



Pedro Rodrigues Carvalho Vale

**Controle passivo de vibrações através do uso
de absorvedores lineares.**

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC–Rio.

Orientador: Roberta Queiroz de Lima

Rio de Janeiro
Junho de 2021

Agradecimentos

Agradeço a minha família.
Minha orientadora.
Meus amigos de engenharia mecânica.
E agradeço também a Carolina Côrtes.

Resumo

Controle passivo de vibrações através do uso de absorvedores lineares.

Esse trabalho de conclusão de curso estudará, de forma teórica, uma estratégia de controle passivo de vibrações de sistemas mecânicos através do uso de absorvedores. O objetivo de um absorvedor é atenuar a amplitude de vibração de um sistema. Serão estudados absorvedores lineares, capazes de reduzir a amplitude de vibração em um intervalo de frequências. Serão analisados sistemas dinâmicos com um e múltiplos graus de liberdade.

Palavras-chave

Controle passivo; Absorvedor linear; Análise Modal

Abstract

Passive Control of vibration with linear absorbers.

This course conclusion work will study, in a theoretical way, a strategy of passive control of vibrations of mechanical systems through the use of absorbers. The purpose of an absorber is to attenuate the vibration amplitude of a system. It will be studied linear absorbers, capable of reducing the amplitude of vibration in a range of frequencies. Dynamic systems with one and multiple degrees of freedom will be analyzed.

Keywords

Passive Control; Linear absorber; Modal Analysis

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Motivação do trabalho	8
1.2	Objetivo	8
1.3	Revisão bibliográfica	9
2	Sistema com 1 Grau de liberdade	10
2.1	Equacionamento da dinâmica	11
2.2	Resposta do sistema livre	12
2.3	Resposta do sistema forçado	13
2.4	Resposta do sistema no domínio da frequência	17
3	Sistema com múltiplos graus de liberdade	22
3.1	Equacionamento da dinâmica	22
3.2	Cálculo de frequências e modos	24
3.3	Resposta a um forçamento	28
3.4	Solução geral	29
3.5	Resposta em função da frequência	31
4	Design do absorvedor	33
5	Conclusão	36

Lista de figuras

2.1	Sistema de um grau de liberdade.	10
2.2	Resposta do sistema com 1 GL, em função do tempo ($w \neq w_n$).	16
2.3	Resposta do sistema com 1 GL, em função do tempo ($w = w_n$).	17
2.4	2 sistemas de 1 grau de liberdade.	18
2.5	Resposta do sistema original em função da frequência.	20
3.1	Sistema com dois graus de liberdade.	22
3.2	Resposta do sistema, em função do tempo.	30
3.3	Resposta do sistema, em função da frequência.	32
4.1	Resposta da massa m_1 , com e sem absorvedor.	34

1

Introdução

Em engenharia, quando vamos projetar uma estrutura, devemos sempre analisar quais esforços estão atuando sobre esta e, estudar como alguns forçamentos podem levar a sua falha. Entretanto, muitas vezes os projetistas se atentam a carregamentos com alta magnitude e, paradoxalmente, grandes acidentes aconteceram pela ausência de estudos sobre carregamentos de baixa magnitude, com frequência de oscilação igual as frequências naturais do sistema, que provocam o fenômeno físico conhecido por ressonância. Se o sistema for exposto a este fenômeno, as deformações do sistema aumentariam com o tempo, até que se exposto por um período suficiente, geraria a falha. Mesmo que este forçamento não esteja oscilando com a mesma frequência natural do sistema, ainda sim, pode causar uma vibração indesejada.

Tendo isso em vista, o presente trabalho procura uma maneira de combater essa problemática, a partir do estudo de sistemas de um e múltiplos graus de liberdade, desenvolvendo equações que regem o comportamento físico do sistema, para futuramente buscar uma resposta para eles, tanto no domínio do tempo, quanto no domínio da frequência. Por fim, será analisado como projetar um absorvedor linear, para proteger o sistema dessas oscilações que podem levar a falha.

Estes absorvedores lineares são utilizados para reduzir essas amplitudes de vibração indesejadas de estruturas causadas por forçamentos externos. Mas como esse absorvedor faz isso? Como o nome já diz, o absorvedor de vibrações é um dispositivo que controla as amplitudes de vibração através da absorção da maior parte da energia de vibração em um sistema secundário. Isso é, "rouba" parte da vibração de um determinado grau de liberdade, que para aquela dada frequência entraria em ressonância, de modo que o sistema continue seguro, como comenta Godoy em sua tese de doutorado [5]. De uma forma mais técnica, quando o absorvedor é acoplado a um sistema, este muda as frequências naturais do sistema original e, quando o novo sistema (com absorvedor) é submetido aquele mesmo forçamento harmônico antigo, a amplitude de vibração de um determinado grau de liberdade é drasticamente reduzida. Ou seja, podemos controlar as vibrações de forma passiva, não sendo necessário o fornecimento de energia ao sistema, o que facilita muito o uso destes absorvedores.

Absorvedores lineares consistem em sub-sistemas, compostos por uma partícula de massa m , acoplada a uma mola de rigidez k . E para proteger um

dado sistema de um forçamento harmônico, podemos projetar um absorvedor para defendê-lo, isto é, escolher valores para os parâmetros k e m , que protejam o sistema.

1.1

Motivação do trabalho

Para modelar ou projetar sistemas, peças ou aparelhos mecânicos, é importante abordar sempre alguns temas, como resistência do material a pressão e temperatura, ciclos de vida à fadiga, estudo sobre as possíveis oscilações e outros. Entretanto, ao longo da história da engenharia existiram alguns episódios em que as vibrações do sistema não eram estudadas e, infelizmente tivemos algumas tragédias por isso. Um caso muito famoso da ausência desse estudo foi com a ponte de Tacoma, que sofreu um colapso quando suas estruturas vibraram em uma de suas frequências naturais, devido a oscilação da força provida do vento. Este efeito pode ser gerado por forças incertas como o vento, terremotos, ondulações marítimas e etc, ou por forças determinísticas, como desbalanceamentos. Podemos ver esse último em uma série de sistemas, os mais famosos são em helicópteros e em máquinas de lavar, gerando muitas vezes destruições de equipamentos.

Para combater este problema existem algumas opções, mas todas elas envolvem o controle da amplitude de oscilação de vibração de um ou alguns graus de liberdade. Por isso, o presente trabalho abordará uma estratégia para eliminar, ou reduzir para valores próximos de zero, as amplitudes de vibração de um sistema oscilatório. A estratégia que será estudada é baseada no uso de absorvedores lineares e tem inúmeras aplicações, podendo ser usada para proteger uma série de sistemas que estejam expostos a vibrações e possíveis ressonâncias.

