.00$ ).**



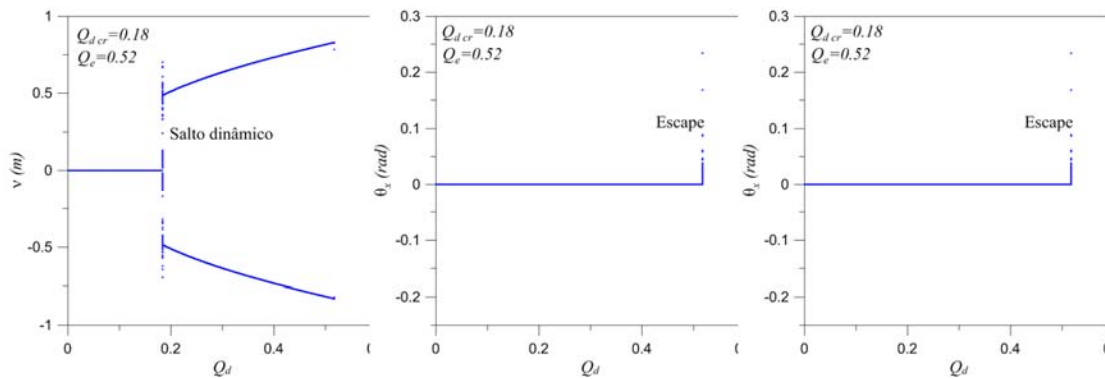
**Figura 8.34: Bacias de atração, Material M5,  $L=2.5m$ ,  $\delta = 1.30$ .**

Ainda para  $L = 2,5m$ , a Figura 8.35 mostra quatro diagramas de bifurcação considerando a força  $Q_d$  como parâmetro de controle para valores selecionados do parâmetro de frequência  $\delta$  na região de principal de ressonância paramétrica. Para  $\delta = 2.00$  (duas vezes a menor frequência, no caso a de flexo-torção) a estrutura se torna instável em virtude de uma bifurcação flip supercrítica, dando origem a uma solução estável de período  $2T$ , que se torna instável em virtude de uma bifurcação flip supercrítica e, logo a seguir, ocorre o escape. Para  $\delta = 2.50$ , próximo a menor carga crítica dinâmica nesta região (duas vezes a menor frequência, no caso a de flexão, ver Figura 8.24e), a solução trivial se torna instável em virtude de uma bifurcação flip subcrítica que se torna estável devida a uma bifurcação sela-nó, dando origem a soluções coexistentes até atingir  $Q_{dcr}$ . Para  $\delta = 2.75$  e  $\delta = 3.00$  a solução trivial se torna instável em virtude de uma bifurcação flip subcrítica, dando origem a uma solução instável de período  $2T$ . Nenhuma outra solução estável é encontrada, justificando a sobreposição das fronteiras de instabilidade paramétrica e escape nesta região.

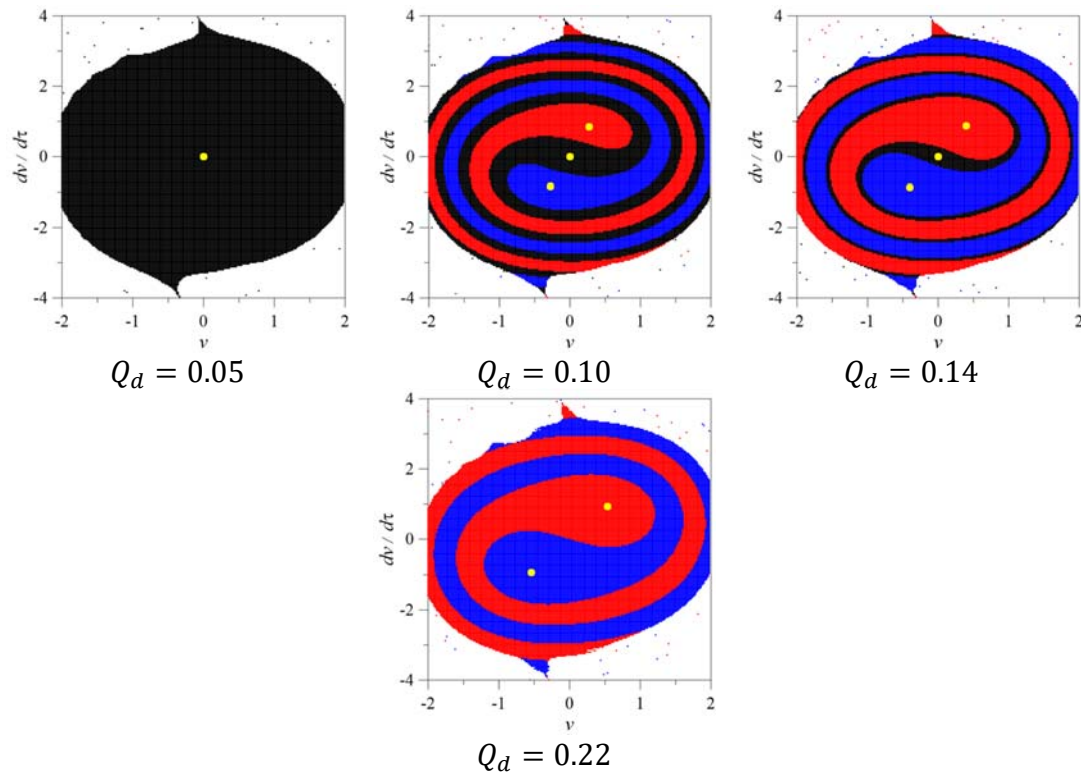


**Figura 8.35: Diagramas de bifurcação, Material M5,  $L=2.5m$ .**

Para  $\delta = 2.50$ , como mostra a Figura 8.36, ao atingir  $Q_{dcr}$  ocorre um salto dinâmico da solução trivial para a solução não trivial. Cabe ressaltar que o transiente durante o salto dinâmico pode levar a picos de tensão e deformação. Finalmente, a Figura 8.37 mostra a evolução das bacias de atração para  $\delta = 2.50$ , onde se observa a erosão da bacia de atração da solução trivial com o aumento da carga, destacando a importância da análise da evolução e erosão das bacias de atração na análise dinâmica não linear (Lenci e Rega, 2019).



**Figura 8.36: Diagramas de bifurcação, Material M5,  $L=2.5m$ ,  $\delta = 2.50$  (salto dinâmico e escape), Método da força bruta.**



**Figura 8.37: Evolução das bacias de atração, material M5,  $L=2.5\text{m}$ ,  $\delta = 2.50$**

## 9

## Conclusões e Sugestões

### 9.1

#### Conclusões

Usando duas formulações locais e uma formulação global, a instabilidade de colunas pultrudadas de materiais poliméricos reforçados por fibras sob carregamento axial estático e dinâmico foi investigada. A formulação global não linear considera grandes deslocamentos, os efeitos de encurtamento, acoplamentos entre flexão e torção e imperfeições geométricas iniciais. Um modelo discreto de três graus de liberdade para a análise não linear é obtido pelo método de Galerkin. Na análise não linear local, a seção do canal é discretizada em três placas (alma e duas mesas) que são modeladas pela teoria clássica de placas e pela teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem, para verificar o efeito do cisalhamento. Um modelo discreto de ordem reduzida para a análise não linear é obtido pelo método de Ritz.

A carga de flambagem estática, frequências naturais e funções de interpolação adotadas para o campo de deslocamento encontra-se em estreita concordância com os resultados obtidos pelo software GBTUL, corroborando a precisão e coerência dos presentes resultados.

A carga de flambagem estática e as frequências naturais são altamente dependentes da ortotropia do material PRF. Há uma diminuição palpável na carga crítica e na frequência fundamental quando comparada com o material isotrópico. Essa diminuição se deve à baixa resistência do PRF na direção transversal e ao baixo módulo de cisalhamento.

Para colunas curtas, a flambagem ocorre no modo local com uma semionda na direção axial. À medida que o comprimento da coluna aumenta, a coluna continua a flambar no modo local, mas com um número crescente de semiondas axiais. Nesta região a carga de flambagem mínima permanece constante, sendo função das características do material e geometria da seção, sendo a menor carga crítica entre os seis materiais analisados a do material com menor módulo de cisalhamento. Para cada material e geometria da seção existe um comprimento crítico onde o modo de flambagem passa de local para global, estando em todos os casos analisados o modo global associado ao modo crítico de flexo-torção. Verifica-se que o acoplamento entre flexão e torção tem uma grande influência no comportamento de vigas com seções monossimétricas. Neste caso, existe um modo de flexão desacoplado, associado com o eixo de simetria e dois modos acoplados de flexo-torção. Esta transição concorda com os resultados obtidos pelo GBTUL, onde, para este comprimento, ocorre uma mudança abrupta na composição modal do modo crítico.

Para colunas longas há novamente uma mudança no modo de flambagem que passa do modo de flambagem global de flexo-torção para o modo de flambagem de flexão em torno do eixo de menor inércia. Essas mudanças no modo de flambagem têm uma influência marcante na forma do caminho pós-crítico e na sensibilidade a imperfeições.

Para colunas curtas e longas, onde o comportamento é regido por, respectivamente, o modo de flambagem local e o modo de flambagem de flexão em torno do eixo de menor inércia, obtém-se uma bifurcação simétrica estável, como ocorre para placas isoladas e colunas. Neste caso, a resistência pós-crítica da coluna depende da curvatura inicial do caminho pós-crítico que é função do material e geometria da seção. Para essas colunas, as imperfeições geométricas iniciais levam a um gradativo aumento dos deslocamentos transversais e das tensões de flexão.

Para colunas de comprimento intermediário, onde a flambagem está associada ao modo de flexo torção, obtém-se em muitos casos uma bifurcação simétrica estável, mas logo se atinge um ponto limite, tornando-se a seguir o caminho pós-crítico instável, o que leva a uma sensibilidade a imperfeições com redução da capacidade de carga da estrutura à medida que a magnitude da imperfeição cresce. Os caminhos de equilíbrio para a coluna imperfeita apresentam neste caso um comportamento estável até atingir a carga limite, após a qual o caminho torna-se instável, sendo a carga limite para a estrutura imperfeita menor que a carga limite da estrutura perfeita. Com o aumento da imperfeição a carga limite da estrutura imperfeita torna-se menor que a carga crítica de bifurcação, levando à redução da capacidade de carga da estrutura. Em alguns casos obtém-se um caminho pós-crítico instável com o aumento da sensibilidade a imperfeições. Mostra-se que a coluna é particularmente sensível a imperfeições na forma do modo de flexo-torção e combinação entre os modos de flexão e flexo-torção.

Os resultados mostram uma mudança abrupta de comportamento pós-crítico nos comprimentos críticos nos quais o modo de flambagem muda de local para global de flexo-torção e de global de flexo-torção para global de flexão, destacando a importância da análise não linear para um projeto seguro destas estruturas.

As menores frequências naturais e os respectivos modos de vibração também mudam com o comprimento da coluna, sendo, para colunas curtas, associadas aos modos locais, crescendo com o número de semiondas axiais. A partir de um dado comprimento limite, função do material e geometria da seção, as duas menores frequências passam a ser associada a um modo global de flexo-torção e ao modo de vibração de flexão em torno do eixo de inércia mínima, crescendo estas duas frequências com o número de semiondas axiais. Novamente esta transição concorda com os resultados obtidos através do GBTUL. Essas frequências decrescem com o carregamento estático axial aplicado, tornando-se a menor frequência nula quando a carga atinge o valor crítico. Dependendo da geometria da coluna, pode ocorrer uma mudança do modo de vibração associado à frequência mínima à medida que cresce o carregamento.

Usando os modelos discretos aqui derivados, a dinâmica não linear da coluna é explorada usando diagramas de bifurcação do mapa de Poincaré, técnicas de continuação e o critério de estabilidade de Floquet. Os efeitos do amortecimento, da ortotropia do material e da carga estática são examinados.

No caso dinâmico, a coluna sob carregamento harmônico sofre instabilidade paramétrica. As curvas de transição (isto é, fronteiras de estabilidade dinâmica) no espaço de controle da excitação (magnitude de excitação versus frequência de excitação) são determinadas numericamente por métodos de continuação, evitando assim as hipóteses de baixas magnitudes de forçamento, não linearidade fraca e pequeno amortecimento, usadas com frequência na literatura, onde o problema ou é resolvido de forma linearizada ou de forma aproximada através de métodos de perturbação, no caso não linear.

Os resultados mostram a forte influência da ortotropia do material e da geometria do perfil na carga crítica dinâmica, relação não linear frequência-amplitude e diagramas de bifurcação.

No caso local, o limite de estabilidade considerando uma magnitude de excitação adimensional (magnitude de força dividida pela carga crítica estática) e frequência normalizada (frequência de excitação dividida pela frequência fundamental) é a mesma independente das propriedades do material e dimensões da seção transversal, variando apenas com a taxa de amortecimento viscoso. Assim, a carga de instabilidade paramétrica mostra ser função da carga de flambagem estática, frequência fundamental e razão de amortecimento. No entanto, os termos não lineares normalizados são diferentes. Para todos os materiais, a coluna exibe um comportamento não linear com ganho de rigidez (*hardening*), com o grau de não linearidade sendo uma função das constantes do material ortotrópico e das dimensões da seção transversal. Este tipo de não linearidade controla as bifurcações que definem as diversas regiões de instabilidade paramétrica (línguas).

No caso global, considerando um dado material, as fronteiras de instabilidade paramétrica mudam com o comprimento do perfil. A frequência fundamental para comprimentos menores do que o comprimento limite entre o modo de flexo-torção e flexão, cresce à medida que diminui o comprimento do perfil. Por conseguinte, suas regiões de instabilidade se movem para a direita e emanam de diferentes valores da relação entre a frequência de excitação e a frequência fundamental de flexo-torção. Já se for usada como referência no processo de adimensionalização da frequência de excitação não a frequência fundamental, mas a frequência associada ao modo de flexão que é a segunda menor frequência ( $\delta = \Omega_d/\omega_f$ ), todas as curvas se superpõem, independente do valor de  $b_f$ . Isto mostra que a fronteira de instabilidade paramétrica está associada ao modo de vibração em torno do eixo de inércia mínima. Já para valores de comprimento maiores que o comprimento limite, os modos fundamentais estão associados ao modo de flexão e as regiões de instabilidade paramétrica se superpõem. Observa-se uma influência marcante do comprimento nas fronteiras de estabilidade aumentando a carga crítica à medida que  $L$  decresce e diminuindo a região instável. Entretanto a carga crítica dinâmica é praticamente a mesma.

