



**Franco La Salvia**

**SIMULAÇÕES NÃO LINEARES DE FLUIDOS  
MAGNETOREOLÓGICOS CONFINADOS SUBMETIDOS A  
CAMPOS MAGNÉTICOS RADIAIS**

**Projeto de Graduação**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia  
Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Rafael M. Oliveira

Rio de Janeiro  
Junho de 2021

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, Rafael Menezes, por ter aceitado me orientar e me apresentar este tema. Sua paciência e dedicação durante este ano difícil de pandemia foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Agradeço também aos meus pais Jorge e Andréa que me deram o suporte necessário emocionalmente e financeiramente em todos os momentos. Me proveram a oportunidade de desenvolver todo o meu potencial e superar os desafios encontrados durante o percurso. Não posso deixar de mencionar meus irmãos Bettinna e Stefano que foram peças chaves para meu desenvolvimento pessoal durante todo o período acadêmico.

Agradeço a minha namorada, Esther, por toda a confiança, me motivar a buscar sempre os melhores resultados e manter o foco sempre nas necessidades principais.

Agradeço a Dirce que me apoia desde que nasci, me ensinando sempre como ser uma pessoa melhor e cuidando de mim como uma mãe.

Também devo agradecer aos meus amigos Rafael, Rodrigo, Breno, Caio, Lorenzo, Rafael D'agosto, Bernardo Madeira e Igor por todas as conversas no dia a dia, sempre me fazendo rir e tornando os momentos mais leves. Espero que esse intercâmbio de conhecimento e laço de amizade se mantenham por muito tempo.

Para finalizar, agradeço a todos que impactaram positivamente direta ou indiretamente na minha vida durante todo este processo, incluindo todos os professores, coordenadores, seguranças, faxineiros e ascensoristas da universidade.

## **RESUMO**

### **SIMULAÇÕES NÃO LINEARES DE FLUIDOS MAGNETOREOLÓGICOS CONFINADOS SUBMETIDOS A CAMPOS MAGNÉTICOS RADIAIS**

Neste documento, nós estudamos o comportamento de um fluido magnetoreológico confinado em uma célula de Hele-Shaw submetido a um campo magnético radial. Os padrões de interface crescem devido a ação do campo magnético externo, e as tensões interfacial e de limite de escoamento atenuam este crescimento. Os padrões de interface são ainda ponderados por efeitos viscosos. Os estudos visaram a compreender influência dos fatores estabilizantes: tensão limite de escoamento na ausência de campo magnético e da tensão limite de escoamento na presença de campo magnético. Foram abordados os conceitos matemáticos básicos necessários para a obtenção dos padrões de interface formados entre o fluido magnetoreológico e o fluido externo, além da taxa de crescimento linear em função do número azimutal da perturbação através do qual foi possível validar a implementação numérica. Realizando simulações computacionais não lineares através do software MATLAB, foi compreendido como esses fatores estabilizantes influenciam no comportamento do sistema e como suas influências variam de acordo com as condições iniciais. Além disso, ao contrário do que indica a teoria linear, as simulações mostraram uma diferença no comportamento resultante entre as constantes estudadas.

#### **Palavras-chave**

Fluido magnetoreológico; ferrofluido; simulações não lineares; célula de Hele-Shaw.

## **ABSTRACT**

### **NONLINEAR SIMULATIONS OF CONFINED MAGNETORHEOLOGICAL FLUIDS SUBMITTED TO RADIAL MAGNETIC FIELDS**

In this document, we study the behavior of a magnetorheological fluid confined in a Hele-Shaw cell subjected to a radial magnetic field. The interface patterns grow due to the action of the external magnetic field, and the interfacial and yield stress tensions attenuate this growth. Interface patterns are further weighted by viscous effects. The studies aimed to understand the influence of stabilizing factors: yield stress in the absence of a magnetic field and yield stress in the presence of a magnetic field. The basic mathematical concepts necessary to obtain the interface patterns formed between the magnetorheological fluid and the external fluid were approached, in addition to the linear growth rate as a function of the azimuthal number of the disturbance through which it was possible to validate the numerical implementation. Performing non-linear computational simulations through MATLAB software, it was understood how these stabilizing factors influence the behavior of the system and how their influences vary according to the initial conditions. Furthermore, contrary to what the linear theory indicates, the simulations showed a difference in the resulting behavior between the constants studied.

#### **Keywords**

Magnetorheological fluid; ferrofluid; nonlinear simulations; Hele-Shaw cell.

## Sumário

1	Introdução .....	9
2	Revisão bibliográfica .....	11
3	Metodologia .....	16
3.1	Influência dos campos magnéticos nos fluidos magnéticos.....	16
3.2	Simulações .....	19
3.2.1	Equação de evolução da interface .....	19
3.2.2	Influência das condições iniciais .....	21
3.2.3	Simulações não lineares .....	22
4	Resultados .....	24
5	Conclusão .....	33
6	Referências Bibliográficas.....	34

## Lista de Figuras

Figura 1 - Esquema de organização dos elementos estudados [1].....	9
Figura 2 – Ferrofluido criado no Glenn Research Center [7]......	11
Figura 3 – Padrão de instabilidade em um ferrofluido conhecido como instabilidade de Rosensweig [10]......	12
Figura 4 – Fluido magnetoreológico aplicado em um amortecedor [11]...	12
Figura 5 - Ferrari F12 Berlinetta que utiliza suspensões MagneRide [14]. .....	13
Figura 6 - Escoamento em uma célula de Hele-Shaw [9] .....	14
Figura 7 - Ilustração de um campo magnético perpendicular gerado com bobinas de Helmholtz.....	15
Figura 8 - Ilustração de um campo magnético radial gerado com bobinas de Helmholtz .....	15
Figura 9 – Simulação para interface de ferrofluido confinado sob influência de campo magnético radial .....	16
Figura 10 – Curvas teóricas da taxa de crescimento linear $\lambda$ em função do modo azimutal $n$ , plotados para $A = 0$ , $B = 5 \times 10^{-4}$ e distintos valores de $C$ e $D$ . .....	21
Figura 11 - Validação da implementação numérica comparando com as curvas teóricas .....	24
Figura 12 - Simulação de interface com perturbações não aleatórias e tempos distintos. ....	25
Figura 13 - Padrão de interface para $C=0$ , $D=0,5$ , e $t=28$ sob perturbação não aleatória em estado estacionário.....	26
Figura 14 – Padrões de interface para fluido magnetoreológico confinado submetido à um campo magnético radial para uma mesma perturbação aleatória, $C = 0$ e $D = 0,5$ .....	28
Figura 15 - Comparação da interface para três diferentes perturbações aleatórias para o caso 1 .....	28
Figura 16 – Gráfico do tempo, $t_{max}$ , para exceder o limite da área máxima aceitável para $dt = 2 \times 10^{-5}$ , $3 \times 10^{-5}$ e $8 \times 10^{-5}$ .....	29
Figura 17 – Formas de interface para o segundo caso simulado com perturbações aleatórias.....	30

Figura 18 – A figura representa as formas de interface com passo de tempo  $dt = 8 * 10^{(-5)}$ , perturbação 1 [(a), (d)], perturbação 2 [(b), (e)] e perturbação 3 [(c), (f)] para os tempos  $t = 15$  [(a), (b), (c)],  $t = 27,7$  [(d), (e), (f)]. ..... 30

Figura 19 - Evolução da interface para  $dt = 2 \times 10 - 5$  nos tempos  $t=15$ ,  $t=34$  e  $t=40$  representados nos itens (a), (b) e (c) respectivamente.. 31

## Lista de Símbolos

MRF	Fluido magnetoreológico
$A$	Contraste viscoso
$B$	Tensão interfacial efetiva
$C$	Tensão limite de escoamento na ausência de campo magnético
$D$	Tensão limite de escoamento na presença de campo magnético
$\chi$	Susceptibilidade magnética
$\mu_1$	Viscosidade do fluido externo
$\mu_2$	Viscosidade do fluido magnetoreológico
$\gamma$	Tensão superficial entre os fluidos
$\sigma$	Tensão superficial da interface
$\mu_0$	Permeabilidade do espaço livre
$R$	Raio da interface
$H_0$	Intensidade do campo magnético
$r$	Distancia da origem até a fronteira dos fluidos
$L$	Comprimento característico
$\hat{r}$	Vetor unitário na direção radial
$\hat{s}$	Vetor unitário na direção tangencial
$\theta$	Ângulo tangente ao plano
$\varphi$	Ângulo polar
$\eta$	Viscosidade do fluido magnetoreológico quando não perturbado
$v$	Velocidade média da fronteira
$\sigma_y$	Tensão superficial entre os fluidos na presença de campo magnético
$\tilde{\gamma}$	Vortex-sheet dimensionalizada
$\gamma$	Vortex-sheet adimensionalizada
$S$	Comprimento de arco
$\vec{W}$	Vetor velocidade média entre os fluidos avaliado na interface