1.2

Objetivo

O foco do trabalho é aprender sobre a teoria e modelagem de absorvedores lineares. Os absorvedores serão utilizados para reduzir ou eliminar a amplitude de vibração de um dos graus de liberdade de um sistema, com múltiplos graus de liberdade em uma determinada faixa de frequências. Serão estudados diversos tópicos relacionados a vibrações de sistemas lineares, como por exemplo, cálculo de frequências e modos de vibrações e resposta em frequência.

1.3

Revisão bibliográfica

Um dos livros utilizados no estudo é o “Modal Analysis”, que tem como autores He Fu, e trata do estudo da dinâmica de sistemas mecânicos com foco em análise modal. Deste material foi estudado o capítulo 5 (em especial as seções 5.2 a 5.8), que aborda análise modal para sistemas com múltiplos graus de liberdade sem amortecimento. O livro mostra, por exemplo, como obter a função de resposta em frequência de um sistema e como calcular a resposta de um sistema a um forçamento harmônico, utilizando essa função de resposta em frequência.

Outro material usado para estudo é o livro “Probability Models in Engineering and Science”, que tem como autores Hayam Benaroya e Seon Mi Han. Uma parte desse livro trata do estudo de vibrações determinísticas, com um grau de liberdade, múltiplos graus de liberdade e sistemas contínuos com infinitos graus de liberdade. Assim como o “Modal Analysis”, esse livro mostra como calcular frequências e modos de vibração de sistemas mecânicos lineares sem amortecimento, e mostra como obter a função de resposta em frequência desses tipos de sistemas. O principal capítulo estudado desse livro é o capítulo 7.

Além dos dois livros já mencionados, outra referência bibliográfica utilizada no trabalho é o artigo “Robust Identification and Passive Control of Vibration of a Test Rig Under Uncertain Conditions”. Esse artigo, apesar de tratar do uso de um absorvedor não linear e considerar incertezas, mostra uma aplicação interessante de um absorvedor em uma estrutura com dois graus de liberdade.

2

Sistema com 1 Grau de liberdade

No presente estudo analisaremos como absorvedores lineares podem ser muito úteis para proteger sistemas contra oscilações e, para descrever melhor o que está sendo estudado analisaremos a resposta de alguns sistemas a forçamentos externos. Para facilitar o entendimento, faremos de forma progressiva, um aumento na complexidade dos sistemas estudados, começando por um sistema com apenas 1 grau de liberdade (GL).

Neste primeiro momento estudaremos o comportamento de um sistema com 1 grau de liberdade, composto por um conjunto massa-mola, em que a extremidade esquerda da mola está conectada a uma parede fixa, como ilustrado na figura 2.1.

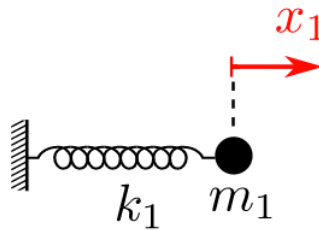


Figura 2.1: Sistema de um grau de liberdade.

Onde,

k_1 é a rigidez da mola;

m_1 é a massa da partícula;

x_1 é a variável referente a posição da massa m_1 , medida a partir da posição inicial da mesma (e quando $x_1 = 0$, a mola está relaxada).

Para começar a desenvolver o problema em questão, devemos descobrir a equação que rege a física do problema, isto é, a equação da dinâmica e, para encontrá-la podemos utilizar alguns métodos. Um deles é através da segunda lei de Newton, ou seja, faz-se um balanço de forças no sistema. Outro, é o método de Lagrange, baseado em uma análise energética, seguiremos o equacionamento pelo método de Lagrange.

2.1

Equacionamento da dinâmica

O primeiro passo para construir o equacionamento de Lagrange é escrever todas as formas de energia que atuam no sistema [9], através da função Lagrangiana, como segue na equação 2-1:

$$L = T - V. \quad (2-1)$$

Onde,

T é a energia cinética do sistema;

V é a energia potencial do sistema;

L é diferença entre energia cinética e potencial do sistema.

A partir desta diferença de energética, podemos obter a equação diferencial que rege a dinâmica do sistema. Para isso, fazemos a seguinte conta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (2-2)$$

Vale ressaltar que este é um sistema conservativo e, por isso, estamos igualando o lado direito da equação da dinâmica a zero. Mas existem outros casos onde devemos adicionar um novo termo ao lado direito da equação, seja pela dissipação viscosa (que não é o foco do estudo), ou por um forçamento externo.

Com isso encontraremos a equação da dinâmica, que rege a física do sistema. Buscando entender melhor o comportamento do sistema que começamos mostrando, ilustrado na figura 2.1, podemos usar as equações 2-1 e 2-2 para encontrar a equação da dinâmica desse sistema, como segue nas equações 2-3 e 2-4:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2) - \frac{1}{2}(k_1 x_1^2). \quad (2-3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2) - \frac{1}{2}(k_1 x_1^2))}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left(\frac{\partial (\frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2) - \frac{1}{2}(k_1 x_1^2))}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (2-4)$$

Desenvolvendo temos:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 = 0. \quad (2-5)$$

Com posse da equação da dinâmica e, condições iniciais de posição e velocidade vamos propor uma solução, visando obter uma resposta da posição em função do tempo $x_1(t)$.

2.2

Resposta do sistema livre

Como a equação da dinâmica foi obtida através do equacionamento conservativo de Lagrange, temos que a solução proposta para este sistema será a própria solução homogênea. E no processo de propor uma solução para o sistema, a que será usada neste trabalho de conclusão de curso é da forma $e^{\lambda t}$. E substituindo pelo proposto, temos o exposto na equação 2-6:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{\lambda t}; \\ \dot{x}_1(t) &= \lambda e^{\lambda t}; \\ \ddot{x}_1(t) &= \lambda^2 e^{\lambda t}.\end{aligned}\tag{2-6}$$

Substituindo a equação 2-6 em 2-5, encontramos o exposto em 2-7:

$$m_1(\lambda^2 e^{\lambda t}) + k_1(e^{\lambda t}) = 0.\tag{2-7}$$

Rearrmando temos:

$$(-\lambda^2 m_1 + k_1)e^{\lambda t} = 0.\tag{2-8}$$

Como podemos ver na equação 2-8, para qualquer valor de λt temos que $e^{\lambda t} \neq 0$ e, com isso o equacionamento toma a forma como ilustrado em 2-9:

$$-\lambda^2 m_1 + k_1 = 0.\tag{2-9}$$

E isolando a incógnita temos:

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{m_1}}.\tag{2-10}$$

Entretanto, podemos renomear o termo $\sqrt{-\frac{k_1}{m_1}}$ por w_n . Além disso, podemos reescrever a equação 2-10 como:

$$\lambda = \pm w_n i.\tag{2-11}$$

Onde,

i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$);
 w_n é a frequência natural do sistema.

