



Giovanna Luisa Coelho Leal

**A realização de alguns subgrupos discretos do
grupo Spin na álgebra de Clifford**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção
do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em
Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro
Março de 2021



Giovanna Luisa Coelho Leal

**A realização de alguns subgrupos discretos do
grupo Spin na álgebra de Clifford**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Emília Carolina Santana Teixeira Alves

Departamento de Matemática Aplicada – UFF

Prof. José Victor Goulart Nascimento

Departamento de Matemática – UFES

Prof. Sergey Galkin

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Thiago Barbosa dos Santos Guerreiro

Departamento de Física – PUC-Rio

Prof. Umberto Leone Hryniewicz

Departamento de Matemática – UFRJ

Rio de Janeiro, 08 de Março de 2021

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Giovanna Luisa Coelho Leal

Gradou-se em bacharelado e licenciatura em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (Rio de Janeiro, Brasil).

Ficha Catalográfica

Leal, G.L.C.

A realização de alguns subgrupos discretos do grupo Spin na álgebra de Clifford / Giovanna Luisa Coelho Leal; orientador: Nicolau Corção Saldanha. – 2021.

72 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2021.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Permutação. 3. Grupo Spin. 4. Álgebra de Clifford. 5. Células de Bruhat. 6. Grupo de Coxeter. I. Saldanha, N.C.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 620.11

Aos meus pais, Angela e Claudio.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar sempre comigo me dando forças.

A eu mesma por ter conseguido chegar até aqui.

Ao meu orientador Prof. Nicolau Saldanha, por todo o apoio e paciência desde o início do curso de mestrado até a conclusão.

À minha família, que me mantém firme. Em à especial minha irmã Gabrielle, que é minha maior parceira.

Ao meu noivo Natan, por toda compreensão e apoio.

Aos meus amigos, em especial à Camila, Isabela, Guilherme e Raphael que me ajudam e apoiam sempre. Ao Igor Caetano, por todo auxílio e paciência. Ao Nivaldo, por sempre me apoiar e me incentivar.

À CAPES, à Petrobras e a PUC-Rio, pelo suporte financeiro.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Leal, G.L.C.; Saldanha, N.C.. **A realização de alguns subgrupos discretos do grupo Spin na álgebra de Clifford.** Rio de Janeiro, 2021. 72p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A álgebra de Clifford Cl_{n+1}^0 é uma álgebra associativa que pode ser realizada matricialmente. O grupo $Spin_{n+1}$ é uma superfície contida em Cl_{n+1}^0 e fechada por multiplicação. Estudamos os geradores de tal grupo, assim como dos grupos de matrizes $Quat_{n+1}$ e \tilde{B}_{n+1}^+ que são subconjuntos de $Spin_{n+1}$. Uma permutação em S_{n+1} , pode ser expressa como uma palavra reduzida, por meio de geradores de Coxeter. Os mapas *acute* e *grave* nos fornecem elementos em \tilde{B}_{n+1}^+ , a partir das palavras reduzidas de uma permutação em S_{n+1} . Um elemento da álgebra de Clifford Cl_{n+1}^0 pode ser escrito como uma combinação linear de elementos em $Quat_{n+1}$, onde o coeficiente independente é conhecido como parte real. Estudamos resultados que relacionam as características de uma permutação em S_{n+1} , com o elemento a ela relacionado em Cl_{n+1}^0 .

Palavras-chave

Permutação; Grupo Spin; Álgebra de Clifford; Células de Bruhat; Grupo de Coxeter.

Abstract

Leal, G.L.C.; Saldanha, N.C. (Advisor). **The construction of certain discrete subgroups of the Spin group in the Clifford algebra.** Rio de Janeiro, 2021. 72p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The Clifford algebra Cl_{n+1}^0 is an associative algebra that can be constructed as an algebra of matrices. The group Spin_{n+1} is a surface contained in Cl_{n+1}^0 and closed by multiplication. We studied the generators of such a group, as well as of the matrix groups Quat_{n+1} and $\tilde{\text{B}}_{n+1}^+$ which are subsets of Spin_{n+1} . A permutation in S_{n+1} , can be expressed as a reduced word, using transpositions to define the family of Coxeter generators. The acute and grave maps provide us with elements in $\tilde{\text{B}}_{n+1}^+$, based on the reduced words of a permutation in S_{n+1} . An element of Clifford algebra Cl_{n+1}^0 can be written as a linear combination of elements in Quat_{n+1} , where the independent coefficient is known as the real part. We studied results that relate the characteristics of a permutation in S_{n+1} , with the element related to it in Cl_{n+1}^0 .

Keywords

Permutation; Spin Group; Clifford Algebra; Bruhat Cell; Coxeter Group.

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Curvas Localmente Convexas	12
1.2	Estratificação de Bruhat	13
1.3	Motivação	15
2	Permutações	17
2.1	O Grupo Simétrico	17
2.2	Permutações Com Sinais	22
3	Álgebra de Lie	24
3.1	A Álgebra de Lie	24
3.2	O Grupo Ortogonal e Sua Álgebra de Lie	26
4	Grupos de Matrizes	28
4.1	O Grupo Quat_{n+1}	28
4.2	A Álgebra de Clifford	34
4.3	O Subgrupo a Um Parâmetro α_i^{Spin}	36
4.4	O Grupo Spin_{n+1}	40
4.5	O Grupo $\tilde{\text{B}}_{n+1}^+$	42
4.6	O Homomorfismo $\Pi : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$	43
5	Permutações e a Álgebra de Clifford	48
5.1	Os Mapas Acute e Grave	48
5.2	Parte Real	49
5.2.1	Autovalores e a Parte Real	50
5.2.2	Matrizes de Ciclos e a Parte Real	52
5.2.3	Ciclos e a Parte Real	55
6	Sinais	61
6.1	Parte Real	61
6.2	Distribuição de Sinais	64
7	Considerações finais	68
	Referências bibliográficas	70
A	Apêndice: Exemplos	71
A.1	Permutações Com 1 Ciclo	71
A.2	Permutações Com 2 Ciclos	71
A.3	Permutações Com 3 Ciclos	72
A.4	Permutações Com 4 Ciclos	72

Lista de figuras

Figura 2.1	Diagrama de $\eta \in S_4$	21
Figura 2.2	Diagramas de $\sigma = a_2a_3a_2a_1 = a_3a_2a_3a_1 \in S_4$	21
Figura 2.3	Diagrama de $\sigma = a_1a_2a_1 \in S_3$	22
Figura 4.1	Diagrama de $\sigma = a_3 \in S_4$	46
Figura 5.1	Diagrama de $\eta \in S_6$	49
Figura 5.2	Diagrama de $\sigma = a_2a_1a_3 \in S_4$	50
Figura 5.3	Diagrama de $\sigma = a_1a_2a_3a_2a_1a_4a_3a_2a_1 \in S_5$	56
Figura 5.4	Diagrama de $\sigma = a_2a_1a_3a_2 \in S_4$	58
Figura 6.1	Diagrama de $\sigma = a_2a_1a_3a_2a_3 \in S_4$	62
Figura 6.2	Diagrama de $\sigma = a_1a_3a_2 \in S_4$	62
Figura 6.3	Diagrama de $\sigma = a_1a_4a_2a_5 \in S_6$	63
Figura 6.4	Diagrama de $\sigma = a_5a_3a_4a_2a_1 \in S_6$	63
Figura 6.5	Diagrama de $\sigma = a_1a_2a_3 \in S_4$	64

O medo precede a coragem.

James Lake, *Caçadores de Trolls: Contos de Arcadia.*

1

Introdução

O presente trabalho tem como objetivo, descrever os grupos Quat_{n+1} , $\tilde{\text{B}}_{n+1}^+$ e Spin_{n+1} como grupos de matrizes, para então estudar permutações $\sigma \in S_{n+1}$ nas coordenadas de $z \in \tilde{\text{B}}_{n+1}^+ \subset \text{Spin}_{n+1}$. A inspiração para o trabalho vem de [1].

O objetivo provém do estudo das curvas localmente convexas na esfera \mathbb{S}^n , levando assim ao interesse de tais curvas no grupo Spin_{n+1} .

Tal grupo, pode ser decomposto em células de Bruhat da seguinte forma:

$$\text{Spin}_{n+1} = \bigsqcup_{z \in \tilde{\text{B}}_{n+1}^+} \text{Bru}_z,$$

esta decomposição é chamada estratificação de Bruhat do grupo Spin_{n+1} .

A união das células de Bruhat com sinal Bru_z com $z \in \tilde{\text{B}}_{n+1}^+$ tal que $\Pi(z) = P_\sigma \in \text{SO}_{n+1}$ é a célula de Bruhat sem sinal $\text{Bru}_\sigma \subset \text{Spin}_{n+1}$, onde $\sigma \in S_{n+1}$. Cada componente conexa de uma célula de Bruhat sem sinal contém exatamente um elemento $z \in \tilde{\text{B}}_{n+1}^+ \subset \text{Spin}_{n+1}$.

Dessa forma, podemos compreender melhor o grupo Spin_{n+1} através das células de Bruhat. Assim, a estratificação se mostrou uma ferramenta essencial no estudo das curvas localmente convexas no grupo Spin_{n+1} [5].

Primeiramente, ainda na introdução, daremos uma breve explicação dos conceitos mencionados anteriormente, que guiaram o objetivo do trabalho.

No capítulo 2, faremos um breve resumo sobre o grupo de permutações S_{n+1} , assim como o grupo das matrizes de permutações com sinal B_{n+1} .

No capítulo 3, vamos ver um pouco sobre álgebras de Lie, mais precisamente, álgebras de Lie de matrizes, com o foco voltado para a álgebra de Lie \mathfrak{so}_{n+1} do grupo de matrizes ortogonais SO_{n+1} .

No capítulo 4, faremos primeiramente a construção matricial do grupo Quat_{n+1} e de seus geradores \hat{a}_i , com $i \in \llbracket n \rrbracket = \{1, \dots, n\}$. Em seguida, construiremos a álgebra de Clifford Cl_{n+1}^0 , que é uma álgebra associativa com unidade, cuja base ortonormal é formada pelos elementos de um subconjunto $\text{HQuat}_{n+1} \subset \text{Quat}_{n+1}$.

Após a construção de Cl_{n+1}^0 , faremos a construção matricial do grupo Spin_{n+1} , que é gerado pelos elementos $\alpha_i(\theta)$, onde $\alpha_i : \mathbb{R} \rightarrow \text{Spin}_{n+1}$ é um

subgrupo a um parâmetro, com $\alpha_i(\pi) = \hat{a}_i$. Além disso, vale ressaltar que $\text{Quat}_{n+1} \subset \text{Spin}_{n+1} \subset \text{Cl}_{n+1}^0$.

Tendo construídos tais grupos, faremos a construção do nosso último grupo de interesse $\tilde{\text{B}}_{n+1}^+ \subset \text{Spin}_{n+1} \subset \text{Cl}_{n+1}^0$, que é o grupo de matrizes gerado pelos elementos $\alpha_i(\frac{\pi}{2}) = \hat{a}_i$.

Ainda no capítulo 4, analisaremos a ação do homomorfismo

$$\Pi : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$$

nos geradores dos grupos que construímos nas seções anteriores.

No capítulo 5, estudaremos as permutações $\sigma \in S_{n+1}$ por meio das coordenadas de $z \in \tilde{\text{B}}_{n+1}^+ \subset \text{Spin}_{n+1}$. Estudaremos primeiramente, o funcionamento dos mapas $\text{acute}, \text{grave} : S_{n+1} \rightarrow \tilde{\text{B}}_{n+1}^+$, para enfim estudarmos resultados que relacionam a parte real de elementos da álgebra de Clifford Cl_{n+1}^0 , com as características da permutação a ele relacionada.

Por fim, no capítulo 6, faremos algumas afirmações sobre o comportamento de determinados elementos em $\tilde{\text{B}}_{n+1}^+ \subset \text{Spin}_{n+1}$.

Notação 1.0.1 *As notações para os elementos $\acute{a}_i, \grave{a}_i, \acute{\sigma}, \grave{\sigma} \in \tilde{\text{B}}_{n+1}^+$, $\hat{a}_i \in \text{Cl}_{n+1}^0$, bem como $\alpha_i \in \text{Spin}_{n+1}$, foram pensadas pelo orientador e seus colaboradores para os trabalhos anteriores. Pode-se identificar $\hat{a}_i \in \text{Cl}_{n+1}^0$ como $\hat{a}_i = e_{j+1}e_j$, na notação de [2].*

1.1

Curvas Localmente Convexas

Para $j \in \llbracket n \rrbracket$, considere as matrizes $\mathfrak{a}_j^{\text{SO}} = e_{j+1}e_j^T - e_j e_{j+1}^T \in \mathfrak{so}_{n+1}$, note que $\mathfrak{a}_j^{\text{SO}}$ é anti-simétrica. Como \mathfrak{so}_{n+1} e \mathfrak{spin}_{n+1} são isomorfas, podemos identificar tais elementos na álgebra de Lie \mathfrak{spin}_{n+1} como

$$\mathfrak{a}_j^{\text{Spin}} = \frac{1}{2}\hat{a}_j,$$

onde $\hat{a}_i \in \text{Quat}_{n+1} \subset \text{Spin}_{n+1}$, tal elemento será apresentado mais tarde.

Notação 1.1.1 *Representaremos $\mathfrak{a}_j^{\text{Spin}} \in \mathfrak{spin}_{n+1}$ e $\mathfrak{a}_j^{\text{SO}} \in \mathfrak{so}_{n+1}$ por \mathfrak{a}_j quando estiver implícita a álgebra de Lie de origem.*

Uma curva $\Gamma : J \rightarrow \text{Spin}_{n+1}$ com $J \subset \mathbb{R}$, é dita localmente convexa se é absolutamente contínua, e sua derivada logarítmica tem a forma

$$(\Gamma(t))^{-1}\Gamma'(t) = \sum_{j \in \llbracket n \rrbracket} k_j(t)\mathfrak{a}_j,$$

onde $k_1, \dots, k_n : J \rightarrow (0, +\infty)$ são funções positivas.

Dada uma curva localmente convexa suave Γ , a curva suave

$$\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad \gamma(t) = \Pi(\Gamma(t))e_1,$$

satisfaz a desigualdade $\det(\gamma(t), \gamma'(t), \dots, \gamma^n(t)) > 0$, onde

$$\Pi : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$$

é um mapa de recobrimento.

Uma curva paramétrica $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo a desigualdade acima, é também chamada de localmente convexa. Tal curva γ , pode ser levantada para uma curva localmente convexa \mathfrak{F}_γ em SO_{n+1} , conseqüentemente em Spin_{n+1} , tomando a matriz ortogonal $\mathfrak{F}_\gamma(t)$, cujos vetores coluna são os resultados de aplicar o algoritmo de Gram-Schmidt na base ordenada $(\gamma(t), \gamma'(t), \dots, \gamma^n(t))$ de \mathbb{R}^{n+1} .

A base ortogonal obtida é o frame de Frenet generalizado do espaço de curvas γ . Além disso, os coeficientes k_1, \dots, k_n da derivada logarítmica de \mathfrak{F}_γ são as curvaturas generalizadas de γ (multiplicadas pela velocidade $v_\gamma = |\gamma'|$).

1.2

Estratificação de Bruhat

A decomposição de Bruhat é uma forma de escrever uma matriz como um produto de matrizes especiais. Podendo assim, decompor um grupo de matrizes em uma união disjunta de células de Bruhat.

Chamamos de B_{n+1} o grupo das matrizes de permutações com sinal, Up_{n+1} o grupo das matrizes triangulares superiores e Up_{n+1}^+ quando a diagonal é positiva.

Teorema 1.2.1 *Dado $M \in \text{GL}_{n+1}$, existe uma única permutação $\sigma \in S_{n+1}$ e $U_0, U_1 \in \text{Up}_{n+1}$ (não únicas), tais que*

$$M = U_0 P_\sigma U_1,$$

onde $P_\sigma \in S_{n+1} \subset B_{n+1}$. Em particular,

$$\text{GL}_{n+1} = \bigsqcup_{\sigma \in S_{n+1}} \text{Up}_{n+1} P_\sigma \text{Up}_{n+1}.$$

Observe que os subconjuntos $\text{Up}_{n+1} P_\sigma \text{Up}_{n+1}$ são classes laterais duplas.

Podemos absorver os sinais de U_0 e U_1 em P_σ , gerando assim a decomposição de Bruhat com sinal: para toda $M \in \text{GL}_{n+1}$, existe uma única matriz

de permutação com sinais $P \in B_{n+1}$ e $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1 \in \text{Up}_{n+1}^+$ (não únicas), tal que $M = \tilde{U}_0 P \tilde{U}_1$.

Observação 1.2.1 *Pode-se formular o teorema para matrizes triangulares inferiores da mesma forma.*

Para cada $P \in B_{n+1}$, a classe lateral dupla de Up_{n+1}^+ é um subconjunto contrátil de GL_{n+1} . Chamamos de célula de Bruhat com sinal a interseção da classe com o grupo ortogonal. Cada célula de Bruhat com sinal é ainda uma subvariedade contrátil do grupo ortogonal.

A decomposição de SO_{n+1} em células de Bruhat é conhecida como estratificação de Bruhat com sinais e é dada por

$$\text{SO}_{n+1} = \bigsqcup_{P \in B_{n+1}^+} \text{Bru}_P, \quad \text{Bru}_P = (\text{Up}_{n+1}^+ P \text{Up}_{n+1}^+) \cap \text{SO}_{n+1}, \quad P \in B_{n+1}^+,$$

onde $B_{n+1}^+ = B_{n+1} \cap \text{SO}_{n+1}$.

A pré imagem de cada célula pelo mapa de recobrimento $\Pi : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$ é uma união disjunta de duas componentes contráteis.

Para $z \in \tilde{B}_{n+1}^+ = \Pi^{-1}[B_{n+1}^+]$, seja Bru_z a componente conexa de $\Pi^{-1}[\text{Bru}_{\Pi(z)}]$ contendo z . Chamamos Bru_z de célula de Bruhat com sinal. A célula de Bruhat sem sinal $\text{Bru}_\sigma \subset \text{Spin}_{n+1}$ é a união disjunta das células Bru_z , com $z \in \tilde{B}_{n+1}^+$.

Para $z \in \text{Spin}_{n+1}$ e $\sigma \in S_{n+1}$, temos $z \in \text{Bru}_\sigma$ se e somente se, existem $U_1, U_2 \in \text{Up}_{n+1}$ e $P_\sigma \in B_{n+1}$, tal que $\Pi(z) = U_1 P_\sigma U_2$.

Portanto, a estratificação de Bruhat do grupo Spin_{n+1} é

$$\text{Spin}_{n+1} = \bigsqcup_{z \in \tilde{B}_{n+1}^+} \text{Bru}_z.$$

Para todo $U \in \text{Up}_{n+1}^+$ e $Q \in \text{SO}_{n+1}$, seja $Q^U = \mathbf{Q}(U^{-1}Q)$ uma Up_{n+1}^+ -ação. As células de Bruhat em SO_{n+1} podem ser vistas como órbitas desta Up_{n+1}^+ -ação.