$U_{\hat{n}}$	Componente velocidade da fronteira entre os fluidos na direção normal
$T_{\hat{s}}$	Componente velocidade da fronteira entre os fluidos na direção tangencial
$\lambda$	Taxa de crescimento linear
$a$	Amplitude de perturbação
$n$	Número de modo azimutal
$t$	Tempo

## 1 Introdução

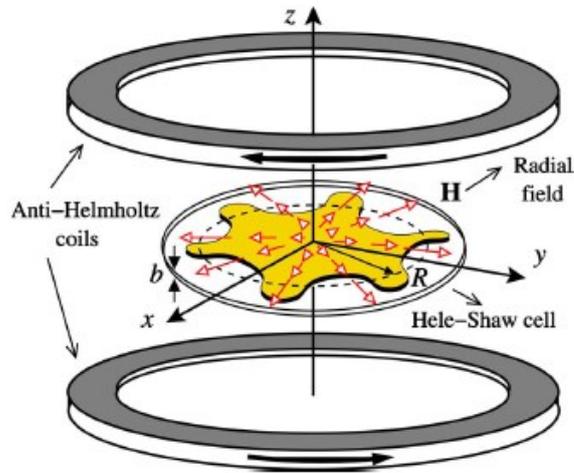


Figura 1 - Esquema de organização dos elementos estudados [1]

Este projeto tem como objetivo estudar a formação de padrões de interface em ferrohodinâmica. Consideraremos uma gota de um fluido magnetorreológico (MRF) confinada em uma célula de Hele-Shaw submetida a um campo magnético radial. O campo magnético tende a espalhar a gota, enquanto a tensão superficial entre o MRF e o fluido externo e a tensão limite de escoamento tendem a estabilizá-la. Realizaremos simulações numéricas não-lineares de forma a determinar a influência desses efeitos e determinar padrões de interface.

Para analisar esses distintos padrões aplicaremos um método de integral de contorno com precisão espectral. Nesse cenário, examinaremos os efeitos do contraste viscoso  $A$ , da tensão interfacial efetiva  $B$ , da tensão limite de escoamento na ausência de campo magnético  $C$ , da tensão limite de escoamento na presença de campo magnético  $D$  e da susceptibilidade magnética  $\chi$  nos padrões de interface tal que:

$A = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$  onde  $\mu_2$  é a viscosidade do MRF e  $\mu_1$  do fluido externo.  $B = \frac{\sigma}{\mu_0 R H_0^2}$  onde  $\sigma$  é a tensão superficial da interface,  $\mu_0$  expressa a permeabilidade do espaço livre,  $R$  é o raio inicial da interface e  $H_0$  é a intensidade do

campo magnético radial na posição  $R$ . Já os parâmetros  $C$  e  $D$  são parâmetros adimensionais que descrevem a tensão limite de escoamento, dada por  $\sigma_y = \sigma_{y0} + \alpha H^2$ . Assim, o termo  $\sigma_{y0}$  representa a tensão limite na ausência de campo magnético externo e dá origem a  $C$ , enquanto  $\alpha H^2$  representa a influência do campo na tensão limite e dá origem a  $D$ .

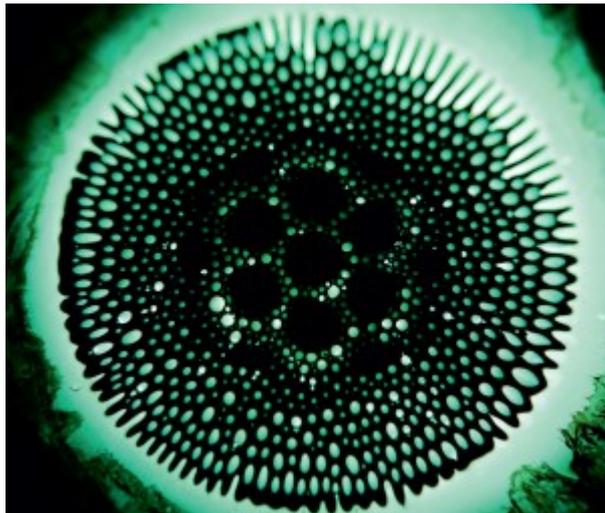
## 2 Revisão bibliográfica

Ferrofluidos são suspensões coloidais de partículas magnéticas nanométricas suspensas em um fluido newtoniano transportador não magnético. Esse material possui propriedades magnéticas como os sólidos e, ao mesmo tempo, a capacidade de escoar como qualquer outro fluido newtoniano, Figura 2. Desde seu desenvolvimento, na década de 1960 [2] o ferrofluido tem sido estudado em diversas pesquisas científicas nas mais diversas áreas como suspensões veiculares, aplicações químicas, medicinais e artes [2][5].



*Figura 2 – Ferrofluido criado no Glenn Research Center [7].*

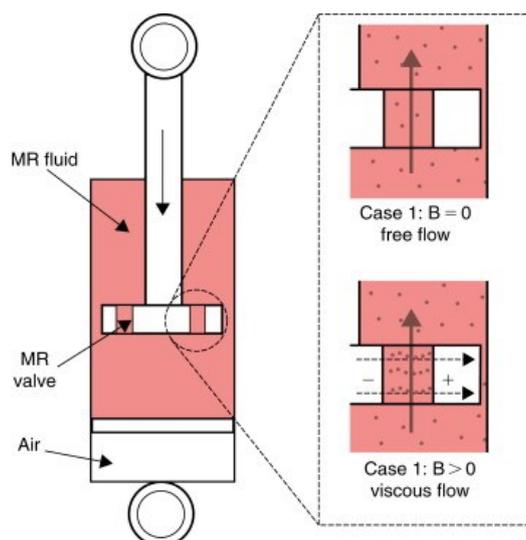
Um exemplo conhecido de padrões formados em ferrofluidos é relacionado com a instabilidade de Rosensweig [6] em que uma superfície plana se desenvolve em um arranjo hexagonal de picos.



*Figura 3 – Padrão de instabilidade em um ferrofluido conhecido como instabilidade de Rosensweig [10].*

Já os fluidos magnetoreológicos (MRF) são formados por partículas micrométricas suspensas em um fluido não newtoniano. Diferentemente dos ferrofluidos, esses fluidos possuem uma tensão limite de escoamento que depende da intensidade do campo magnético aplicado. Este será o fluido utilizado nesta pesquisa.

Os MRF são utilizados em diversas áreas da engenharia mecânica e engenharia civil [12]. Algumas de suas aplicações são em amortecedores [11], freios, embreagens, válvulas, dentre outras [8].



*Figura 4 – Fluido magnetoreológico aplicado em um amortecedor [11]*

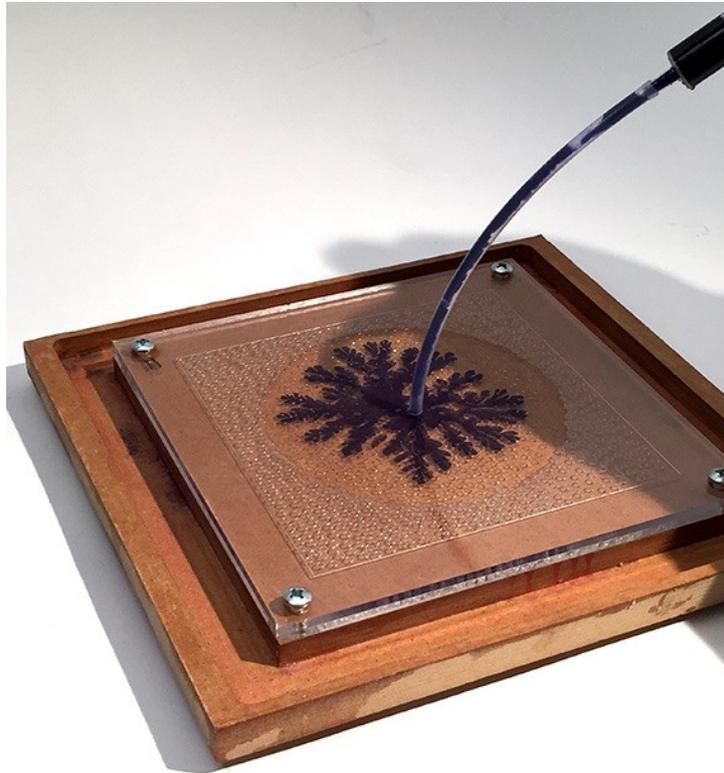
Um modelo de suspensões automotivas, chamado MagneRide, utilizando fluidos magnetoreológicos foi desenvolvido pela empresa Delphi Corporation e lançado em 2002, aplicado no modelo Cadillac STS Seville, quando era subsidiada pelo grupo General Motors (GM) [13]. Atualmente, esse tipo de suspensão é amplamente utilizada em uma grande variedade de modelos de automóveis como Ford Mustang, Audi R8 [15], Vauxhall VXR8, Ferrari F12, Lamborghini Huracán [16], dentre outros.