Estávamos procurando apenas uma resposta para o sistema, entretanto obtemos duas (e^{i+w_nt} e e^{i-w_nt}). Como nenhuma das duas soluções encontradas pode ser descartada, pois as duas condições iniciais de posição e velocidade precisam ser atendidas, vamos propor que a solução desejada x_1 , é uma combinação linear das funções e^{+w_nit} e e^{-w_nit} , como segue em 2-12:

$$x_1(t) = c_1 e^{+w_nit} + c_2 e^{-w_nit}. \quad (2-12)$$

Onde,

c_1 e c_2 são constantes.

Podemos utilizar a fórmula de Euler, como em [8], exposta na equação 2-13 para reescrever o encontrado em 2-12:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (2-13)$$

E substituindo em 2-12 temos:

$$x_1(t) = c_1(\cos w_nt + i \sin w_nt) + c_2(\cos w_nt - i \sin w_nt). \quad (2-14)$$

Colocando as funções trigonométricas em evidência obtemos o exposto em 2-15:

$$x_1(t) = (c_1 + c_2)\cos w_nt + i(c_1 - c_2)\sin w_nt. \quad (2-15)$$

Para simplificar, podemos renomear $(c_1 + c_2)$ por a e $i(c_1 - c_2)$ por b , obtendo:

$$x_1(t) = (a)\cos w_nt + (b)\sin w_nt. \quad (2-16)$$

As constantes a e b são calculadas usando condições iniciais de posição e velocidade. Vale observar que a solução obtida em 2-16 é a resposta do sistema, em função do tempo, sem considerar a atuação de nenhum forçamento externo.

2.3

Resposta do sistema forçado

Para estudar a resposta do sistema forçado adicionaremos um forçamento na parte direita da equação da dinamica, como segue em 2-17:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 = f(t). \quad (2-17)$$

Por isso é tão importante o estudo do comportamento do sistema, considerando atuação de forçamentos externos sobre estes. Para isso modificar a solução proposta para resolver o sistema $x_1(t)$. Isto é, devemos propor que a solução do problema é soma de uma solução homogênea e uma solução particular (causadas pelo forçamento externo), como segue na equação 2-18:

$$x_1(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (2-18)$$

Onde,

$x_1(t)$ é a solução proposta do sistema em função do tempo;

$x_h(t)$ é a solução homogênea;

$x_p(t)$ é a solução particular.

Para a parte particular, assim como na parte homogênea, devemos supor uma possível resposta e, para isso devemos analisar a formulação do forçamento. Se o mesmo fosse constante, usaríamos no equacionamento constantes para encontrar a parcela particular. Entretanto, os casos mais interessantes são possivelmente os forçamentos harmônicos. Dito isso, vamos imaginar que sobre o sistema da figura 2.1 atue uma força harmônica, como por exemplo $F = f_0 \cos wt$ e, para este forçamento convém fazer uma suposição para a resposta particular, de forma similar, como segue na equação 2-19:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= d_1 \cos wt; \\ \dot{x}_p(t) &= -wd_1 \sin wt; \\ \ddot{x}_p(t) &= -w^2 d_1 \cos wt. \end{aligned} \quad (2-19)$$

Onde,

$d_1(t)$ é uma constante;

w é a frequência de oscilação do forçamento externo em questão.

Ao substituir o proposto em 2-19 em 2-5, temos o exposto em 2-20:

$$m_1(-w^2 d_1 \cos wt) + k_1(d_1 \cos wt) = f_0 \cos wt. \quad (2-20)$$

Desenvolvendo:

$$(-w^2 m_1 + k_1)(d_1)(\cos wt) = f_0 \cos wt. \quad (2-21)$$

Cortando $\cos wt$ dos dois lados da equação e arrumando o restante, temos que:

$$d_1 = \frac{f_0}{-w^2 m_1 + k_1}. \quad (2-22)$$

Voltando com o obtido da equação 2-22 em 2-19, temos:

$$x_p(t) = \left(\frac{f_0}{-w^2 m_1 + k_1} \right) \cos wt. \quad (2-23)$$

Entretanto, vale ressaltar que esta solução só é válida para $w \neq w_n$.

E substituindo o obtido as equações 2-16 e 2-23, na equação 2-18, temos a solução em função de algumas constantes, como ilustrado em 2-24:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (a) \cos w_n t + (b) \sin w_n t + \left(\frac{f_0}{-w^2 m_1 + k_1} \right) \cos wt; \\ \dot{x}_1(t) &= (-w_n a) \sin w_n t + (w_n b) \cos w_n t + \left(\frac{-f_0 w}{-w^2 m_1 + k_1} \right) \sin wt. \end{aligned} \quad (2-24)$$

Onde,

a é uma constante;

b é uma constante.

Para descobrir o valor destas constantes devemos usar as condições iniciais do problema, que de forma mais geral possível valem, o exposto em 2-25:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_0; \\ \dot{x}_1(0) &= v_0. \end{aligned} \quad (2-25)$$

Onde,

x_0 é a posição inicial;

v_0 é a velocidade inicial.

E ao substituir o exposto em 2-25 nas equações 2-24, obtemos:

$$\begin{aligned} a &= x_0 - \frac{f_0}{-w^2 m_1 + k_1}; \\ b &= v_0 / w_n. \end{aligned} \quad (2-26)$$

E de posse dessas constantes, podemos voltar e substituir em 2-24, obtendo a solução do sistema em 2-27:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(x_0 - \frac{f_0}{-w^2 m_1 + k_1} \right) \cos w_n t + \left(\frac{v_0}{w_n} \right) \sin w_n t + \left(\frac{f_0}{-w^2 m_1 + k_1} \right) \cos wt; \\ \dot{x}_1(t) &= -w_n \left(x_0 - \frac{f_0}{-w^2 m_1 + k_1} \right) \sin w_n t + (v_0) \cos w_n t + \left(\frac{-f_0 w}{-w^2 m_1 + k_1} \right) \sin wt. \end{aligned} \quad (2-27)$$

Com isso, temos a solução do sistema de um grau de liberdade e, para deixar mais claro a resposta do sistema, podemos usar um exemplo, onde substituímos os valores dos parâmetros por valores numéricos, como em 2-28:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0m; \\
 v_0 &= 0m/s; \\
 m_1 &= 1kg; \\
 k_1 &= 1N/m; \\
 f_0 &= 1N; \\
 w &= 2rad/s (\neq w_n).
 \end{aligned}
 \tag{2-28}$$

Usando os valores expostos em 2-28 podemos gerar um gráfico para ilustrar melhor o movimento do sistema em função do tempo, como segue na figura 2.2:



Figura 2.2: Resposta do sistema com 1 GL, em função do tempo ($w \neq w_n$).