Tal ação preserva células de Bruhat e pode ser levantada para uma ação em Spin_{n+1} , tomando $z^U = \mathbf{Q}(U^{-1}z)$. As células de Bruhat, assim como anteriormente, podem ser vistas como órbitas desta Up_{n+1}^+ -ação.

Além disso, se $U \in \text{Up}_{n+1}^+$ e $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Spin}_{n+1}$ é localmente convexa, então $\Gamma^U : [0, 1] \rightarrow \text{Spin}_{n+1}$, com $\Gamma^U = \mathbf{Q}(U^{-1}\Gamma(t))$ é também uma curva localmente convexa.

1.3

Motivação

Nesta seção, vamos falar um pouco sobre os resultados que motivaram o presente trabalho. As construções detalhadas, assim como as demonstrações dos resultados, foram feitas pelo orientador juntamente com seus colaboradores e podem ser encontradas em [5].

O grupo Quat_{n+1} age livre e transitivamente por multiplicação a esquerda, sobre a coleção das componentes conexas de uma célula de Bruhat sem sinal.

Portanto, o resultado a seguir, gera uma parametrização explícita para todas as células de Bruhat com sinais do grupo Spin_{n+1} .

Teorema 1.3.1 *Dadas palavras reduzidas $a_{i_1} \cdots a_{i_k} < a_{i_1} \cdots a_{i_k} a_j$ para duas permutações consecutivas em S_{n+1} e dados sinais $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon \in \{\pm 1\}$, defina*

$$z_1 = (\acute{a}_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots (\acute{a}_{i_k})^{\varepsilon_k},$$

$$z_0 = z_1(\acute{a}_j)^\varepsilon \in \tilde{B}_{n+1}^+.$$

Dado $q \in \text{Quat}_{n+1}$, o mapa $\Psi : \text{Bru}_{qz_1} \times (0, \pi) \rightarrow \text{Bru}_{qz_0}$ dado por $\Psi(z, \theta) = z\alpha_j(\varepsilon\theta)$ é um difeomorfismo.

Ao conseguirmos descrever a estratificação de Bruhat do grupo Spin_{n+1} , tornamos o estudo das curvas localmente convexas um pouco menos complexo, pois agora temos a álgebra das células de Bruhat a nosso favor.

Um exemplo de um resultado que relaciona as células de Bruhat com as curvas localmente convexas é o teorema a seguir, o resultado discute a transversalidade entre as curvas localmente convexas e as células de Bruhat.

Teorema 1.3.2 *Considere $z_0 \in \tilde{B}_{n+1}^+ \subset \text{Spin}_{n+1}$, $\sigma = \sigma_{z_0} \in S_{n+1}$, $\sigma \neq \eta$, $k = \text{inv}(\eta) - \text{inv}(\sigma) > 0$, onde $\eta \in S_{n+1}$ é o elemento com número máximo de inversões. Então, existe uma vizinhança aberta \mathcal{U}_{z_0} da célula de Bruhat com sinal não aberta Bru_{z_0} em Spin_{n+1} e um mapa suave*

$$f = (f_1, \dots, f_k) : \mathcal{U}_{z_0} \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

com as seguintes propriedades:

- (i) *Para todo $z \in \mathcal{U}_{z_0}$, tem-se que $z \in \text{Bru}_{z_0}$ se, e somente se $f(z) = 0$;*
- (ii) *Para todo $z \in \mathcal{U}_{z_0}$, a derivada $Df(z)$ é sobrejetora;*

(iii) Para qualquer curva localmente convexa suave $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{U}_{z_0}$, tem-se

$$(f_k \circ \Gamma)'(t) > 0$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Outros resultados importantes, podem ser encontrados em [5].

Tendo em vista os resultados anteriores, podemos perceber a importância das células de Bruhat no estudo das curvas localmente convexas. Assim, fica clara a necessidade de compreendermos os elementos de tais células, que nada mais são do que elementos do grupo Spin_{n+1} .

2

Permutações

O grupo S_{n+1} das permutações de $n + 1$ elementos é gerado pelas transposições $a_i = (i, i + 1)$, com $i \in \llbracket n \rrbracket$, onde $\llbracket n \rrbracket = \{1, \dots, n\}$. Tais geradores nos proporcionam escrever uma palavra reduzida para $\sigma \in S_{n+1}$.

Além disso, uma permutação $\sigma \in S_{n+1}$ pode ser associada a uma matriz P_σ , chamada de matriz de permutação.

Neste capítulo, estudaremos o grupo de permutações S_{n+1} , as matrizes de permutação e por fim, o grupo de matrizes de permutação com sinais B_{n+1} .

2.1

O Grupo Simétrico

Uma permutação de um conjunto é uma função bijetiva, que leva um elemento do conjunto em outro elemento também no conjunto, não necessariamente diferente do original.

O grupo de permutações de um conjunto X é o conjunto de bijeções $f : X \rightarrow X$ que com a operação de composição de funções, formam um grupo.

Seja S_{n+1} o grupo das permutações do conjunto $\llbracket n + 1 \rrbracket = \{1, \dots, n + 1\}$. Denotamos a ação de S_{n+1} em $\llbracket n + 1 \rrbracket$ por

$$(\sigma, k) \mapsto k^\sigma.$$

Escrevemos a composta da esquerda para a direita, de tal forma que temos

$$k^{\sigma_1 \sigma_2} = (k^{\sigma_1})^{\sigma_2}.$$

Definição 2.1.1 S_{n+1} é o grupo gerado pelas n transposições $a_i = (i, i + 1)$, com $i \in \llbracket n \rrbracket$.

Observação 2.1.1 Os geradores $a_i = (i, i + 1)$ são conhecidos como geradores de Coxeter-Weyl. Além disso, o grupo S_{n+1} pode ser pensado também como o grupo A_n de Coxeter-Weyl, entretanto não abordaremos tal interpretação (veja, [6]).

Exemplo 2.1.1 Sejam $\sigma_1 = [3421]$ e $\sigma_2 = [4132] \in S_4$. Como $\sigma_1 \sigma_2 = [1^{\sigma_1 \sigma_2} 2^{\sigma_1 \sigma_2} 3^{\sigma_1 \sigma_2} 4^{\sigma_1 \sigma_2}]$, então $\sigma_1 \sigma_2 = [3214]$.

Escrevemos uma permutação $\sigma \in S_{n+1}$ usualmente de duas formas, como uma lista de valores $[1^\sigma 2^\sigma \dots n^\sigma]$, assim como feito no exemplo acima, ou como um produto de transposições, por exemplo $\sigma = a_{i_1} \dots a_{i_k}$.

Definição 2.1.2 *Um ciclo é uma permutação $\sigma = (i_1 \dots i_k) \in S_{n+1}$, onde $i_k \mapsto i_1$, $i_j \mapsto i_{j+1}$ se $1 \leq j < k$ e $i_l \mapsto i_l$ caso contrário.*

Proposição 2.1.1 *Toda permutação $\sigma \in S_{n+1}$ pode ser escrita como um produto de ciclos disjuntos, de forma única.*

A demonstração da proposição será omitida, a mesma pode ser encontrada em [3].

Exemplo 2.1.2 *Seja $\sigma = [24513] \in S_5$, visto que $1 \mapsto 2 \mapsto 4$ e $3 \mapsto 5$, σ é escrita como $\sigma = (124)(35)$.*

Definição 2.1.3 *O conjunto $\text{Inv}(\sigma) = \{(i, j) \in \llbracket n+1 \rrbracket^2 \mid (i < j) \wedge (i^\sigma > j^\sigma)\}$ é o conjunto dos pares (i, j) que são inversões de σ . Além disso, $\text{inv}(\sigma) = \text{card}\{\text{Inv}(\sigma)\}$.*

Exemplo 2.1.3 *Seja $\sigma \in S_5$ tal que $\sigma = [24153] = a_2 a_4 a_1 a_3$, então $\text{Inv}(\sigma) = \{(1, 3), (2, 3), (2, 5), (4, 5)\}$, assim $\text{inv}(\sigma) = 4$.*

Definição 2.1.4 *Uma palavra reduzida para uma permutação $\sigma \in S_{n+1}$ é uma expressão de σ como um produto de geradores $a_i = (i, i+1)$, tal que a quantidade seja minimal e igual a $\text{inv}(\sigma)$.*

No exemplo acima, temos uma permutação já escrita como uma palavra reduzida, visto que $\sigma = a_2 a_4 a_1 a_3$ possui quatro geradores e quatro inversões.

Definição 2.1.5 *Seja $\sigma \in S_{n+1}$, definimos sua matriz de permutação P_σ por $e_k^T P_\sigma = e_{k^\sigma}^T$.*

Exemplo 2.1.4 *Seja $\sigma = a_2 a_4 a_1 a_3$ assim como no exemplo 2.1.3, então*

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Existe uma única permutação $\eta = a_1 a_2 a_1 a_3 a_2 a_1 \dots a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$, tal que o comprimento da palavra reduzida $\text{inv}(\eta) = \frac{n(n+1)}{2}$ é o máximo possível, sua matriz é dada por

$$P_\eta = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Proposição 2.1.2 *Para todo $i, j \in \llbracket n \rrbracket$, temos:*

$$(i) \ a_j a_i = a_i a_j, \text{ para } |i - j| \neq 1;$$

$$(ii) \ a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}.$$

Prova.

Para a primeira igualdade, é simples ver que dados a_i e a_j com $|i - j| \neq 1$, temos que $i \neq j + 1$ e $j \neq i + 1$. Portanto fazer primeiro a_i ou a_j não altera o resultado, visto que os geradores são disjuntos.

Para a segunda igualdade, basta pensar na permutação representada como lista de números,

$$\begin{aligned} a_i a_{i+1} a_i &= [((i^{a_i})^{a_{i+1}})^{a_i} (((i+1)^{a_i})^{a_{i+1}})^{a_i} (((i+2)^{a_i})^{a_{i+1}})^{a_i}] \\ &= [((i+1)^{a_{i+1}})^{a_i} ((i)^{a_{i+1}})^{a_i} ((i+2)^{a_{i+1}})^{a_i}] \\ &= [(i+2)^{a_i} (i)^{a_i} (i+1)^{a_i}] \\ &= [(i+2) \ (i+1) \ i], \end{aligned}$$

da mesma forma podemos ver que

$$\begin{aligned} a_{i+1} a_i a_{i+1} &= [((i^{a_{i+1}})^{a_i})^{a_{i+1}} (((i+1)^{a_{i+1}})^{a_i})^{a_{i+1}} (((i+2)^{a_{i+1}})^{a_i})^{a_{i+1}}] \\ &= [(i+2) \ (i+1) \ i]. \end{aligned}$$

Portanto $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$. ■

Teorema 2.1.1 *Duas palavras reduzidas para uma permutação estão conectadas por uma sequência finita de movimentos dos tipos acima.*

Prova.

Dividiremos a demonstração em casos e procederemos por indução no comprimento $l = \text{inv}(\sigma)$.

Os casos $l = 0, 1, 2$ são triviais. Suponhamos por indução que o enunciado seja válido para valores menores que l .

Sejam $w_1 = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ e $w_2 = a_{j_1} \dots a_{j_n}$ duas palavras reduzidas para $\sigma \in S_{n+1}$, com $n = \text{inv } \sigma$.

Se a primeira letra de w_1 é igual a primeira letra de w_2 , ou seja $a_{i_1} = a_{j_1}$, temos que $w_1 = a_{i_1} \tilde{w}_1$ e $w_2 = a_{i_1} \tilde{w}_2$, onde \tilde{w}_1 e \tilde{w}_2 são palavras reduzidas para $\tilde{\sigma}$, com $\sigma = a_{i_1} \tilde{\sigma}$.

Pela hipótese de indução \tilde{w}_1 e \tilde{w}_2 estão conectadas, portanto w_1 e w_2 também estão.

Se a primeira letra de w_1 e a primeira letra de w_2 são tais que $|i_1 - j_1| > 1$, então $w_1 = a_{i_1} \tilde{w}_1$ e $w_2 = a_{j_1} \tilde{w}_2$, onde \tilde{w}_1 e \tilde{w}_2 são palavras reduzidas para σ_1 e σ_2 respectivamente, com $\sigma = a_{i_1} \sigma_1$ e $\sigma = a_{j_1} \sigma_2$.

Seja $\tilde{\sigma}$ tal que $\sigma_1 = a_{j_1} \tilde{\sigma}$ e $\sigma_2 = a_{i_1} \tilde{\sigma}$. Sejam w_3 e w_4 outras palavras reduzidas para σ_1 e σ_2 respectivamente, tais que $w_3 = a_{j_1} \tilde{w}_3$, onde \tilde{w}_3 é outra palavra reduzida para $\tilde{\sigma}$ e $w_4 = a_{i_1} \tilde{w}_4$, onde \tilde{w}_4 é outra palavra reduzida para $\tilde{\sigma}$.

Por indução \tilde{w}_1 e w_3 estão conectadas, assim como \tilde{w}_2 e w_4 . Portanto, também por indução, \tilde{w}_3 e \tilde{w}_4 estão conectadas. Assim, conectamos w_1 e w_2 .

Por último, suponhamos que a primeira letra de w_2 é tal que $a_{j_1} = a_{i_1+1}$, onde a_{i_1} é a primeira letra de w_1 . Assim, pelos argumentos anteriores, existe $\tilde{\sigma}$ tal que $\sigma = a_{i_1} a_{i_1+1} a_{i_1} \tilde{\sigma} = a_{i_1+1} a_{i_1} a_{i_1+1} \tilde{\sigma}$.

Se $w_1 = a_{i_1} \tilde{w}_1$, conectamos \tilde{w}_1 a $a_{i_1+1} a_{i_1} w_3$. Se $w_2 = a_{i_1+1} \tilde{w}_2$, conectamos \tilde{w}_2 a $a_{i_1} a_{i_1+1} w_4$. Note que w_3 e w_4 são palavras reduzidas de $\tilde{\sigma}$, portanto podemos conectá-las, por indução. Assim, conectamos w_1 e w_2 .

Logo, podemos conectar quaisquer duas palavras reduzidas de uma permutação $\sigma \in S_{n+1}$, por meio dos movimentos que conhecemos. ■

Exemplo 2.1.5 *Seja $\sigma = a_2 a_1 a_3 a_4 a_3 a_5 \in S_6$, fazendo uso da proposição anterior, podemos escrever mais de uma palavra reduzida que descreve a permutação. Como por exemplo:*

$$\sigma = a_2 a_1 a_4 a_3 a_4 a_5, \sigma = a_2 a_4 a_1 a_3 a_4 a_5 \text{ e } \sigma = a_2 a_4 a_3 a_1 a_4 a_5.$$

Por uma verificação simples vemos que as 4 palavras reduzidas representam a permutação $\sigma = [261435] \in S_6$.

As palavras reduzidas para uma permutação σ podem ser representadas por meio de um diagrama. Existe mais de uma forma de ler tal diagrama. No nosso caso, cada ponto representa um número começando em 1 e terminando em n , de cima para baixo, onde a permutação é lida levando os pontos da esquerda nos pontos da direita. Cada interseção representa um gerador a_i , da esquerda para a direita. Além disso, de cima para baixo, o espaço entre dois pontos faz referência a um único gerador, começando em a_1 e indo até a_n .

Utilizamos esta representação para encontrar palavras reduzidas para as permutações.

Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 2.1.6 *Seja $\eta = [4321]$, construímos o diagrama de η marcando os pontos como descrito acima. Dessa forma, levamos o primeiro ponto à esquerda ao último ponto à direita, seguindo a permutação da mesma forma com os outros pontos. Assim, temos*

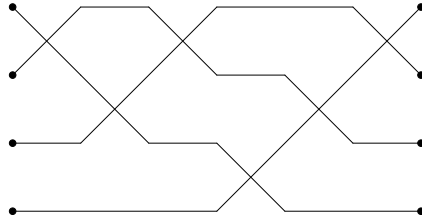


Figura 2.1: Diagrama de $\eta \in S_4$

Agora só precisamos ler o diagrama. Como descrito acima, os geradores são lidos de cima para baixo e da esquerda para a direita. Portanto, temos que a palavra reduzida de η é dada por

$$\eta = a_1 a_2 a_1 a_3 a_2 a_1.$$

O próximo exemplo ilustra dois diagramas diferentes para uma única permutação.

Exemplo 2.1.7 *Seja $\sigma = [2431] = a_2 a_3 a_2 a_1 = a_3 a_2 a_3 a_1$, seus diagramas são respectivamente*

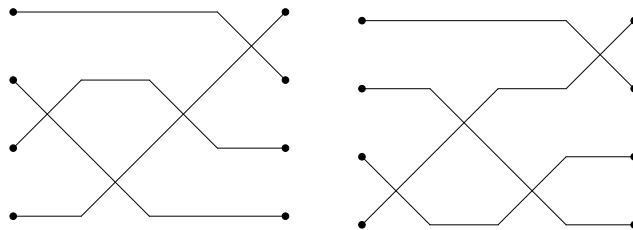


Figura 2.2: Diagramas de $\sigma = a_2 a_3 a_2 a_1 = a_3 a_2 a_3 a_1 \in S_4$

Note que o que mudou no diagrama foi a inversão de 3 geradores, que equivalem a $a_2 a_3 a_2$ e $a_3 a_2 a_3$, respectivamente. Pela proposição anterior, sabemos que são iguais.

2.2

Permutações Com Sinais

Vimos na seção anterior que uma permutação $\sigma \in S_{n+1}$ está associada a uma matriz $(n+1) \times (n+1)$, denominada P_σ . Por outro lado, um certo tipo de matriz também pode ser associado a uma permutação. Nesta seção, vamos estudar tais grupos de matrizes.

Seja B_{n+1} o grupo das matrizes de permutações com sinal, ou seja, matrizes ortogonais P tais que existe uma permutação $\sigma \in S_{n+1}$, onde

$$e_i^T P = \pm e_{i\sigma}^T, \quad \forall i \in \llbracket n+1 \rrbracket.$$

Exemplo 2.2.1 *Seja a matriz*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

como $e_1^T P = e_3^T$, $e_2^T P = -e_2^T$ e $e_3^T P = -e_1^T$, então existe uma permutação $\sigma \in S_3$ associada a P e $\sigma = [321] = a_1 a_2 a_1$, daí $P \in B_3$. O diagrama de $\sigma \in S_3$ é dado por

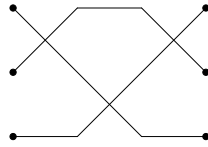


Figura 2.3: Diagrama de $\sigma = a_1 a_2 a_1 \in S_3$

Definimos a interseção de B_{n+1} com o grupo das matrizes ortogonais com determinante igual a 1, como $B_{n+1}^+ = B_{n+1} \cap SO_{n+1}$.

Exemplo 2.2.2 *A matriz do exemplo anterior*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não pertence a B_3^+ , pois $\det(P) = -1$.

Entretanto, ao trocarmos um dos sinais, teremos matrizes que pertencem a B_3^+ , por exemplo

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde podemos ver com facilidade que $\det(P') = 1$.