*Figura 5 - Ferrari F12 Berlinetta que utiliza suspensões MagneRide [14].*

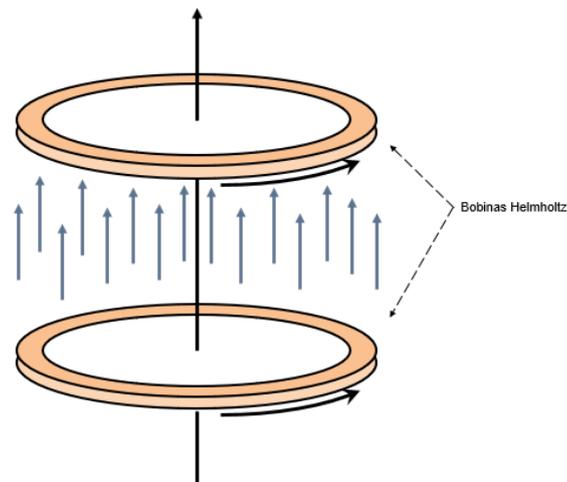
Como esses fluidos magnéticos podem ser controlados pela aplicação de um campo magnético externo, estudar a dinâmica desses sistemas quando submetidos à diferentes configurações de campos magnético é extremamente valioso. Uma vez que existem diversas formas de interação e forças de corpo que podem atuar nesse sistema, os estudos de formações de padrões em uma gota de um fluido magnético confinado entre placas de uma célula de Hele-Shaw se apresentam como uma forma simples de investigar os diversos efeitos físicos que competem entre si para determinar os padrões de interface.

A célula de Hele-Shaw é um dispositivo formado por duas placas planas paralelas com um distanciamento pequeno entre elas. Esse dispositivo é amplamente utilizado em estudos de escoamento de fluidos.



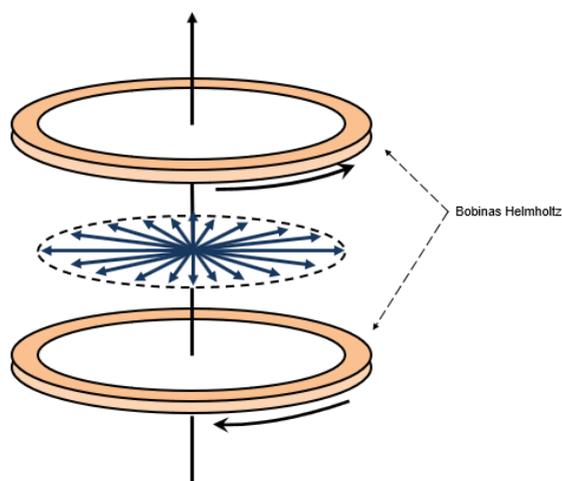
*Figura 6 - Escoamento em uma célula de Hele-Shaw [9]*

Os campos magnéticos perpendiculares são mais utilizados nesses estudos, são os campos magnéticos perpendiculares, que podem ser gerados utilizando duas bobinas de Helmholtz cujos fluxos de correntes giram no mesmo sentido. A direção do fluxo desses campos magnéticos é paralela ao eixo de simetria das bobinas de Helmholtz.



*Figura 7 - Ilustração de um campo magnético perpendicular gerado com bobinas de Helmholtz*

Os campos magnéticos perpendiculares, que são amplamente utilizados em pesquisas, motivam os estudos com os campos magnéticos radiais, que são uma pequena variação dos campos perpendiculares. Os campos magnéticos radiais podem ser gerados de forma parecida utilizando duas bobinas de Helmholtz, no entanto, os fluxos de correntes devem girar em sentidos opostos nas bobinas. A direção do fluxo do campo magnético resultante, no plano da célula de Hele-Shaw situada a meia distância entre as bobinas, é perpendicular ao eixo de simetria das bobinas de Helmholtz.

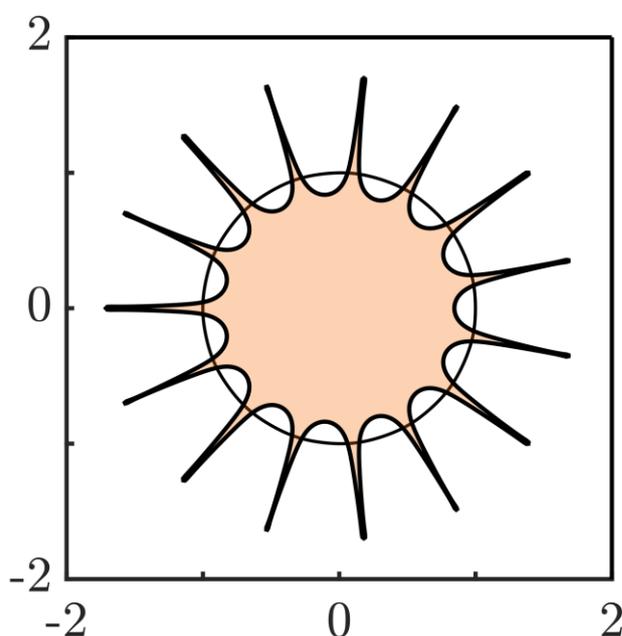


*Figura 8 - Ilustração de um campo magnético radial gerado com bobinas de Helmholtz*

### 3 Metodologia

#### 3.1 Influência dos campos magnéticos nos fluidos magnéticos

Nossa investigação com fluidos magnetoreológicos expandem uma análise prévia feita com ferrofluidos [2][4]. Esses, quando submetidos à campos magnéticos radiais, tendem a se espalhar tomando formas de estrelas pontiagudas, dependendo das propriedades do fluido e das configurações do sistema (bobinas, ferrofluido e célula de Hele-Shaw). O comportamento do ferrofluido é diretamente dependente da intensidade desse campo magnético.



*Figura 9 – Simulação para interface de ferrofluido confinado sob influência de campo magnético radial*

Outro aspecto relevante dos ferrofluidos sob presença de campos magnéticos é que as propriedades intrínsecas do fluido permanecem constantes, dessa forma, a viscosidade do fluido permanece constante.

Já os fluidos magnetoreológicos apresentam um drástico aumento nas suas propriedades, surge um fator estabilizante que faz com que os padrões formados sejam distintos dos ferrofluidos. Assim, intensidades muito elevadas no campo magnético externo, podem fazer com que o fluido não escoe e se comporte de forma parecida à um sólido.

No problema físico, os fluidos, fluido magnetoreológico e fluido não magnético externo, estão localizados no pequeno espaço entre as placas da célula de Hele-Shaw, de espessura  $b$ . A tensão superficial entre os fluidos é indicada por  $\gamma$ . O MRF é submetido à um campo magnético radial  $H$  (Eq. 1), tal que,

$$H = \frac{H_0}{L} r \hat{r}$$

Eq. 1

onde,  $L$  é o comprimento característico,  $r$  é a distância entre a origem até a fronteira dos fluidos e  $\hat{r}$  é o vetor unitário na direção radial.

A fim de obter uma equação que modela a interface do fluido de viscosidade  $\eta$ , é necessário partir da lei de Darcy modificada (Eq. 2) para incluir termos magnéticos para fluidos magnetoreológicos confinados com velocidade média  $v$ .

$$v = -\frac{b^2}{12\eta} \left[ \nabla \Pi + \frac{3\sigma_y(H)}{b} \hat{r} \right],$$

Eq. 2

onde  $\sigma_y(H)$  é a tensão superficial entre os fluidos na presença de campo magnético. Após isso, aplica-se um método de integral de contorno de precisão espectral para encontrar uma equação para vortex-sheet  $\tilde{\gamma}$ , definida como

$$\tilde{\gamma} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \hat{s}$$

Eq. 3

Usando a lei de Darcy da Eq. 2, encontra-se uma equação para o vortex-sheet dimensional:

$$\tilde{\gamma} = 2A_\mu \vec{W} \cdot \hat{s} + \frac{b^2}{6(\eta_1 + \eta_2)} \nabla \left\{ \sigma \kappa - \frac{1}{2} \frac{\mu_0 H_0^2}{R^2} \chi r^2 [1 + \chi (\hat{n} \cdot \hat{r})^2] + \frac{3\sigma_{y_0}}{b} + \frac{\alpha H_0^2}{R^2 b} r^3 \right\} \cdot \hat{s}$$

Eq. 4

Reescreveremos esta equação em termos de um parâmetro qualquer  $\alpha$ , através das substituições a seguir:

$$\vec{\nabla}(\sigma \kappa) \cdot \hat{s} = \sigma \kappa_s = \sigma \frac{\kappa_\alpha}{s_\alpha}$$

Eq. 5

$$\kappa = \theta_s = \theta_\alpha / s_\alpha$$

Eq. 6

$$\kappa_s = \frac{\theta_{\alpha\alpha}}{s_\alpha^2}$$

Eq. 7

$$\vec{\nabla}(r^2 (\hat{n} \cdot \hat{r})^2) \cdot \hat{s} = 2r^3 r_\alpha \varphi_\alpha \frac{\kappa}{s_\alpha^2}$$