A resposta do sistema não linear é mais complicada do que a prevista pela formulação linear de Mathieu. Acima da fronteira de estabilidade paramétrica (região onde a solução trivial se torna instável), a não linearidade leva a uma dinâmica qualitativamente rica. Na região principal de ressonância paramétrica, em torno do dobro da frequência fundamental do perfil, as transições da solução trivial para as soluções periódicas são devidas a bifurcações por duplicação de período (*flip*), levando a uma ressonância interna 2:1, enquanto na região de ressonância fundamental, em torno da frequência fundamental do perfil, a transição da solução trivial para a não trivial é devida a uma bifurcação por quebra de simetria (*pitchfork*), levando a uma ressonância interna 1:1, resultando em dois atratores coexistentes. Devido à não linearidade do tipo *hardening*, o lado esquerdo de cada fronteira de instabilidade é o lócus das bifurcações estáveis, enquanto o lado direito é o lócus das bifurcações instáveis. Esses dois cenários de bifurcação são repetidos conforme a frequência de excitação diminui e línguas de ordem superior são obtidas. Vários estados estacionários coexistentes periódicos, bem como atratores caóticos, são identificados dentro de cada língua. No caso de bifurcações instáveis (subcríticas), a análise mostra que antes mesmo que a bifurcação ocorra, o sistema poderia saltar da solução trivial para um ramo de respostas estáveis não triviais, sendo a bacia de atração da solução trivial rapidamente erodida conforme a curva de transição se aproxima. Assim, grandes amplitudes de vibração podem ser observadas, mesmo que a magnitude de forçamento seja menor do que a carga de flambagem dinâmica.

A pré-carga estática reduz a carga de flambagem dinâmica e frequências naturais, mudando os limites de instabilidade dinâmica para uma faixa de frequência de excitação mais baixa e aumenta a complexidade dos diagramas de bifurcação, levando a um maior número de soluções coexistentes. Devido às bifurcações globais e ao número crescente de soluções coexistentes, os limites das bacias mudam de suave para fractal, levando a longos transientes, sensibilidade às condições iniciais e baixos fatores de integridade dinâmica.

A carga de flambagem dinâmica na região principal de ressonância paramétrica e região de ressonância fundamental é muito menor do que a carga de flambagem estática (por exemplo, para uma taxa de amortecimento de 1,45%, a diminuição na região de instabilidade paramétrica principal é de cerca de 94%). A instabilidade paramétrica da coluna pultrudada é importante porque faz com que a posição de equilíbrio vertical estável se torne instável, levando a soluções periódicas de grande amplitude e inicia um processo que pode levar à fratura/ruptura da junção alma-mesa, sinalizando o início do mecanismo de falha e a perda de capacidade de carga. O projetista deve, portanto, ter cuidado ao lidar com colunas sujeitas a carregamentos dinâmicos axiais.

Uma diferença básica é observada entre a instabilidade paramétrica local e global. No caso global, após a instabilidade paramétrica, associada ao modo de flexão em torno do eixo de menor inércia, ocorre a excitação do modo de flexo-torção, levando a uma divergência da solução, o que não se observa na análise local. Esta fronteira de escape é superior à fronteira de instabilidade paramétrica quando se tem uma bifurcação estável, e ambas as fronteiras coincidem quando a bifurcação é instável.

## 9.2

### Sugestões

Em virtude da complexidade do problema e em virtude das poucas soluções não lineares disponíveis na literatura, são sugeridos os seguintes temas para trabalhos futuros:

- Análise não linear da estabilidade da coluna sob cargas estáticas e dinâmicas sob diferentes condições de contorno. Em particular, a análise da coluna engastada em ambas as extremidades e da coluna engastada e livre podem fornecer, respectivamente, um limite superior e inferior para as cargas de flambagem e frequências naturais. Além disto, a composição modal e a transição entre o comportamento local e global é dependente das condições de apoio;
- Análise experimental da instabilidade dinâmica de colunas de material pultrudado. Não foram encontrados resultados experimentais na literatura sobre a instabilidade paramétrica destas estruturas;
- Analisar, usando a formulação apresentada, a estabilidade de colunas de outros tipos de seção usadas com frequência em engenharia, como as seções abertas em L (cantoneiras), em I e em T, e seções fechadas como as colunas de seção retangular vazada;
- Estudar a instabilidade lateral de vigas de material pultrudado sob diferentes tipos de carregamento, como cargas concentradas e distribuídas e momento fletor, e diferentes condições de apoio.

## 10

## Referências Bibliográficas

Adilardi, A., & Frascioni, L. (2008, July). Design of a pedestrian bridge made with pultruded profiles of fibreglass-reinforced plastics in Prato. In: *The 3rd International Conference on Footbridges Porto, Portugal* (pp. 2-4).

Ahmadi, E., Caprani, C., Živanović, S., & Heidarpour, A. (2018). Vertical ground reaction forces on rigid and vibrating surfaces for vibration serviceability assessment of structures. *Engineering Structures*, 172, 723-738.

Allen, H. G., & Bulson, P. S. (1980). *Background to buckling*, McGraw-Hill, NY.

Ambrosini, R. D., Riera, J. D., & Danesi, R. F. (2000). A modified Vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams. *Engineering Structures*, 22(8), 890-900.

Arshad, I. K. (2015). *Determination of elastic constants of pultruded fiber reinforced polymer closed section – experimental campaign*, Doctoral dissertation, Coventry University, UK.

Ascione, L., Caron, J. F., Godonou, P., van Iselmuijden, K., Knippers, J., Mottram, T. & Tromp, L. (2016). *Prospect for new guidance in the design of FRP: Support to the implementation, harmonization and further development of the Eurocodes*. Publications Office of the European Union.

ASCE. (2010). Pre-standard for load and resistance factor design (LRFD) of pultruded fiber reinforced polymer (FRP) structures. Reston, VA: ASCE.

Bank, L. C., Yin, J., & Nadipelli, M. (1995). Local buckling of pultruded beams—Nonlinearity, anisotropy and inhomogeneity. *Construction and Building Materials*, 9(6), 325-331.

Bank, L. C. (2006). *Composites for construction: structural design with FRP materials*. John Wiley & Sons.

Banerjee, J. R. (2003). Free vibration of sandwich beams using the dynamic stiffness method. *Computers & structures*, 81(18), 1915-1922.

Barbero, E. J., Lopez-Anido, R., & Davalos, J. F. (1993). On the mechanics of thin-walled laminated composite beams. *Journal of Composite Materials*, 27(8), 806-829.

Barbero, E. J., & Raftoyiannis, I. G. (1994). Lateral and distortional buckling of pultruded I-beams. *Composite Structures*, 27(3), 261-268.

Barbero, E., & Tomblin, J. (1994). A phenomenological design equation for FRP columns with interaction between local and global buckling. *Thin-Walled Structures*, 18(2), 117-131.

Barbero, E. J. (2000). Prediction of buckling-mode interaction in composite columns. *Mechanics of composite materials and structures*, 7(3), 269-284.

Bauld Jr, N. R., & Lih-Shyng, T. (1984). A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross sections. *International Journal of Solids and Structures*, 20(3), 277-297

Bebiano, R., Silvestre, N., & Camotim, D. (2008). GBTUL - a code for the buckling analysis of cold-formed steel members. International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures. <https://scholarsmine.mst.edu/iscfss/19iccfss/19iccfss-session1/2>

Bebiano, R., Camotim, D., & Gonçalves, R. (2018). GBTul 2.0— A second-generation code for the GBT-based buckling and vibration analysis of thin-walled members. *Thin-Walled Structures*, 124, 235-257.

Benedetti, K. C., Gonçalves, P. B., & Silva, F. M. (2020). Nonlinear oscillations and bifurcations of a multistable truss and dynamic integrity assessment via a Monte Carlo approach. *Meccanica*, 1-35.

Benmokrane, B., Zhang, B., Laoubi, K., Tighiouart, B., & Lord, I. (2002). Mechanical and bond properties of new generation of carbon fibre reinforced polymer reinforcing bars for concrete structures. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 29(2), 338-343.

Blevins, R. D., Plunkett, R. (1980). Formulas for natural frequency and mode shape. Van Nostrand Reinhold Company, New York.

Bolotin, V. V. The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, San Francisco, CA, 1964.

Boscato, G., & Russo, S. (2009). Free vibrations of pultruded FRP elements: Mechanical characterization, analysis, and applications. *Journal of Composites for Construction*, 13(6), 565-574.

Boscato, G., Russo, S., & Mottram, J. T. (2012). Design and free vibration of a large temporary roof FRP structure for the Santa Maria Paganica church in L'Aquila. In *Proc., 6th Int. Conf. on FRP Composites in Civil Engineering (CICE 2012)*.

Brush, D. O. & Almroth, B. O. (1975). Buckling of bars, plates, and shells. McGraw-Hill, NY.

Çalım, F. F. (2009). Free and forced vibrations of non-uniform composite beams. *Composite Structures*, 88(3), 413-423.

Cardoso, D. C. T. (2014). Compressive strength of pultruded glass-fiber reinforced polymer (GFRP) columns. *Rio de Janeiro, Brasil*.

Cardoso, D. C., Harries, K. A., & Batista, E. D. M. (2014). Closed-form equations for compressive local buckling of pultruded thin-walled sections. *Thin-Walled Structures*, 79, 16-22.

Cardoso, D. C., Harries, K. A., & Batista, E. D. M. (2014). Compressive local buckling of pultruded GFRP I-sections: development and numerical/experimental evaluation of an explicit equation. *Journal of Composites for Construction*, 19(2), 04014042.

Cardoso, D. C., Harries, K. A., & Batista, E. D. M. (2014). Compressive strength equation for GFRP square tube columns. *Composites Part B: Engineering*, 59, 1-11.

- Cardoso, D. C., & Vieira, J. D. (2017). Comprehensive local buckling equations for FRP I-sections in pure bending or compression. *Composite Structures*, 182, 301-310.
- Cardoso, D. C., & Togashi, B. S. (2018). Experimental investigation on the flexural-torsional buckling behavior of pultruded GFRP angle columns. *Thin-Walled Structures*, 125, 269-280.
- Caron, J. F., Julich, S., & Baverel, O. (2009). Selfstressed bowstring footbridge in FRP. *Composite structures*, 89(3), 489-496.
- Cintra, G. G., Cardoso, D. C., & Vieira, J. D. (2019). Parameters affecting local buckling response of pultruded GFRP I-columns: Experimental and numerical investigation. *Composite Structures*, 222, 110897.
- Cintra, G. G. (2017). *Local Buckling Behavior of Pultruded Glass-Fiber Reinforced Polymer (pGFRP) I-Section Columns* (Doctoral dissertation, Rio de Janeiro, Brazil).
- Clarke, J. L. (Ed.). (2003). *Structural design of polymer composites: Eurocomp design code and background document*. CRC Press.
- Coaquira, J. C., Gonçalves, P. B., & Carvalho, E. C. (2016). Dynamic Instability of Cantilever Beams with Open Cross-Section. In: *ASME 2016 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (pp. V04BT05A012-V04BT05A012). American Society of Mechanical Engineers.
- Coaquira, J.C., Cardoso, D.C.T., Gonçalves, P. B. & Orlando, D. (2020). Parametric Instability and Nonlinear Oscillations of an FRP Channel Section Column under Axial Load. *Nonlinear Dynamics*, <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05663-x>
- Cortínez, V. H., & Piovan, M. T. (2002). Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4), 701-723.
- Correia, J. R., & Profiles, G. P. (2004). *The Use of GFRP-concrete Hybrid Beams in Construction* (Doctoral dissertation, MSc Thesis, Instituto Superior Técnico).
- Davalos, J. F., Salim, H. A., Qiao, P., Lopez-Anido, R., & Barbero, E. J. (1996). Analysis and design of pultruded FRP shapes under bending. *Composites Part B: Engineering*, 27(3-4), 295-305.
- Del Prado, Z. (2001). *Acoplamento e Interação Modal na Instabilidade Dinâmica de Cascas Cilíndricas* (Doctoral dissertation, Tese de Doutorado–PUC-Rio, Rio de Janeiro).
- Del Prado, Z., Gonçalves, P. B., & Païdoussis, M. P. (2010). Non-linear vibrations and instabilities of orthotropic cylindrical shells with internal flowing fluid. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(11), 1437-1457.
- Dinis, P. B., Camotim, D., & Silvestre, N. (2007). FEM-based analysis of the local-plate/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel columns. *Computers & Structures*, 85(19-20), 1461-1474.
- Dinis, P. B., Batista, E. M., Camotim, D., & dos Santos, E. S. (2012). Local–distortional–global interaction in lipped channel columns: Experimental results,

numerical simulations and design considerations. *Thin-Walled Structures*, 61, 2-13.

Everton de Souza Vieira. 2019, Flambagem Local de Vigas de Seção-I de pPRFV Submetidas a Flexão Simples.. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro)

Fares, M. E. (1999). Non-linear bending analysis of composite laminated plates using a refined first-order theory. *Composite structures*, 46(3), 257-266.

Feroldi, F., & Russo, S. (2016). Structural behavior of all-FRP beam-column plate-bolted joints. *Journal of Composites for Construction*, 20(4), 04016004.

"Fibre-reinforced polymer composite bridges in Europe". Advanced Composites Manufacturing Centre. <https://www.fose1.plymouth.ac.uk/sme/composites/bridges.htm>: Retrieved 14 August 2020;

Fossen, T., & Nijmeijer, H. (Eds.). (2011). *Parametric resonance in dynamical systems*. Springer Science & Business Media.

Gonçalves, P. B., Silva, F. M. A., & Del Prado, Z. J. G. N. (2008). Low-dimensional models for the nonlinear vibration analysis of cylindrical shells based on a perturbation procedure and proper orthogonal decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3), 641-663.