Observação 2.2.1 *As matrizes pertencem a grupos distintos porém representam a mesma permutação.*

Definimos também o subgrupo normal $\text{Diag}_{n+1}^+ \subset B_{n+1}^+$, que são as matrizes de permutação, diagonais e ortogonais com determinante 1. Tal subgrupo é isomorfo a $\{\pm 1\}^n$.

O mapa $\phi : B_{n+1}^+ \rightarrow S_{n+1}$ dado por $P \mapsto \sigma_P$ é um homomorfismo sobrejetor, cujo núcleo é Diag_{n+1}^+ . Portanto, como Diag_{n+1}^+ é um subgrupo normal, pelo teorema dos isomorfismos, temos que

$$\frac{B_{n+1}^+}{\text{Diag}_{n+1}^+} \approx S_{n+1}.$$

Como podemos organizar os sinais em uma matriz diagonal, intuitivamente, o que esse isomorfismo nos diz é que se “esquecermos” os sinais, o que nos resulta é essencialmente uma permutação.

Assim, vimos que toda permutação $\sigma \in S_{n+1}$ é associada a uma matriz $P_\sigma \in B_{n+1}^+$, onde $\sigma_P = \sigma$.

3

Álgebra de Lie

Neste capítulo, faremos uma breve revisão do conceito de álgebra de Lie, mais precisamente para o interesse do trabalho, álgebras de Lie de matrizes.

Além disso, apresentaremos a álgebra de Lie \mathfrak{so}_{n+1} do grupo SO_{n+1} , cujo elemento \mathfrak{a}_i é de grande importância para as construções dos próximos capítulos.

Por fim, apresentaremos o subgrupo a um parâmetro $\alpha_i^{\text{SO}} : \mathbb{R} \rightarrow SO_{n+1}$, que é definido a partir de $\mathfrak{a}_i \in \mathfrak{so}_{n+1}$.

3.1

A Álgebra de Lie

Definição 3.1.1 *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um espaço vetorial sobre um corpo munido de uma operação $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, chamada de colchete de Lie, que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) *Bilinearidade;*
- (ii) *Anti-simetria, ou seja, $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$;*
- (iii) *Para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, temos $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$, esta relação é conhecida como identidade de Jacobi.*

Exemplo 3.1.1 *Na álgebra de Lie \mathfrak{gl}_{n+1} , o colchete de Lie é definido como $[A, B] = AB - BA$, para todo $A, B \in \mathfrak{gl}_{n+1}$. As condições (i) e (ii) são claras, vamos verificar a identidade de Jacobi.*

Sejam $A, B, C \in \mathfrak{gl}_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned}
 [A, [B, C]] &= [A, BC - CB] = A(BC - CB) - (BC - CB)A \\
 &= ABC - ACB - BCA + CBA, \\
 [C, [A, B]] &= [C, AB - BA] = C(AB - BA) - (AB - BA)C \\
 &= CAB - CBA - ABC + BAC, \\
 [B, [C, A]] &= [B, CA - AC] = B(CA - AC) - (CA - AC)B \\
 &= BCA - BAC - CAB + ACB.
 \end{aligned}$$

Portanto, somando as parcelas temos

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = ABC - ACB - BCA + CBA + CAB - CBA - ABC + BAC + BCA - BAC - CAB + ACB = 0.$$

Logo, satisfaz a identidade de Jacobi.

Para a definição a seguir, o colchete de Lie é definido como no exemplo anterior.

Definição 3.1.2 Uma álgebra de Lie de matrizes é um espaço vetorial de matrizes, fechado pelo colchete de Lie.

Definição 3.1.3 Um grupo de Lie é um grupo que também é uma variedade real suave, de dimensão finita, em que as operações multiplicação e inverso são mapas suaves.

Definição 3.1.4 Um grupo de Lie de matrizes $G \subset GL_{n+1}$ é uma variedade suave, que possui identidade e é fechada para inverso e multiplicação.

Seja G um grupo de Lie de matrizes reais, como G é uma superfície suave podemos tomar seu espaço tangente na identidade.

Definição 3.1.5 Definimos o espaço tangente a G na identidade $T_1(G)$ como as matrizes na forma $X = M'(0)$, onde $M(t)$ é um caminho suave em G , tal que $M(0) = \mathbf{1}$.

Proposição 3.1.1 O espaço tangente $T_1(G)$ é fechado para o colchete de Lie, ou seja, se $X, Y \in T_1(G)$ então $[X, Y] \in T_1(G)$. Portanto, $T_1(G)$ é uma álgebra de Lie de matrizes.

Prova.

Queremos $X, Y \in T_1(G)$, para isso vamos supor $M(t)$ e $N(t)$ caminhos suaves em G , tais que $M(0) = N(0) = \mathbf{1}$, $M'(0) = X$ e $N'(0) = Y$.

Consideremos o caminho $\Gamma_s(t) = M(s)N(t)(M(s))^{-1}$ para s fixo. Assim, $\Gamma_s(t)$ é um caminho suave e $\Gamma_s(0) = \mathbf{1}$, daí $\Gamma'_s(0) \in T_1(G)$. Mas,

$$\Gamma_s(0) = M(s)N'(0)(M(s))^{-1} = M(s)Y(M(s))^{-1},$$

como $M(s)$ é suave, então $\Gamma_s(0)$ é suave em s .

Portanto, temos um caminho suave $C(s) = \Gamma_s(0)$, com $C : V_0 \rightarrow T_1(G)$, onde $V_0 \subset \mathbb{R}$ é uma vizinhança de 0. Derivando o caminho, temos

$$C'(s) = M'(s)Y(M(s))^{-1} - M(s)Y(M'(s))^{-1}M'(s)(M(s))^{-1}.$$

Aplicando em $s = 0$, visto que $M(0) = \mathbf{1}$ e $M'(0) = X$, temos

$$\begin{aligned} C'(0) &= M'(0)Y(M(0))^{-1} - M(0)Y(M(0))^{-1}M'(0)(M(0))^{-1} \\ &= XY - YX \\ &= [X, Y]. \end{aligned}$$

Como a derivada de $C(s)$ aplicada em $s = 0$ também está no espaço tangente $T_1(G)$, então $[X, Y] \in T_1(G)$.

Assim, provamos que se $X, Y \in T_1(G)$, então $[X, Y] \in T_1(G)$. ■

O assunto álgebras de Lie, mais precisamente para o nosso caso, álgebras de Lie de matrizes, é um tema de muito estudo. Contudo, não iremos nos aprofundar além deste ponto, para saber mais sobre uma boa referência é [11].

3.2

O Grupo Ortogonal e Sua Álgebra de Lie

O grupo especial ortogonal, denotado por

$$\mathrm{SO}_{n+1} = \{M \in \mathrm{GL}_{n+1} \subset \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \mid MM^T = I \text{ e } \det(M) = 1\}$$

é um grupo de Lie de matrizes, ou seja, uma superfície suave, portanto podemos tomar seu espaço tangente.

A álgebra de Lie \mathfrak{so}_{n+1} , que é o espaço tangente a SO_{n+1} na identidade $T_1 \mathrm{SO}_{n+1}$, consiste das matrizes reais $M \in \mathrm{SO}_{n+1}$ tais que $M + M^T = 0$.

Assim, $\mathfrak{so}_{n+1} = \{M \in \mathrm{SO}_{n+1} \mid M = -M^T\}$ são as matrizes anti-simétricas. Note que a diagonal consiste de zeros, além disso as entradas abaixo da diagonal são os negativos das entradas acima, por serem anti-simétricas. Portanto, a dimensão de \mathfrak{so}_{n+1} é o número de entradas abaixo da diagonal, ou seja

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Como a dimensão de um grupo de Lie é a dimensão da sua álgebra, temos que a dimensão de SO_{n+1} é também $\frac{(n+1)n}{2}$.

Vamos então, definir alguns elementos na álgebra de Lie de SO_{n+1} , que denotaremos por $\mathfrak{a}_i^{\mathrm{SO}} \in \mathfrak{so}_{n+1}$.

Para cada $i \in \llbracket n \rrbracket$, definimos a matriz $\mathfrak{a}_i^{\mathrm{SO}} = e_{i+1}e_i^T - e_i e_{i+1}^T$, que é anti-simétrica, ou seja, $\mathfrak{a}_i^{\mathrm{SO}} = -(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{SO}})^T$. Assim, $\mathfrak{a}_i^{\mathrm{SO}}$ é a matriz cujas únicas entradas não nulas são $(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{SO}})_{i+1,i} = 1$ e $(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{SO}})_{i,i+1} = -1$.

A menos que seja especificado de outra forma, a partir de então, vamos considerar $\mathfrak{a}_i^{\mathrm{SO}}$ como \mathfrak{a}_i para simplificar a notação.

Exemplo 3.2.1 Se $n = 3$ e $i = 2$ então,

$$\mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veremos agora o subgrupo a um parâmetro α_i^{SO} , definido a partir do elemento $\mathfrak{a}_i \in \mathfrak{so}_{n+1}$.

Seja $\alpha_i^{\text{SO}} : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$, dada por $\alpha_i^{\text{SO}}(\theta) = \exp(\theta \mathfrak{a}_i)$. Por uma conta simples, podemos perceber que $\alpha_i^{\text{SO}}(\theta)$ é uma matriz diagonal em blocos, dessa forma o mapa é dado por

$$\alpha_i^{\text{SO}} : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$$

$$\alpha_i^{\text{SO}}(\theta) = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & Q(\theta) & \\ & & I_2 \end{pmatrix},$$

onde $I_1 \in \mathbb{R}^{(i-1) \times (i-1)}$ e $I_2 \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}$ são matrizes identidades e

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.2.2 Se $n = 3$, $\theta = \pi$ e $i = 2$, teremos a matriz \mathfrak{a}_2 do exemplo anterior e então

$$\alpha_2^{\text{SO}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.2.3 Se $n = 4$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $i = 3$, teremos então

$$\alpha_3^{\text{SO}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4

Grupos de Matrizes

Neste capítulo, estudaremos alguns exemplos de grupos de matrizes reais, que como o nome sugere, são grupos onde os elementos são matrizes reais. O nosso interesse está voltado especialmente para Quat_{n+1} , Spin_{n+1} e \tilde{B}_{n+1}^+ .

Mais precisamente, um grupo de matrizes G é um subgrupo do grupo de matrizes reais invertíveis $\text{GL}_{n+1} \subset \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$.

O grupo Spin_{n+1} é uma superfície suave, portanto é um grupo de Lie. Já os grupos Quat_{n+1} e \tilde{B}_{n+1}^+ , são grupos finitos. Vamos estudar tais grupos a partir da construção de seus geradores.

4.1

O Grupo Quat_{n+1}

Nesta seção, definiremos o grupo Quat_{n+1} pelos seus geradores \hat{a}_i . Primeiramente, faremos uma construção abstrata dos geradores. Após esta definição, faremos uma construção mais concreta dos geradores como matrizes.

Definição 4.1.1 *Chamamos de Quat_{n+1} o grupo gerado pelos elementos $\{\pm\hat{a}_1, \dots, \pm\hat{a}_n\}$ que satisfazem as seguintes relações:*

$$(i) \quad \hat{a}_i^2 = -1;$$

$$(ii) \quad \hat{a}_i \hat{a}_j = \hat{a}_j \hat{a}_i, \text{ se } |i - j| \neq 1;$$

$$(iii) \quad \hat{a}_i \hat{a}_j = -\hat{a}_j \hat{a}_i, \text{ se } |i - j| = 1.$$

Portanto, podemos listar seus elementos tendo assim o grupo finito

$$\text{Quat}_{n+1} = \{\pm 1, \pm\hat{a}_1, \pm\hat{a}_2, \pm\hat{a}_1\hat{a}_2, \pm\hat{a}_3, \pm\hat{a}_1\hat{a}_3, \pm\hat{a}_2\hat{a}_3, \pm\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3, \dots, \pm\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n\}.$$

Além disso, sua cardinalidade é dada por $|\text{Quat}_{n+1}| = 2^{n+1}$.

O grupo Quat_{n+1} pode ser visto como um grupo de matrizes reais $2^n \times 2^n$, basta interpretarmos seus geradores como matrizes.

Antes de descrevermos a forma geral de um gerador \hat{a}_i para qualquer $n \geq 1$ e $i \in \llbracket n \rrbracket$, vamos ver a construção do primeiro caso.

Se $n = 1$, então \hat{a}_1 é o único gerador e é uma matriz 2×2 satisfazendo as condições acima.

Dessa forma, é fácil ver que

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para o caso geral, quando $i = 1$ temos que a matriz \hat{a}_1 é uma matriz diagonal em blocos, onde cada bloco J é de dimensão 2×2 dado como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz \hat{a}_1 é uma matriz com 2^{n-1} blocos J na diagonal, ou seja,

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} J & & \\ & \ddots & \\ & & J \end{pmatrix}.$$

Vamos generalizar a matriz \hat{a}_i para todo $n \geq 1$ e $i \geq 2$. A construção é parecida com o caso $i = 1$. A matriz é em blocos na sua diagonal, onde cada bloco tem dimensão $2^i \times 2^i$ e é da forma:

$$J = \begin{pmatrix} & -I & \\ & I & \\ I & & \\ & -I & \end{pmatrix}, \quad \text{com } I \in \mathbb{R}^{(2^{i-2}) \times (2^{i-2})}.$$

Portanto, \hat{a}_i é uma matriz com 2^{n-i} blocos J na diagonal, ou seja,

$$\hat{a}_i = \begin{pmatrix} J & & \\ & \ddots & \\ & & J \end{pmatrix}.$$

Observação 4.1.1 *Se $i = 2$, então cada matriz de dimensão $2^{i-2} \times 2^{i-2}$ é apenas uma entrada.*

Agora que construímos as matrizes \hat{a}_i , vamos verificar que elas satisfazem as condições da definição.

Como \hat{a}_i é uma matriz diagonal em blocos, então \hat{a}_i^2 é da mesma forma

e os blocos são os quadrados dos blocos originais, daí

$$\hat{a}_i^2 = \begin{pmatrix} J & & \\ & \ddots & \\ & & J \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J & & \\ & \ddots & \\ & & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^2 & & \\ & \ddots & \\ & & J^2 \end{pmatrix}.$$

Mas J é uma matriz em dois blocos, vamos denotar o de cima por A e o de baixo por $-A$, então para calcular J^2 basta tomarmos o produto dos seus blocos da seguinte forma

$$J^2 = \begin{pmatrix} & A \\ -A & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & A \\ -A & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot (-A) & \\ & (-A) \cdot A \end{pmatrix}, \text{ onde}$$

$$A = \begin{pmatrix} -I & \\ & I \end{pmatrix}.$$

Como A e $-A$ comutam, basta verificarmos que $A \cdot (-A) = (-A) \cdot A = -I$, mas A e $-A$ são matrizes diagonais em blocos de mesma dimensão, portanto basta fazer o produto dos blocos, daí

$$(-A) \cdot A = A \cdot (-A) = \begin{pmatrix} -I & \\ & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & \\ & -I \end{pmatrix}.$$

Agora que sabemos exatamente quem é J^2 , temos que

$$\hat{a}_i^2 = \begin{pmatrix} J^2 & & \\ & \ddots & \\ & & J^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

portanto as matrizes \hat{a}_i satisfazem a primeira condição da definição, $\hat{a}_i^2 = -1$, onde nesse caso, $-1 = -I$.

Falta verificarmos as outras duas condições. Primeiramente faremos o caso $|i - j| = 1$.

Para facilitar um pouco as contas, vamos considerar as matrizes em 4 grandes blocos, o que pode ser feito já que as dimensões das matrizes são múltiplas de 4, para os casos $n \geq 2$.

Como \hat{a}_1 é um caso distinto, faremos primeiro $\hat{a}_1 \hat{a}_2 = -\hat{a}_2 \hat{a}_1$, que é a única possibilidade onde aparece \hat{a}_1 , no caso $|i - j| = 1$. Assim, \hat{a}_1 é em blocos

2×2 e \hat{a}_2 em blocos 4×4 . Portanto, em blocos 4×4 , temos

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{a}_2 = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix},$$

fazendo os produtos $\hat{a}_1\hat{a}_2$ e $\hat{a}_2\hat{a}_1$ temos, respectivamente

$$\hat{a}_1\hat{a}_2 = \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{a}_2\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\hat{a}_1\hat{a}_2 = -\hat{a}_2\hat{a}_1$.

Para o caso geral, note que supondo $j = i + 1$, cada matriz J em \hat{a}_j tem metade da dimensão de \hat{a}_i . Suponha por exemplo, $i = 2$ e $j = 3$ então, J de \hat{a}_2 tem dimensão 2^{n-2} e J de \hat{a}_3 tem dimensão $2^{n-3} = \frac{2^{n-2}}{2}$.

Dessa forma, as matrizes \hat{a}_i e \hat{a}_j , onde nesse caso $I \in \mathbb{R}^{(2^{i-2}) \times (2^{i-2})}$, são

$$\hat{a}_i = \begin{pmatrix} & & & -I & & \\ & & & & I & \\ I & & & & & \\ & -I & & & & \\ & & & & & -I \\ & & & & I & \\ & & I & & & \\ & & & -I & & \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{a}_j = \begin{pmatrix} & & & & -I & \\ & & & & & -I \\ & & & & & I \\ I & & & & & \\ & I & & & & \\ & & -I & & & \\ & & & -I & & \end{pmatrix}.$$

Portanto, fazendo os produtos $\hat{a}_i\hat{a}_j$ e $\hat{a}_j\hat{a}_i$ obtemos, respectivamente

$$\hat{a}_i\hat{a}_j = \begin{pmatrix} & & & & -I & \\ & & & & & I \\ & & -I & & & \\ & & & I & & \\ I & & & & & \\ & I & & & & \\ & & -I & & & \\ I & & & & & \\ & -I & & & & \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{a}_j\hat{a}_i = \begin{pmatrix} & & & & & I \\ & & & & & -I \\ & & I & & & \\ & & & -I & & \\ & & & & -I & \\ -I & & & I & & \\ & I & & & & \end{pmatrix}.$$

Assim, mostramos que se $|i - j| = 1$, então $\hat{a}_i\hat{a}_j = -\hat{a}_j\hat{a}_i$.

Por fim, precisamos verificar que se $|i-j| \neq 1$, então $\hat{a}_i \hat{a}_j = \hat{a}_j \hat{a}_i$. Primeiro faremos o caso $i = 1$ e $j \geq 3$.

Vamos escrever \hat{a}_1 em blocos J_1 , onde a quantidade de blocos que formam J_1 é um múltiplo de 4, da seguinte forma

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & J_1 & \\ & & & J_1 \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad J_1 = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que no menor caso, onde $j = 3$, temos que I é uma matriz 2×2 , a mesma dimensão de cada bloco que forma a matriz J_1 . Para o caso $j \geq 3$, a dimensão de cada bloco I é um múltiplo da dimensão dos blocos que formam J_1 . Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 \hat{a}_j &= \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & J_1 & \\ & & & J_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & -I & & \\ I & & I & \\ & & & \\ & -I & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -J_1 & & \\ J_1 & & & \\ & & J_1 & \\ & -J_1 & & \end{pmatrix}, \\ \hat{a}_j \hat{a}_1 &= \begin{pmatrix} & -I & & \\ I & & I & \\ & & & \\ & -I & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & J_1 & \\ & & & J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -J_1 & & \\ J_1 & & & \\ & & J_1 & \\ & -J_1 & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, $\hat{a}_1 \hat{a}_j = \hat{a}_j \hat{a}_1$.