Eq. 8

$$\vec{\nabla}(r^2) \cdot \hat{s} = 2 \frac{r r_\alpha}{s_\alpha}$$

Eq. 9

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(r) \cdot \hat{s} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} r \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} r \hat{\varphi} \right) \cdot \left( \frac{r_\alpha}{s_\alpha} \hat{r} + \frac{r \varphi_\alpha}{s_\alpha} \hat{\varphi} \right) \\ &= \left( \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{r_\alpha}{\varphi_\alpha} \hat{\varphi} \right) \cdot \left( \frac{r_\alpha}{s_\alpha} \hat{r} + \frac{r \varphi_\alpha}{s_\alpha} \hat{\varphi} \right) = \frac{r_\alpha}{s_\alpha} \end{aligned}$$

Eq. 10

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(r^3) \cdot \hat{s} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} r^3 \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} r^3 \hat{\varphi} \right) \cdot \left( \frac{r_\alpha}{s_\alpha} \hat{r} + \frac{r \varphi_\alpha}{s_\alpha} \hat{\varphi} \right) \\ &= \left( 3r^2 \hat{r} + \frac{1}{r} 3r^2 \frac{r_\alpha}{\varphi_\alpha} \hat{\varphi} \right) \cdot \left( \frac{r_\alpha}{s_\alpha} \hat{r} + \frac{r \varphi_\alpha}{s_\alpha} \hat{\varphi} \right) = 3r^2 \frac{r_\alpha}{s_\alpha} \end{aligned}$$

Utilizamos as equações em função do ângulo tangente  $\theta$  como variável pois simplificamos a definição de curvatura.

Após as substituições na Eq. 4, aplica-se uma nova adimensionalização a fim de obter uma nova equação para vortex-sheet  $\gamma$  adimensional com os parâmetros que desejamos estudar.

$$\gamma = 2AS_\alpha \vec{W} \cdot \hat{s} + 2B \frac{\theta_{\alpha\alpha}}{S_\alpha} - 2\chi \left( rr_\alpha + \chi r^3 r_\alpha \varphi_\alpha \frac{\theta_\alpha}{S_\alpha^2} \right) + Cr_\alpha + Dr^2 r_\alpha$$

Eq. 11

tal que  $S$  representa o comprimento de arco,  $\vec{W}$  é a média entre as velocidades dos fluidos interno e externo avaliada na interface,  $\hat{s}$  é o vetor unitário na direção tangencial,  $\theta$  é o ângulo tangente ao plano,  $\varphi$  indica o ângulo polar. E os subscritos  $\alpha$  representam as derivadas parciais em relação ao mesmo.

## 3.2 Simulações

### 3.2.1 Equação de evolução da interface

A forma da interface do fluido é descrita através de uma curva no plano em forma paramétrica do tipo:

$$X(\alpha, t) = (x(\alpha, t), y(\alpha, t)) = r(\alpha, t) (\cos \varphi(\alpha, t), \sin \varphi(\alpha, t)) ,$$

Eq. 12

em coordenadas cartesianas e polares, respectivamente. Essas coordenadas são reescritas em termos do ângulo tangente da forma:

$$\hat{s} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Eq. 13

e do comprimento do arco. Este sistema de coordenadas é conveniente pois permite representar a curvatura da interface de maneira simples através da fórmula de Frenet-Serret,  $\kappa = \theta_s$ .

A forma da interface evolui no tempo através

$$X_t = U\hat{n} + T\hat{s}$$

Eq. 14

Onde  $U\hat{n}$  e  $T\hat{s}$  são funções integrais da vortex-sheet e representam as velocidades da fronteira entre os fluidos na direção normal e tangencial respectivamente. Então, é possível obter as equações que são utilizadas nas simulações como descrito em [3]:

$$L_t = - \int_0^{2\pi} \theta_\alpha U d\alpha$$

Eq. 15

$$\theta_t = \frac{2\pi}{L} (U_\alpha + T\theta_\alpha)$$

Eq. 16

$L_t$  representa a evolução temporal do perímetro da gota de fluido magnetoreológico, e,  $\theta_t$  é a derivada do ângulo tangente em relação ao tempo que podemos integrar para obter o ângulo.

A implementação do código será validada reproduzindo resultados de taxa de crescimento linear  $\lambda$ , desenvolvida em [1] e adaptada com a adimensionalização atual, dados pela Eq. 17. Para isso, conduzimos simulações com perturbações senoidais de baixa amplitude.

$$\lambda(n) = n(\chi(1 + \chi) - B(n^2 - 1) - \frac{1}{2}(C + D)).$$

Eq. 17

A taxa de crescimento linear tende a mover o fluido em direção às regiões de campos magnéticos maiores, formando “pontas” na interface entre os fluidos. Assim, verificamos o valor do número modo azimutal  $n$  que maxi-

miza a taxa de crescimento linear da interface para determinada configuração do sistema. Esse valor, é utilizado para calcular e plotar os padrões de interface de forma mais eficiente.

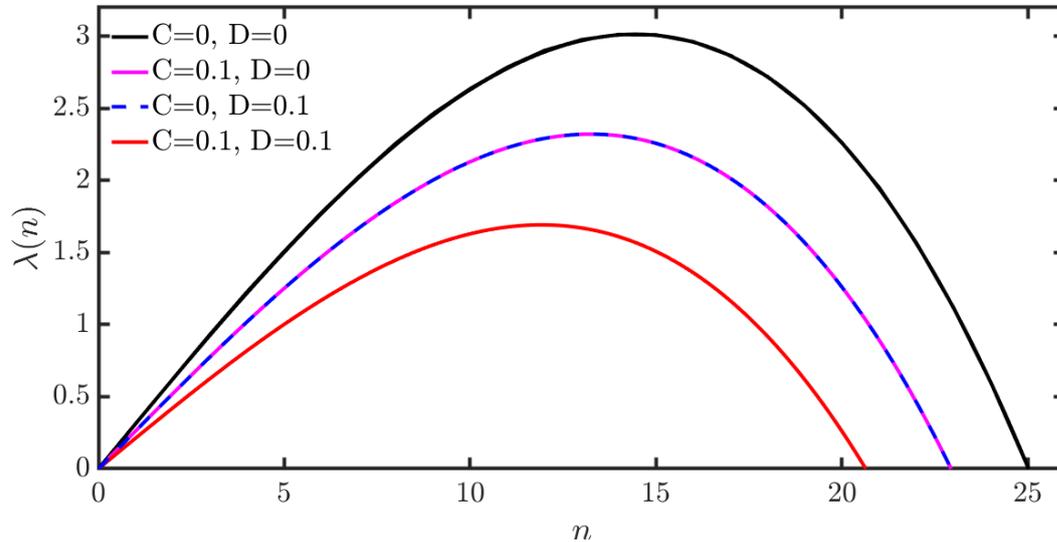


Figura 10 – Curvas teóricas da taxa de crescimento linear  $\lambda$  em função do modo azimutal  $n$ , plotados para  $A = 0$ ,  $B = 5 \times 10^{-4}$  e distintos valores de  $C$  e  $D$ .

Além disso, pela equação teórica Eq. 17 e curvas teóricas mostradas na Figura 10, observamos que a influência dos parâmetros  $C$  e  $D$  são iguais na taxa de crescimento linear.

### 3.2.2 Influência das condições iniciais

Inicialmente estudaremos o sistema sob influência de perturbações não aleatórias que serão definidas na forma:

$$r = R + a \cos(n\theta),$$

Eq. 18

tal que iniciamos com uma circunferência de raio  $R = 1$ , adicionamos um cosseno de amplitude  $a = 10^{-4}$ ,  $n$  é o modo azimutal, anteriormente descrito, que indicará o número de pontas que serão formadas.

Assim, iremos variar os valores de  $n$  nas simulações de forma a compreender melhor o comportamento do fluido para diversas perturbações anteriormente definidas. Uma vez que alteramos valores de constantes estabilizantes no fluido é necessário identificar o novo valor de  $n$  que maximiza a taxa de crescimento linear, e aplica-lo na perturbação inicial para obter o gráfico do novo padrão de interface.

Além de perturbações pré-definidas, também criamos perturbações aleatórias de forma a estudar o mesmo sistema sob diferentes condições iniciais. Essas perturbações são somatórios de cossenos descritas na forma

$$r = R + a \sum_{i=1}^{30} \cos(i\theta + \varphi_i),$$

*Eq. 19*

que representa uma série de Fourier variando os valores das fases  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{30}$  aleatoriamente.

### 3.2.3 Simulações não lineares

As simulações não lineares dos padrões nos fornecem a forma da interface entre os fluidos (MRF e ar) no decorrer do tempo. Com isso, obtemos figuras para cada instante de tempo e para cada conjunto de parâmetros escolhido.

Nas simulações bidimensionais apresentadas, a conservação de massa da gota de MRF corresponde a uma conservação da área do padrão. Por utilizar um método numérico de equações não lineares, as simulações podem apresentar um erro que tende a aumentar a área de acordo com o avanço no tempo e alguns parâmetros. Assim, é necessário garantir que as simulações estariam dentro de um erro aceitável, garantindo a sua confiabilidade. Escolhemos a área inicial da gota igual a  $\pi R^2$ , que seria calculada novamente a cada passo de tempo após o cálculo da interface e foi definido um erro máximo aceitável de 1%.