Gonçalves, P. B., Silva, F. M., & Del Prado, Z. J. (2007). Global stability analysis of parametrically excited cylindrical shells through the evolution of basin boundaries. *Nonlinear Dynamics*, 50(1-2), 121-145.

Gunda, J. B., Gupta, R. K., Janardhan, G. R., & Rao, G. V. (2011). Large amplitude vibration analysis of composite beams: simple closed-form solutions. *Composite structures*, 93(2), 870-879.

Iwatsubo, T., Saigo, M., & Sugiyama, Y. (1973). Parametric instability of clamped-clamped and clamped-simply supported columns under periodic axial load. *Journal of sound and vibration*, 30(1), 65-IN2.

Kassapoglou, C. (2013). *Design and analysis of composite structures: with applications to aerospace structures*. John Wiley & Sons.

Kim, W., & Reddy, J. N. (2010). Novel mixed finite element models for nonlinear analysis of plates. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 7(2), 201-226.

Kollár, L. P. (2003). Local buckling of fiber reinforced plastic composite structural members with open and closed cross sections. *Journal of Structural Engineering*, 129(11), 1503-1513.

Kovacic, I., Rand, R., & Mohamed Sah, S. (2018). Mathieu's equation and its generalizations: overview of stability charts and their features. *Applied Mechanics Reviews*, 70(2).

Kuehn, T., Pasternak, H., & Mittelstedt, C. (2014). Local buckling of shear-deformable laminated composite beams with arbitrary cross-sections using discrete plate analysis. *Composite Structures*, 113, 236-248.

Kubiak, T. (2011). Estimation of dynamic buckling for composite columns with open cross-section. *Computers & Structures*, 89(21), 2001-2009.

- Kwon, Y. B., Kim, B. S., & Hancock, G. J. (2009). Compression tests of high strength cold-formed steel channels with buckling interaction. *Journal of Constructional Steel Research*, 65(2), 278-289.
- Lenci, S., & Rega, G. (Eds.). (2019). *Global Nonlinear Dynamics for Engineering Design and System Safety*. Springer.
- Liu, F., & Zhou, J. (2018). Shooting and arc-length continuation method for periodic solution and bifurcation of nonlinear oscillation of viscoelastic dielectric elastomers. *Journal of Applied Mechanics*, 85(1).
- Mancilla, R.C., Gonçalves, P.B., Carvalho, E.C., “Vibrações não lineares de perfis esbeltos com seção aberta”. In: *XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2014*, 2014, Fortaleza - CE - Brasil. Proceedings of CILAMCE 2014, 2014.
- Mohri, F., Azrar, L., & Potier-Ferry, M. (2001). Flexural–torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections. *Thin-walled structures*, 39(11), 907-938.
- Mohri, F., Brouki, A., & Roth, J. C. (2003). Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams. *Journal of Constructional Steel Research*, 59(1), 63-90.
- Mottram, J. T. (2002). 6.2 Calculation of the critical local buckling load in PFRP shapes. In *Advanced Polymer Composites for Structural Applications in Construction: Proceedings of the First International Conference, Held at Southampton University, UK, on 15-17 April 2002* (p. 337). Thomas Telford Publishing.
- Moy, S. (2013). Advanced fiber-reinforced polymer (FRP) composites for civil engineering applications. In *Developments in fiber-reinforced polymer (FRP) composites for civil engineering* (pp. 177-204). Woodhead Publishing.
- National Research Council of Italy (CNR). (2008). Guide for the design and construction of structures made of thin FRP pultruded elements. *CNR-DT 205/2007*.
- Nayfeh, A. H., & Mook, D. T. Nonlinear oscillations, 1979. *John Willey and Sons, New York*, 305.
- Neto, A. B. D. S. S., & La Rovere, H. L. (2007). Flexural stiffness characterization of fiber reinforced plastic (FRP) pultruded beams. *Composite structures*, 81(2), 274-282.
- Orlando, D. (2010). *Dinâmica não-linear, instabilidade e controle de sistemas estruturais com interação modal* (Doctoral dissertation, Ph. D. thesis, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro).
- Orlando, D., Gonçalves, P. B., Rega, G., & Lenci, S. (2019). Influence of transient escape and added load noise on the dynamic integrity of multistable systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 109, 140-154.
- Parker, T. S., & Chua, L. (2012). *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer Science & Business Media.
- Pecce, M., & Cosenza, E. (2000). Local buckling curves for the design of FRP profiles. *Thin-walled structures*, 37(3), 207-222.

- Pezeshky, P., Sahraei, A., Rong, F., Sasibut, S., & Mohareb, M. (2020). Generalization of the Vlasov theory for lateral torsional buckling analysis of built-up monosymmetric assemblies. *Engineering Structures*, 221, 111055.
- Qiao, P. Z., Davalos, J. F., Barbero, E. J., & Troutman, D. U. S. T. I. N. (1999). Equations facilitate composite designs. *Modern Plastics*, 76(11), 77-80.
- Qiao, P., Davalos, J. F., & Wang, J. (2001). Local buckling of composite FRP shapes by discrete plate analysis. *Journal of Structural Engineering*, 127(3), 245-255.
- Qiao, P., & Shan, L. (2005). Explicit local buckling analysis and design of fiber-reinforced plastic composite structural shapes. *Composite Structures*, 70(4), 468-483.
- Reddy, J. N. (1984). A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *International Journal of solids and structures*, 20(9-10), 881-896.
- Richards, J. A. (2012). *Analysis of periodically time-varying systems*. Springer Science & Business Media.
- Russo, S. (2013). Damage assessment of GFRP pultruded structural elements. *Composite Structures*, 96, 661-669.
- Schafer, B. W. (2008). The direct strength method of cold-formed steel member design. *Journal of constructional steel research*, 64(7-8), 766-778.
- Schafer, B. W. (2002). Local, distortional, and Euler buckling of thin-walled columns. *Journal of structural engineering*, 128(3), 289-299.
- Schober, K. U., Harte, A. M., Kliger, R., Jockwer, R., Xu, Q., & Chen, J. F. (2015). FRP reinforcement of timber structures. *Construction and Building Materials*, 97, 106-118.
- Seydel, R. From equilibrium to chaos, practical bifurcation and stability analysis, 1988.
- Seydel, R. (1994). Practical bifurcation and stability analysis, from equilibrium to chaos. In *Interdisciplinary Applied Mathematics* (Vol. 5). Springer New-York.
- Shen, H. S. (2017). *Postbuckling behavior of plates and shells*. World Scientific.
- Silva, F. M. A. (2008). *Low dimensional models for nonlinear vibration and stability analysis of cylindrical shells* (Doctoral dissertation, D. Sc. thesis, Catholic University of Rio de Janeiro, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil).
- Silvestre, N., Camotim, D., Batista, E., & Nagahama, K. (2001). Buckling behaviour of thin-walled composite columns using generalised beam theory. *Thin-walled structures—advances and developments*, 5-7.
- Silvestre, N., & Camotim, D. (2002). Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, 40(9), 791-820.
- Silvestre, N., & Camotim, D. (2002). First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, 40(9), 755-789.
- Silva, N. M. F., Silvestre, N., & Camotim, D. (2010). GBT formulation to analyse the buckling behaviour of FRP composite open-section thin-walled columns. *Composite Structures*, 93(1), 79-92.

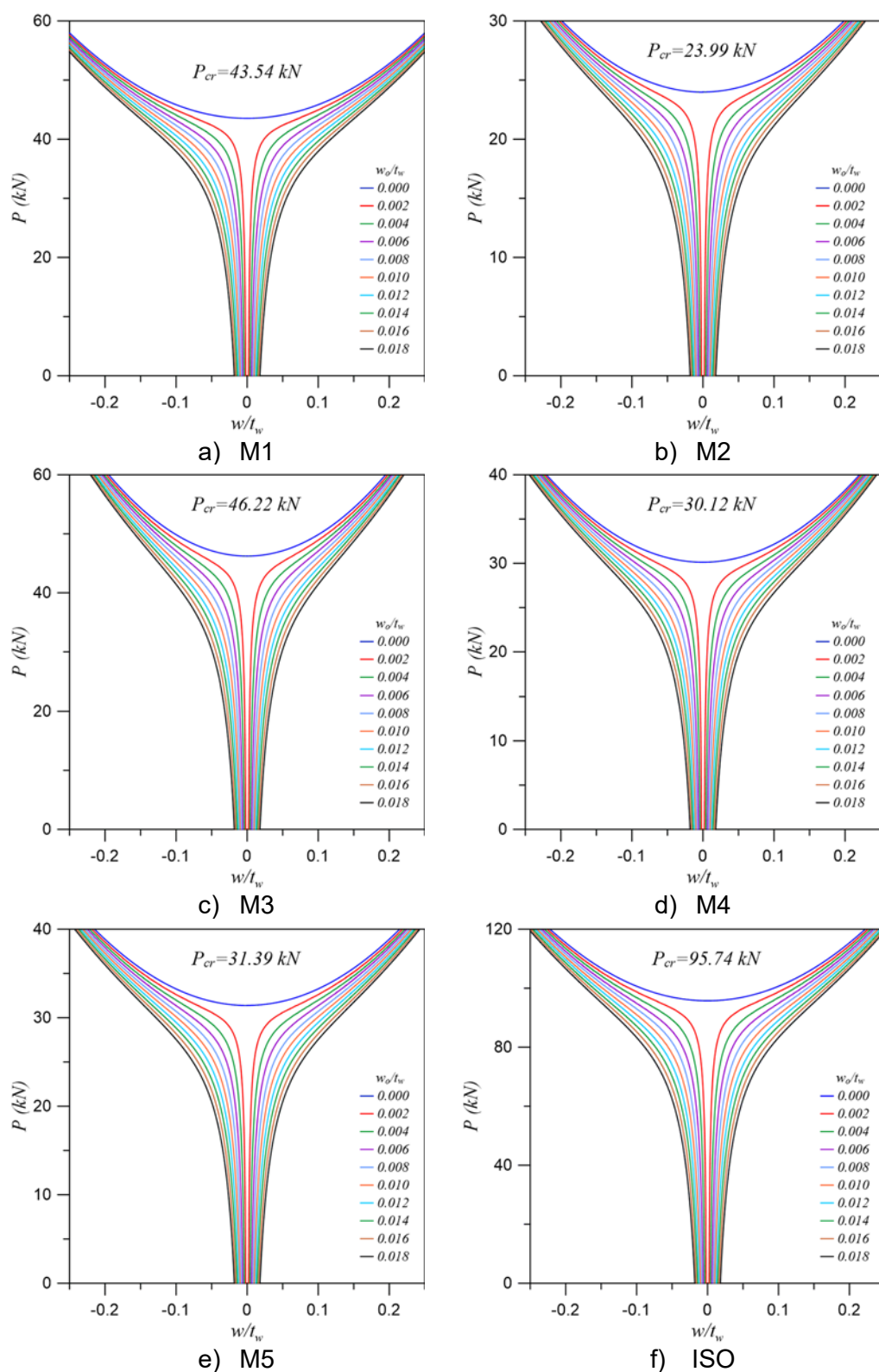
- Silvestre, N., & Camotim, D. (2003). GBT buckling analysis of pultruded FRP lipped channel members. *Computers & structures*, 81(18), 1889-1904.
- Song, G., Qiao, P., Sethi, V., & Prasad, A. (2004). Active vibration control of a smart pultruded fiber-reinforced polymer I-beam. *Smart materials and structures*, 13(4), 819.
- Thai, H. T., Nguyen, T. K., Vo, T. P., & Lee, J. (2014). Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 45, 211-225.
- The Composite Materials Research Group (CMRG), s.d., University of Mississippi <https://olemiss.edu/depts/compmatl/pultrusion.html>
- Thompson, J. M. T., & Ueda, Y. (1989). Basin boundary metamorphoses in the canonical escape equation. *Dynamics and stability of systems*, 4(3-4), 285-294.
- Thompson, J. M. T., & De Souza, J. R. (1996). Suppression of escape by resonant modal interactions: in shell vibration and heave-roll capsize. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 452(1954), 2527-2550.
- Thompson, J. M. T., & Stewart, H. B. (2002). *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons.
- Tomblin, J., & Barbero, E. (1994). Local buckling experiments on FRP columns. *Thin-Walled Structures*, 18(2), 97-116
- Togashi, B. S. (2017). *Pultrudadas Curtas de Polímero Reforçado com Fibra de Vidro (PRFV)* (Doctoral dissertation, PUC-Rio).
- Vedernikov, A., Safonov, A., Tucci, F., Carlone, P., & Akhatov, I. (2020). Pultruded materials and structures: A review. *Journal of Composite Materials*, 0021998320922894.
- Vlasov, V. Z. 1961, Thin-walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem.
- Vrabie, M., Chiriac, R., & Băetu, S. A. (2017). Studies Regarding the Shear Correction Factor in the Mindlin Plate Theory for Sandwich Plates. In *Advanced Engineering Forum* (Vol. 21, pp. 301-308). Trans Tech Publications Ltd.
- Wang, C. M., Reddy, J. N., & Lee, K. H. (Eds.). (2000). *Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions*. Elsevier.
- Weaver, A., 1999, "Composites: Worldwide Markets and Opportunities", *Materials Today*, Available March 2003: <http://www.materialstoday.com/>
- Wei, X., Russell, J., Živanović, S., & Mottram, J. T. (2019). Measured dynamic properties for FRP footbridges and their critical comparison against structures made of conventional construction materials. *Composite Structures*, 223, 110956.
- Xie, W. C. (2006). *Dynamic stability of structures*. Cambridge University Press.
- Yabuki, T., Arizumi, Y., Akamine, F., & Lu, L. W. (2005). Nonlinear effect on instability of steel columns under dynamic axial loads. *Journal of Structural Engineering*, 131(12), 1832-1840.
- Yu, W., Hodges, D. H., Volovoi, V. V., & Fuchs, E. D. (2005). A generalized Vlasov theory for composite beams. *Thin-Walled Structures*, 43(9), 1493-1511.