Para o caso geral $i \geq 2$ e $j \geq i + 2$ a construção é similar, a diferença é que \hat{a}_i é escrita como na forma geral

$$\hat{a}_i = \begin{pmatrix} J & & & \\ & \ddots & & \\ & & J & \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad J = \begin{pmatrix} & -I & & \\ I & & & \\ & & I & \\ & -I & & \end{pmatrix}$$

dessa forma, o produto fica fácil de ser calculado, pois cada bloco J é da mesma

forma de \hat{a}_j , portanto

$$\hat{a}_i \hat{a}_j = \begin{pmatrix} J & & & \\ & J & & \\ & & J & \\ & & & J \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & -I & & \\ & & I & \\ I & & & \\ & -I & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -J & & \\ & & J & \\ J & & & \\ & -J & & \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\hat{a}_j \hat{a}_i = \begin{pmatrix} & -I & & \\ & & I & \\ I & & & \\ & -I & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J & & & \\ & J & & \\ & & J & \\ & & & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -J & & \\ & & J & \\ J & & & \\ & -J & & \end{pmatrix}.$$

Assim $\hat{a}_i \hat{a}_j = \hat{a}_j \hat{a}_i$.

Com a prova desta igualdade, mostramos que as matrizes \hat{a}_i que construímos, satisfazem as condições da definição dos geradores do grupo Quat_{n+1} . Portanto, podemos considerá-lo como um grupo de matrizes finito.

Observe que cada \hat{a}_i é uma matriz anti-simétrica. Note também, que cada bloco que forma a matriz \hat{a}_i tem determinante 1, visto que J é também uma matriz em blocos, onde cada bloco não nulo tem determinante 1. Assim, \hat{a}_i tem determinante 1.

Com isso, como cada elemento $q \in \text{Quat}_{n+1}$ é um produto dos geradores \hat{a}_i , ou seja

$$q = \pm \hat{a}_1^{\varepsilon_1} \dots \hat{a}_n^{\varepsilon_n} \in \text{Quat}_{n+1}$$

com $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$, temos que $\det(q) = 1$.

As matrizes \hat{a}_i portanto, tem em cada coluna uma única entrada não nula, tal entrada possui valor 1 ou -1 . Além disso, sabemos que $\det \hat{a}_i = 1$. Assim, \hat{a}_i é uma matriz de permutação com sinal, ou seja, $\hat{a}_i \in B_{2n}^+$ para todo $i \in \llbracket n \rrbracket$.

Exemplo 4.1.1 Se $n = 2$, então para $i \in \{1, 2\}$, \hat{a}_i são matrizes $2^2 \times 2^2$ da seguinte forma:

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \hat{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4.1.2 Se $n=3$, então \hat{a}_i com $i \in \{1, 2, 3\}$ são matrizes 8×8 . Pelo exemplo anterior, sabemos quem são \hat{a}_1 e \hat{a}_2 no caso $n=2$. Portanto, para $n=3$

basta repetirmos as mesmas matrizes diagonalmente, ou seja,

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & -1 & & \\ & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Já para o caso $i=3$, temos

$$\hat{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A álgebra de matrizes gerada pelos elementos \hat{a}_i é chamada álgebra de Clifford, denotada por Cl_{n+1}^0 . Na próxima seção veremos esta álgebra com mais detalhes.

4.2

A Álgebra de Clifford

Na seção anterior, vimos que Quat_{n+1} é um grupo finito e que seus elementos são precisamente

$$\text{Quat}_{n+1} = \{\pm 1, \pm \hat{a}_1, \pm \hat{a}_2, \pm \hat{a}_1 \hat{a}_2, \pm \hat{a}_3, \pm \hat{a}_1 \hat{a}_3, \pm \hat{a}_2 \hat{a}_3, \pm \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3, \dots, \pm \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n\}.$$

Note que $\text{Quat}_{n+1} = \text{HQuat}_{n+1} \sqcup (-\text{HQuat}_{n+1})$, onde HQuat_{n+1} são os elementos que aparecem com sinal $+$ em Quat_{n+1} . Além disso, observe que $\text{HQuat}_{n+1} \subset \text{Quat}_{n+1}$ não é um subgrupo, visto que $\hat{a}_i^2 = -1 \notin \text{HQuat}_{n+1}$.

Definição 4.2.1 Cl_{n+1}^0 é uma álgebra associativa com unidade sobre \mathbb{R} , que é um espaço vetorial de dimensão 2^n , com base ortonormal HQuat_{n+1} .

Portanto, a álgebra de Clifford Cl_{n+1}^0 é gerada pelos elementos \hat{a}_i , que satisfazem as relações já vistas anteriormente na definição dos geradores de Quat_{n+1} . Recorde:

- (i) $\hat{a}_i^2 = -1$;
- (ii) $\hat{a}_i \hat{a}_j = \hat{a}_j \hat{a}_i$, se $|i - j| \neq 1$;
- (iii) $\hat{a}_i \hat{a}_j = -\hat{a}_j \hat{a}_i$, se $|i - j| = 1$.

Além disso, como espaço vetorial é dotada de um produto interno, definido por

$$\langle z_1, z_2 \rangle = 2^{-n} \text{Traço}(z_1 z_2^T).$$

Quando n é pequeno o suficiente, as álgebras de Clifford são álgebras conhecidas. Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 4.2.1 Se $n = 0$, então Cl_1^0 é uma álgebra de dimensão 1 sobre \mathbb{R} , tal que sua base é $\{1\}$. Ou seja, a álgebra de Clifford Cl_1^0 é o próprio \mathbb{R} .

Exemplo 4.2.2 Se $n = 1$, então Cl_2^0 é uma álgebra de dimensão 2 sobre \mathbb{R} cuja base é $\{1, \hat{a}_1\}$, que são matrizes 2×2 satisfazendo a condição $\hat{a}_1^2 = -1$.

Portanto, os elementos de Cl_2^0 são da forma $u + v\hat{a}_1$, onde $u, v \in \mathbb{R}$. Sabemos da seção anterior, que

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que esta é a forma matricial de $\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Portanto, os elementos de Cl_2^0 são dados por $u + v\hat{a}_1$, onde $\hat{a}_1 = \mathbf{i}$, ou seja, $\text{Cl}_2^0 = \mathbb{C}$.

Antes de vermos mais um exemplo de álgebra de Clifford, vamos nos recordar dos quatérnios \mathbb{H} .

O conjunto dos quatérnios é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , com dimensão 4, cuja multiplicação é associativa e distributiva com a soma. Além disso, com exceção da multiplicação por escalar, não é comutativa. Portanto, \mathbb{H} é uma álgebra associativa e não comutativa.

Um elemento $q \in \mathbb{H}$ é tal que $q = u\mathbf{1} + v\mathbf{i} + w\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, onde $u, v, w, t \in \mathbb{R}$ cuja norma é $|q| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 + t^2}$. Podemos associar $q \in \mathbb{H}$ a matriz

$$q = \begin{pmatrix} u & -v & -w & -t \\ v & u & -t & w \\ w & t & u & -v \\ t & -w & v & u \end{pmatrix}$$

onde, $\mathbf{1}$ é a matriz identidade 4×4 e

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os elementos \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} são tais que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$, além disso $-\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $-\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{i}$ e $-\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{j}$.

Como o produto de dois elementos \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} é mais ou menos o outro, então $\{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$ é um grupo não abeliano. Denota-se tal grupo como Q_8 .

Exemplo 4.2.3 Se $n = 2$, então Cl_3^0 é uma álgebra de dimensão 4 sobre \mathbb{R} , cuja base é $\{1, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_1\hat{a}_2\}$, que são matrizes 4×4 satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) da definição, ou seja,

$$\hat{a}_1^2 = -1 = \hat{a}_2^2, \quad \hat{a}_1\hat{a}_2 = -\hat{a}_2\hat{a}_1.$$

Assim, como vimos anteriormente, essa é exatamente a álgebra dos quatérnios \mathbb{H} , basta tomarmos

$$\hat{a}_1 = \mathbf{i}, \hat{a}_2 = \mathbf{j}, \hat{a}_1\hat{a}_2 = \mathbf{k}.$$

Com isso, já conhecemos três exemplos de álgebras de Clifford: $\text{Cl}_1^0 = \mathbb{R}$, $\text{Cl}_2^0 = \mathbb{C}$, $\text{Cl}_3^0 = \mathbb{H}$.

Como 2^n cresce muito rápido, descrever os geradores das álgebras de Clifford para $n \geq 2$, passa a ser uma tarefa relativamente trabalhosa e extensa.

Classificações para as álgebras de Clifford podem ser encontradas em [12].

4.3

O Subgrupo a Um Parâmetro α_i^{Spin}

Um subgrupo a um parâmetro de um grupo G é um homomorfismo contínuo de grupos de \mathbb{R} , como grupo aditivo, no grupo G em questão.

A partir dos geradores $\hat{a}_i \in \text{Quat}_{n+1}$, vamos definir os subgrupos a um parâmetro do grupo SO_{2^n}

$$\alpha_i^{\text{Spin}} : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_{2^n}$$

$$\alpha_i^{\text{Spin}}(\theta) \mapsto \exp\left(\theta \frac{\hat{a}_i}{2}\right).$$

Como \hat{a}_i são matrizes com diagonal nula, não é difícil ver que $\exp(\theta \frac{\hat{a}_i}{2})$ é uma matriz cujas entradas diagonais são $\cos(\frac{\theta}{2})$, e nas posições das entradas não nulas de \hat{a}_i , temos $\sin(\frac{\theta}{2})$.

Portanto, os elementos $\alpha_i^{\text{Spin}}(\theta)$ são matrizes $2^n \times 2^n$ definidas como

$$\alpha_i^{\text{Spin}}(\theta) = \exp(\theta \frac{\hat{a}_i}{2}) = \cos(\frac{\theta}{2}) + \hat{a}_i \sin(\frac{\theta}{2}).$$

Notação 4.3.1 Para simplificar a notação, trataremos $\alpha_i^{\text{Spin}}(\theta)$ como $\alpha_i(\theta)$, a menos que seja especificado de outra forma.

Vamos então, escrever tais elementos como matrizes. Para que fique mais claro, antes de formalizarmos a forma matricial de $\alpha_i(\theta)$, construiremos os casos $n = 2$ e $n = 3$.

Observação 4.3.1 Como $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\alpha_i(\pi) = \hat{a}_i \in \text{Quat}_{n+1}$.

Exemplo 4.3.1 Se $n = 2$ e $i = 1$, temos

$$\alpha_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 0 & \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Se $i = 2$, temos

$$\alpha_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Note que $\det(\alpha_i(\theta)) = (\cos(\frac{\theta}{2})^2 + \sin(\frac{\theta}{2})^2)^2 = 1$, para $i \in \{1, 2\}$.

Exemplo 4.3.2 Se $n = 3$ e $i = 1$, $\alpha_1(\theta)$ tem dimensão 8×8 e é dada por:

$$\alpha_1(\theta) = \begin{pmatrix} Q(\theta) & & & \\ & Q(\theta) & & \\ & & Q(\theta) & \\ & & & Q(\theta) \end{pmatrix},$$

onde

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Quando $i = 2$, a matriz $\alpha_2(\theta)$ é

$$\alpha_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Por fim, quando $i = 3$ $\alpha_3(\theta)$ é uma matriz de um único bloco 8×8

$$\alpha_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Note que $\det(\alpha_i(\theta)) = (\cos(\frac{\theta}{2})^2 + \sin(\frac{\theta}{2})^2)^4 = 1$, para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Agora descreveremos a forma geral, primeiramente para $i = 1$, em seguida para $i \geq 2$.

Quando $i = 1$, temos $\alpha_1(\theta) = \exp(\theta \hat{a}_1) = \cos(\frac{\theta}{2}) + \hat{a}_1 \sin(\frac{\theta}{2})$. Como visto anteriormente,

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

portanto $\alpha_1(\theta) = \cos(\frac{\theta}{2}) + \hat{a}_1 \sin(\frac{\theta}{2})$ é dada por

$$\alpha_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & & \\ & \ddots & \\ & & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) & & \\ & \ddots & \\ & & \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Logo, temos que a matriz $\alpha_1(\theta)$ é uma matriz em blocos na sua diagonal, assim como no exemplo anterior, dada por

$$\alpha_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) & & \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ & & & \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Descreveremos agora, a forma geral para $\alpha_i(\theta)$ para todo $i \geq 2$, que é uma matriz diagonal em blocos iguais, onde cada bloco tem dimensão $2^i \times 2^i$ e é definido como

$$Q_i(\theta) = \begin{pmatrix} C(\theta) & & -S(\theta) \\ & C(\theta) & S(\theta) \\ S(\theta) & & C(\theta) \\ & -S(\theta) & C(\theta) \end{pmatrix},$$

onde cada matriz $C(\theta)$ e $S(\theta)$ tem dimensão $2^{i-2} \times 2^{i-2}$ e é diagonal de cossenos e senos, respectivamente, ou seja,

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & & \\ & \ddots & \\ & & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) & & \\ & \ddots & \\ & & \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Portanto, para todo $i \geq 2$ a matriz $\alpha_i(\theta)$ é dada por

$$\alpha_i(\theta) = \begin{pmatrix} Q_i & & \\ & \ddots & \\ & & Q_i \end{pmatrix}.$$

Observação 4.3.2 Ao voltar nos exemplos anteriores, pode-se verificar a forma geral para os casos $n = 2$ e $n = 3$.

Assim como Quat_{n+1} , o grupo gerado pelos elementos $\alpha_i(\theta)$, pode ser pensado de forma abstrata e também matricial.

Note que os elementos $\alpha_i(\theta)$ são matrizes ortogonais em blocos, cujos elementos da diagonal são iguais em cada matriz. Além disso, o determinante de cada bloco é 1, portanto o determinante da matriz toda é 1.

4.4

O Grupo Spin_{n+1}

Tendo definidos $\alpha_i(\theta)$, vamos agora considerar o grupo que tais elementos geram.

Lembre que o subgrupo a um parâmetro $\alpha_i : \mathbb{R} \rightarrow \text{Spin}_{n+1}$ é dado por $\alpha_i(\theta) = \cos(\frac{\theta}{2}) + \hat{a}_i \sin(\frac{\theta}{2})$, com $i \in \llbracket n \rrbracket$.

Definição 4.4.1 *O grupo gerado pelos elementos $\alpha_i(\theta)$, onde $\theta \in \mathbb{R}$ e $i \in \llbracket n \rrbracket$ é definido como Spin_{n+1} .*

Como definimos Spin_{n+1} a partir de seus geradores $\alpha_i(\theta)$, que são expressos matricialmente, então Spin_{n+1} pode ser visto como um grupo de matrizes.

Observação 4.4.1 *Como $\alpha_i(\pi) = \hat{a}_i$, temos $\text{Quat}_{n+1} \subset \text{Spin}_{n+1}$. Além disso, como Cl_{n+1}^0 é gerada por HQuat_{n+1} , temos $\text{Quat}_{n+1} \subset \text{Spin}_{n+1} \subset \text{Cl}_{n+1}^0$.*

Uma vez que definimos $\alpha_i(\pi) = \hat{a}_i$, podemos definir em Cl_{n+1}^0 os elementos

$$\mathfrak{a}_i^{\text{Spin}} = \frac{1}{2} \hat{a}_i, i \in \llbracket n \rrbracket.$$

Seja $\mathfrak{spin}_{n+1} \subset \text{Cl}_{n+1}^0$ a álgebra de Lie gerada pelos elementos $\mathfrak{a}_i^{\text{Spin}}$. Existe um isomorfismo entre \mathfrak{spin}_{n+1} e \mathfrak{so}_{n+1} como álgebras de Lie, portanto a dimensão de \mathfrak{spin}_{n+1} é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$, que é a dimensão de \mathfrak{so}_{n+1} . Dessa forma, o grupo Spin_{n+1} tem a mesma dimensão.

Vamos ver alguns exemplos de grupos Spin_{n+1} conhecidos: Spin_2 e Spin_3 .

Exemplo 4.4.1 Spin_2 é gerado por $\{1, \alpha_1(\theta)\}$, portanto, se $z \in \text{Spin}_2 \subset \text{Cl}_2^0$

$$z = \cos(\frac{\theta}{2}) + \hat{a}_1 \sin(\frac{\theta}{2}),$$

entretanto, já vimos anteriormente que $\hat{a}_1 = \mathbf{i}$ e $\text{Cl}_2^0 = \mathbb{C}$. Daí, como $\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2}) = 1$, $z \in \text{Spin}_2$ pode ser escrito como $z = x + \mathbf{i}y$ com $x^2 + y^2 = 1$. Ou seja, é precisamente o grupo de matrizes ortogonais SO_2 .

Anteriormente, vimos quem são os quatérnios \mathbb{H} , agora vamos pensar no grupo dos quatérnios unitários, que podem ser vistos como o grupo de matrizes reais 4×4 da forma

$$M = \begin{pmatrix} u & -v & -w & -t \\ v & u & -t & w \\ w & t & u & -v \\ t & -w & v & u \end{pmatrix},$$

onde $\det(M) = (u^2 + v^2 + w^2 + t^2)^2 = 1$.

Pensando nos elementos como 4-uplas $(u, v, w, t) \in \mathbb{R}^4$, eles formam uma forma análoga a esfera, já que $u^2 + v^2 + w^2 + t^2 = 1$, chamada de 3-esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Exemplo 4.4.2 A álgebra de Clifford Cl_3^0 é gerada por $\{1, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_1\hat{a}_2\}$, tal que $\hat{a}_1^2 = \hat{a}_2^2 = -1$ e $\hat{a}_1\hat{a}_2 = -\hat{a}_2\hat{a}_1$.

Sabemos que $\text{Cl}_3^0 = \mathbb{H}$, então como $\text{Spin}_3 \subset \text{Cl}_3^0$, temos $\text{Spin}_3 \subset \mathbb{H}$. O grupo Spin_3 é gerado por $\{\pm 1, \pm \alpha_1(\theta), \pm \alpha_2(\theta)\}$, dados por

$$\alpha_1(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{a}_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \alpha_2(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{a}_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Além disso,

$$\alpha_1(\theta)\alpha_2(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{a}_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{a}_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{a}_1\hat{a}_2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

onde a soma dos quadrados dos coeficientes de $\alpha_1(\theta)$ e $\alpha_2(\theta)$ é $\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2}) = 1$, e a de $\alpha_1(\theta)\alpha_2(\theta)$ é $(\sin(\frac{\theta}{2})^2 + \cos(\frac{\theta}{2})^2)^2 = 1$.

Podemos então concluir, que os elementos de Spin_3 são escritos como $x + y\hat{a}_1 + z\hat{a}_2 + t\hat{a}_1\hat{a}_2$, onde $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.