Como podemos ver no gráfico exposto em 2.2 é uma função periódica. Isso se deve porque $w \neq w_n$, mas quando usamos um valor para frequência de oscilação do forçamento igual ao da frequência natural do sistema, isto é, $w = w_n$ provocamos ressonância no sistema. Podemos ver no gráfico em 2.3, que foi gerado, utilizando os mesmos valores expostos em 2-27, com exceção de w , que dessa vez vale w_n , isto é, $\sqrt{k_1/m_1}$, que neste exemplo vale 1.

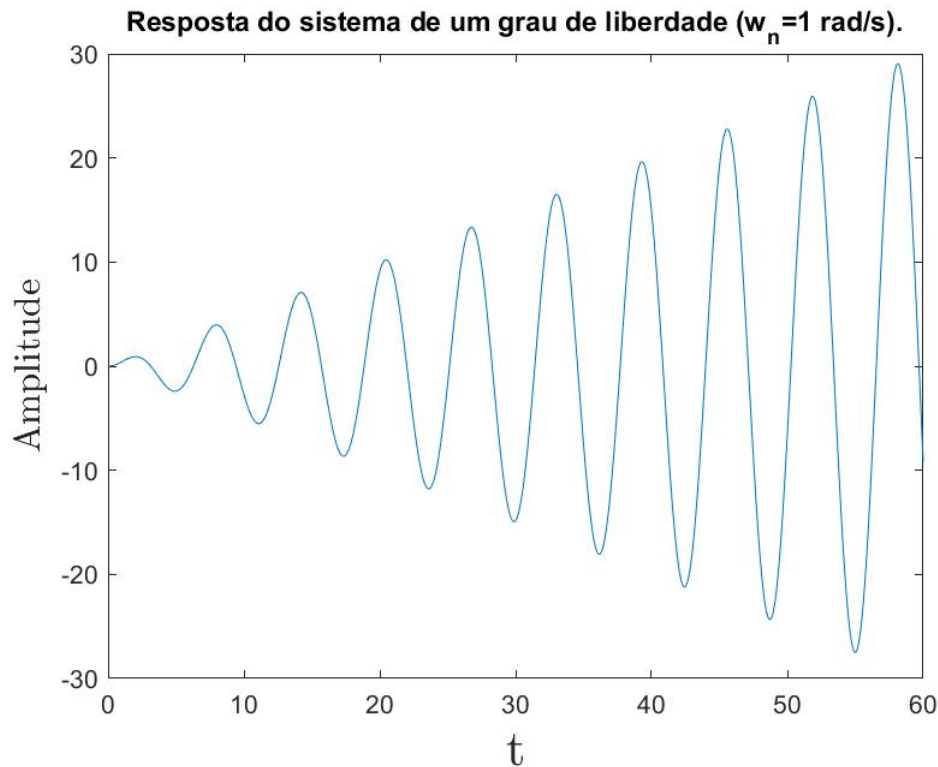


Figura 2.3: Resposta do sistema com 1 GL, em função do tempo ($w = w_n$).

Podemos observar que a amplitude da resposta aumenta em função do tempo, podendo levar o sistema ao colapso. A expressão obtida em 2-27, que só é válida para valores de x_1 tais que a deformação da mola esteja dentro do limite de deformação elástica do material que constitui a mola.

2.4

Resposta do sistema no domínio da frequência

Podemos perceber que a resposta do sistema depende diretamente da relação entre a frequência natural e a frequência de forçamento do sistema. Mas para isso, precisaríamos encontrar uma resposta apenas em função da frequência, ou seja, mudar a representação, do domínio do tempo para o domínio da frequência e, para entender melhor como fazer isso vamos a um exemplo: imagine que temos 2 sistemas, cada um de um grau de liberdade, como as mesmas massas e rigidezes de mola, como ilustrado na figura 2.4:

E para cada um desses sistemas temos uma equação da dinâmica, como segue em 2-29:

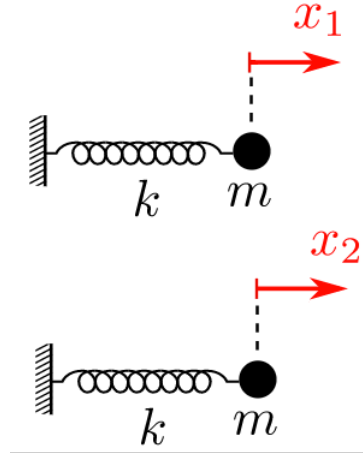


Figura 2.4: 2 sistemas de 1 grau de liberdade.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + kx_1 &= f_0 \cos wt; \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 &= f_0 \sin wt. \end{aligned} \quad (2-29)$$

Podemos resolver os dois sistemas de uma vez só, basta relacionarmos ambos e, uma possibilidade para relaciona-los é através da substituição descrita em 2-30:

$$x = x_1 + ix_2. \quad (2-30)$$

Ou seja:

$$m(\ddot{x}_1 + i\ddot{x}_2) + k(x_1 + ix_2) = f_0(\cos wt + i\sin wt). \quad (2-31)$$

Se lembrarmos da equação 2-13, podemos reescrever a equação como:

$$m(\ddot{x}) + k(x) = f_0(e^{iwt}). \quad (2-32)$$

Para isso devemos analisar a parte que da solução que se relaciona com o forçamento externo, isto é a parte particular da solução (x_p) e, para propor uma solução desta parcela devemos estipular algo similar ao forçamento, como segue em 2-33:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x_0 e^{iwt}; \\ \dot{x}_p(t) &= (iw)x_0 e^{iwt}; \\ \ddot{x}_p(t) &= (iw)^2 x_0 e^{iwt} = -w^2 x_0 e^{iwt}. \end{aligned} \quad (2-33)$$

Onde,

x_0 é a amplitude da resposta.