- Zaman, A., Gutub, S. A., & Wafa, M. A. (2013). A review on FRP composites applications and durability concerns in the construction sector. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 32(24), 1966-1988.
- Zhang, Z., & Taheri, F. (2002). Numerical studies on dynamic pulse buckling of FRP composite laminated beams subject to an axial impact. *Composite Structures*, 56(3), 269-277.
- Ziemian, R. D. (Ed.). (2010). *Guide to stability design criteria for metal structures*. John Wiley & Sons.
- Zureick, A., Kahn, L. F., & Bandy, B. J. (1995). Tests on deep I-shape pultruded beams. *Journal of reinforced plastics and composites*, 14(4), 378-389.

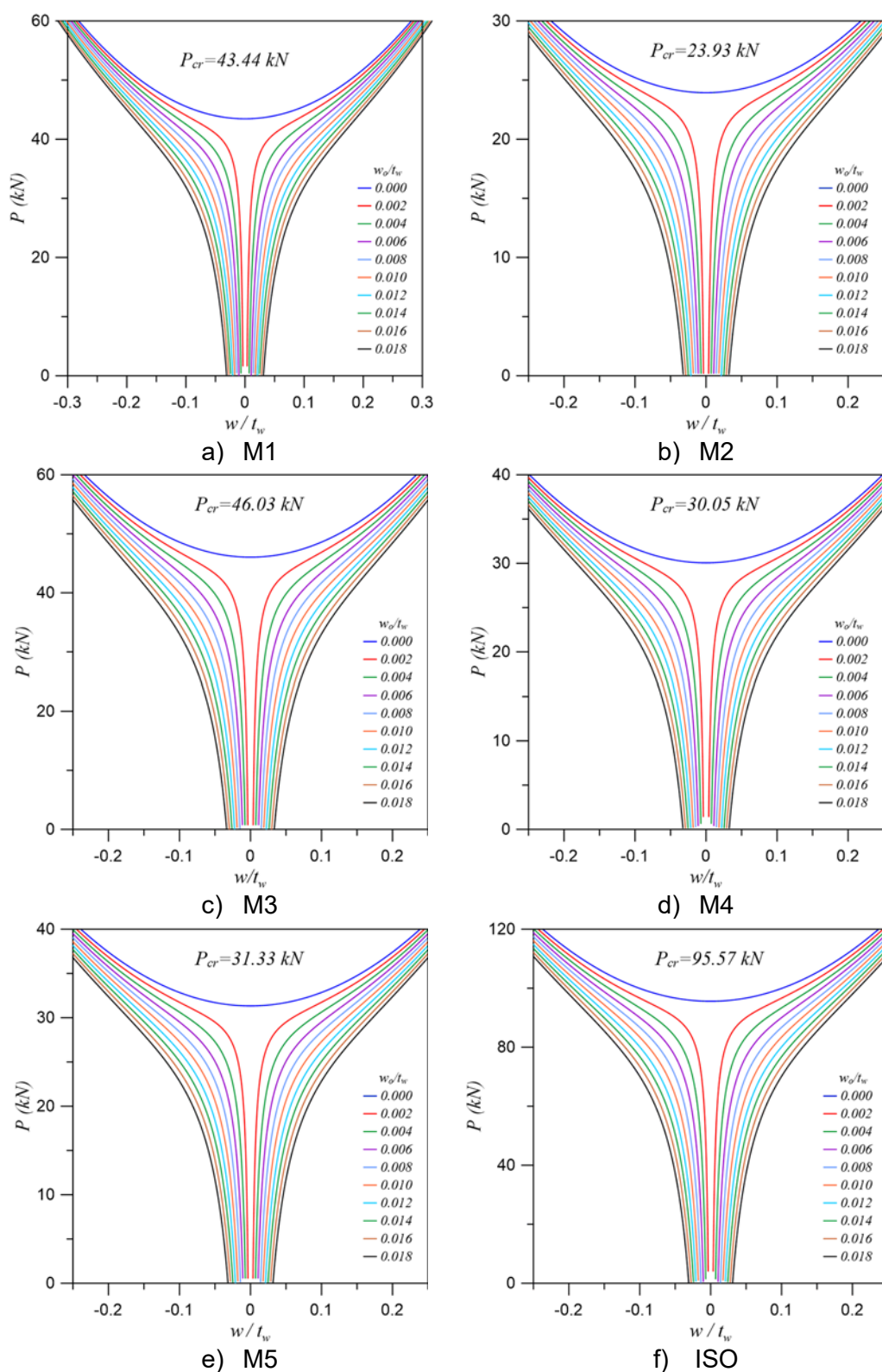
## **Apêndice I**

### **Comportamento Pós-crítico Local e Sensibilidade a Imperfeições**

As Figuras I.1. e I.2 .mostram a influência da imperfeição na resposta não linear do perfil para os *seis materiais estudados*, considerando, respectivamente, a CPT e a FSDT. As imperfeições são as mesmas em todas as figuras. Em todos os casos observa-se o mesmo tipo de comportamento.



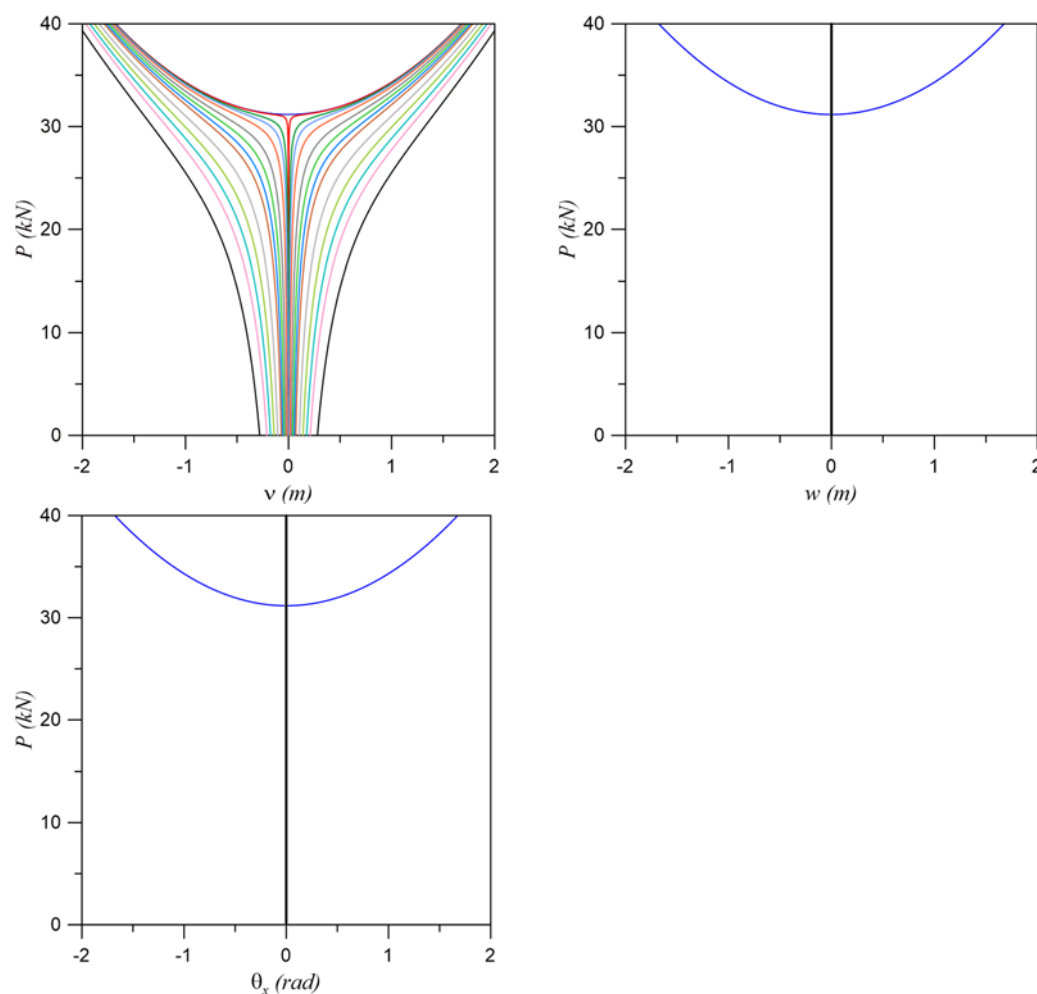
**Figura I.1: Caminho pós-crítico de equilíbrio, pela teoria clássica de placas.**



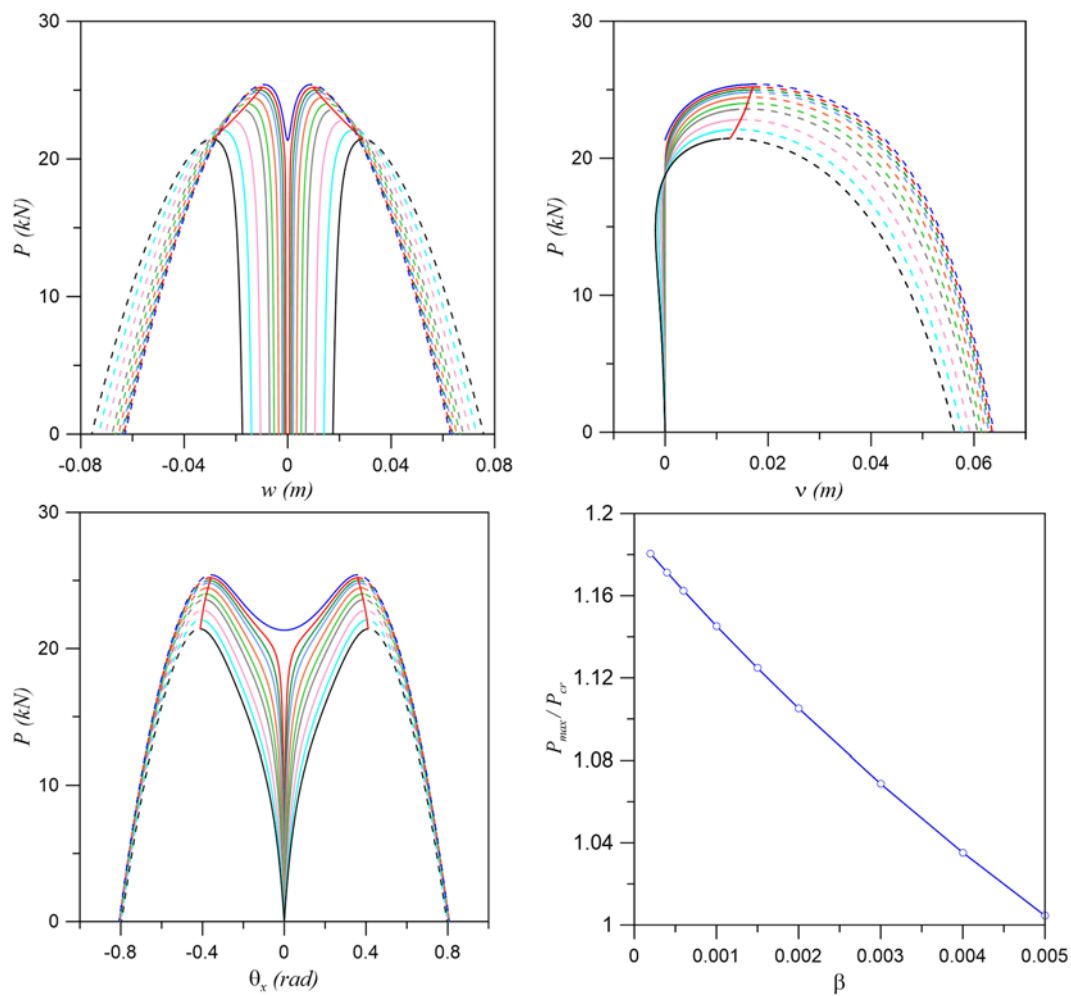
**Figura I.2: Caminho pós-crítico de equilíbrio e imperfeições, pela teoria de primeira ordem.**

## Apêndice II

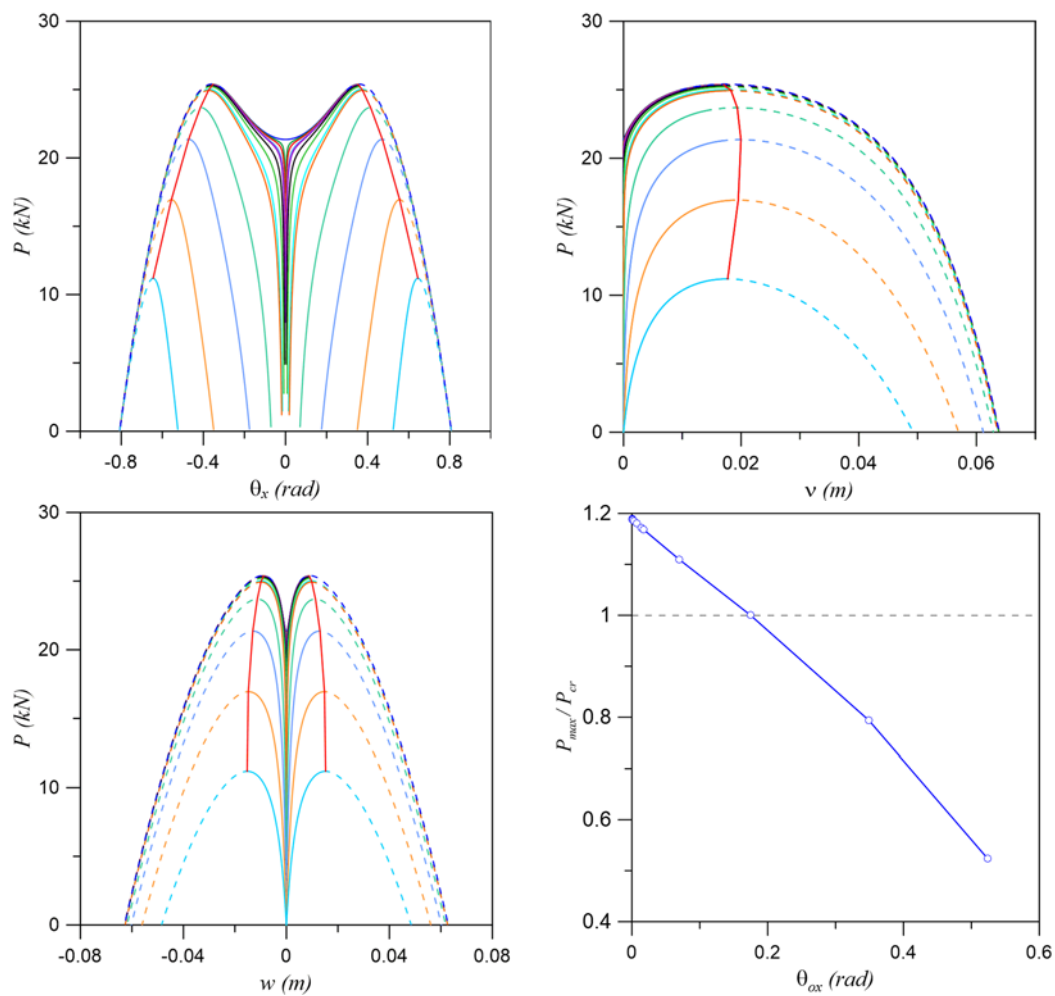
### Comportamento Pós-crítico e Sensibilidade a Imperfeições para os Materiais M2 a M5 e ISO.