Daí, se $z \in \text{Spin}_3 \subset \mathbb{H}$, então $z = x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ onde $\mathbf{i} = \hat{a}_1$, $\mathbf{j} = \hat{a}_2$ e $\mathbf{k} = \hat{a}_1\hat{a}_2$, tal que $|z| = 1$, ou seja, exatamente o grupo de matrizes dos quatérnios unitários \mathbb{S}^3 . Assim, $\mathbb{S}^3 \simeq \text{Spin}_3$.

Observação 4.4.2 A multiplicação por um elemento do grupo Spin_{n+1} , define uma transformação linear da álgebra de Clifford Cl_{n+1}^0 nela mesma. A base HQuat_{n+1} nos permite expressar esta transformação linear como uma matriz real $2^n \times 2^n$.

4.5

O Grupo \tilde{B}_{n+1}^+

Agora que temos bem definidos os grupos Quat_{n+1} e Spin_{n+1} , assim como seus geradores, podemos definir o grupo finito $\tilde{B}_{n+1}^+ \subset \text{Spin}_{n+1}$.

Vamos então, definir os elementos \acute{a}_i e \grave{a}_i , tal que $(\acute{a}_i)^{-1} = \grave{a}_i$ como

$$\acute{a}_i = \alpha_i\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 + \hat{a}_i}{\sqrt{2}}, \quad \grave{a}_i = \alpha_i\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{1 - \hat{a}_i}{\sqrt{2}},$$

onde $\acute{a}_i, \grave{a}_i \in \text{Spin}_{n+1} \subset \text{Cl}_{n+1}^0$.

Note que $\hat{a}_i = \acute{a}_i^2$ e $\hat{a}_i^2 = \acute{a}_i^4 = -1$.

Definição 4.5.1 *O grupo gerado pelos elementos $\{\acute{a}_1, \dots, \acute{a}_n\}$ é definido como $\tilde{B}_{n+1}^+ \subset \text{Spin}_{n+1}$.*

Como tanto Quat_{n+1} , quanto Spin_{n+1} , são vistos como grupos de matrizes, naturalmente, \tilde{B}_{n+1}^+ também pode ser visto como tal.

Exemplo 4.5.1 *Se $n = i = 2$, então $\acute{a}_2, \grave{a}_2 \in \tilde{B}_{n+1}^+$ são matrizes 4×4 dadas por*

$$\acute{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad e \quad \grave{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Note que as matrizes são ortogonais, com determinante 1. Além disso, os elementos de cada diagonal são iguais e se $i \neq j$ temos $a_{ij} = -a_{ji}$.

Considerando as definições acima para \acute{a}_i e \grave{a}_i , podemos demonstrar o seguinte lema.

Lema 4.5.1 *Para $\acute{a}_i \in \tilde{B}_{n+1}^+$ e $\hat{a}_i \in \text{Quat}_{n+1}$, temos as seguintes identidades:*

$$(i) \text{ Para todo } i \in \llbracket n-1 \rrbracket \text{ temos } \begin{cases} \acute{a}_i \acute{a}_{i+1} \acute{a}_i = \acute{a}_{i+1} \acute{a}_i \acute{a}_{i+1} \\ (\acute{a}_i)^{-1} \acute{a}_{i+1} (\acute{a}_i)^{-1} = \acute{a}_{i+1} (\acute{a}_i)^{-1} \acute{a}_{i+1} \end{cases};$$

$$(ii) \text{ Se } |i-j| \neq 1 \implies \begin{cases} \acute{a}_j \acute{a}_i = \acute{a}_i \acute{a}_j \\ \hat{a}_j \acute{a}_i = \acute{a}_i \hat{a}_j \end{cases};$$

$$(iii) \text{ Se } |i-j| = 1 \implies \begin{cases} \hat{a}_j \acute{a}_i = (\acute{a}_i)^{-1} \hat{a}_j \\ \hat{a}_j \hat{a}_i = -\hat{a}_i \hat{a}_j \end{cases}.$$

Prova.

Utilizando as definições de \acute{a}_i e \hat{a}_i dadas acima, basta fazermos algumas contas para verificar o resultado.

No primeiro item, vamos calcular os dois lados da primeira igualdade. À esquerda temos

$$\begin{aligned}\acute{a}_i \acute{a}_{i+1} \acute{a}_i &= \left(\frac{1 + \hat{a}_i}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1 + \hat{a}_{i+1}}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1 + \hat{a}_i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + 2\hat{a}_i + \hat{a}_{i+1} + \hat{a}_{i+1}\hat{a}_i + \hat{a}_i^2 + \hat{a}_i\hat{a}_{i+1} + \hat{a}_i\hat{a}_{i+1}\hat{a}_i),\end{aligned}$$

entretanto, como visto anteriormente, $\hat{a}_i^2 = -1$, $\hat{a}_i\hat{a}_{i+1} = -\hat{a}_{i+1}\hat{a}_i$. Portanto,

$$\acute{a}_i \acute{a}_{i+1} \acute{a}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_i + \hat{a}_{i+1}).$$

À direita temos

$$\acute{a}_{i+1} \acute{a}_i \acute{a}_{i+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + \hat{a}_i + 2\hat{a}_{i+1} + \hat{a}_i\hat{a}_{i+1} + \hat{a}_{i+1}^2 + \hat{a}_{i+1}\hat{a}_i + \hat{a}_{i+1}\hat{a}_i\hat{a}_{i+1}),$$

dadas as relações anteriores, temos

$$\acute{a}_{i+1} \acute{a}_i \acute{a}_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_i + \hat{a}_{i+1}).$$

Portanto, $\acute{a}_i \acute{a}_{i+1} \acute{a}_i = \acute{a}_{i+1} \acute{a}_i \acute{a}_{i+1}$.

Para a segunda igualdade, basta fazer uma conta similar considerando $(\acute{a}_i)^{-1} = \grave{a}_i = \frac{1 - \hat{a}_i}{\sqrt{2}}$.

Os itens (ii) e (iii) seguem de contas parecidas com as anteriores, porém ainda mais simples, basta observar que:

se $|i - j| \neq 1$, então $\hat{a}_i \hat{a}_j = \hat{a}_j \hat{a}_i$ e se $|i - j| = 1$, então $\hat{a}_i \hat{a}_j = -\hat{a}_j \hat{a}_i$. ■

O lema que acabamos de demonstrar, nos diz como os elementos \hat{a}_i , \acute{a}_i e \grave{a}_i interagem entre si. Tal interação é de extrema importância para os próximos capítulos.

4.6

O Homomorfismo $\Pi : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$

O grupo Spin_{n+1} , que definimos anteriormente, é também conhecido como o recobrimento duplo de SO_{n+1} . Não abordaremos espaços de recobrimento neste trabalho, entretanto, é um tema de grande estudo, para saber mais sobre veja por exemplo, [8].

Lembre que como álgebras de Lie, existe um único isomorfismo entre \mathfrak{spin}_{n+1} e \mathfrak{so}_{n+1} , portanto, \mathfrak{spin}_{n+1} tem dimensão finita e igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. Além disso, vamos enunciar alguns resultados que irão nos auxiliar.

Teorema 4.6.1 (*Terceiro teorema de Lie*) *Toda álgebra de Lie real de dimensão finita é a álgebra de Lie de um único grupo de Lie simplesmente conexo.*

A demonstração do terceiro teorema de Lie pode ser encontrada em [10].

Teorema 4.6.2 *Seja G um grupo de Lie conexo e seja $p : \tilde{G} \rightarrow G$ o mapa de recobrimento universal de G . Então, \tilde{G} tem uma estrutura natural de grupo de Lie simplesmente conexo tal que, $p : \tilde{G} \rightarrow G$ é um homomorfismo de grupos de Lie.*

A demonstração do teorema pode ser encontrada em [4].

Teorema 4.6.3 *Suponha G e H grupos de Lie com álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} , respectivamente. Além disso, suponha $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ homomorfismo de álgebras de Lie. Suponha também que G seja conexo e simplesmente conexo. Então, existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\psi : G \rightarrow H$ tal que $\psi_* = f$, onde ψ_* é a diferencial de ψ na identidade.*

A demonstração do teorema pode ser encontrada em [7].

Pelos resultados acima, Spin_{n+1} é simplesmente conexo e existe um único homomorfismo $\Pi : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$, tal que $\alpha_i^{\text{Spin}}(\theta) \mapsto \alpha_i^{\text{SO}}(\theta)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \Pi : \text{Spin}_{n+1} &\rightarrow \text{SO}_{n+1} \\ \alpha_i(\theta) &\mapsto \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & \text{Rot}(\theta) & \\ & & I_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $I_1 \in \mathbb{R}^{(i-1) \times (i-1)}$ e $I_2 \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}$ são matrizes identidade. Além disso, $\text{Rot}(\theta)$ é a matriz de rotação 2×2 dada por

$$\text{Rot}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Antes de continuarmos, vamos ver um exemplo para entender melhor como funciona este mapa.

Exemplo 4.6.1 *Se $n = 3$, então Spin_4 é um grupo de matrizes 8×8 e SO_4 é um grupo de matrizes 4×4 . Temos os geradores $\alpha_i(\theta)$, com $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Seja $i = 3$, daí $\Pi(\alpha_3)$ é uma matriz em SO_4 , cujo bloco $Rot(\theta)$ ocupa as entradas $(3, 3), (3, 4), (4, 3)$ e $(4, 4)$. Então

$$\Pi(\alpha_3(\theta)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Continuando no exemplo, vamos analisar o que acontece quando $\theta = \pi$, ou seja, $\alpha_i(\pi) = \hat{a}_i$ e quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\alpha_i(\frac{\pi}{2}) = \acute{a}_i$.

Para isto, basta aplicarmos os ângulos na matriz do exemplo. Dessa forma, temos

$$\Pi(\hat{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Pi(\acute{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que,

$$Rot(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Rot(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que são matrizes de determinante 1, claramente.

Portanto, é fácil ver que o caso geral é dado por

$$\Pi(\hat{a}_i) = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \\ & & & I_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Pi(\acute{a}_i) = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \\ & & & I_2 \end{pmatrix}.$$

Note que $\Pi(\hat{a}_i)$ é uma matriz diagonal de determinante 1. Além disso, $\Pi(\acute{a}_i)$ é uma matriz de permutação, também de determinante 1.

Lembre que $\text{Quat}_{n+1} \subset \text{Spin}_{n+1}$ é gerado pelos \hat{a}_i e $\tilde{B}_{n+1}^+ \subset \text{Spin}_{n+1}$ é gerado pelos \acute{a}_i . Portanto,

$$\Pi[\text{Quat}_{n+1}] \subset \text{Diag}_{n+1}^+, \quad \Pi[\tilde{B}_{n+1}^+] \subset B_{n+1}^+.$$

Como claramente as inclusões contrárias são válidas, temos

$$\Pi[\text{Quat}_{n+1}] = \text{Diag}_{n+1}^+, \quad \Pi[\tilde{B}_{n+1}^+] = B_{n+1}^+.$$

Na seção 2.2, vimos que o mapa $\phi : B_{n+1}^+ \rightarrow S_{n+1}$ é um homomorfismo sobrejetor, cujo núcleo é Diag_{n+1}^+ . Portanto,

$$\frac{B_{n+1}^+}{\text{Diag}_{n+1}^+} \approx S_{n+1}.$$

Além disso, $\phi \circ \Pi = \sigma$ onde

$$\begin{aligned} \sigma : \tilde{B}_{n+1}^+ &\rightarrow S_{n+1} \\ z &\mapsto \sigma_z \end{aligned}$$

é também um homomorfismo, cujo núcleo é Quat_{n+1} .

Exemplo 4.6.2 No exemplo anterior, a permutação $\sigma \in S_4$ associada a matriz $\Pi(\acute{a}_3)$ é dada por $\phi \circ \Pi(\acute{a}_3) = \sigma = [1243] = a_3$.

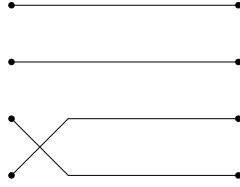


Figura 4.1: Diagrama de $\sigma = a_3 \in S_4$

Observação 4.6.1 Note que $\phi \circ \Pi(\acute{a}_i) = \sigma_{\acute{a}_i} = a_i \in S_{n+1}$.

Feita a análise, temos que o mapa $\Pi : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$ nos fornece as seguintes seqüências exatas, ou seja, homomorfismos encadeados em que a imagem do antecessor é o núcleo do sucessor:

- (i) $1 \rightarrow \text{Quat}_{n+1} \hookrightarrow \tilde{B}_{n+1}^+ \xrightarrow{\sigma} S_{n+1} \rightarrow 1;$
- (ii) $1 \rightarrow \{\pm 1\} \hookrightarrow \text{Quat}_{n+1} \xrightarrow{\Pi} \text{Diag}_{n+1}^+ \rightarrow 1,$

onde $\tilde{B}_{n+1}^+ = \Pi^{-1}[B_{n+1}^+]$ e $\text{Quat}_{n+1} = \Pi^{-1}[\text{Diag}_{n+1}^+]$.

Exemplo 4.6.3 Seja $z = \acute{a}_1 \acute{a}_3 \acute{a}_2 \in \tilde{B}_4^+$, então

$$\Pi(z) = \Pi(\acute{a}_1 \acute{a}_3 \acute{a}_2) = \Pi(\acute{a}_1) \Pi(\acute{a}_3) \Pi(\acute{a}_2)$$

$$\Pi(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $\phi(\Pi(z)) = [3142] = a_1 a_3 a_2$.

Como nosso objetivo é estudar permutações $\sigma \in S_{n+1}$ com as coordenadas de $z \in \tilde{B}_{n+1}^+$, onde $\phi \circ \Pi(z) = \sigma$, é importante que tenhamos compreendido o funcionamento do mapa Π nos geradores $\acute{a}_i \in \tilde{B}_{n+1}^+$ de forma clara.

Com o homomorfismo bem entendido, a partir de então, omitiremos ϕ e trataremos apenas como $\sigma = \Pi(z)$.

5

Permutações e a Álgebra de Clifford

No capítulo anterior, vimos os grupos Spin_{n+1} , Quat_{n+1} e \tilde{B}_{n+1}^+ . No presente capítulo, estudaremos um pouco mais a álgebra Cl_{n+1}^0 e suas propriedades, a partir de seus geradores. Em seguida, estudaremos as permutações em S_{n+1} nas coordenadas de $z \in \tilde{B}_{n+1}^+ \subset \text{Cl}_{n+1}^0$.

5.1

Os Mapas Acute e Grave

Vimos no capítulo 2, que podemos escrever $\sigma \in S_{n+1}$ como uma palavra reduzida, que é um produto de geradores a_i de S_{n+1} .

Definiremos os mapas acute e grave por meio das palavras reduzidas, utilizando os elementos que já conhecemos $\acute{a}_i, \grave{a}_i \in \tilde{B}_{n+1}^+ \subset \text{Cl}_{n+1}^0$.

Definição 5.1.1 *Seja $\sigma \in S_{n+1}$, tal que $\sigma = a_{i_1} \dots a_{i_l}$ é uma palavra reduzida. Seja $\grave{a}_i = (\acute{a}_i)^{-1}$. Definimos os seguintes mapas :*

(i) *acute* : $S_{n+1} \rightarrow \tilde{B}_{n+1}^+$, *dado por* $\text{acute}(\sigma) = \acute{\sigma} = \acute{a}_{i_1} \dots \acute{a}_{i_l}$;

(ii) *grave* : $S_{n+1} \rightarrow \tilde{B}_{n+1}^+$, *dado por* $\text{grave}(\sigma) = \grave{\sigma} = \grave{a}_{i_1} \dots \grave{a}_{i_l}$.

A princípio, a definição parece depender da palavra reduzida escolhida. O lema abaixo nos mostra que os mapas são bem definidos, portanto não existe tal dependência.

Lema 5.1.1 *Se $\sigma \in S_{n+1}$ é tal que $\sigma = a_{i_1} \dots a_{i_l} = a_{j_1} \dots a_{j_l}$ e $l = \text{inv}(\sigma)$, então $\acute{a}_{i_1} \dots \acute{a}_{i_l} = \acute{a}_{j_1} \dots \acute{a}_{j_l}$.*

Prova.

Pela proposição da seção 2.1, duas palavras reduzidas estão conectadas por uma sequência finita de movimentos. Além disso, pelo lema da seção 4.5, para cada movimento da sequência, temos as identidades.

Portanto, $\acute{a}_{i_1} \dots \acute{a}_{i_l} = \acute{a}_{j_1} \dots \acute{a}_{j_l}$.

■

Recordemos das relações já estabelecidas,

$$\alpha_i(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{a}_i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \in \text{Spin}_{n+1}, \quad \alpha_i(\pi) = \hat{a}_i \in \text{Quat}_{n+1},$$

$$\alpha_i\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 + \hat{a}_i}{\sqrt{2}} = \acute{a}_i \in \tilde{B}_{n+1}^+, \quad \alpha_i\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{1 - \hat{a}_i}{\sqrt{2}} = \grave{a}_i \in \tilde{B}_{n+1}^+.$$

Além disso, $(\acute{a}_i)^4 = (\hat{a}_i)^2 = -1$.

Exemplo 5.1.1 *Seja $\sigma = \eta = [654321] = a_1 a_2 a_1 a_3 a_2 a_1 a_4 a_3 a_2 a_1 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$.*

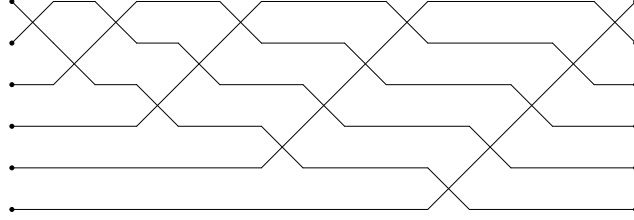


Figura 5.1: Diagrama de $\eta \in S_6$

Lembre que $\acute{a}_i = \frac{1+\hat{a}_i}{\sqrt{2}}$, portanto temos

$$\begin{aligned} \acute{\eta} &= \acute{a}_1 \acute{a}_2 \acute{a}_1 \acute{a}_3 \acute{a}_2 \acute{a}_1 \acute{a}_4 \acute{a}_3 \acute{a}_2 \acute{a}_1 \acute{a}_5 \acute{a}_4 \acute{a}_3 \acute{a}_2 \acute{a}_1 \\ &= \left(\frac{1 + \hat{a}_1}{\sqrt{2}}\right) \dots \left(\frac{1 + \hat{a}_1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Assim, tendo em mente as relações entre \hat{a}_i , \acute{a}_i e \grave{a}_i , após alguns cálculos concluímos que

$$\acute{\eta} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_3 - \hat{a}_2 \hat{a}_4 - \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 - \hat{a}_1 \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5).$$

5.2

Parte Real

Vimos que $\text{Quat}_{n+1} \subset \text{Spin}_{n+1} \subset \text{Cl}_{n+1}^0$. Além disso, um elemento de Cl_{n+1}^0 é escrito como uma combinação linear de elementos de Quat_{n+1} .