Substituindo a solução proposta para a parte parcial (2-33) na equação 2-32, obtemos:

$$m(-w^2 x_0 e^{iwt}) + k(x_0 e^{iwt}) = f_0(e^{iwt}). \quad (2-34)$$

Organizando a equação 2-34 obtemos o exposto em 2-35:

$$(-w^2 m x_0 + k x_0) e^{iwt} = f_0(e^{iwt}). \quad (2-35)$$

Como temos o termo e^{iwt} dos dois lados da equação, podemos corta-lo e, ao rearrumar temos:

$$(-w^2 m + k) x_0 = f_0. \quad (2-36)$$

Assumindo que o conglomerado $(-w^2 m + k)$ é invertível (o que acontece para valores de w diferentes das frequências naturais do sistema), podemos isolando em a equação 2-36 em função de x_0 :

$$x_0 = \frac{f_0}{-w^2 m + k}. \quad (2-37)$$

E como a frequência natural de um sistema de um grau de liberdade vale $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, podemos dividir a parcela $-w^2 m + k$ por m e obter $m(-w^2 + w_n^2)$ reescrever a equação 2-37 como exposto em 2-38:

$$x_0 = \frac{f_0}{m(-w^2 + w_n^2)}. \quad (2-38)$$

Como estamos interessados na magnitude da resposta, podemos tirar o módulo do denominador e, com isso, temos a amplitude da resposta em função apenas da frequência de forçamento externo w e, a medida que vamos caminhando no domínio da frequência vamos obtendo as amplitude da resposta, como ilustrado no gráfico em 2.5:

Outra forma de escrever o obtido em 2-38 é a partir da transformada de Fourier, para derivadas como exposto no livro *Probability Models in Engineering and Science*, em [3], mostrada de forma extremamente simplificada na equação 2-39:

$$\begin{aligned} x(t) &\Rightarrow \tilde{x}(w); \\ \dot{x}(t) &\Rightarrow (iw)\tilde{x}(w); \\ \ddot{x}(t) &\Rightarrow (iw)^2\tilde{x}(w). \end{aligned} \quad (2-39)$$

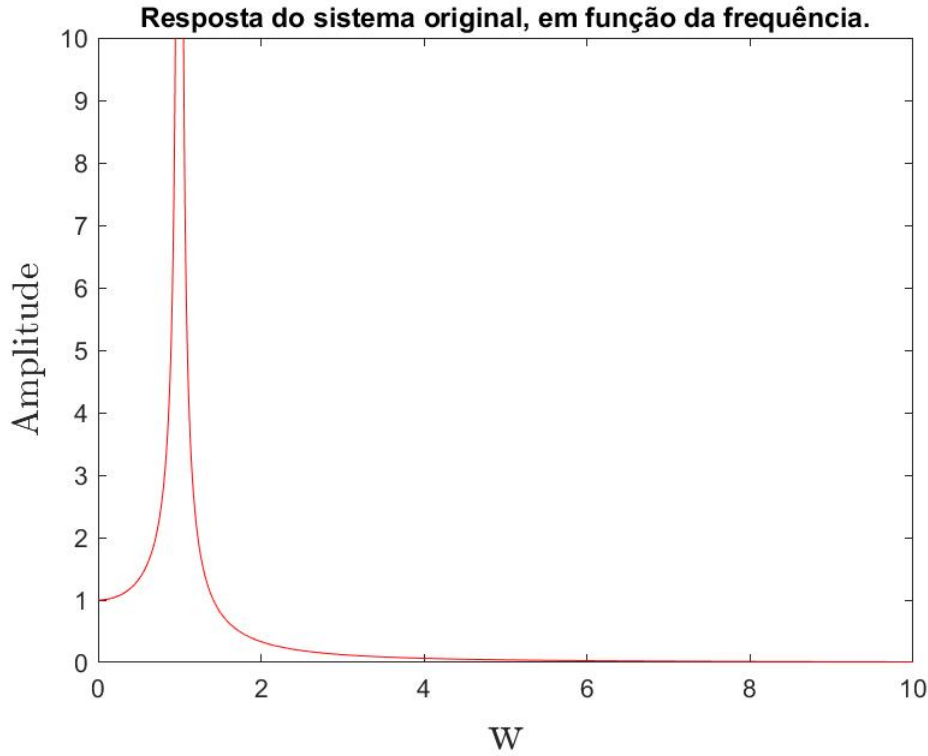


Figura 2.5: Resposta do sistema original em função da frequência.

E usando a formulação em 2-39 para a parte parcial da solução obtemos o exposto em 2-40:

$$(-w^2m + k)\tilde{x}(w) = \tilde{f}(w). \quad (2-40)$$

Assumindo que o conglomerado $(-w^2m + k)$ é invertível (o que acontece para valores de w diferentes das frequências naturais do sistema), temos que:

$$\tilde{x}(w) = (-w^2m + k)^{-1}\tilde{f}(w). \quad (2-41)$$

Convém renomear $(-w^2m + k)^{-1}$ por uma nova função $h(w)$, como exposto no capítulo 5 do livro Modal Analysis [6], visando simplificar próximas passagens. Com isso temos:

$$\tilde{x}(w) = h(w)\tilde{f}(w). \quad (2-42)$$

Desenvolvendo temos o exposto em 2-43:

$$\tilde{x}(w) = \frac{f_0}{m(-w^2 + w_n^2)}. \quad (2-43)$$

Comparando as equações 2-38 e 2-43 podemos perceber que as mesmas

são iguais.

Imagine que nosso sistema esteja exposto a um forçamento externo harmônico. Caso esse forçamento tenha frequência igual a frequencial natural do sistema, irá gerar o fenômeno de ressonância que pode levar o sistema ao colapso. Caso ele tenha frequência diferente, não levará a ressonância, mas pode causar uma vibração indesejada.

Para controlar amplitude vibração do sistema, vamos propor fazer uma alteração no sistema. Vamos incluir no sistema um absorvedor linear. O objetivo do absorvedor será, reduzir a zero a amplitude de vibração do sistema para uma dada frequência de forçamento [4]. Para exemplificar, vamos projetar o absorvedor de forma a defender o sistema da oscilação $w = 1 \text{ rad/s}$, que provoca a ressonância no sistema original. O absorvedor linear será composto por uma massa m_2 , modelada como partícula e, por uma mola com rigidez k_2 . Dessa forma, adicionar um absorvedor ao sistema, consiste em adicionar mais um conjunto massa-mola ao sistema, o que aumenta em 1 o grau de liberdade do sistema original. E com este aumento de grau de liberdade deixamos de ter um sistema de apenas um grau de liberdade, o que implica em algumas mudanças no equacionamento do novo sistema. Por isso, antes de falarmos do projeto do absorvedor em sí, convém estudar o comportamento de sistemas com múltiplos graus de liberdade.