Inicialmente, realizamos simulações sob influência de perturbações não aleatórias, com intuito de reproduzir a relação entre a taxa de crescimento linear  $\lambda$  e o número de modo azimutal  $n$ . Nessas simulações, variamos os valores das constantes  $C$ ,  $D$  e  $n$ , mantendo  $A$  e  $B$  constantes.

Na segunda parte, iniciamos as simulações dos padrões de interface para perturbações aleatórias. Com isso, pudemos analisar de forma mais eficaz a influência de cada constante no comportamento do sistema. Neste momento, também analisamos a influência do passo de tempo  $dt$  nas simulações.

Os cálculos computacionais eram realizados até que o erro na área da gota fosse 1% maior do que a área inicial ou até que a forma se estabilizasse, atingindo um estado estacionário. Com perturbações iniciais aleatórias, estados estacionários não foram observados. Nestes casos, para poder avançar mais no tempo era necessário repetir a simulação com um passo de tempo inferior.

## 4 Resultados

No primeiro momento, foi feita uma validação da implementação numérica através do cálculo da taxa de crescimento linear  $\lambda$ . Para isso, criamos um gráfico das curvas teóricas de  $\lambda$  em função de  $n$  juntamente com os pontos calculados numericamente.

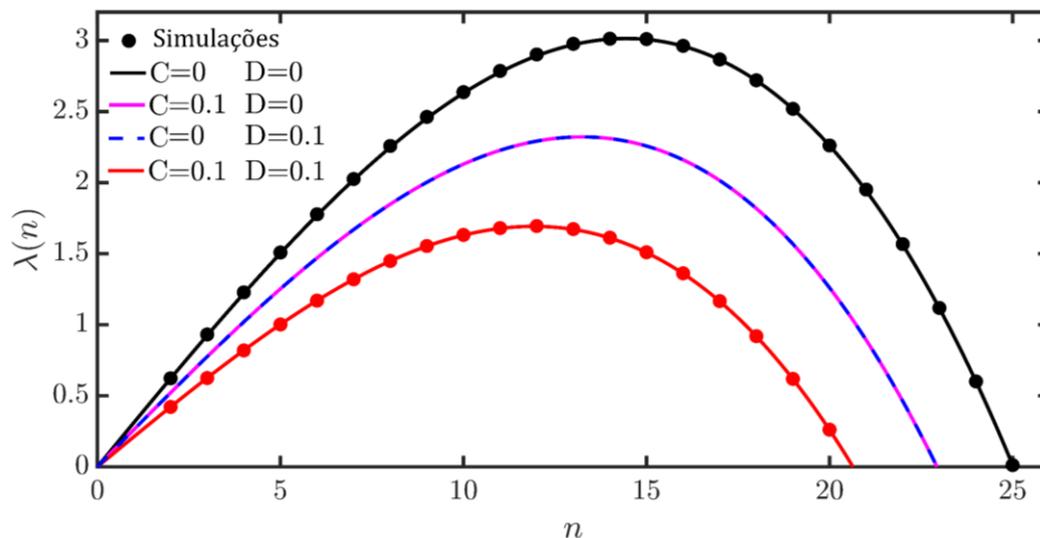
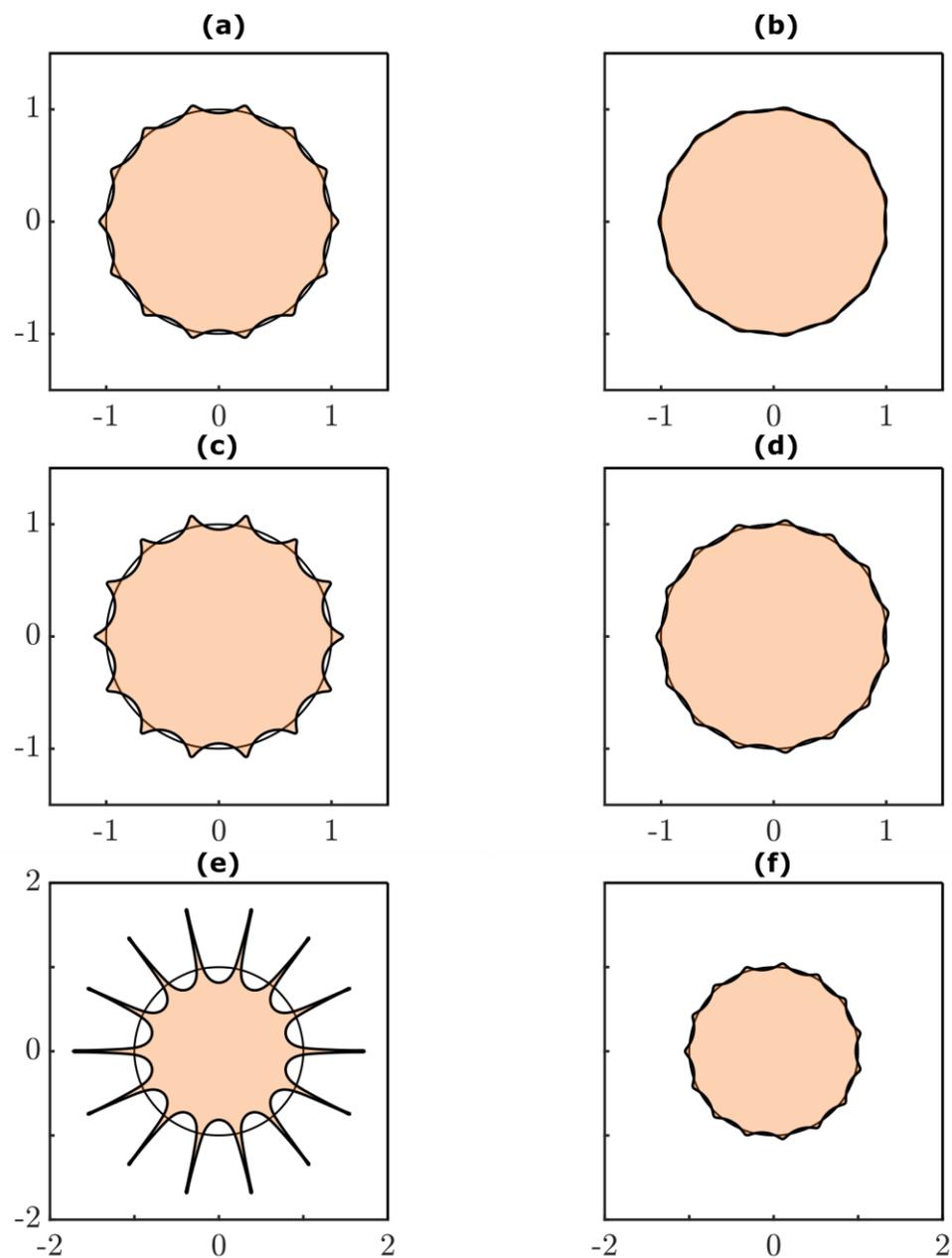


Figura 11 - Validação da implementação numérica comparando com as curvas teóricas

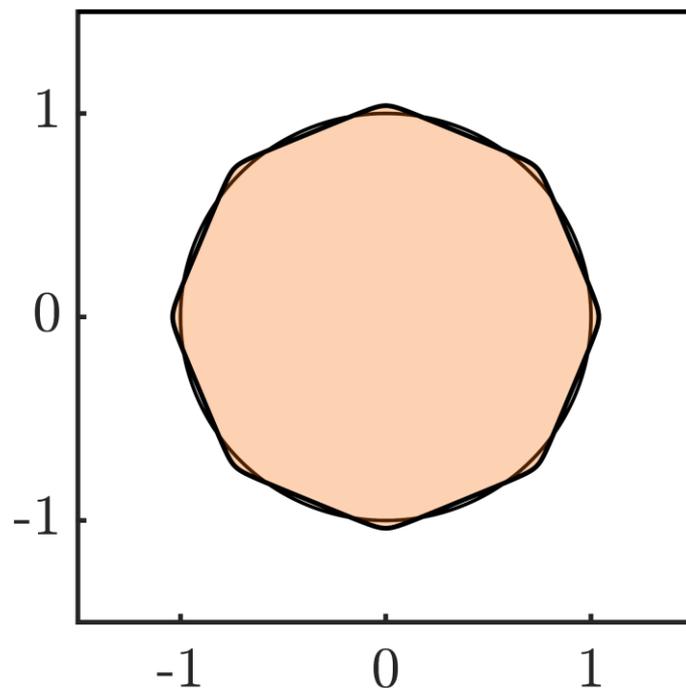
Analisando o gráfico é possível confirmar os resultados da taxa de crescimento linear obtidos a partir da implementação numérica uma vez que coincidem com os valores das curvas teóricas.