Portanto, podemos escrever $z \in \text{Cl}_{n+1}^0$ como

$$z = \sum_{q \in \text{HQuat}_{n+1}} c_q q, \quad \text{com } c_q \in \mathbb{R}.$$

Definição 5.2.1 *A parte real de $z \in \text{Cl}_{n+1}^0$ é definida como*

$$\Re(z) = 2^{-n} \text{Traço}(z) = \langle z, 1 \rangle.$$

Portanto, para $z = \sum_{q \in \text{HQuat}_{n+1}} c_q q \in \text{Cl}_{n+1}^0$ a parte real é o coeficiente independente $\Re(z) = c_1$.

Exemplo 5.2.1 *No exemplo 5.1.1 da seção anterior, onde $\acute{\eta} \in \text{Cl}_6^0$ é tal que*

$$\acute{\eta} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_3 - \hat{a}_2 \hat{a}_4 - \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 - \hat{a}_1 \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5),$$

temos $\Re(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Exemplo 5.2.2 Seja $\sigma = [2413] = a_2a_1a_3 \in S_4$, então

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_1 + \hat{a}_2\hat{a}_1\hat{a}_3).$$

Portanto, $\Re(\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

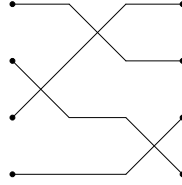


Figura 5.2: Diagrama de $\sigma = a_2a_1a_3 \in S_4$

Exemplo 5.2.3 Seja $z = -\hat{a}_1\sigma \in \text{Spin}_4$, onde $\sigma = a_2a_1a_3 \in S_4$ como no exemplo anterior. Então

$$z = \frac{1}{4}(1 - \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_1\hat{a}_3),$$

portanto $\Re(z) = \frac{1}{4}$.

5.2.1

Autovalores e a Parte Real

Recordemos do homomorfismo $\Pi : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$, da seção 4.6, onde vimos que $\Pi[\tilde{B}_{n+1}^+] = B_{n+1}^+$ e $\Pi[\text{Quat}_{n+1}] = \text{Diag}_{n+1}^+$.

Veremos um resultado que relaciona a parte real de $z \in \text{Spin}_{n+1} \subset \text{Cl}_{n+1}^0$, com os autovalores da matriz $\Pi(z) \in \text{SO}_{n+1}$.

Lema 5.2.1 Para $z \in \text{Spin}_{n+1} \subset \text{Cl}_{n+1}^0$, seja $Q = \Pi(z) \in \text{SO}_{n+1}$ tal que seus autovalores são $\exp(\pm\theta_1 i), \dots, \exp(\pm\theta_k i), 1, \dots, 1$. Então

$$\Re(z) = \pm \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right).$$

Em particular, $\Re(z) = 0$ se, e somente se, -1 é um autovalor de Q .

Prova.

Sejam $z \in \text{Spin}_{n+1}$ e $Q = \Pi(z) \in \text{SO}_{n+1}$, tal que os seus autovalores são $\exp(\pm\theta_1 i), \dots, \exp(\pm\theta_k i), 1, \dots, 1$. Daí, Q é diagonalizável, ou seja, existe $P \in \text{GL}_{n+1}$ tal que $Q = PDP^{-1}$, onde D é a matriz diagonal dos autovalores de Q .

Temos que $\Re : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante por conjugação, portanto se $z = z_0 z_1 z_0^{-1}$, temos $\Re(z) = \Re(z_1)$, onde $D = \Pi(z_1)$, $P = \Pi(z_0)$ e $P^{-1} = \Pi(z_0^{-1})$. Assim, podemos assumir $z = \alpha_1(\theta_1) \dots \alpha_{2k-1}(\theta_k)$ e Q como a diagonal dos autovalores

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & & & & \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) & \\ & & & \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\alpha_i(\theta) = \cos(\frac{\theta}{2}) + \hat{a}_i \sin(\frac{\theta}{2})$, então o coeficiente independente do produto dos α_i é o produto dos cossenos, portanto

$$\Re(\alpha_1(\theta_1) \dots \alpha_{2k-1}(\theta_k)) = \pm \cos(\frac{\theta_1}{2}) \dots \cos(\frac{\theta_k}{2}).$$

Note que se $\theta_i = \pm\pi$ para algum i , temos $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$, portanto $\Re(z) = 0$. Reciprocamente, se $\Re(z) = 0$ existe um θ_i tal que $\cos(\theta_i) = 0$, daí $\theta_i = \pm\pi$. Logo, se $\theta_i = \pm\pi$ para algum i , temos $\exp(\pm\pi i) = -1$.

Portanto, $\Re(z) = 0$ se, e somente se, -1 é um autovalor de $Q = \Pi(z)$. ■

Exemplo 5.2.4 Seja $z \in \text{Spin}_4$, tal que $\{\exp(\pm\frac{\pi}{2}i), \exp(\pm\frac{\pi}{3}i)\}$ é o conjunto de autovalores de $Q = \Pi(z) \in \text{SO}_4$.

Dessa forma, podemos assumir

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) & & \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) & & \\ & & \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ & & \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e $z = \alpha_1(\frac{\pi}{2})\alpha_3(\frac{\pi}{3})$. Portanto, pelo lema anterior,

$$\Re(z) = \cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

5.2.2

Matrizes de Ciclos e a Parte Real

Vimos pelo lema anterior, que podemos calcular $\Re(z)$ a partir de informações sobre $Q = \Pi(z) \in \text{SO}_{n+1}$. Agora restringiremos um pouco, para ver como calcular $\Re(z)$ a partir de informações sobre $Q \in \text{B}_{n+1}^+$.

Antes, vamos definir os polinômios de Chebyshev (veja [9]), que são ferramentas úteis na demonstração do próximo corolário.

Definição 5.2.2 *Os polinômios de Chebyshev T_k são definidos recursivamente por*

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

e satisfazem $T_k(\cos(t)) = \cos(kt)$. Portanto, para $k \geq 0$, o termo líder de $T_k(x)$ é $2^{k-1}x^k$ e o termo independente é 0 se k é ímpar e $(-1)^{\frac{k}{2}}$ se k é par.

As raízes de $T_k(x)$ são dadas por

$$x_l = \cos\left(\frac{\pi(2l-1)}{2k}\right), \text{ com } l = 1, \dots, k.$$

Além disso, $T_k(x)$ atinge seu máximo em

$$y_l = \cos\left(\frac{l\pi}{k}\right), \text{ com } T_k(y_l) = (-1)^l \text{ para cada } l = 0, \dots, k.$$

Definição 5.2.3 *Dizemos que uma matriz $Q \in \text{B}_{n+1}^+$ é um ciclo de comprimento k par, quando existem i_1, \dots, i_k com*

$$(i) \quad (e_{i_k})^T Q = -(e_{i_1})^T,$$

$$(ii) \quad (e_{i_j})^T Q = (e_{i_{j+1}})^T \text{ para } 1 \leq j < k,$$

$$(iii) \quad (e_j)^T Q = (e_j)^T \text{ para } j > k.$$

Se o comprimento for ímpar, $(e_{i_k})^T Q = (e_{i_1})^T$ e as relações (ii) e (iii) se mantêm.

Exemplo 5.2.5 *A matriz abaixo é uma matriz de ciclo de comprimento 3*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na notação da definição temos, $i_1 = 1, i_2 = 3$ e $i_3 = 5$. Note que as condições da definição são verificadas facilmente.

Corolário 5.2.1 *Seja $z_0 \in \tilde{B}_{n+1}^+$, tal que $\Pi(z_0) = Q_0 \in B_{n+1}^+$ seja um ciclo de comprimento k . Então $\Re(z_0) = \pm 2^{\frac{-k+1}{2}}$.*

Prova.

Como $Q_0 \in SO_{n+1}$, então se λ é autovalor de Q_0 , temos $|\lambda| = 1$.

Vamos separar em dois casos. Primeiramente, seja k ímpar.

Como Q_0 é um ciclo de comprimento k , temos $Q_0^k = I$, daí $\lambda^k = 1$ onde k é o comprimento do ciclo. Então o polinômio característico de Q_0 é $p(\lambda) = (\lambda^k - 1)(\lambda - 1)^{n+1-k}$. Os autovalores simples dessa matriz são portanto, as raízes da unidade $\lambda = \exp(\frac{2\pi i n}{k})$, para $n = 0, 1, \dots, k-1$.

Dessa forma, os autovalores de Q_0 são 1, com a devida multiplicidade, e os autovalores simples

$$\exp(\pm \frac{2\pi i}{k}), \exp(\pm \frac{4\pi i}{k}), \dots, \exp(\pm \frac{(k-3)\pi i}{k}), \exp(\pm \frac{(k-1)\pi i}{k}).$$

Pelo lema anterior, temos que

$$\Re(z_0) = \pm \cos(\frac{2\pi}{2k}) \cos(\frac{4\pi}{2k}) \dots \cos(\frac{(k-3)\pi}{2k}) \cos(\frac{(k-1)\pi}{2k}) = \pm P, \quad P > 0.$$

Vimos que $T_{2k}(x) - 1 = 2^{2k-1}x^{2k} + \dots - 2$, então as raízes de $T_{2k}(x) - 1 = 0$ são $x_l = \cos(\frac{l\pi}{k})$, com $l = 0, 1, \dots, 2k-1$, daí $-P^4$ é o produto das raízes de $T_{2k}(x) - 1 = 0$.

Portanto, como para $T_{2k}(x) - 1 = 0$ o termo independente é -2 e o coeficiente líder é 2^{2k-1} , então o produto das raízes de $T_{2k}(x) - 1$ é $\frac{(-2)}{2^{2k-1}} = -2^{-2k+2}$. Logo, $P = 2^{\frac{-k+1}{2}}$, portanto $\Re(z_0) = \pm 2^{\frac{-k+1}{2}}$.

Seja agora, k par.

Como Q_0 é um ciclo de comprimento k temos $Q_0^k = J$, onde J é uma matriz que difere da identidade em apenas uma entrada cujo valor é -1 . Assim, como k é par, $\lambda^k = -1$. Então o polinômio característico de Q_0 é $p(\lambda) = (\lambda^k + 1)(\lambda - 1)^{n+1-k}$. Os autovalores dessa matriz são portanto, $\lambda = \exp(\frac{(2n-1)\pi i}{k})$, para $n = 1, \dots, k$.

Dessa forma, os autovalores de Q_0 são 1, com a devida multiplicidade, e os autovalores simples

$$\exp(\pm \frac{\pi i}{k}), \exp(\pm \frac{3\pi i}{k}), \dots, \exp(\pm \frac{(k-1)\pi i}{k}).$$

Pelo lema anterior, temos que

$$\Re(z_0) = \pm \cos(\frac{\pi}{2k}) \cos(\frac{3\pi}{2k}) \dots \cos(\frac{(k-1)\pi}{2k}) = \pm P.$$

Como as raízes de $T_k(x)$ são dadas por $x_l = \cos(\frac{\pi(2l-1)}{2k})$, com $l = 1, \dots, k$, daí P^2 é o produto das raízes de $T_k(x)$. O termo independente de $T_k(x)$ é $(-1)^{\frac{k}{2}}$ e o coeficiente líder é 2^{k-1} , então o produto das raízes de $T_k(x)$ é $\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2^{k-1}} = 2^{-k+1}$.

Portanto, $P^2 = 2^{-k+1}$ e assim $\Re(z_0) = \pm 2^{\frac{-k+1}{2}}$. ■

Exemplo 5.2.6 Seja $z = \acute{a}_3\acute{a}_2 \in \tilde{B}_4^+$. Daí, $\sigma = \phi \circ \Pi(z) = a_3a_2 = (234) \in S_4$, tal que $\Pi(z) = Q \in B_4^+$ é a matriz de permutação de σ , dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como σ é um ciclo de comprimento 3, os autovalores de Q são: $\exp(\pm \frac{2\pi i}{3})$ e 1. Portanto, pelo lema anterior

$$\Re(z) = \pm \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pm\left(\frac{1}{2}\right) = \pm 2^{\frac{-k+1}{2}}, \quad \text{com } k = 3.$$

Para compararmos os resultados, note que fazendo a conta braçal obtemos

$$z = \acute{a}_3\acute{a}_2 = \left(\frac{1 + \hat{a}_3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_3\hat{a}_2).$$

Portanto, $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

Agora, vamos ver um exemplo onde o ciclo tem comprimento par.

Exemplo 5.2.7 Seja $z = \acute{a}_3\acute{a}_2\acute{a}_1 \in \tilde{B}_4^+$. Daí, $\sigma = a_3a_2a_1 = (1234) \in S_4$, tal que $\Pi(z) = Q \in B_4^+$ é a matriz de permutação de σ , dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como σ é um ciclo de comprimento 4, então os autovalores de Q são: $\exp(\pm \frac{\pi i}{4})$, $\exp(\pm \frac{3\pi i}{4})$, 1.

Pelo lema anterior, recordando que $\cos(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}$, temos

$$\Re(z) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{3\pi}{4})}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Para compararmos os resultados, vamos fazer a conta assim como no exemplo anterior. Temos,

$$\begin{aligned} z &= \acute{a}_3 \acute{a}_2 \acute{a}_1 = \left(\frac{1 + \hat{a}_3}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1 + \hat{a}_1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_3 \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_1 + \hat{a}_3 \hat{a}_1 + \hat{a}_3 \hat{a}_2 \hat{a}_1) \end{aligned}$$

Portanto, $\Re(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

5.2.3 Ciclos e a Parte Real

Uma outra forma para calcular a parte real, nesse caso de um elemento de Spin_{n+1} de um tipo específico, é utilizando o número de ciclos de uma permutação em S_{n+1} .

Antes de entendermos melhor o que queremos dizer, vamos ver alguns conceitos importantes para o resultado.

Temos as seguintes sequências exatas, do capítulo anterior:

$$1 \rightarrow \text{Quat}_{n+1} \hookrightarrow \tilde{B}_{n+1}^+ \xrightarrow{\sigma} S_{n+1} \rightarrow 1;$$

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \hookrightarrow \text{Quat}_{n+1} \xrightarrow{\Pi} \text{Diag}_{n+1}^+ \rightarrow 1,$$

onde $\Pi : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$ e $\phi \circ \Pi(z) = \sigma$, com $\phi : B_{n+1}^+ \rightarrow S_{n+1}$.

Temos que $\Pi^{-1}[\{\sigma\}] = \acute{\sigma} \text{Quat}_{n+1} \subset \tilde{B}_{n+1}^+$, ou seja, $\Pi[\acute{\sigma} \text{Quat}_{n+1}] \subset \Pi[\tilde{B}_{n+1}^+] = B_{n+1}^+$. Da primeira sequência exata acima vemos que, para toda $\sigma \in S_{n+1}$, o conjunto $\acute{\sigma} \text{Quat}_{n+1}$ é uma classe lateral.

Exemplo 5.2.8 *Sejam $A, B \in \Pi[\tilde{B}_4^+] \subset \Pi[\acute{\sigma} \text{Quat}_4]$ matrizes dadas por*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, $\sigma = \phi(A) = \phi(B) = a_1 a_3 a_2$.

Do exemplo 4.6.3, sabemos que para $z = \acute{\sigma} = \acute{a}_1 \acute{a}_3 \acute{a}_2 \in \tilde{B}_4^+$ temos que $\Pi(z) = A$. Para descobrirmos qual elemento $z_1 \in \tilde{B}_4^+$ é tal que $\Pi(z_1) = B$, basta descobrirmos qual é a mudança de sinais necessária. Ou seja, queremos encontrar a matriz $C \in \text{Diag}_4^+$ tal que $AC = B$.

Basta então, observarmos quais linhas mudam de sinal, no nosso caso as colunas 1 e 2. Dessa forma

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que $C = \Pi(\hat{a}_1)$. Por uma conta simples, podemos verificar que $AC = B$. Portanto $z_1 = \sigma \hat{a}_1 \in \sigma \text{Quat}_4$.

Seja uma partição X de $\llbracket n+1 \rrbracket$. Além disso, lembre que definimos $\text{Diag}_{n+1}^+ = \text{Diag}_{n+1} \cap \text{SO}_{n+1}$.

Definição 5.2.4 O subgrupo $H_{\text{Diag},X} \leq \text{Diag}_{n+1}^+$ de índice $2^{|X|-1}$, onde $H_{\text{Diag},X}$ é o conjunto das matrizes $E \in \text{Diag}_{n+1}^+$ tais que, se $A = \{i_1, \dots, i_k\} \in X$, então o produto $E_{i_1 i_1} \dots E_{i_k i_k} = 1$.

Exemplo 5.2.9 Sejam $n = 4$ e $X = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$. Seja a matriz $E \in \text{Diag}_5^+$ dada por

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $E_{2,2}E_{4,4}E_{5,5} = (-1).(-1).1 = 1$ e $E_{1,1}E_{3,3} = 1.1 = 1$ com $A = \{2, 4, 5\}, B = \{1, 3\} \in X$, então $E \in H_{\text{Diag},X}$.

Seja $H_X = \Pi^{-1}[H_{\text{Diag},X}] \leq \text{Quat}_{n+1}$, onde $\Pi : \text{Quat}_{n+1} \rightarrow \text{Diag}_{n+1}^+$ é a restrição de $\Pi : \text{Spin}_{n+1} \rightarrow \text{SO}_{n+1}$.

Para uma permutação $\sigma \in S_{n+1}$, considere a partição X_σ de $\llbracket n+1 \rrbracket$ em ciclos de σ . Seja $H_\sigma = H_{X_\sigma} \leq \text{Quat}_{n+1}$. Temos que $|H_\sigma| = 2^{n+2-c}$, onde c é o número de ciclos de σ .

Exemplo 5.2.10 Seja $\sigma = (15)(234) \in S_5$.

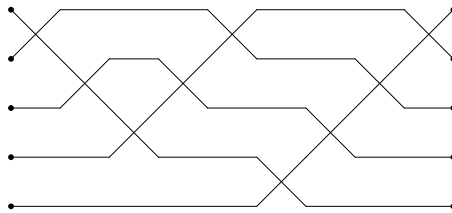


Figura 5.3: Diagrama de $\sigma = a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 a_4 a_3 a_2 a_1 \in S_5$

Assim, $X_\sigma = \{\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}\}$. Além disso, $|H_\sigma| = 2^{4+2-2} = 16$.

Por uma conta simples, podemos ver que o subgrupo $H_{\text{Diag}, X_\sigma}$ é gerado por

$$\text{diag}(-1, 1, 1, 1, -1), \text{diag}(1, -1, -1, 1, 1), \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1) \in \text{Diag}_5^+.$$

Levantando para H_σ , temos os geradores

$$\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4, \hat{a}_2, \hat{a}_3 \in \text{Quat}_5, \text{ daí}$$

$$H_\sigma = \{\pm 1, \pm \hat{a}_2, \pm \hat{a}_3, \pm \hat{a}_2 \hat{a}_3, \pm \hat{a}_1 \hat{a}_4, \pm \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4, \pm \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_4, \pm \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4\}.$$

Note que $|H_\sigma| = 16$, como esperado.

Vamos ver o resultado que associa a parte real ao número de ciclos.