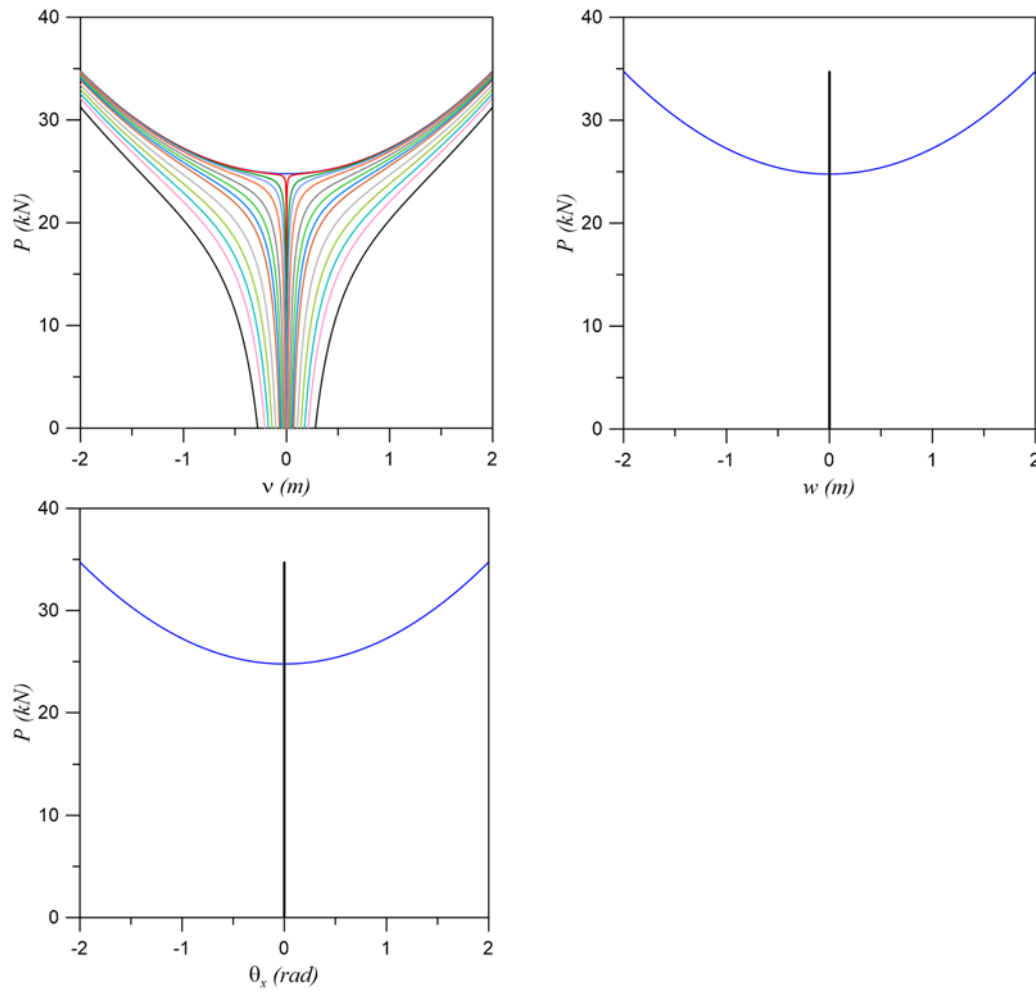
**Figura II.1: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $v_0$  sob carga axial, Material M2, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.**



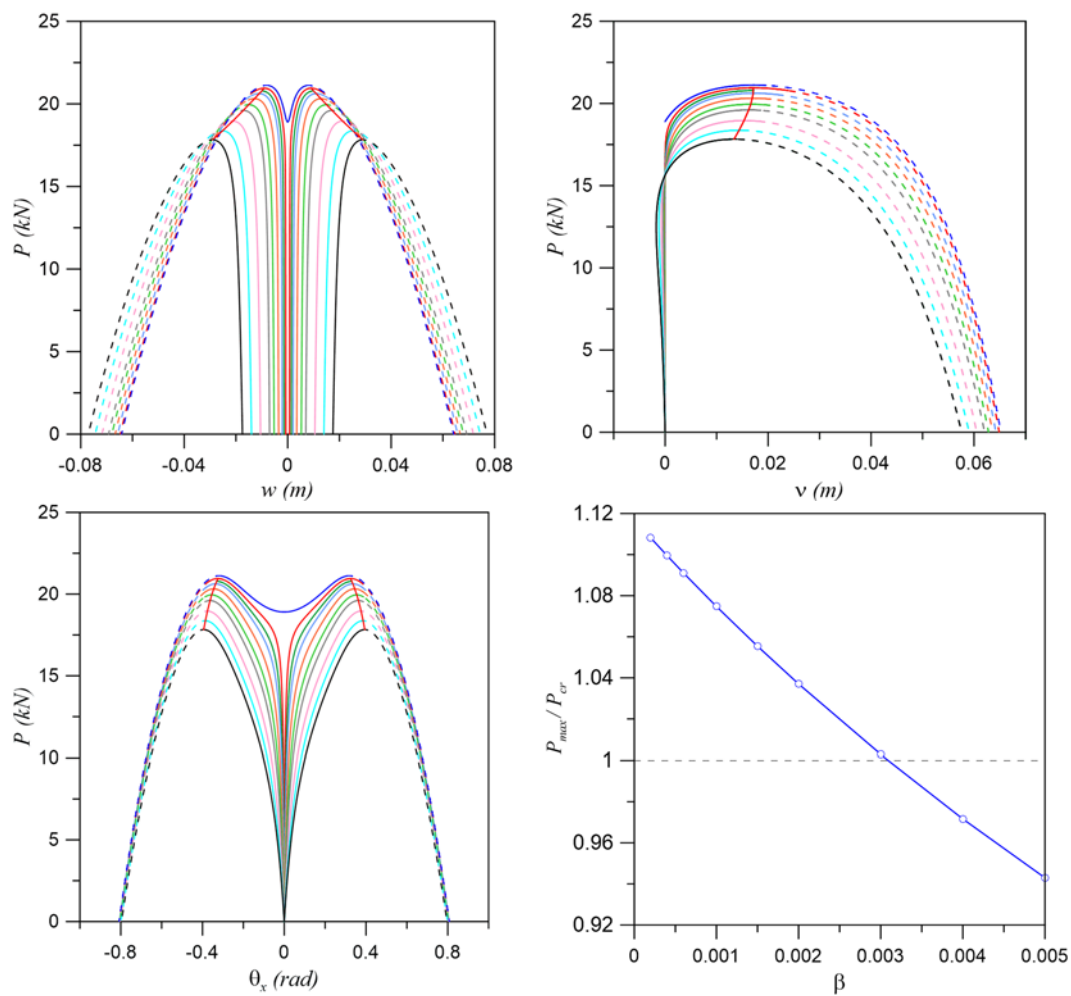
**Figura II.2:** Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $w_0$  sob carga axial, Material M2, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.



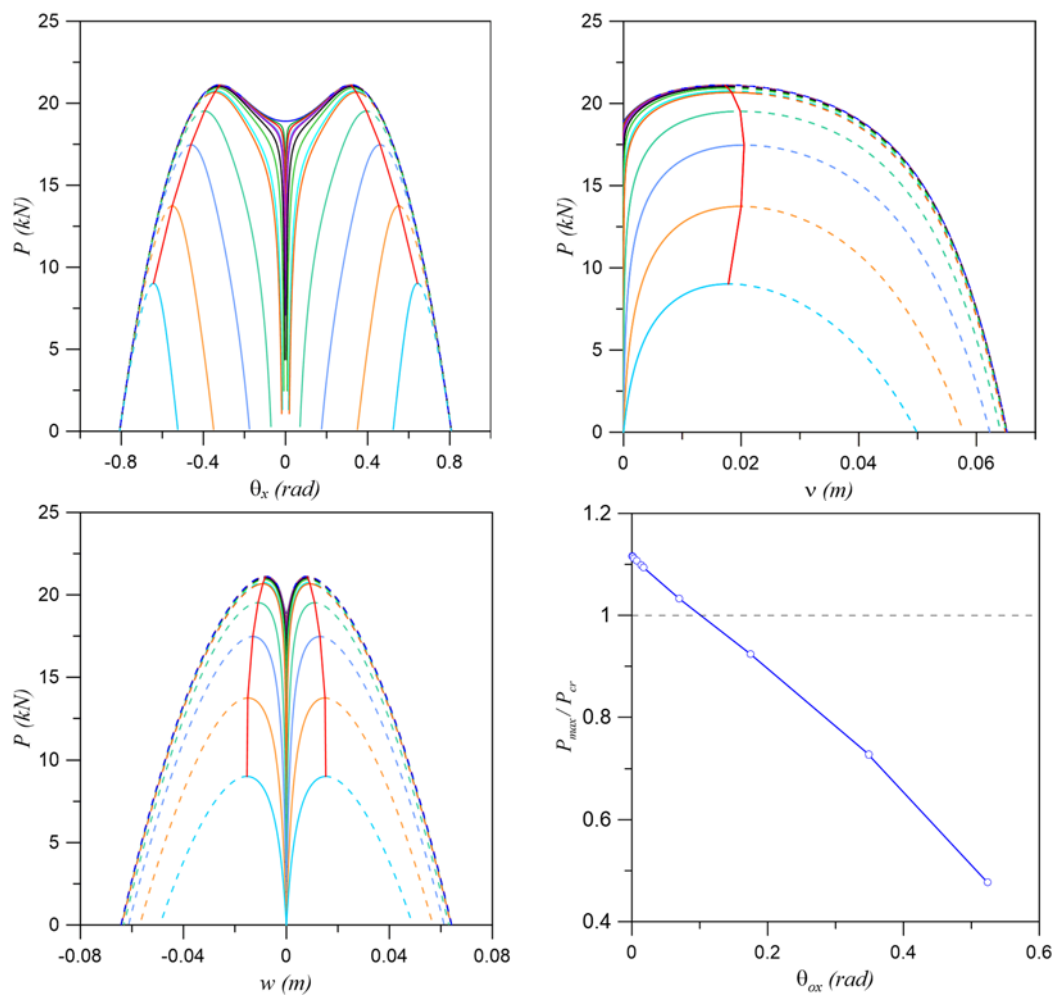
**Figura II.3: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $\theta_{ox}$  sob carga axial, Material M2, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.**



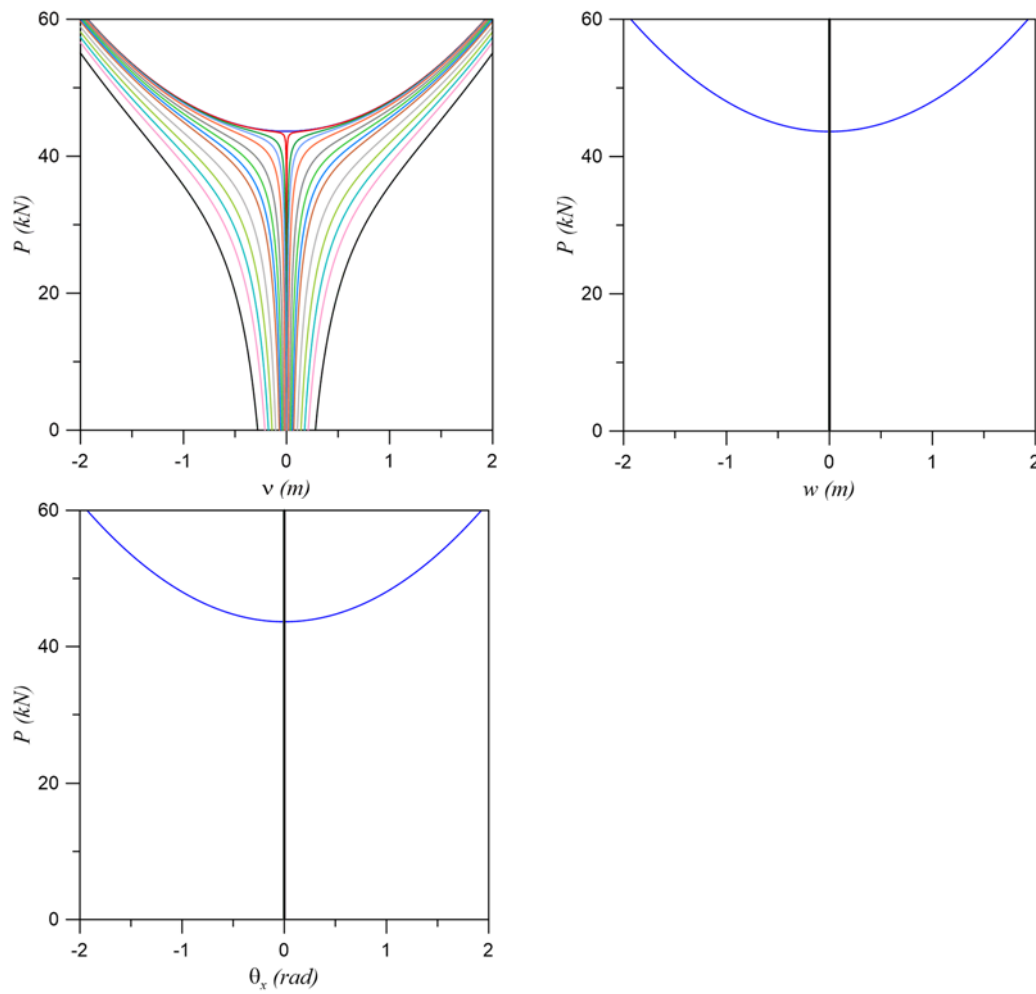
**Figura II.4: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $v_0$  sob carga axial, Material M5, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.**