Já para a implementação numérica dos padrões de interface, durante as simulações sob influência de perturbações senoidais não aleatórias, foi possível verificar que o número de pontas formado pela superfície da interface é sempre igual ao número de modo azimutal  $n$  como esperado. Além disso, perceber como os fatores  $C$  e  $D$  influenciam na estabilização do sistema.



*Figura 12 - Simulação de interface com perturbações não aleatórias e tempos distintos.*

Na Figura 12 as imagens representam para  $C = 0, D = 0,1$  [(a), (c), (e)] e  $C = 0,1, D = 0,1$  [(b), (d), (f)],  $t = 2$  [(a), (b)],  $t = 3$  [(c), (d)] e  $t = 5,6$  [(e), (f)]. É possível identificar dois casos e verificar como um incremento de 0,1 em  $C$  influencia diretamente na estabilização do sistema. É mais fácil ainda evidenciar esses fatos ao analisarmos valores elevados dos parâmetros, onde  $C + D \geq 0,5$ , para o valor de  $B$  utilizado, em tempos elevados e valores diferentes de  $n$  como indica a Figura 12.



*Figura 13 - Padrão de interface para  $C=0$ ,  $D=0,5$ , e  $t=28$  sob perturbação não aleatória em estado estacionário.*

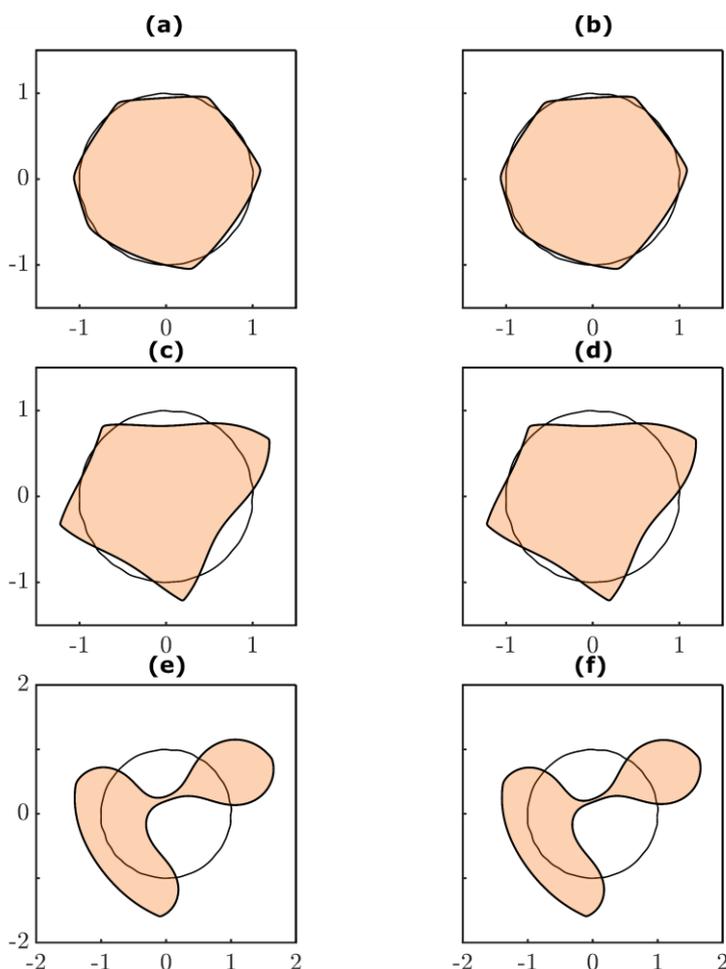
Além disso, ao realizar as simulações com valores de  $n$  dentro da banda de instabilidade, mas, distante do valor que maximiza o crescimento linear, foi necessário avançar até tempos mais elevados para que a gota desenvolva os padrões. Isso é compatível com os resultados da análise de estabilidade linear, uma vez que esses valores de  $n$  possuem taxa de crescimento menores do que  $\lambda(n_{max})$ .

Para as simulações com perturbações aleatórias, realizamos estudos dentro de dois casos específicos.  $C = 0, D = 0,5$  e  $C = 0,5, D = 0$ . Nossa intenção aqui foi investigar como as tensões limite de escoamento, que dependem e não dependem do campo, podem ter efeitos distintos na formação dos padrões. Cada um dos casos foi analisado sob três distintas perturbações aleatórias e durante a primeira perturbação aleatória em cada um dos casos, testamos distintos valores de passo de tempo  $dt$  para obter a forma desejada minimizando o erro.

Durante as simulações, plotamos as interfaces dos fluidos em determinados tempos (preenchida) e a interface do fluido no instante inicial  $t=0$  (vazia) para melhor visualização dos padrões.

No primeiro caso,  $C = 0, D = 0,5$ , foi observado que para o valor de  $dt = 0,0001$ , a área do fluido extrapola o limite de 1% em relação a área inicial de forma significativamente rápida, em  $t = 34$ . Para melhor analisar, foram testados os passos de tempo:  $dt = 1 * 10^{-4}$ ,  $dt = 1 * 10^{-5}$  sob influência de uma mesma perturbação aleatória em três diferentes instantes de tempo.

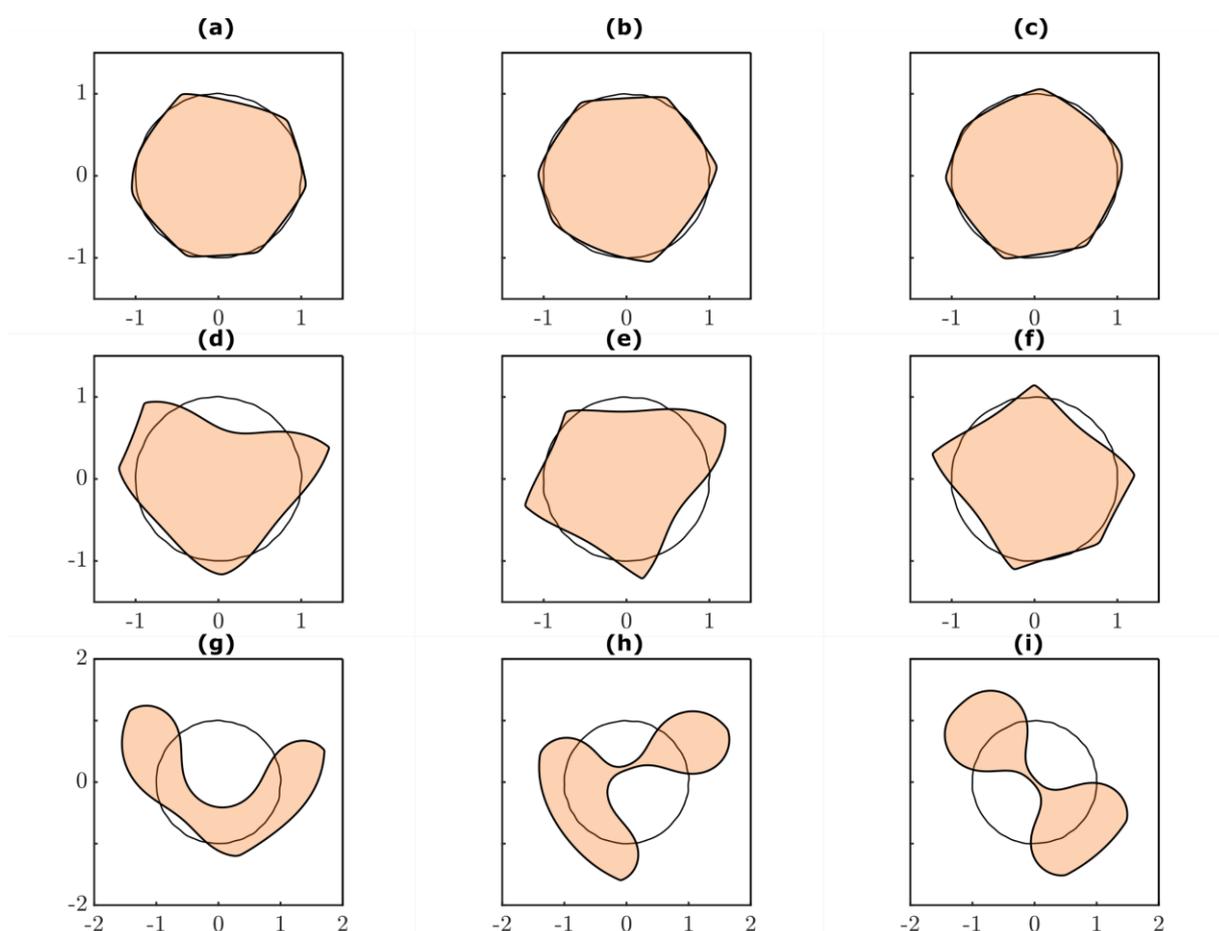
A Figura 14 representa uma perturbação aleatória com valores das constantes  $C=0, D=0,5$ . e  $dt = 1 \times 10^{-4}$  [(a), (c), (e)],  $dt = 1 \times 10^{-5}$  [(b), (d), (f)]. Sendo o tempo referente à  $t = 15$ ,  $t = 30$  e  $t = 48$  nas linhas [(a), (b)], [(c), (d)] e [(e), (f)] respectivamente.