Lema 5.2.2 *Seja $\sigma \in S_{n+1}$, escrita como um produto de ciclos disjuntos, tal que c é o número de ciclos. Escolha $z_0 \in \sigma \text{Quat}_{n+1}$, tal que $\Re(z_0) > 0$. Seja $q \in \text{Quat}_{n+1}$, temos que*

$$|\Re(qz_0)| = |\Re(z_0q)| = \begin{cases} 2^{-\frac{(n+1-c)}{2}}, & q \in H_\sigma, \\ 0, & q \notin H_\sigma. \end{cases}$$

Existem 2^{n+1-c} valores de $q \in \text{Quat}_{n+1}$, tais que $\Re(qz_0) > 0$ (da mesma forma, para $\Re(z_0q)$). Além disso, se podemos expandir na base canônica como $z_0 = \sum_{p \in H\text{Quat}_{n+1}} c_p p$, então $c_p \neq 0$, se e somente se, $p \in H_\sigma$.

Prova.

Seja $\sigma \in S_{n+1}$ escrita como um produto de c ciclos disjuntos. Sejam $z \in \sigma \text{Quat}_{n+1}$ e $Q = \Pi(z) \in \text{SO}_{n+1}$, considere Q_i a submatriz de dimensão k_i associada a c_i , para $i = 1, \dots, c$ onde cada c_i é um ciclo de σ e $k_1 + \dots + k_c = n + 1$.

Se $\det(Q_i) = -1$ para algum i , então o polinômio característico de Q_i é $p_i(\lambda) = (-\lambda)^{k_i} - 1$, daí -1 é um autovalor de Q_i , portanto é também de Q . Pelo lema anterior, se -1 é autovalor de $Q = \Pi(z)$ então $\Re(z) = 0$.

Assim se $\det(Q_i) = -1$ para algum i , então $\Re(z) = 0$.

Se $\det(Q_i) = 1$ para todo i , vamos aplicar os resultados anteriores. Como $z \in \tilde{B}_{n+1}^+$, então para cada ciclo de σ , a matriz Q_i é um ciclo par ou ímpar cuja parte real, como vimos anteriormente, é dada por $\pm 2^{-\frac{k_i+1}{2}}$. Como temos c ciclos disjuntos, então

$$\Re(z) = \pm 2^{-\frac{k_1+1}{2}} \dots 2^{-\frac{k_c+1}{2}} = 2^{-\frac{k_1+\dots+k_c+c}{2}} = \pm 2^{-\frac{(n+1)+c}{2}} = \pm 2^{-\frac{(n+1-c)}{2}} \neq 0.$$

Portanto, como queremos $z_0 \in \acute{o}\text{Quat}_{n+1}$ tal que $\Re(z_0) > 0$, temos que $\Re(z_0) = 2^{\frac{-(n+1-c)}{2}}$ e $\det(Q_i) = 1$ para todo i .

Afirmamos que $\Re(z_0 q) \neq 0$ se, e somente se, $q \in H_\sigma$. De fato, se $q \in H_\sigma$, então os $\det(Q_i)$ ficam inalterados. Reciprocamente se $q \notin H_\sigma$ então algum $\det(Q_i)$ troca de sinal.

Temos então que $\Re(z_0 q) = \pm \Re(z_0) = \pm 2^{\frac{-(n+1-c)}{2}}$. Aplicando o mesmo raciocínio a qz_0 temos $\Re(qz_0) = \pm 2^{\frac{-(n+1-c)}{2}}$, se $q \in H_\sigma$ e $\Re(qz_0) = 0$, se $q \notin H_\sigma$.

Como $z_0 \in \acute{o}\text{Quat}_{n+1} \subset \tilde{B}_{n+1}^+$, podemos escrever

$$z_0 = \sum_{p \in \text{HQuat}_{n+1}} c_p p, \quad \text{onde } c_p \in \mathbb{R}.$$

Seja $X^+ \subset \text{HQuat}_{n+1}$ o conjunto de elementos cujo coeficiente na decomposição de z_0 é não nulo. Seja $X^- \subset \text{HQuat}_{n+1}$ o conjunto das negações de X^+ . Afirmamos que $H_\sigma = X^+ \cup X^-$.

Se $q \in \text{Quat}_{n+1}$, então

$$z_0 q = \sum_{p \in X^+} c_p (pq),$$

portanto, a parte real corresponde a $p = q^{-1}$. Ou seja, $\Re(z_0 q) \neq 0$ se e somente se, $p = q^{-1} \in X^+ \cup X^-$. Entretanto, sabemos que $\Re(z_0 q) \neq 0$ se e somente se, $q \in H_\sigma$. Assim $H_\sigma = X^+ \cup X^-$, como afirmado.

Por fim, vamos ver que existem 2^{n+1-c} valores de $q \in \text{Quat}_{n+1}$, tais que $\Re(qz_0) > 0$ (similarmente para $\Re(z_0 q) > 0$).

Como $\Re(z_0 q) \neq 0$ somente se $q \in H_\sigma$, então temos $|H_\sigma| = 2^{n+2-c}$ possibilidades. Sabemos que se $q \in H_\sigma$ então $-q \in H_\sigma$. Logo se $\Re(z_0 q) > 0$ então $\Re(z_0(-q)) < 0$. Portanto, existem $\frac{2^{n+2-c}}{2} = 2^{n+1-c}$ valores de $q \in \text{Quat}_{n+1}$ tais que $\Re(z_0 q) > 0$.

Pelo mesmo raciocínio, temos o resultado para $\Re(qz_0)$. ■

Exemplo 5.2.11 *Seja a permutação $\sigma = (13)(24) = a_2 a_1 a_3 a_2 \in S_4$.*

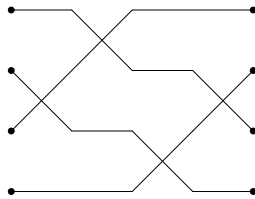


Figura 5.4: Diagrama de $\sigma = a_2 a_1 a_3 a_2 \in S_4$

Então, fazendo uso das relações conhecidas para \hat{a}_i , temos

$$\acute{\sigma} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3}{2}.$$

Além disso, $H_{\text{Diag}, X_\sigma}$ é gerado por

$$\text{diag}(1, -1, 1, -1), \text{diag}(-1, 1, -1, 1) \in \text{Diag}_4^+.$$

Portanto, H_σ é gerado por

$$\hat{a}_1\hat{a}_2, \hat{a}_2\hat{a}_3 \in \text{Quat}_4, \text{ daí}$$

$$H_\sigma = \{\pm 1, \pm \hat{a}_1\hat{a}_2, \pm \hat{a}_1\hat{a}_3, \pm \hat{a}_2\hat{a}_3\}.$$

Agora, vamos escolher $q_0 = -\hat{a}_3 \in \text{Quat}_4$. Temos que,

$$z_0 = -\hat{a}_3\acute{\sigma} = \frac{1 - \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2}{2}.$$

Logo $\Re(z_0) = \frac{1}{2} > 0$.

Podemos ver que os termos de z_0 coincidem com os elementos de H_σ .

Considere $q = \hat{a}_2\hat{a}_3 \in H_\sigma$, então

$$qz_0 = \hat{a}_2\hat{a}_3z_0 = \frac{-1 + \hat{a}_1\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3}{2},$$

$$z_0q = z_0\hat{a}_2\hat{a}_3 = \frac{-1 - \hat{a}_1\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3}{2}.$$

Daí, $|\Re(qz_0)| = |\Re(z_0q)| = \frac{1}{2} = 2^{\frac{-(n+1-c)}{2}}$, como esperávamos.

Por fim, tomemos $q = \hat{a}_1 \notin H_\sigma$, então

$$z_0q = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{2},$$

$$qz_0 = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3 - \hat{a}_2}{2}.$$

Daí, $\Re(z_0q) = \Re(qz_0) = 0$ como previsto, novamente.

Exemplo 5.2.12 Seja $\sigma = (15)(234) = a_1a_2a_3a_2a_1a_4a_3a_2a_1 \in S_5$, como no exemplo 5.2.9. Temos que

$$\acute{\sigma} = \frac{-\hat{a}_1 - \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3 - \hat{a}_4 + \hat{a}_2\hat{a}_4 - \hat{a}_3\hat{a}_4 - \hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_4}{2\sqrt{2}}.$$

Vamos escolher um elemento $q \in \text{Quat}_5$, por exemplo $q = \hat{a}_1$. Dessa

forma,

$$z_0 = \hat{a}_1 \sigma = \frac{1 + \hat{a}_2 - \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_3 - \hat{a}_1 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 - \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_4 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4}{2\sqrt{2}},$$

$$\log \Re(z_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 2^{\frac{-(n+1-c)}{2}}.$$

Note que os coeficientes não nulos de z_0 coincidem com os elementos de H_σ que, como vimos no exemplo anterior, implica no resultado do lema.

6 Sinais

No decorrer do processo de escrita deste trabalho, surgiram questionamentos sobre a disposição dos sinais em $\sigma \in \tilde{B}_{n+1}^+$.

Com os resultados vistos no capítulo anterior, não podemos garantir nada sobre o sinal da parte real. Com isso, surge a questão: Quando é possível obter alguma informação sobre o sinal da parte real? Além disso, podemos observar algo sobre o comportamento dos sinais dos termos de $\sigma \in \tilde{B}_{n+1}^+$?

Neste capítulo, faremos algumas afirmações e observações quanto a distribuição de sinais em $\sigma \in \tilde{B}_{n+1}^+$.

6.1 Parte Real

Sejam $\sigma \in S_{n+1}$ e $\sigma \in \tilde{B}_{n+1}^+$. Nesta seção, vamos observar o comportamento do sinal de $\Re(\sigma)$, em algumas situações específicas.

Do lema 5.2.2, podemos tirar a seguinte conclusão sobre a parte real de permutações com apenas 1 ciclo.

Afirmção 6.1.1 *Seja $\sigma \in S_{n+1}$ tal que, o número de ciclos de σ , $c(\sigma) = 1$. Então $\Re(\sigma) \neq 0$.*

Prova.

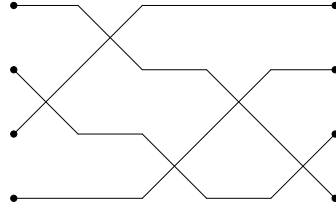
Pelo lema 5.2.2, tomando $z_0 \in \sigma \text{Quat}_{n+1}$ tal que $\Re(z_0) > 0$, temos que $\Re(qz_0) = \pm 2^{-\frac{(n+1-c)}{2}}$ se $q \in H_\sigma$ e $\Re(qz_0) = 0$, caso contrário.

Da seção 5.2, sabemos que $|H_\sigma| = 2^{n+1}$. Além disso, sabemos que a cardinalidade de Quat_{n+1} é também 2^{n+1} . Portanto, se $q \in \text{Quat}_{n+1}$, então $q \in H_\sigma$. Ou seja, para todo $q \in \text{Quat}_{n+1}$, temos $\Re(qz_0) \neq 0$.

Como $\Re(z_0) > 0$, então $\Re(\sigma) \neq 0$. ■

Exemplo 6.1.1 *Seja $\sigma = a_2a_1a_3a_2a_3 = (1423) \in S_4$. Então*

$$\sigma_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3).$$

Figura 6.1: Diagrama de $\sigma = a_2a_1a_3a_2a_3 \in S_4$

Agora, vamos pensar em permutações $\sigma \in S_{n+1}$, tais que a palavra reduzida não possua geradores a_i repetidos.

Afirmção 6.1.2 *Seja $\sigma \in S_{n+1}$, tal que $\sigma = a_{i_1} \dots a_{i_l}$ é uma palavra reduzida, onde, para todo $r, s \in \llbracket l \rrbracket$ temos $a_{i_r} \neq a_{i_s}$. Então, $\Re(\acute{\sigma}) > 0$.*

Prova.

Lembre que $\acute{a}_i = \frac{1+\hat{a}_i}{\sqrt{2}}$.

Dessa forma, temos que $\acute{\sigma} = \acute{a}_{i_1} \dots \acute{a}_{i_l} = \frac{1}{\sqrt{2}^l} (1+\hat{a}_{i_1}) \dots (1+\hat{a}_{i_l})$. Portanto, como todos os \hat{a}_{i_r} com $r \in \llbracket l \rrbracket$ são distintos, então

$$\Re(\acute{\sigma}) = \frac{1}{(\sqrt{2})^l} > 0.$$

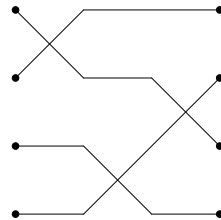
■

Note que a afirmação é válida, independente da ordem dos geradores na palavra reduzida. Vamos ver alguns exemplos:

Exemplo 6.1.2 *Seja $\sigma = a_1a_3a_2 = (1342) \in S_4$, temos*

$$\acute{\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 - \hat{a}_2\hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3).$$

Portanto, $\Re(\acute{\sigma}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} > 0$

Figura 6.2: Diagrama de $\sigma = a_1a_3a_2 \in S_4$

Exemplo 6.1.3 Seja $\sigma = a_1 a_4 a_2 a_5 = (132)(546) \in S_6$, temos

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{4} (1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_5 + \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \\ \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5). \end{aligned}$$

Portanto, $\Re(\sigma) = \frac{1}{4} > 0$.

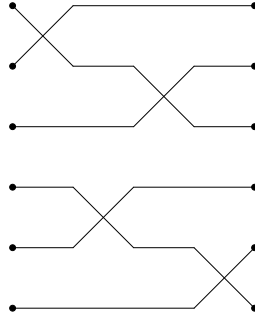


Figura 6.3: Diagrama de $\sigma = a_1 a_4 a_2 a_5 \in S_6$

Exemplo 6.1.4 Seja $\sigma = a_5 a_3 a_4 a_2 a_1 = (123564) \in S_6$, temos

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_5 - \hat{a}_2 \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \\ \hat{a}_3 \hat{a}_4 + \hat{a}_3 \hat{a}_5 - \hat{a}_4 \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \\ \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 - \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_5 - \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5 - \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_5 - \\ \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5). \end{aligned}$$

Portanto, $\Re(\sigma) = \frac{1}{4\sqrt{2}} > 0$.

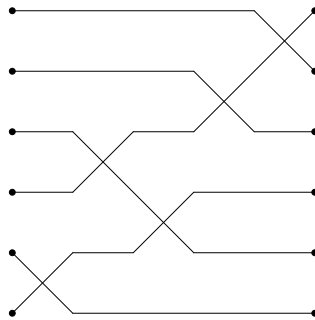


Figura 6.4: Diagrama de $\sigma = a_5 a_3 a_4 a_2 a_1 \in S_6$

6.2

Distribuição de Sinais

Seja $\sigma \in S_{n+1}$. Podemos escrever $\acute{\sigma} \in \tilde{B}_{n+1}^+$ como uma combinação linear de elementos em HQuat_{n+1} , da seguinte forma

$$\acute{\sigma} = \frac{1}{(\sqrt{2})^l} \sum_{p \in \text{HQuat}_{n+1}} c_p p, \quad \text{onde } c_p \in \{-1, 0, 1\}.$$

Nesta seção, vamos observar o comportamento dos sinais de cada parcela deste somatório.

Afirmção 6.2.1 *Seja $\sigma \in S_{n+1}$, tal que $\sigma = a_{i_1} \dots a_{i_l}$ é uma palavra reduzida onde para todo $r \in \llbracket l \rrbracket$, temos $i_r < i_{r+1}$. Então,*

$$\acute{\sigma} = \frac{1}{(\sqrt{2})^l} \sum_{p \in \text{HQuat}_{n+1}} c_p p, \quad \text{onde } c_p \in \{0, 1\}.$$

Prova.

Lembre que $\acute{a}_i = \frac{1+\hat{a}_i}{\sqrt{2}}$.

Dessa forma, temos que $\acute{\sigma} = \acute{a}_{i_1} \dots \acute{a}_{i_l} = \frac{1}{\sqrt{2}^l} (1 + \hat{a}_{i_1}) \dots (1 + \hat{a}_{i_l})$. Observe que como todos os \hat{a}_{i_r} são distintos, não teremos nenhum termo em que apareça algum $\hat{a}_{i_r}^2 = -1$. Além disso, como cada $i_r < i_{r+1}$, ao efetuarmos o produto cada termo será composto de \hat{a}'_{i_r} s, onde os índices estão em ordem crescente, ou seja, não teremos nenhum caso de troca de posições do tipo $\hat{a}_{i+1}\hat{a}_i = -\hat{a}_i\hat{a}_{i+1}$.

Portanto, cada termo do somatório terá coeficiente positivo. Assim,

$$\acute{\sigma} = \frac{1}{(\sqrt{2})^l} \sum_{p \in \text{HQuat}_{n+1}} c_p p, \quad \text{onde } c_p \in \{0, 1\}.$$

■

Exemplo 6.2.1 *Seja $\sigma = a_1 a_2 a_3 = (1432) \in S_4$, temos*

$$\acute{\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3).$$

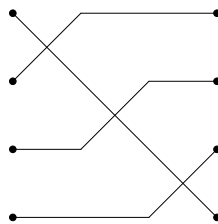


Figura 6.5: Diagrama de $\sigma = a_1 a_2 a_3 \in S_4$

Observe que no exemplo 6.1.2, da seção anterior, a palavra reduzida escolhida foi $\sigma = a_1 a_4 a_2 a_5 \in S_6$. Contudo, sabemos do capítulo 2, que $a_i a_j = a_j a_i$ se $|i - j| \neq 1$, com isso $\sigma = a_1 a_4 a_2 a_5 = a_1 a_2 a_4 a_5$. Assim, a permutação também satisfaz as condições da afirmação 5.2.1. acima.

Exemplo 6.2.2 *Seja $\sigma = a_1 a_4 a_2 a_5 = a_1 a_2 a_4 a_5 = (132)(546) \in S_6$, temos*

$$\begin{aligned} \acute{\sigma} = \frac{1}{4} (1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_5 + \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \\ \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5). \end{aligned}$$

Tendo em vista a observação e o exemplo anteriores, podemos reescrever a afirmação 6.2.1 de forma mais geral como:

Afirmação 6.2.2 *Seja $\sigma \in S_{n+1}$, tal que $\sigma = a_{i_1} \dots a_{i_l}$ é uma palavra reduzida onde valem as seguintes afirmações*

- (i) $i_r < i_{r+1}$, para todo $r \in \llbracket l \rrbracket$;
- (ii) se existe $r \in \llbracket l \rrbracket$ tal que $i_r > i_{r+1}$, então $|i_r - i_{r+1}| \neq 1$.

Então,

$$\acute{\sigma} = \frac{1}{(\sqrt{2})^l} \sum_{p \in \text{HQuat}_{n+1}} c_p p, \quad \text{onde } c_p \in \{0, 1\}.$$

Além disso, podemos também descrever exatamente como são os elementos do somatório.