3

Sistema com múltiplos graus de liberdade

Ao longo deste capítulo usaremos como exemplo o sistema ilustrado em 3.1, para estudarmos o comportamento de um sistema de dois graus de liberdade:

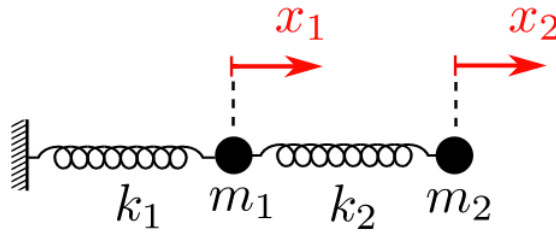


Figura 3.1: Sistema com dois graus de liberdade.

Onde,

k_1 é a rigidez da mola 1;

k_2 é a rigidez da mola 2;

m_1 é a massa da partícula 1;

m_2 é a massa da partícula 2;

x_1 é a variável referente a posição da partícula 1;

x_2 é a variável referente a posição da partícula 2.

Quando as variáveis x_1 e x_2 são iguais a zero, as molas estão relaxadas.

3.1

Equacionamento da dinâmica

O primeiro passo é encontrar a função Lagrangiana e, para isso devemos utilizar a equação 3-1, mas por ser um processo mais complicado, vamos quebrar em etapas. A primeira dessas etapas será encontrar as energias cinética e potencial do sistema, como ilustrado nas equações 3-1 a 3-3:

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2) + \frac{1}{2}(m_2\dot{x}_2^2). \quad (3-1)$$

$$V = \frac{1}{2}(k_1x_1^2) + \frac{1}{2}(k_2(x_2 - x_1)^2). \quad (3-2)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2) + \frac{1}{2}(m_2\dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}(k_1x_1^2) - \frac{1}{2}(k_2(x_2 - x_1)^2). \quad (3-3)$$

De posse da função Lagrangiana podemos prosseguir para o próximo passo, que é similar ao feito para sistemas de 1 grau de liberdade, entretanto com algumas mudanças, pois dessa vez temos dois graus de liberdade e precisamos realizar esse passo para cada grau de liberdade e, por isso, a equação foi adaptada para uma forma mais geral, como segue em 3-4:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left(\frac{L}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (3-4)$$

Onde,

i é um indicador relativo ao GL (no caso $i = 1, 2$);

x_i é a variável de posição relativa ao GL i .

Como neste caso temos dois graus de liberdade, teremos duas equações da dinâmica, que serão obtidas através do desenvolvimento das equações expostas em 3-5 e 3-6:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left(\frac{L}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (3-5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \left(\frac{L}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (3-6)$$

E substituindo o obtido na equação 3-3 em 3-5 e 3-6, temos:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) &= 0. \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3-7)$$

Com as equações da dinâmica em mãos podemos passar para uma nova etapa, que consiste em reescrever as equações do movimento na forma matricial, para futuramente propor uma solução para as equações. Para o nosso caso de dois graus de liberdade podemos reescrever a equação 3-7 como exposto em 3-8:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3-8)$$

Ou seja:

$$M\ddot{X} + KX = 0. \quad (3-9)$$

Onde,

M é a matriz da massa do sistema;

K é a matriz de rigidez do sistema;

X é o vetor das posições das partículas, presentes no sistema;

\ddot{X} é o vetor das velocidades das partículas, presentes no sistema.

Como já vimos no caso de um grau de liberdade, a partir daqui devemos propor uma solução para o sistema.

3.2

Cálculo de frequências e modos

De forma similar ao caso de 1 grau de liberdade vamos propor uma solução para a parte homogênea. Dentre as inúmeras possibilidades, a que será estudada neste trabalho de conclusão de curso é da forma $e^{i\omega t}U$, em que $e^{i\omega t}$ é um escalar e, U é um vetor de constantes não-nulo. Como segue em 3-10:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{i\omega t}U; \\ \dot{X}(t) &= (i\omega)e^{i\omega t}U; \\ \ddot{X}(t) &= (i\omega)^2e^{i\omega t}U = -\omega^2e^{i\omega t}U. \end{aligned} \tag{3-10}$$

Onde,

i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$).

Substituindo a solução proposta em 3-9, obtemos o exposto na equação 3-11:

$$M(-\omega^2e^{i\omega t}U) + K(e^{i\omega t}U) = 0. \tag{3-11}$$

E reescrevendo temos:

$$(-\omega^2M + K)Ue^{i\omega t} = 0. \tag{3-12}$$

Para qualquer valor de ωt temos que $e^{i\omega t} \neq 0$. Além disso, foi feita uma hipótese que o vetor de constantes U deve ser não-nulo e, para não contrariar esta suposição precisamos que $(-\omega^2M + K)$ seja não-invertível. Ou seja, $(-\omega^2M + K)$ não admite inversa e, por isso, ela tem seu determinante nulo. O que implica no exposto na equação 3-13:

$$\det(-\omega^2M + K) = 0. \tag{3-13}$$

Ao substituir as matrizes expostas em 3-8, temos:

$$\det \left(-w^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (3-14)$$

Desenvolvendo a equação 3-14 obtemos o exposto em 3-15:

$$\det \left(\begin{bmatrix} -w^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -w^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (3-15)$$

Que resulta em:

$$(-w^2 m_1 + k_1 + k_2)(-w^2 m_2 + k_2) - (k_2^2) = 0. \quad (3-16)$$

Reescrevendo e fazendo as devidas simplificações temos:

$$k_1 k_2 - (k_1 m_2 - k_2 m_1 - k_2 m_2) w^2 + (m_1 m_2) w^4 = 0. \quad (3-17)$$

Isolando w^2 temos:

$$w_{1,2}^2 = \frac{(m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) \pm \sqrt{[-(m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)]^2 - 4(m_1 m_2)(k_1 k_2)}}{2(m_1 m_2)}. \quad (3-18)$$

Para exemplificar, imagine um possível sistema de um grau de liberdade, que recebeu um absorvedor, tornando-o com 2 graus de liberdade. Vamos considerar os seguintes valores para os parâmetros do sistema:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1kg; \\ k_1 &= 1N/m; \\ m_2 &= 1kg; \\ k_2 &= 1N/m; \end{aligned} \quad (3-19)$$

Com isso temos que w vale:

$$w_{1,2}^2 = \frac{(1 + 1 + 1) \pm \sqrt{[-(1 + 1 + 1)]^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}. \quad (3-20)$$

Ou seja:

$$w_{1,2}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (3-21)$$

Ao observar a equação 3-21 percebemos que $w_1 \cong 1,618$ e $w_2 \cong 0,618$. Para seguir com o equacionamento devemos substituir o obtido nesta equação

em 3-12 e, lembrando que para qualquer valor de wt temos que $e^{\pm iwt} \neq 0$, podemos descobrir os modos de vibração do sistema, como comentado em [2], que consistem nesses vetores de constantes associados a cada frequência natural do sistema (U_1 e U_2).