*Figura 14 – Padrões de interface para fluido magnetoreológico confinado submetido à um campo magnético radial para uma mesma perturbação aleatória,  $C = 0$  e  $D = 0,5$ .*

No entanto, é importante verificar que a gota tende a se dividir independentemente da perturbação, o tempo  $t = 48$  foi suficiente para confirmar com duas das perturbações estudadas. Com a primeira perturbação aleatória estudada a gota não se dividiu até o tempo máximo simulado, no entanto, a área extrapolou consideravelmente o limite aceitável. Por isso, seria necessário reduzir o passo de tempo para poder simular tempos mais avançados.

A Figura 15 mostra, perturbação 1 [(a), (d), (g)], perturbação 2 [(b), (e), (h)], e perturbação 3 [(c), (f), (i)] em três distintos instantes de tempo,  $t = 15$  [(a), (b), (c)],  $t = 30$  [(d), (e), (f)] e  $t = 48$  [(g), (h), (i)].



*Figura 15 - Comparação da interface para três diferentes perturbações aleatórias para o caso 1*

Já no segundo caso,  $C = 0,5$ ,  $D = 0$ , o erro na área excedeu rapidamente o limite de 1% considerado aceitável, a fim de confirmar a necessidade de reduzir, fizemos um gráfico, Figura 16, de  $t_{max}$  sendo o tempo necessário para a área exceder 1% da área inicial para três passos de tempo,  $dt$ , distintos.

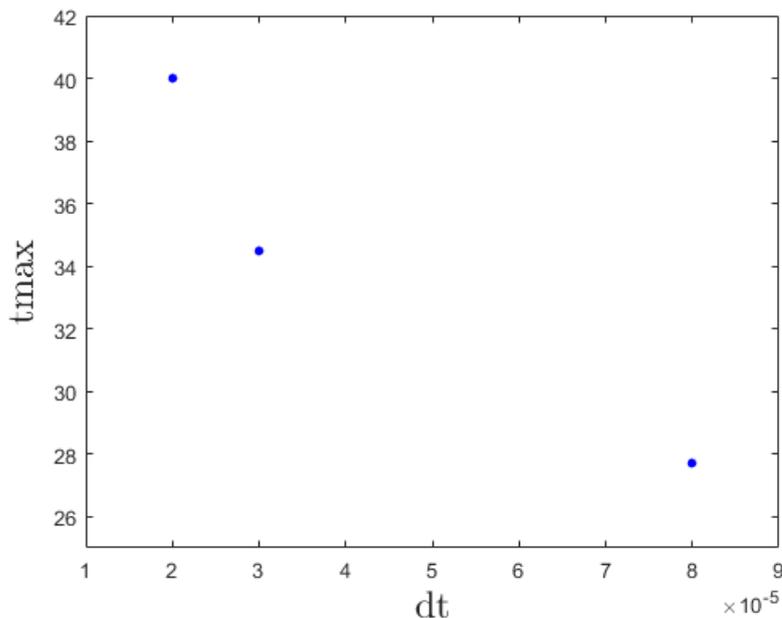


Figura 16 – Gráfico do tempo,  $t_{max}$ , para exceder o limite da área máxima aceitável para  $dt = 2 \times 10^{-5}$ ,  $3 \times 10^{-5}$  e  $8 \times 10^{-5}$ .

Com este gráfico, foi possível confirmar a necessidade de se utilizar um passo de tempo menor para poder avançar mais no tempo. Para este caso, com  $dt = 2 * 10^{-5}$  podemos avançar para tempos até cerca de  $t \cong 40$  sem distorcer a área significativamente, enquanto com passo  $dt = 8 \times 10^{-5}$  podemos avançar até apenas  $t \cong 28$ . Realizando as simulações, inicialmente testamos os mesmos três passos de tempo:  $dt = 2 * 10^{-5}$ ,  $dt = 3 * 10^{-5}$  e  $dt = 8 * 10^{-5}$  para uma mesma perturbação aleatória.

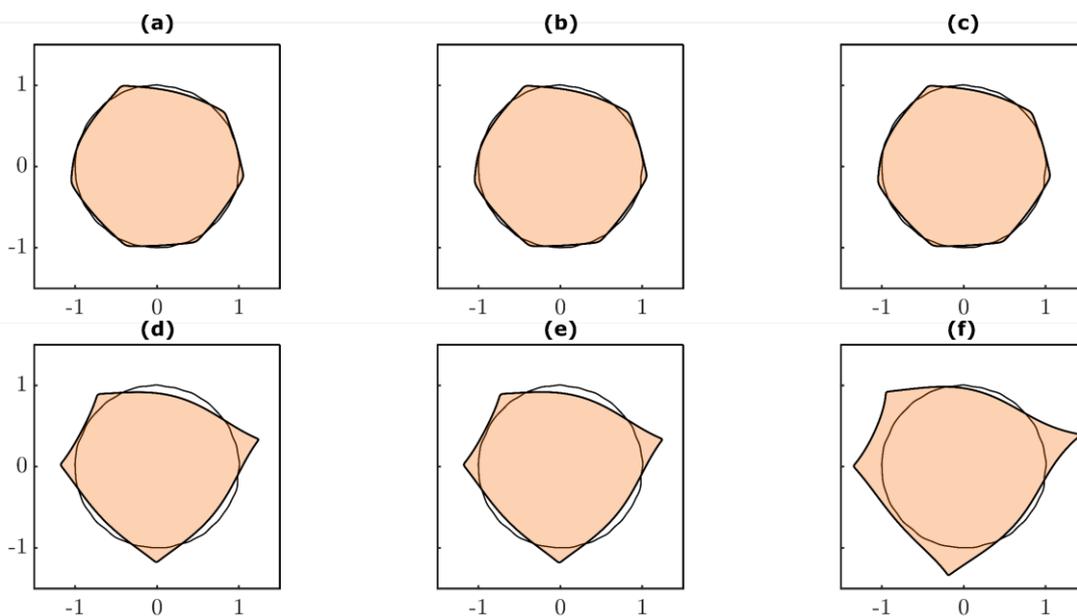


Figura 17 – Formas de interface para o segundo caso simulado com perturbações aleatórias.

Na figura 16 estão representados  $dt = 2 * 10^{(-5)}$  [(a), (d)],  $dt = 3 * 10^{(-5)}$  [(b), (e)] e  $dt = 8 * 10^{(-5)}$  [(c), (f)];  $t = 15$  [(a), (b), (c)],  $t = 34$  [(d), (e), (f)]. Então realizamos as simulações para dois distintos instantes de tempos e três perturbações aleatórias distintas.

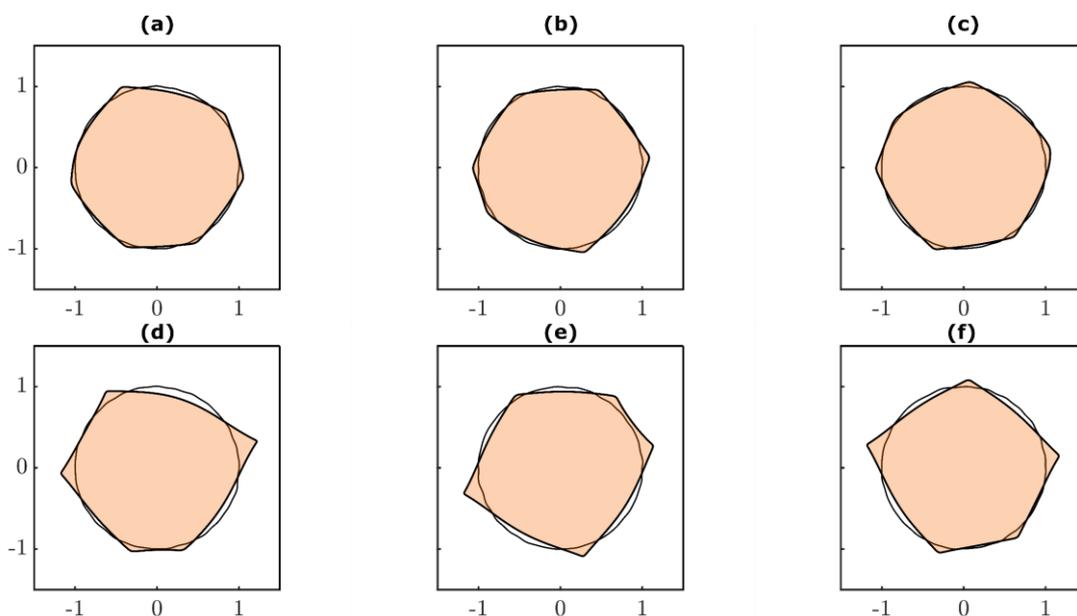
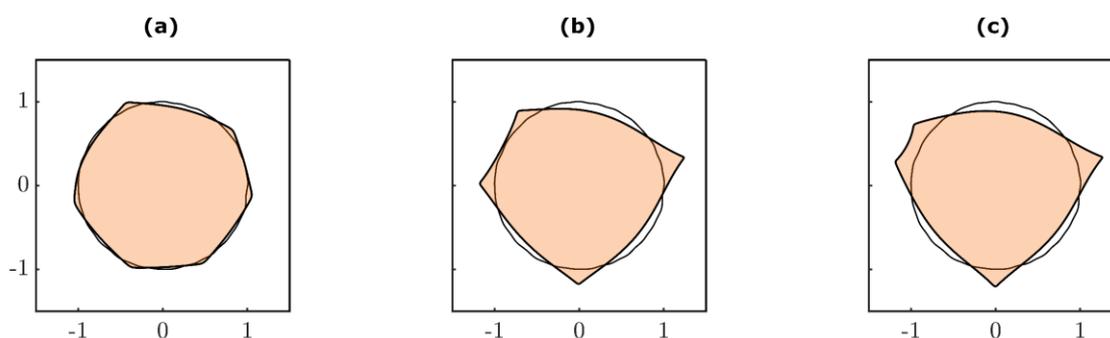