Sabemos do capítulo 4, que dado $\sigma \in S_{n+1}$ temos que $|H_\sigma| = 2^{n+2-c}$. Portanto, $\acute{\sigma} \in \tilde{B}_{n+1}^+$ descrito como

$$\acute{\sigma} = \frac{1}{(\sqrt{2})^l} \sum_{p \in \text{HQuat}_{n+1}} c_p p, \quad \text{onde } c_p \in \{-1, 0, 1\},$$

possui 2^{n+1-c} parcelas no somatório.

No caso de uma permutação como na afirmação anterior, que não possui repetições de geradores na palavra reduzida, sabemos exatamente quem são as parcelas do somatório. Basta considerarmos todas as possíveis combinações de geradores.

No exemplo 6.2.1 acima, temos a palavra $\sigma = a_1 a_2 a_3 = (1432) \in S_4$, portanto teremos $2^{3+1-1} = 8$ parcelas, sendo elas:

$$\{\pm 1, \pm \hat{a}_1, \pm \hat{a}_2, \pm \hat{a}_3, \pm \hat{a}_1 \hat{a}_2, \pm \hat{a}_1 \hat{a}_3, \pm \hat{a}_2 \hat{a}_3, \pm \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3\}.$$

Contudo, sabemos pela afirmação que todos os sinais nesse caso são positivos, portanto temos

$$\acute{o} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3).$$

Para o caso de uma permutação $\sigma \in S_{n+1}$, tal que a palavra reduzida não tem repetições, entretanto os geradores não estão com os índices ordenados de forma crescente, também é possível descrever a distribuição dos sinais das parcelas do somatório. Basta observarmos os geradores que estão fora de ordem.

Uma permutação $\sigma \in S_{n+1}$, cuja palavra reduzida não possui geradores repetidos nos fornece um conjunto de possíveis combinações de geradores com 2^l elementos, onde l é o comprimento da palavra reduzida.

Além disso, sabemos que $c_p \neq 0$ se, e somente se, $p \in H_\sigma$, portanto se σ não possui geradores repetidos H_σ possui 2^{l+1} elementos, daí $2^{n+1-c} = 2^{l+1}$.

Sejam x_p a sequência de índices de cada $p \in \text{HQuat}_{n+1}$ e y_p a sequência dos índices relativos a p na palavra reduzida.

Exemplo 6.2.3 *Seja $\sigma = a_1a_4a_2a_5 \in S_6$, como no exemplo anterior, então*

$$\acute{o} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4} \sum_{p \in \text{HQuat}_6} c_p p, \quad \text{onde } c_p \in \{0, 1\}.$$

Portanto, os elementos $p \in \text{HQuat}_6$ tais que $c_p \neq 0$ são os elementos de X^+ . Ou seja,

$$p \in \{1, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_4, \hat{a}_5, \hat{a}_1\hat{a}_2, \hat{a}_1\hat{a}_4, \hat{a}_1\hat{a}_5, \hat{a}_2\hat{a}_4, \hat{a}_2\hat{a}_5, \hat{a}_4\hat{a}_5, \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_4, \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_5, \hat{a}_1\hat{a}_4\hat{a}_5, \hat{a}_2\hat{a}_4\hat{a}_5, \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_4\hat{a}_5\} \subset \text{HQuat}_6.$$

Por fim, vamos ver quem são as sequências x_p e y_p dos elementos acima.

Analisaremos os elementos $p_1 = \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_4$ e $p_2 = \hat{a}_2\hat{a}_4\hat{a}_5$, os outros seguem da mesma forma.

As sequências de índices na palavra reduzida são $y_{p_1} = (1, 4, 2)$ e $y_{p_2} = (4, 2, 5)$. Já em HQuat_6 são $x_{p_1} = (1, 2, 4)$ e $x_{p_2} = (2, 4, 5)$.

Note que a distinção das sequências está apenas na posição dos elementos.

Agora que entendemos melhor quem são as sequências x_p e y_p , vamos ver como elas influenciam na disposição dos sinais de $\acute{o} \in \tilde{B}_{n+1}^+$.

Afirmação 6.2.3 *Seja $\sigma \in S_{n+1}$, tal que $\sigma = a_{i_1} \dots a_{i_l}$ é uma palavra reduzida onde para todo $r \neq s \in \llbracket l \rrbracket$, temos $i_r \neq i_s$. Seja $I = \{i_1, \dots, i_l\}$. Temos que*

$\acute{o} \in \tilde{B}_{n+1}^+$ é dado por

$$\acute{o} = \frac{1}{(\sqrt{2})^l} \sum_{p \in \text{HQuat}_{n+1}} c_p p, \quad \text{onde } c_p \in \{-1, 0, 1\}.$$

Portanto, se $p \in H_\sigma$ temos:

- (i) Se $x_p = y_p$, então $c_p = 1$;
- (ii) Se $x_p \neq y_p$, não apresentaremos uma fórmula, mas os exemplos indicam um algoritmo. De fato, manipulando x_p e y_p e levando em conta as propriedades de comutatividade e anticomutatividade dos elementos \hat{a}_i , calculamos o sinal de c_p .

Além disso, sabemos que $c_p = 0$ se e somente se $p \notin H_\sigma$.

Vamos analisar novamente os exemplos 6.1.1 e 6.1.3.

Exemplo 6.2.4 Seja $\sigma = a_1 a_3 a_2 = (1342) \in S_4$. Temos que $\acute{o} \in \tilde{B}_{n+1}^+$ possui $2^3 = 8$ parcelas no somatório.

Como os elementos $1, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ e \hat{a}_3 são claramente positivos, falta analisar os elementos $p_1 = \hat{a}_1 \hat{a}_2, p_2 = \hat{a}_1 \hat{a}_3, p_3 = \hat{a}_2 \hat{a}_3$ e $p_4 = \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3$.

Para p_1 e p_2 temos, $x_{p_1} = y_{p_1}$ e $x_{p_2} = y_{p_2}$, assim $c_{p_1} = c_{p_2} = 1$.

Para p_3 temos $x_p = (2, 3)$ e $y_p = (3, 2)$. Dessa forma, $\hat{a}_3 \hat{a}_2 = -\hat{a}_2 \hat{a}_3$, logo $c_{p_3} = -1$.

Por fim, para p_4 temos $x_{p_4} = (1, 2, 3)$ e $y_{p_4} = (1, 3, 2)$. Dessa forma, $\hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_2 = -\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3$, logo $c_{p_4} = -1$.

Portanto, temos

$$\acute{o} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_3 - \hat{a}_2 \hat{a}_3 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3).$$

Exemplo 6.2.5 Seja $\sigma = a_5 a_3 a_4 a_2 a_1 = (123564) \in S_6$. Temos que $\acute{o} \in \tilde{B}_{n+1}^+$ possui $2^5 = 32$ parcelas no somatório.

Consideremos o elemento $p = \hat{a}_1 \hat{a}_4 \hat{a}_5 \in \text{HQuat}_{n+1}$, então $x_p = (1, 4, 5)$ e $y_p = (5, 4, 1)$. Dessa forma $\hat{a}_5 \hat{a}_4 \hat{a}_1 = \hat{a}_1 \hat{a}_5 \hat{a}_4 = -\hat{a}_1 \hat{a}_4 \hat{a}_5$, portanto $c_p = -1$.

Analisando cada parcela de \acute{o} , temos

$$\begin{aligned} \acute{o} = \frac{1}{4\sqrt{2}} & (1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_5 - \hat{a}_2 \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \\ & \hat{a}_3 \hat{a}_4 + \hat{a}_3 \hat{a}_5 - \hat{a}_4 \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \\ & \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 - \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_5 - \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5 - \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_5 - \\ & \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5). \end{aligned}$$

7

Considerações finais

Como dito na introdução, as células de Bruhat se mostraram uma excelente ferramenta no estudo de curvas localmente convexas.

O grupo Spin_{n+1} , que costuma causar um certo desconforto por conta da sua definição dependente de espaços de recobrimento, se torna mais acessível quando abordado matricialmente. Ao conhecermos seus geradores, conseguimos entender melhor como seus elementos se comportam.

Além disso, considerando sua estratificação de Bruhat, juntamente com o fato de que cada componente conexa de uma célula de Bruhat sem sinal, contém exatamente um elemento $z \in \tilde{B}_{n+1}^+ \subset \text{Spin}_{n+1}$, que agora sabemos escrever como combinação linear de elementos de $\text{Quat}_{n+1} \subset \text{Spin}_{n+1}$, fomos capazes de entender ainda mais o grupo Spin_{n+1} .

Utilizando a ordem de Bruhat, um conceito que não definimos no trabalho, na seção 1.3 enunciamos o teorema 1.3.1 que exhibe um difeomorfismo entre células de Bruhat de elementos comparáveis. Relembre o enunciado.

Teorema 1 *Dadas palavras reduzidas $a_{i_1} \cdots a_{i_k} < a_{i_1} \cdots a_{i_k} a_j$, para duas permutações consecutivas em S_{n+1} e dados sinais $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon \in \{\pm 1\}$, defina*

$$z_1 = (a_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots (a_{i_k})^{\varepsilon_k},$$

$$z_0 = z_1 (a_j)^\varepsilon \in \tilde{B}_{n+1}^+.$$

Dado $q \in \text{Quat}_{n+1}$, o mapa

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Bru}_{qz_1} \times (0, \pi) &\rightarrow \text{Bru}_{qz_0} \\ (z, \theta) &\mapsto z\alpha_j(\varepsilon\theta) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo.

Nas condições do teorema, podemos enunciar dois corolários.

Corolário 1 *Com $z_1 = (a_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots (a_{i_k})^{\varepsilon_k}$, $z_0 = z_1 (a_j)^\varepsilon \in \tilde{B}_{n+1}^+$ e $q \in \text{Quat}_{n+1}$, temos a inclusão $\overline{\text{Bru}_{qz_1}} \subset \overline{\text{Bru}_{qz_0}}$.*

Corolário 2 Dado $q \in \text{Quat}_{n+1}$, uma palavra reduzida $a_{i_1} \dots a_{i_k} \in S_{n+1}$ e sinais $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \in \{\pm 1\}$, o mapa

$$\begin{aligned} \Phi : (0, \pi)^k &\rightarrow \text{Bru}_{q(\dot{a})_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots (\dot{a})_{i_k}^{\varepsilon_k}} \\ (\theta_1, \dots, \theta_k) &\mapsto q\alpha_{i_1}(\varepsilon_{i_1}\theta_{i_1}) \dots \alpha_{i_k}(\varepsilon_{i_k}\theta_{i_k}) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo.

O corolário 2, nos diz que a célula de Bruhat de um elemento do tipo $q(\dot{a})_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots (\dot{a})_{i_k}^{\varepsilon_k}$, é difeomorfa a \mathbb{R}^k . Assim, temos parametrizações para as células de Bruhat com sinal do grupo Spin_{n+1} .

Tal parametrização, torna possível a melhor compreensão das células que compõe a decomposição de Bruhat do grupo Spin_{n+1} , além de ser muito útil na demonstração de teoremas que interligam células de Bruhat e curvas localmente convexas.

Em [5], outros resultados como o teorema 1.3.2 da seção 1.3, foram demonstrados utilizando as parametrizações geradas pelos resultados anteriores, juntamente com conceitos que não abordamos neste trabalho.

Com a ajuda da álgebra, que está a nosso favor por conta da estratificação de Bruhat, fomos capazes de extrair mais informações sobre os elementos de Spin_{n+1} . Nos últimos capítulos tiramos algumas conclusões sobre a parte real de alguns elementos específicos, entretanto acreditamos ser possível entender ainda mais, o que influencia o comportamento de um elemento.

Algumas questões ainda em aberto, que podem ser temas de trabalhos futuros, são por exemplo:

1. Quando a parte real de um elemento $z \in \tilde{B}_{n+1}^+$ é diferente de zero?
2. Como é a distribuição dos sinais dos elementos $z \in \tilde{B}_{n+1}^+$, quando escritos como combinação linear de elementos em Quat_{n+1} ?
3. Quais condições algébricas influenciam na forma como os elementos de \tilde{B}_{n+1}^+ se apresentam?

Referências bibliográficas

- [1] ALVES, E.; SALDANHA, N. C.. **On the homotopy type of intersections of two real bruhat cells.** arXiv preprint arXiv:2012.11651, 2020.
- [2] ATIYAH, M. F.; BOTT, R. ; SHAPIRO, A.. **Clifford modules.** Topology, 3:3–38, 1964.
- [3] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y.. **Elementos de álgebra.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.
- [4] GORODSKI, C.. **Notes on smooth manifolds.** Technical report, 2013.
- [5] GOULART, V.; SALDANHA, N. C.. **Locally convex curves and the bruhat stratification of the spin group.** Israel Journal of Mathematics, 2021 (to appear). Available at arXiv:1904.04799, 2019.
- [6] HUMPHREYS, J. E.. **Reflection groups and Coxeter groups,** volumen 29. Cambridge university press, 1990.
- [7] LEE, J. M.. **Smooth manifolds.** In: INTRODUCTION TO SMOOTH MANIFOLDS, p. 1–31. Springer, 2013.
- [8] LIMA, E. L.. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CN Pq., 1977.
- [9] MASON, J. C.; HANDSCOMB, D. C.. **Chebyshev polynomials.** CRC press, 2002.
- [10] SERRE, J.-P.. **Lie algebras and Lie groups: 1964 lectures given at Harvard University.** Springer, 2009.
- [11] STILLWELL, J.. **Naive lie theory.** Springer Science & Business Media, 2008.
- [12] VAZ JR, J.; DA ROCHA JR, R.. **An introduction to Clifford algebras and spinors.** Oxford University Press, 2016.

A

Apêndice: Exemplos

Aqui apresentamos uma lista de exemplos de $\sigma \in \tilde{B}_{n+1}^+$, onde $\sigma \in S_{n+1}$.

A.1

Permutações Com 1 Ciclo

1. $\sigma_1 = a_2 a_1 a_3 a_2 a_3 = a_2 a_1 a_2 a_3 a_2 = (1423) \in S_4$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3)$$

2. $\sigma_2 = a_1 a_3 a_2 = (1342) \in S_4$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 - \hat{a}_2\hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3)$$

3. $\sigma_3 = a_1 a_2 a_3 = (1432) \in S_4$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3)$$

4. $\sigma_4 = a_5 a_3 a_4 a_2 a_1 = (123564) \in S_6$

$$\begin{aligned} \sigma_4 = \frac{1}{4\sqrt{2}} = & (1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5 - \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_4 + \hat{a}_1\hat{a}_5 - \\ & \hat{a}_2\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_4 + \hat{a}_2\hat{a}_5 + \hat{a}_3\hat{a}_4 + \hat{a}_3\hat{a}_5 - \hat{a}_4\hat{a}_5 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_4 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_5 + \\ & \hat{a}_1\hat{a}_3\hat{a}_4 + \hat{a}_1\hat{a}_3\hat{a}_5 - \hat{a}_1\hat{a}_4\hat{a}_5 + \hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_4 - \hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_5 - \hat{a}_2\hat{a}_4\hat{a}_5 + \hat{a}_3\hat{a}_4\hat{a}_5 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_4 + \\ & \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_4\hat{a}_5 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_5 - \hat{a}_1\hat{a}_3\hat{a}_4\hat{a}_5 + \hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_4\hat{a}_5 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_4\hat{a}_5) \end{aligned}$$

5. $\sigma_5 = a_2 a_3 a_2 a_1 a_2 = (3241) \in S_4$

$$\sigma_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2 - \hat{a}_2\hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_3 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_2)$$

A.2

Permutações Com 2 Ciclos

1. $\sigma_6 = a_1 a_3 a_2 a_3 a_4 a_5 = (16542)(3) \in S_6$

$$\begin{aligned} \sigma_6 = \frac{1}{4}(\hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_4 + \hat{a}_2\hat{a}_5 + \hat{a}_3\hat{a}_4 + \hat{a}_3\hat{a}_5 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_4 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_5 + \\ \hat{a}_1\hat{a}_3\hat{a}_4 + \hat{a}_1\hat{a}_3\hat{a}_5 + \hat{a}_2\hat{a}_4\hat{a}_5 + \hat{a}_3\hat{a}_4\hat{a}_5 + \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_4\hat{a}_5 + \hat{a}_1\hat{a}_3\hat{a}_4\hat{a}_5) \end{aligned}$$

2. $\sigma_7 = a_1 a_2 a_3 a_2 = (142)(3) \in S_4$

$$\sigma_7 = \frac{1}{2}(\hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3)$$

3. $\sigma_8 = a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 a_4 a_3 a_2 a_1 = (15)(234) \in S_5$

$$\sigma_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\hat{a}_2 - \hat{a}_4 - \hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_4 - \hat{a}_2\hat{a}_4 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3 - \hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_4)$$

$$4. \sigma_9 = a_2 a_1 a_3 a_2 = (13)(24) \in S_4$$

$$\sigma_9 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3)$$

$$5. \sigma_{10} = a_1 a_3 a_2 a_4 a_3 = (142)(35) \in S_5$$

$$\sigma_{10} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 - \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4)$$

$$6. \sigma_{11} = a_2 a_1 a_3 a_2 a_4 a_3 a_4 = (153)(24) \in S_5$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1 + \hat{a}_1 \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 + \hat{a}_2 \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_3 \hat{a}_4 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4)$$

$$7. \sigma_{12} = a_2 a_1 a_3 a_2 a_4 = (13)(254) \in S_5$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 + \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_3 \hat{a}_4 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4)$$

$$8. \sigma_{13} = a_1 a_4 a_2 a_5 = (132)(546) \in S_6$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{4}(1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_5 + \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5)$$

A.3

Permutações Com 3 Ciclos

$$1. \sigma_{14} = a_1 a_2 a_3 a_4 a_3 a_1 = (153)(2)(4) \in S_5$$

$$\sigma_{14} = \frac{1}{2}(\hat{a}_1 \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_4 + \hat{a}_2 \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_4)$$

$$2. \sigma_{15} = a_2 a_1 a_3 a_2 a_5 = (13)(24)(56) \in S_6$$

$$\sigma_{15} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_5 + \hat{a}_2 \hat{a}_5 + \hat{a}_3 \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4)$$

$$3. \sigma_{16} = a_1 a_2 a_1 a_5 = (13)(45)(2) \in S_5$$

$$\sigma_{16} = \frac{1}{2}(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_5 + \hat{a}_2 \hat{a}_5)$$

$$4. \sigma_{17} = a_1 a_2 a_1 a_3 a_2 a_1 a_4 a_3 a_2 a_1 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 = (16)(25)(34) \in S_6$$

$$\sigma_{17} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \hat{a}_3 - \hat{a}_2 \hat{a}_4 - \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 - \hat{a}_1 \hat{a}_5 - \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_4 \hat{a}_5 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5)$$

A.4

Permutações Com 4 Ciclos

$$1. \sigma_{18} = a_1 a_2 a_1 a_5 a_4 a_5 = (13)(2)(46)(5) \in S_6$$

$$\sigma_{18} = \frac{1}{2}(a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_2 a_4 + a_2 a_5)$$

$$2. \sigma_{19} = a_1 a_2 a_4 a_3 a_4 a_2 a_1 = (15)(2)(3)(4) \in S_5$$

$$\sigma_{19} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_2 \hat{a}_4 + \hat{a}_1 \hat{a}_3)$$