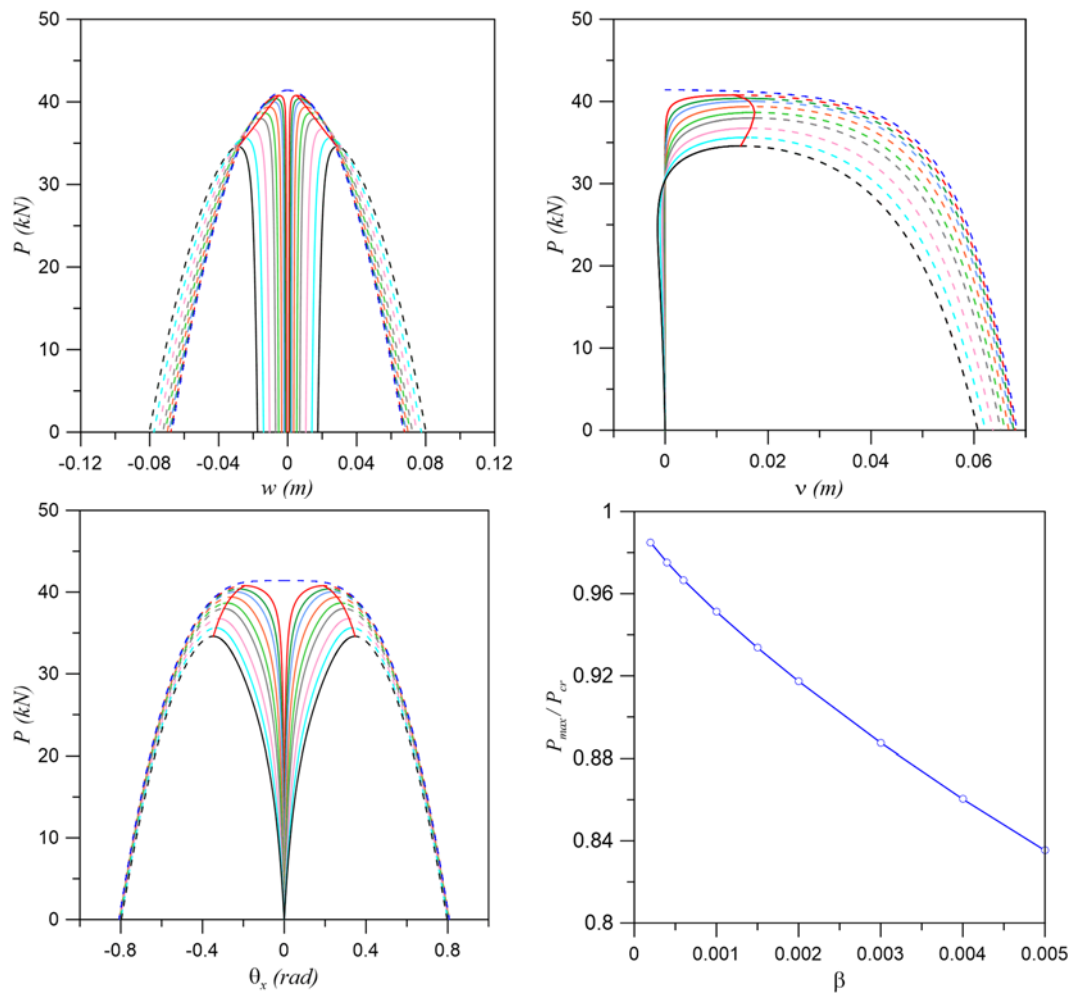
**Figura II.5:** Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $w_0$  sob carga axial, Material M5, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.



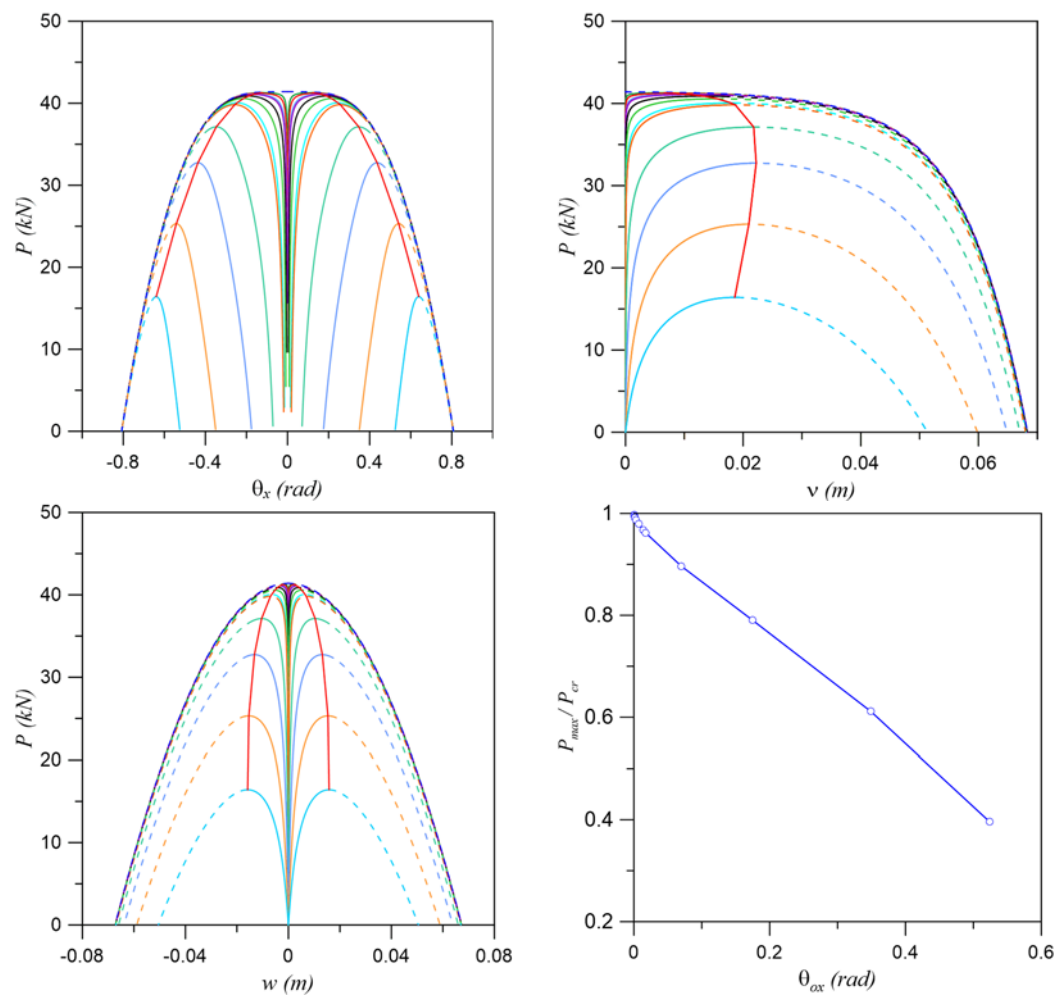
**Figura II.6:** Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $\theta_{ox}$  sob carga axial, Material M5, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.



**Figura II.7: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $v_0$  sob carga axial, Material ISO, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.**



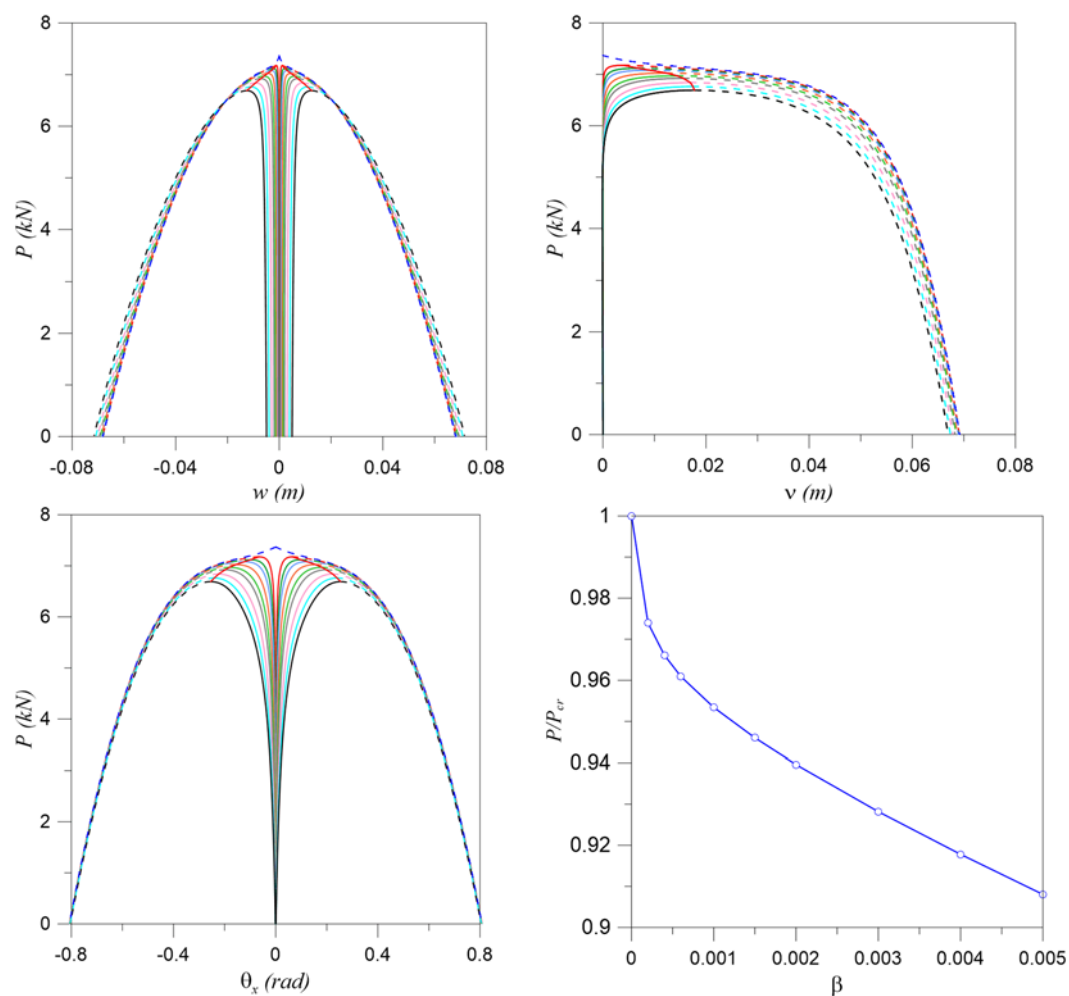
**Figura II.8:** Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $w_0$  sob carga axial, Material ISO, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.



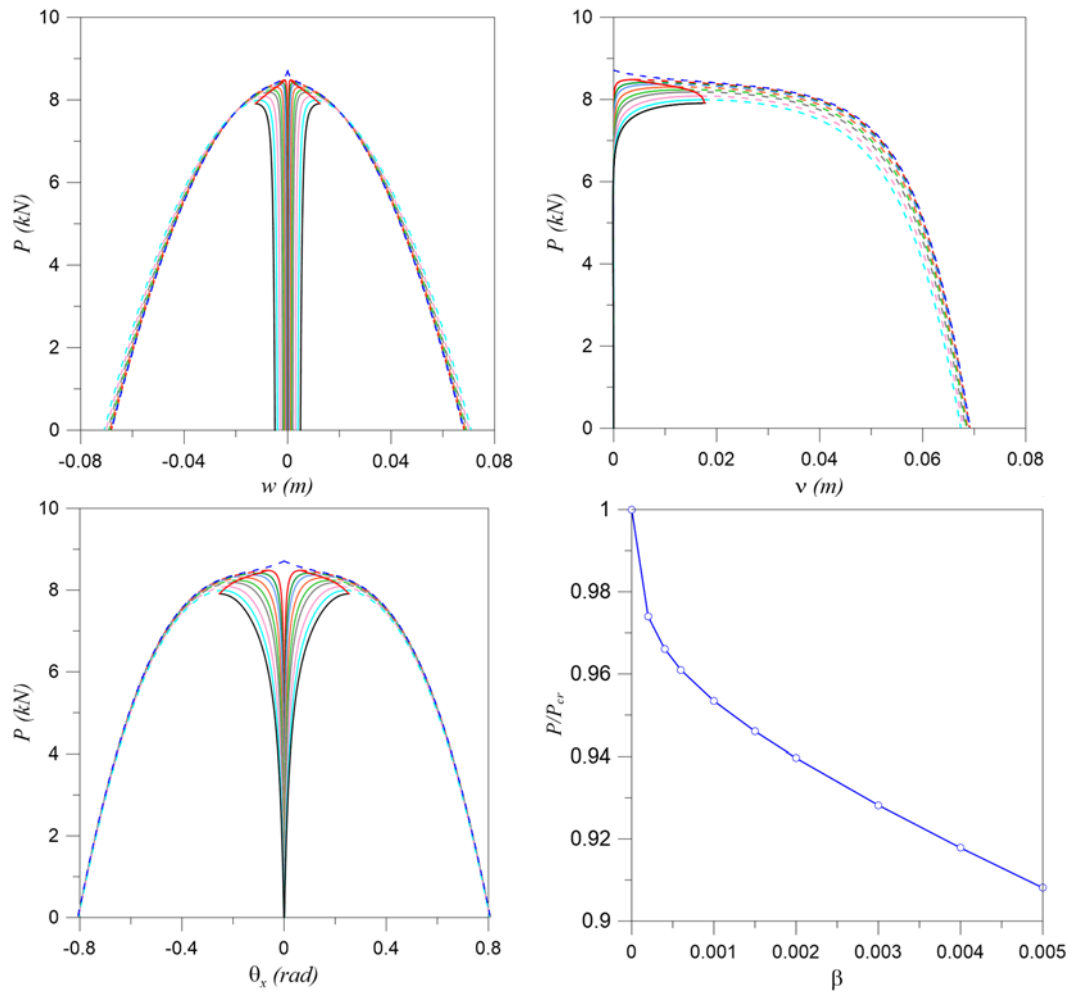
**Figura II.9:** Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição  $\theta_{ox}$  sob carga axial, Material ISO, Perfil C 200x100x5, L=3.5m.