Figura 18 – Representação das formas de interface com passo de tempo  $dt = 8 * 10^{(-5)}$ , perturbação 1 [(a), (d)], perturbação 2 [(b), (e)] e perturbação 3 [(c), (f)] para os tempos  $t = 15$  [(a), (b), (c)],  $t = 27,7$  [(d), (e), (f)].

De acordo com o observado na Figura 14, utilizamos o tempo máximo, de  $t = 27,7$ , visto para essa configuração. A área permaneceu dentro do limite de 1% a mais em relação a área inicial para as três perturbações.

Observando a Figura 16, concluímos que a quebra da gota só foi observada quando o MRF possui tensão limite de escoamento dependente do campo. As simulações utilizando três perturbações iniciais distintas, confirmam que essa quebra não depende das condições iniciais.

Já na figura 16, foi possível estender o tempo de simulação até  $t = 40$ , uma vez que utilizamos um passo de tempo menor e, com isso, fica evidente que a gota não demonstra sinais de quebra quando não possui tensão limite de escoamento dependente do campo ( $D = 0$ ).



*Figura 19 - Evolução da interface para  $dt = 2 \times 10^{-5}$  nos tempos  $t=15$ ,  $t=34$  e  $t=40$  representados nos itens (a), (b) e (c) respectivamente.*

Esses padrões formados por MRF que apenas possuem tensão limite de escoamento na ausência de campo sofrem deformações pequenas que se apresentam em formas poligonais.

Com os resultados obtidos, é possível observar que assim como nos ferrofluidos, o valor de  $n$  indica o número de pontas que serão formadas quando submetidos a perturbações não aleatórias. Também é possível verificar que a tensão limite de escoamento na ausência de campo magnético,  $C$ , e a tensão limite de escoamento na presença de campo magnético,  $D$ , tem influências distintas sob os fluidos quando submetidos às mesmas con-

dições. Outro aspecto a ser considerado é a relação entre os fatores estabilizantes e o passo de tempo utilizado na simulação. Com valores das constantes C e D mais elevados os padrões tendem a se desenvolver em tempos mais longos, enquanto o erro tende a ser maior, sendo assim necessário utilizar passos de tempo  $dt$  menores.

## 5 Conclusão

Inicialmente, tivemos como objetivo analisar a influência do contraste viscoso,  $A$ , da tensão interfacial efetiva  $B$  e das tensões limite de escoamento na ausência de campo,  $C$ , e na presença de campo  $D$  no comportamento dos fluidos magnetoreológicos. Para isso, foi necessário iniciar o estudo das equações de governo do sistema proposto, analisar a taxa de crescimento linear, variar as condições iniciais e produzir as simulações. Após realizar as etapas descritas, é possível compreender que, a previsão teórica da taxa de crescimento linear coincide com os valores encontrados a partir das simulações como mostrado na Figura 10. Além disso, a tensão limite de escoamento na ausência de campo magnético,  $C$ , e tensão limite de escoamento na presença de campo magnético,  $D$ , apresentam influências na forma da interface em regime não linear, ao contrário do que as previsões teóricas de análise de estabilidade linear indicam. Além disso, os parâmetros  $C$  e  $D$  se confirmaram como fatores estabilizantes, uma vez que, para maiores valores, a fronteira entre os fluidos tende a se desenvolver de forma mais lenta, e os padrões desenvolvem dedos viscosos menos compridos.

Devido ao tempo demorado para realizar as simulações, não foi possível analisar a influência dos parâmetros  $A$  e  $B$ . Apenas casos com  $A = 0$  e  $B = 5 \times 10^{-4}$  foram estudados uma vez que para casos com  $A \neq 0$ , as simulações devem demorar aproximadamente dez vezes mais. Isso se deve à necessidade de se resolver uma equação integral a mais para o cálculo da vortex-sheet.

Portanto, para trabalhos futuros, seria interessante analisar casos com valores de  $A \neq 0$  e distintos valores de  $B$  a fim de compreender suas influências no sistema. Seria válido também, estudar como a variação da susceptibilidade magnética  $\chi$  influenciaria no comportamento do fluido. Por fim, realizar o experimento prático a fim de confirmar resultados obtidos teoricamente através das simulações matemáticas.

## 6 Referências Bibliográficas

- [1]. S. A. Lira, J. A. Miranda & R.M. Oliveira, **Field-induced patterns in confined magnetorheological fluids**, Phys. Rev. E 81, 046303 (2010).
- [2]. R. M. Oliveira & J. A. Miranda, **Fully nonlinear simulations of ferrofluid patterns in a radial magnetic field**, DOI: 10.1103, Phys. Rev. Fluids. 5.124003
- [3]. T. Y. Hou, J. S. Lowengrub, M.J. Shelley, **Removing the stiffness from interfacial flows with surface tension**, J. Comput. Phys. 114, 312-338 (1994).
- [4]. R. M. Oliveira, J. A. Miranda & E. S. G. Leandro, **Ferrofluid patterns in a radial magnetic field: Linear stability, nonlinear dynamics and exact solutions**, Phys. Rev. E 77, 016304 (2008).
- [5]. G. d. Mendonça Luz, **Modelagem contínua do escoamento de um ferrofluido assimétrico na presença de campo magnético homogêneo**, CDU 02:141:005.6 (2018).
- [6]. R. E. Rosensweig, **Ferrohydrodynamics**, Dover Publications, ISBN 9788534602044 (2014).
- [7]. NASA, **Ferrofluid Technology Becomes a Magnet for Pioneering Artists**, disponível em: [https://spinoff.nasa.gov/Spinoff2018/cg\\_3.html](https://spinoff.nasa.gov/Spinoff2018/cg_3.html)
- [8]. Masher Y. Salloom, **Reference Module in Materials Science and Materials Engineering** (2020)
- [9]. Karno Widjaja, Edwin Baimpwi & Christopher Meyer, **Hele-Shaw Cell Experiment Presentation**, disponível em: <https://www.kar-nowidjaja.com/Hele-Shaw-Experiment> (2015).
- [10]. Holger Markus Eberhard Kadau, **Rosensweig Instability and Droplets in a Quantum Ferrofluid of Dysprosium Atoms**, University of Stuttgart (2016).
- [11]. Sergio M. Savaresi, Luc Dugard, **Semi-Active Suspension Control Design for Vehicles** (2010)

- [12]. A.K. Agrawal, M. Amjadian, **Innovative Bridge Design Handbook** (2016).
- [13]. GM Authority, **General Motors Magnetic Ride Control Technology**, disponível em: <<https://gmauthority.com/blog/gm/general-motors-technology/gm-chassis-suspension-technology/gm-magnetic-ride-control-technology/>>
- [14]. GLOBO, **Nova Ferrari F12 Berlinetta deve ter motor de 770 cv**, disponível em <<https://autoesporte.globo.com/carros/noticia/2015/07/nova-ferrari-f12-berlinetta-deve-ter-motor-de-770-cv.ghtml>>
- [15]. Internet Archive, **Audi R8 Features Delphi's Revolutionary MagneRide Semi-Active Suspension**, disponível em <[https://web.archive.org/web/20131111041857/http://delphi.com/news/pressReleases/pressReleases\\_2006/pr\\_2006\\_11\\_30\\_001/](https://web.archive.org/web/20131111041857/http://delphi.com/news/pressReleases/pressReleases_2006/pr_2006_11_30_001/)>
- [16]. AUTOCAR, **The design, development and applications of MagneRide suspension**, disponível em: <<https://www.autocar.co.uk/car-news/new-cars/design-development-and-applications-magneride-suspension>>
- [17]. Ford Media Center, **READY FOR A TRACK NEAR YOU: MUSTANG MACH-E GT AND GT PERFORMANCE EDITION READY FOR CUSTOMER ORDERS**, disponível em <<https://media.ford.com/content/fordmedia/fna/us/en/news/2021/04/26/mustang-mach-e-gt-gt-performance-edition.html>>