Desenvolvendo para o primeiro modo de vibração, isto é U_1 temos:

$$\begin{bmatrix} -w_1^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -w_1^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3-22)$$

Substituindo os valores dos parâmetros obtidos em 3-19 temos:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3+\sqrt{5}}{2} + 2 & -1 \\ -1 & -\frac{3+\sqrt{5}}{2} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3-23)$$

Resultando no sistema de equações:

$$\begin{aligned} (-\frac{3+\sqrt{5}}{2} + 2)a - b &= 0; \\ -a + (-\frac{3+\sqrt{5}}{2} + 1)b &= 0. \end{aligned} \quad (3-24)$$

E como este é um sistema indeterminado temos:

$$b = (\frac{1 - \sqrt{5}}{2})a. \quad (3-25)$$

Ou seja:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \gamma. \quad (3-26)$$

Onde,

$\gamma \in \mathbb{R}^*$.

Vale ressaltar que como U_1 é um modo de vibração, a constante γ não pode ser nula, ou seja, $\gamma \neq 0$.

E para U_2 temos:

$$\begin{bmatrix} -w_2^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -w_2^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3-27)$$

Substituindo os valores dos parâmetros obtidos em 3-19 temos:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3-\sqrt{5}}{2} + 2 & -1 \\ -1 & -\frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3-28)$$

Que resulta no sistema de equações:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2} + 2\right)c - d &= 0; \\ -c + \left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1\right)d &= 0. \end{aligned} \quad (3-29)$$

E como este é um sistema indeterminado temos:

$$d = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)c. \quad (3-30)$$

Ou seja:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \beta. \quad (3-31)$$

Onde,

$$\beta \in \mathbb{R}^*.$$

Vale ressaltar que como U_2 é um modo de vibração, a constante β não pode ser nula, ou seja, $\beta \neq 0$.

Com isso conhecemos as frequências naturais do sistema e seus modos de vibração associados. E a partir de agora só precisamos encontrar um método de agrupar todos as 4 soluções encontradas para a parte homogênea e, isso pode ser realizado através da combinação linear das soluções encontradas, isto é, fazer uma combinação linear entre $e^{\pm iw_1 t}U_1$ e $e^{\pm iw_2 t}U_2$.

Além disso, vale a pena lembrar da fórmula de Euler, exposta no capítulo de um grau de liberdade e, por meio dela podemos escrever a solução da parte homogênea como segue em 3-32:

$$\begin{aligned} X(t) &= (\alpha_1 \cos w_1 t + i\alpha_2 \sin w_1 t)U_1 + (\alpha_3 \cos w_1 t - i\alpha_4 \sin w_1 t)U_1 \\ &+ (\alpha_5 \cos w_2 t + i\alpha_6 \sin w_2 t)U_2 + (\alpha_7 \cos w_2 t - i\alpha_8 \sin w_2 t)U_2. \end{aligned} \quad (3-32)$$

Colocando em evidências as funções trigonométricas temos:

$$\begin{aligned} X(t) &= [(\alpha_1 + \alpha_3)(\cos w_1 t) + i(\alpha_2 - \alpha_4)(\sin w_1 t)]U_1 \\ &+ [(\alpha_5 + \alpha_7)(\cos w_2 t) + i(\alpha_6 - \alpha_8)(\sin w_2 t)]U_2. \end{aligned} \quad (3-33)$$

Podemos simplificar essa dupla de constantes $(\alpha_x \pm \alpha_z)$, por apenas uma única constante, resultando em:

$$X(t) = [(A_1)(\cos w_1 t) + (B_1)(\sin w_1 t)]U_1 + [(A_2)(\cos w_2 t) + (B_2)(\sin w_2 t)]U_2. \quad (3-34)$$

Com isso descobrimos a parte homogênea da solução. Entretanto, devemos lembrar que este sistema pode estar exposto a um forçamento externo e, convém estudar o que o forçamento provoca na solução do sistema.

3.3

Resposta a um forçamento

No estudo de sistemas com 1 grau de liberdade vimos que forçamentos interessantes de serem analisados são forçamento harmônicos, por isso vamos supor que no sistema ilustrado pela 3.1 atue um forçamento como na equação 3-35:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \cos wt \quad (3-35)$$

Considerando esta força temos:

$$M\ddot{X} + KX = F. \quad (3-36)$$

Com isso, podemos propor para solução particular algo similar ao foçamento, como em 3-37:

$$\begin{aligned} X_p(t) &= J \cos wt; \\ \dot{X}_p(t) &= -Jw \sin wt; \\ \ddot{X}_p(t) &= -Jw^2 \cos wt. \end{aligned} \quad (3-37)$$

Onde,

J é um vetor de constantes;

w é a frequência do forçamento externo, supondo que seja diferente das frequências naturais do sistema.

Substituindo a solução proposta para a parte particular 3-37 em 3-36 temos o exposto em 3-38:

$$-MJw^2 \cos wt + KJ \cos wt = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \cos wt. \quad (3-38)$$

Cortando todos os termos $\cos wt$ e rearrumando temos o exposto em 3-39:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j_1 w^2 \\ -j_2 w^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \quad (3-39)$$

Reescrevendo temos um sistema de equações, como ilustrado em 3-40:

$$\begin{aligned} (-m_1 w^2 + k_1 + k_2)j_1 - k_2 j_2 &= f_1; \\ -k_2 j_1 + (-m_2 w^2 + k_2)j_2 &= f_2. \end{aligned} \quad (3-40)$$

Seguindo o exemplo proposto nas equações 3-27 e 3-36 e supondo que as amplitudes de forçamento sejam $f_1 = f_2 = f_0 = 1N$ e que a oscilação do forçamento seja $w = 1 \text{ rad/s}$, temos o exposto em 3-41:

$$\begin{aligned} j_2 &= -2; \\ j_1 &= -1. \end{aligned} \quad (3-41)$$

Ou seja:

$$X_p(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \cos t. \quad (3-42)$$

De posse da solução particular só precisamos junta-la à parcela homogênea para encontrar a solução geral deste sistema de dois graus de liberdade.