### Apêndice III

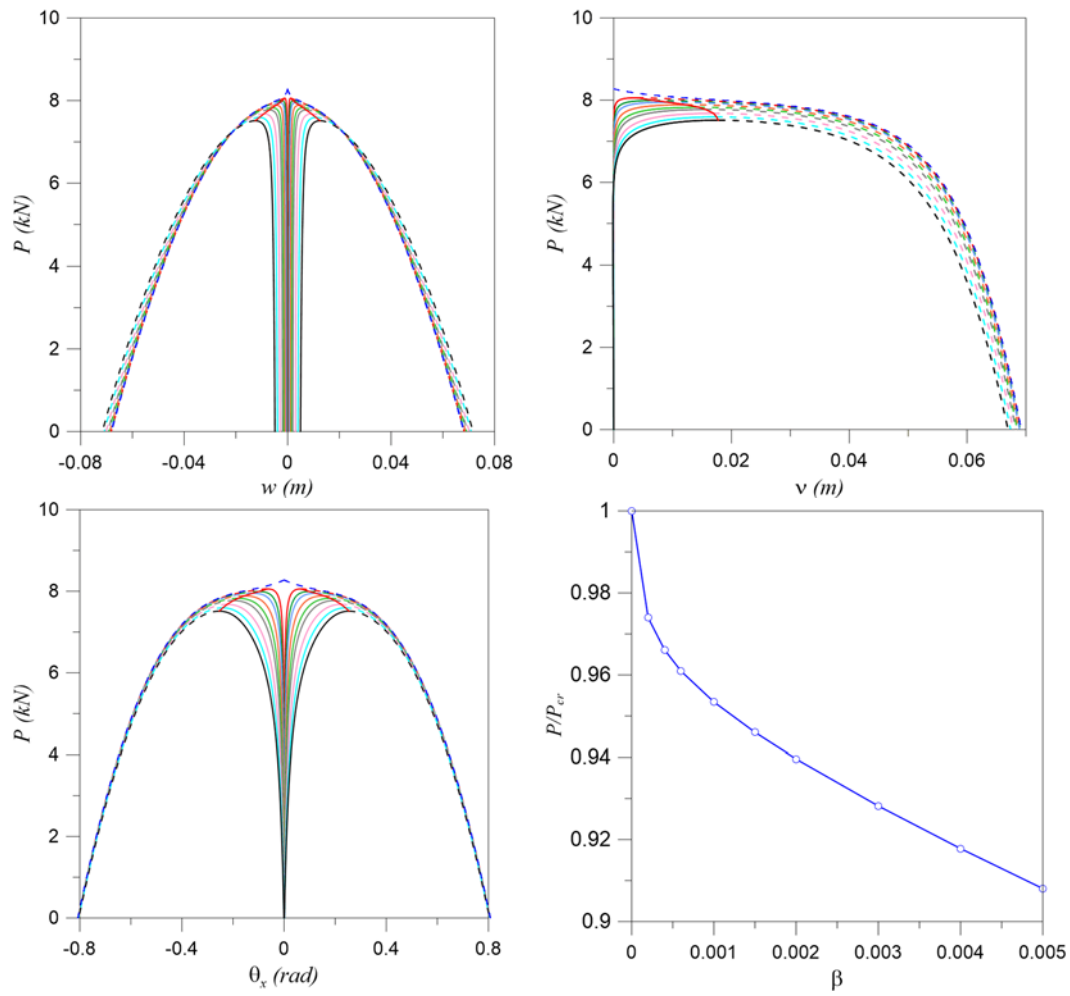
#### Caminhos de Equilíbrio da Coluna com Imperfeição na Forma do Modo Crítico e com Comprimento Crítico para os Diferentes Materiais



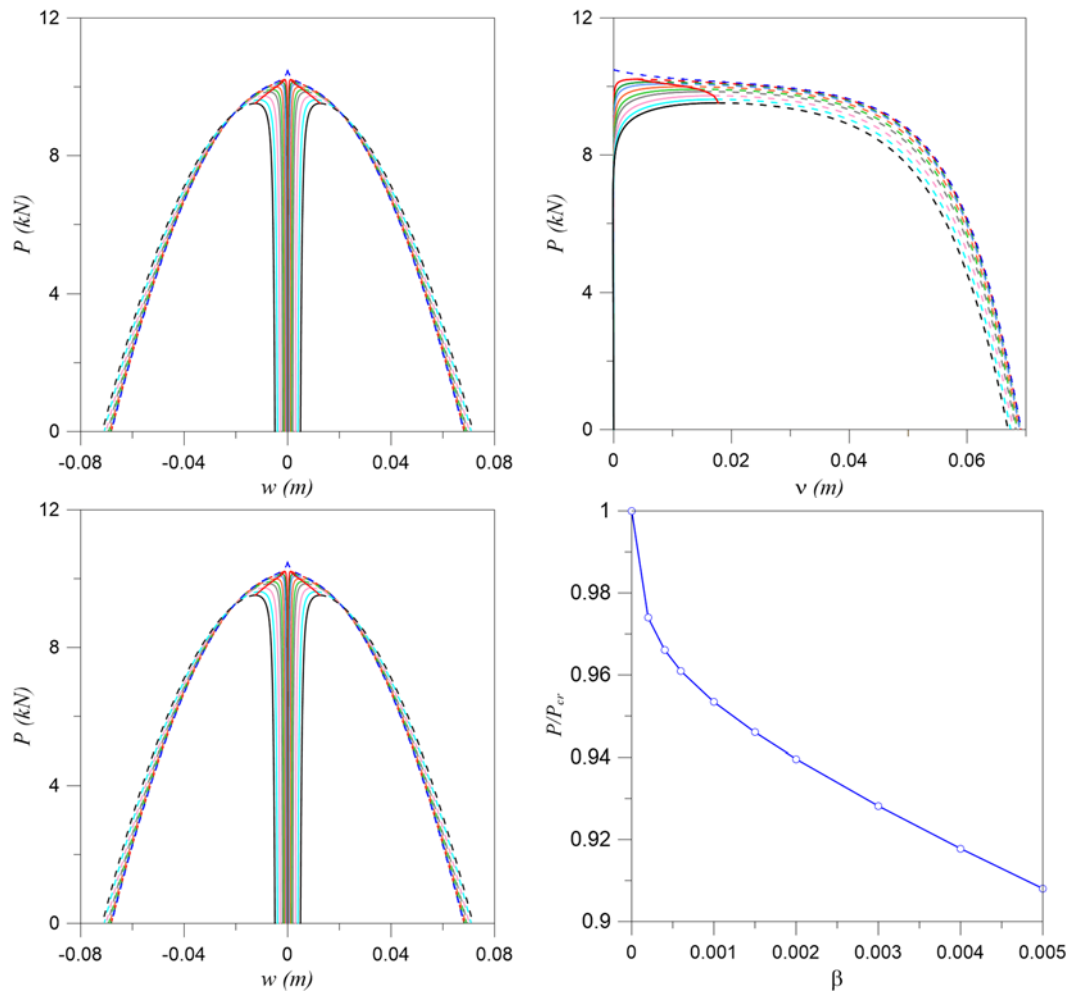
**Figura III.1:** Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no modo crítico sob carga axial, Material M2, Perfil C 200x100x5,  $L = L_{ftf}$ .



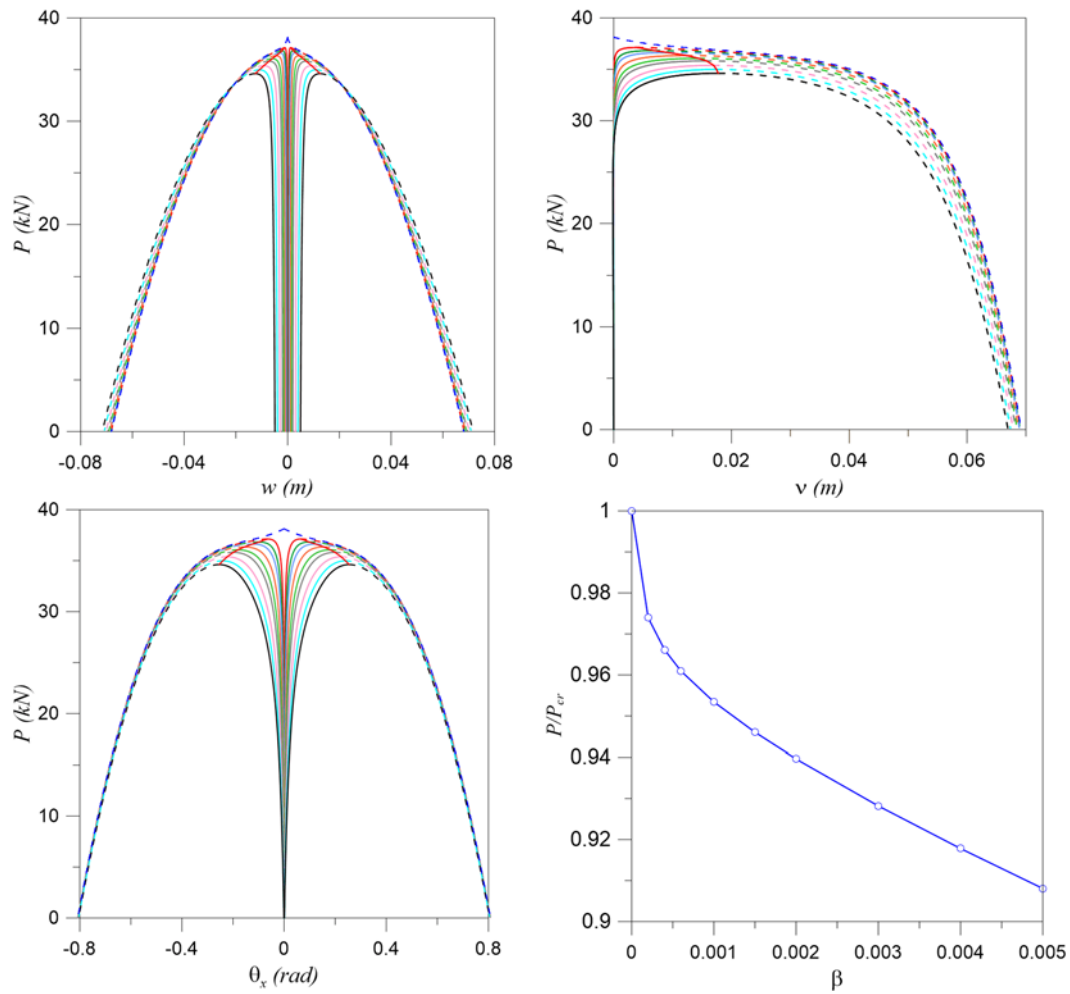
**Figura III.2: Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no modo crítico sob carga axial, Material M3, Perfil C 200x100x5,  $L = L_{ftf}$ .**



**Figura III.3:** Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no modo crítico sob carga axial, Material M4, Perfil C 200x100x5,  $L = L_{ftf}$ .



**Figura III.4:** Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no modo crítico sob carga axial, Material M5, Perfil C 200x100x5,  $L = L_{ftf}$ .



**Figura III.5:** Caminhos de equilíbrio da coluna com imperfeição no modo crítico sob carga axial, Material ISO, Perfil C 200x100x5,  $L = L_{ftf}$ .

## Apêndice IV

### Equações Não Lineares de Mathieu para Análise Global e Local

#### Equações Globais

Introduzindo as propriedades geométricas e as constantes elásticas dos material nas equações diferenciais de movimento, as imperfeições, cargas laterais, excentricidades e carga axial estática zeradas,  $v_o = w_o = \theta_{ox} = q_y = q_z = e_y = e_z = P_s = 0$  e um coeficiente de amortecimento  $\xi$  obtém-se o sistema perfeito de equações de movimento.

O sistema perfeito de equações diferenciais ordinárias de movimento para a coluna sometida a uma força axial,  $P = Q_d \text{sen}(\Omega_f t)$ ,  $L = 4m$ , Com uma taxa de amortecimento  $\xi = 1.45\%$ , dentro da faixa de resultados experimentais disponíveis para diferentes materiais são mostradas a seguir:

#### Material M1

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}v(t) + 1.781861 \frac{d}{dt}v(t) + 4080.8620v(t) + 314.6601v(t)^3 \\ - 170.99106Q_d \text{sen}(\Omega_f t)v(t) \\ + 4.41230Q_d \text{sen}(\Omega_f t)\theta_x(t)^2 \\ - 18678.79275w(t)\theta_x(t) \\ + 16504.07571v(t)\theta_x(t)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}w(t) + 0.06080 \frac{d^2}{dt^2}\theta_x(t) + 1.781861 \frac{d}{dt}w(t) \\ + 26086.29635w(t) + 2011.417384w(t)^3 \\ - 170.99106Q_d \text{sen}(\Omega_f t)w(t) \\ - 10.39625Q_d \text{sen}(\Omega_f t)\theta_x(t) \\ - 18678.79274v(t)\theta_x(t) \\ - 16504.07572w(t)\theta_x(t)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + 5.512124 \frac{d^2}{dt^2} w(t) + 161.543486 \frac{d}{dt} \theta(t) \\
& + 3776.66911 \theta(t) + 8158.0525 \theta(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t) \\
& - 942.524 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) w(t) \\
& + 800.0392 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) v(t) \theta_x(t) - 1.693418 \\
& * 10^6 v(t) w(t) + 1.496258 * 10^6 v(t)^2 \theta_x(t) \\
& - 1.4962 * 10^6 w(t)^2 \theta_x(t) = 0
\end{aligned} \tag{IV.3}$$

## Material M2

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} v(t) + 1.56680 \frac{d}{dt} v(t) + 4080.8620 v(t) + 314.6601 v(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) v(t) \\
& + 4.41230 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t)^2 \\
& - 18678.79275 w(t) \theta_x(t) \\
& + 16504.07571 v(t) \theta_x(t)^2 = 0
\end{aligned} \tag{IV.4}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} w(t) + 0.06080 \frac{d^2}{dt^2} \theta_x(t) + 1.56680 \frac{d}{dt} w(t) \\
& + 26086.29635 w(t) + 2011.417384 w(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) w(t) \\
& - 10.39625 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t) \\
& - 18678.79274 v(t) \theta_x(t) \\
& - 16504.07572 w(t) \theta_x(t)^2 = 0
\end{aligned} \tag{IV.5}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} \theta_x(t) + 5.512124 \frac{d^2}{dt^2} w(t) + 142.01799 \frac{d}{dt} \theta_x(t) \\
& + 3041.1560 \theta_x(t) + 8116.174583 \theta_x(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t) \\
& - 942.6160 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) w(t) \\
& + 800.117325 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) v(t) \theta_x(t) - 1.693082 \\
& * 10^6 v(t) w(t) + 1.4959616 * 10^6 v(t)^2 \theta_x(t) \\
& - 1.49596166 * 10^6 w(t)^2 \theta_x(t) = 0
\end{aligned} \tag{IV.6}$$

### Material M3

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} v(t) + 1.82743 \frac{d}{dt} v(t) + 5713.20689 v(t) + 440.52415 v(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) v(t) \\
& + 4.41230 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t)^2 \\
& - 26150.30985 w(t) \theta_x(t) + 23105.7060 v(t) \theta_x(t)^2 \\
& = 0
\end{aligned} \tag{IV.7}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} w(t) + 0.06080 \frac{d^2}{dt^2} \theta_x(t) + 1.82743 \frac{d}{dt} w(t) \\
& + 36520.81489 w(t) + 2815.98433 w(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) w(t) \\
& - 10.39625 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t) \\
& - 26150.30985 v(t) \theta_x(t) - 23105.7060 w(t) \theta_x(t)^2 \\
& = 0
\end{aligned} \tag{IV.8}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} \theta_x(t) + 5.512124 \frac{d^2}{dt^2} w(t) + 165.642318 \frac{d}{dt} \theta_x(t) \\
& + 4131.76442 \theta_x(t) + 11362.64442 \theta_x(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t) \\
& - 942.6160 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) w(t) \\
& + 800.117325 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) v(t) \theta_x(t) - 2.370315 \\
& * 10^6 v(t) v(t) + 2.094346 * 10^6 v(t)^2 \theta_x(t) \\
& - 2.094346 * 10^6 w(t)^2 \theta_x(t) = 0
\end{aligned} \tag{IV.9}$$

**Material M4**

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2}v(t) + 1.58729 \frac{d}{dt}v(t) + 4101.26637v(t) + 316.23341v(t)^3 \\
& - 170.99106Q_d \text{sen}(\Omega_f t)v(t) \\
& + 4.41230Q_d \text{sen}(\Omega_f t)\theta_x(t)^2 \\
& - 18772.18672w(t)\theta_x(t) \\
& + 16586.59609v(t)\theta_x(t)^2 = 0
\end{aligned} \tag{IV.10}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2}w(t) + 0.06080 \frac{d^2}{dt^2}\theta_x(t) + 1.58729 \frac{d}{dt}w(t) \\
& + 26216.72783w(t) + 2021.47447w(t)^3 \\
& - 170.99106Q_d \text{sen}(\Omega_f t)w(t) \\
& - 10.39933Q_d \text{sen}(\Omega_f t)\theta_x(t) \\
& - 18772.18672v(t)\theta_x(t) \\
& - 16586.59609w(t)\theta_x(t)^2 = 0
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2}\theta_x(t) + 5.512124 \frac{d^2}{dt^2}w(t) + 143.875775 \frac{d}{dt}\theta_x(t) \\
& + 3124.270603\theta_x(t) + 8156.755457\theta_x(t)^3 \\
& - 170.99106Q_d \text{sen}(\Omega_f t)\theta_x(t) \\
& - 942.6160Q_d \text{sen}(\Omega_f t)w(t) \\
& + 800.117325Q_d \text{sen}(\Omega_f t)v(t)\theta_x(t) - 1.70154 \\
& * 10^6 v(t)w(t) + 1.503441 * 10^6 v(t)^2\theta_x(t) \\
& - 1.5034414 * 10^6 w(t)^2\theta_x(t) = 0
\end{aligned} \tag{IV.12}$$

**Material M5**

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2}v(t) + 1.492707 \frac{d}{dt}v(t) + 3242.24491v(t) \\
& + 249.99745v(t)^3 - 170.99106Q_d \text{sen}(\Omega_f t)v(t) \\
& + 4.41361Q_d \text{sen}(\Omega_f t)\theta_x(t)^2 \\
& - 14840.30084w(t)\theta_x(t) \\
& + 13112.48816v(t)\theta_x(t)^2 = 0
\end{aligned} \tag{IV.13}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} w(t) + 0.06080 \frac{d^2}{dt^2} \theta_x(t) + 1.492707 \frac{d}{dt} w(t) \\
& + 20725.56246 w(t) + 1598.071112 w(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) w(t) \\
& - 10.39933 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t) \\
& - 14840.30084 v(t) \theta_x(t) \\
& - 13112.48816 w(t) \theta_x(t)^2 = 0
\end{aligned} \tag{IV.14}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} \theta_x(t) + 5.512124 \frac{d^2}{dt^2} w(t) + 135.301935 \frac{d}{dt} \theta_x(t) \\
& + 2778.579559 \theta_x(t) + 6448.300708 \theta_x(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t) \\
& - 942.6160 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) w(t) \\
& + 800.117325 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) v(t) \theta_x(t) - 1.34515 \\
& * 10^6 v(t) w(t) + 1.18854 * 10^6 v(t)^2 \theta_x(t) \\
& - 1.18854 * 10^6 w(t)^2 \theta_x(t) = 0
\end{aligned} \tag{IV.15}$$

### Material ISO

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} v(t) + 2.191986 \frac{d}{dt} v(t) + 5713.20689 v(t) \\
& + 440.52415 v(t)^3 - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) v(t) \\
& + 4.413614 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t)^2 \\
& - 26150.30985 w(t) \theta_x(t) + 23105.7060 v(t) \theta_x(t)^2 \\
& = 0
\end{aligned} \tag{IV.16}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} w(t) + 0.06080 \frac{d^2}{dt^2} \theta_x(t) + 2.191986 \frac{d}{dt} w(t) \\
& + 36520.81489 w(t) + 2815.98433 w(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) w(t) \\
& - 10.399334 Q_d \text{sen}(\Omega_f t) \theta_x(t) \\
& - 26150.30985 v(t) \theta_x(t) - 23105.7060 w(t) \theta_x(t)^2 \\
& = 0
\end{aligned} \tag{IV.17}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} \theta_x(t) + 5.512124 \frac{d^2}{dt^2} w(t) + 198.6859 \frac{d}{dt} \theta_x(t) \\
& + 6434.399366 \theta_x(t) + 11362.64442 \theta_x(t)^3 \\
& - 170.99106 Q_d \sin(\Omega_f t) \theta_x(t) \\
& - 942.6160 Q_d \sin(\Omega_f t) w(t) \\
& + 800.117325 Q_d \sin(\Omega_f t) v(t) \theta_x(t) - 2.370315 \\
& * 10^6 v(t) w(t) + 2.094346 * 10^6 v(t)^2 \theta_x(t) \\
& - 2.094346 * 10^6 w(t)^2 \theta_x(t) = 0
\end{aligned} \tag{IV.18}$$

As cargas críticas e frequências naturais para um comprimento da coluna e diferentes materiais são mostradas a continuação:

**Tabela IV.1: Cargas e modos de bifurcação para a coluna simplesmente apoiada, L=4m, Material M1.**

Modo	P (kN)	$\omega_o$ (Hz)	Direção $v_o$	Direção $w_o$	Direção $\theta_o$
FT	<b>20.967</b>	<b>9.5296</b>	0,000	-0,986	-0,162
F	23.865	10.1670	1,000	0,000	0,000
FT	241.712	32.35614	0,000	-0,999	0,009

**Tabela IV.2: Cargas e modos de bifurcação para a coluna simplesmente apoiada, L=4m, Material M2.**

Modo	P (kN)	$\omega_o$ (Hz)	Direção $v_o$	Direção $w_o$	Direção $\theta_o$
FT	<b>17.070</b>	<b>8.59876</b>	0,000	-0,986	-0,165
F	23.865	10.16707	1,000	0,000	0,000
FT	239.149	32.18409	0,000	-0,999	0,007

**Tabela IV.3: Cargas e modos de bifurcação para a coluna simplesmente apoiada, L=4m, Material M3.**

Modo	P (kN)	$\omega_o$ (Hz)	Direção $v_o$	Direção $w_o$	Direção $\theta_o$
FT	<b>23.222</b>	<b>10.02915</b>	0,000	-0,986	-0,165
F	33.412	12.02984	1,000	0,000	0,000
FT	334.377	38.05621	0,000	-0,999	0,007

**Tabela IV.4: Cargas e modos de bifurcação para a coluna simplesmente apoiada, L=4m, Material M4.**

Modo	P (kN)	$\omega_o$ (Hz)	Direção $v_o$	Direção $w_o$	Direção $\theta_o$
FT	<b>17.520</b>	<b>8.71125</b>	0,000	-0,986	-0,165
F	23.985	10.19246	1,000	0,000	0,000
FT	240.578	32.28011	0,000	-0,999	0,007

**Tabela IV.5: Cargas e modos de bifurcação para a coluna simplesmente apoiada, L=4m, Material M5.**

Modo	P (kN)	$\omega_o$ (Hz)	Direção $v_o$	Direção $w_o$	Direção $\theta_o$
FT	15.494	8.19213	0,000	-0,986	-0,164
F	18.961	9.06239	1,000	0,000	0,000
FT	191.261	28.78194	0,000	-0,999	0,009

**Tabela IV.6: Cargas e modos de bifurcação para a coluna simplesmente apoiada, L=4m, Material ISO**

Mod o	P (kN)	$\omega_o$ (Hz)	Direção $v_o$	Direção $w_o$	Direção $\theta_o$
F	33.412	12.02984	1,000	0,000	0,000
FT	35.301	12.36520	0,000	-0,999	0,012
FT	342.561	38.51910	0,000	-0,987	-0,159

### Análise Local

As equações de movimento pela teoria clássica de placas para o perfil C 200x100x5 e os seis materiais escolhidos são mostrados a continuação:

#### Material M1

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} w_o(t) + 2246.74407 \xi \frac{d}{dt} w_o(t) + 1.2619 * 10^6 w_o(t) + 2.6838 \\ * 10^5 w_o(t)^3 - 1.4196 \\ * 10^9 [N_s + N_d \sin(\Omega_f t)] w_o(t) = 0 \end{aligned} \quad (IV.19)$$

#### Material M2

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} w_o(t) + 1402.34897 \xi \frac{d}{dt} w_o(t) + 4.91645 * 10^5 w_o(t) \\ + 1.249412 * 10^5 w_o(t)^3 - 3.446431 \\ * 10^8 [N_s + N_d \sin(\Omega_f t)] w_o(t) = 0 \end{aligned} \quad (IV.20)$$

#### Material M3

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} w_o(t) + 2508.54345 \xi \frac{d}{dt} w_o(t) + 1.57319 * 10^6 w_o(t) \\ + 4.944658 * 10^5 w_o(t)^3 - 1.974358 \\ * 10^9 [N_s + N_d \sin(\Omega_f t)] w_o(t) = 0 \end{aligned} \quad (IV.21)$$

**Material M4**

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} w_o(t) + 1798.85448\xi \frac{d}{dt} w_o(t) + 8.089691 * 10^5 w_o(t) \\
& + 2.186925 * 10^5 w_o(t)^3 - 7.280721 \\
& * 10^8 [N_s + N_d \text{sen}(\Omega_f t)] w_o(t) = 0
\end{aligned} \tag{IV.22}$$

**Material M5**

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} w_o(t) + 27.497867\xi \frac{d}{dt} w_o(t) + 8.990876 * 10^5 w_o(t) \\
& + 2.142160 * 10^5 w_o(t)^3 - 8.52335 \\
& * 10^8 [N_s + N_d \text{sen}(\Omega_f t)] w_o(t) = 0
\end{aligned} \tag{IV.23}$$

**Material ISO**

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} w_o(t) + 3963.00676\xi \frac{d}{dt} w_o(t) + 3.926355 * 10^6 w_o(t) \\
& + 8.054582 * 10^5 w_o(t)^3 - 7.78203 \\
& * 10^9 [N_s + N_d \text{sen}(\Omega_f t)] w_o(t) = 0
\end{aligned} \tag{IV.24}$$

As equações de movimento adimensionais são obtidas introduzindo o termo adimensional de tempo,  $\tau = \omega_o t$ , assim os termos das derivadas são transformadas como segue:

$$\frac{d}{dt} w_o(t) = \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) \frac{d\tau}{dt} = \omega_o \frac{d}{d\tau} w_o(\tau)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} w_o(t) = \omega_o \frac{d}{d\tau^2} w_o(\tau) \frac{d\tau}{dt} = \omega_o^2 \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau)$$

Substituindo os termos de derivadas,  $\frac{d^2}{dt^2} w_o(t) = \omega_o^2 \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau)$ ,  $\frac{d}{dt} w_o(t) = \omega_o \frac{d}{d\tau} w_o(\tau)$ , nas equações de movimento, obtem-se:

**Material M1**

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.2126 w_o(\tau)^3 \\
& - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)] w_o(\tau) = 0
\end{aligned} \tag{IV.25}$$

**Material M2**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.2541w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

**Material M3**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.3143w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

**Material M4**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.2703w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

**Material M5**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.2352w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

**Material ISO**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.2051w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

**Pela Teoria de Deformação de Primeira Ordem:****Material M1**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.1923w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

**Material M2**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.2132w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

**Material M3**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.2222w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

**Material M4**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.2141w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

**Material M5**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.1939w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

**Material ISO**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} w_o(\tau) + 2.00\xi \frac{d}{d\tau} w_o(\tau) + w_o(\tau) + 0.1822w_o(\tau)^3 \\ - [Q_s + Q_d \text{sen}(\delta\tau)]w_o(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$