3.4 Solução geral

Somando as parcelas: homogênea e particular temos o exposto em 3-43:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t). \quad (3-43)$$

Onde,

$X(t)$ é o vetor de soluções propostas do sistema, em função do tempo;

$X_h(t)$ é o vetor de soluções referentes a parte homogênea;

$X_p(t)$ é o vetor de soluções referentes a parte particular.

Substituindo o encontrado nas equações 3-34 e 3-42 em 3-43, temos:

$$\begin{aligned} X(t) &= [(A_1)(\cos w_{n1}t) + (B_1)(\sin w_{n1}t)]U_1 \\ &+ [(A_2)(\cos w_{n2}t) + (B_2)(\sin w_{n2}t)]U_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \cos t. \end{aligned} \quad (3-44)$$

E a partir das condições iniciais do problema, podemos encontrar as constantes A_1 , A_2 , B_1 e B_2 terminando assim de equacionar a solução do

sistema de múltiplos graus de liberdade, da mesma maneira como encontramos com apenas 1 grau de liberdade. E mantendo o padrão das escolhas feitas na seção de 1 grau de liberdade, ou seja, supondo que as condições iniciais são nulas ($x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$), temos a solução do sistema bem simplificada, visto que com essas condições iniciais de velocidade as constantes B_1 e B_2 são iguais a zero, como segue em 3-45:

$$X(t) = \left[\left(1 - \frac{3\sqrt{5} + 5}{10}\right)(\cos w_{n1}t) \right] U_1 + \left[\left(\frac{3\sqrt{5} + 5}{10}\right)(\cos w_{n2}t) \right] U_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \cos t. \quad (3-45)$$

Para terminar esse exemplo do absorvedor podemos estudar a solução do novo sistema, assumindo que o forçamento terá a mesma frequência de oscilação do exemplo feito no primeiro grau de liberdade, isto é $w = w_n$, do sistema original com 1 Grau de liberdade. E para analisar essa resposta em função do tempo, podemos observar o gráfico em 3.2:

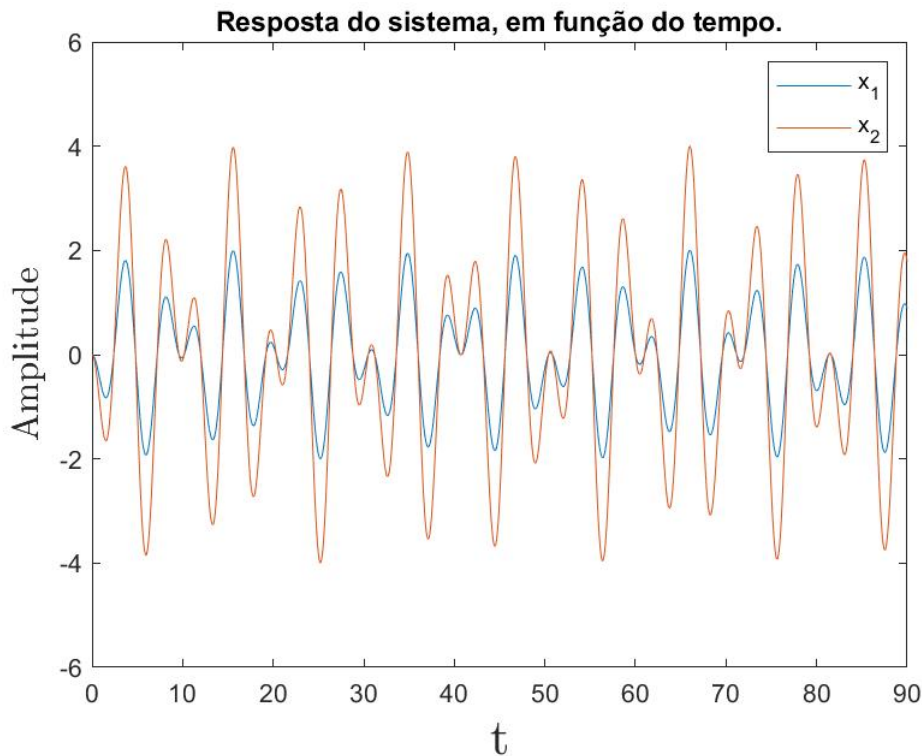


Figura 3.2: Resposta do sistema, em função do tempo.

Como podemos ver a amplitude da resposta não aumenta com o tempo, ou seja, este sistema não entra em ressonância. Por outro lado, estudando a resposta do sistema, podemos ver que ela depende do tempo, mas o que

de fato dita os pontos máximos e mínimos de oscilação da resposta é a combinação entre as frequências naturais e de oscilamento, ou seja, para projetar o absorvedor precisamos analisar a resposta no domínio da frequência.

3.5

Resposta em função da frequência

Precisamos encontrar uma resposta apenas em função da frequência, ou seja, retirar a variável referente ao tempo do equacionamento. Uma maneira possível é fazendo um caminho similar ao feito em 3-39, onde mudamos a representação, passando do domínio do tempo, para o domínio da frequência. Entretanto, como comentado na seção de 1 grau de liberdade podemos encontrar a resposta em função da frequência, através de um método mais interessante, como segue em 3-46:

$$\tilde{X}(w) = H(w)\tilde{F}(w). \quad (3-46)$$

E desenvolvendo para o exemplo do sistemas de dois graus de liberdade temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(f_0(-m_2w^2+k_2))}{(k_1m_2w^2-k_1k_2+k_2m_1w^2+k_2m_2w^2-m_1m_2w^4)} \\ \frac{-(f_0k_2)}{(k_1m_2w^2-k_1k_2+k_2m_1w^2+k_2m_2w^2-m_1m_2w^4)} \end{bmatrix}. \quad (3-47)$$

E ao substituir os parâmetros pelos valores dados em 3-19 temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(-w^2+1)}{(-1+3w^2-w^4)} \\ \frac{-1}{(-1+3w^2-w^4)} \end{bmatrix}. \quad (3-48)$$

Com isso podemos gerar um gráfico, da resposta em função da frequência, ilustrado em 3.3, de forma similar ao exposto em [1]:

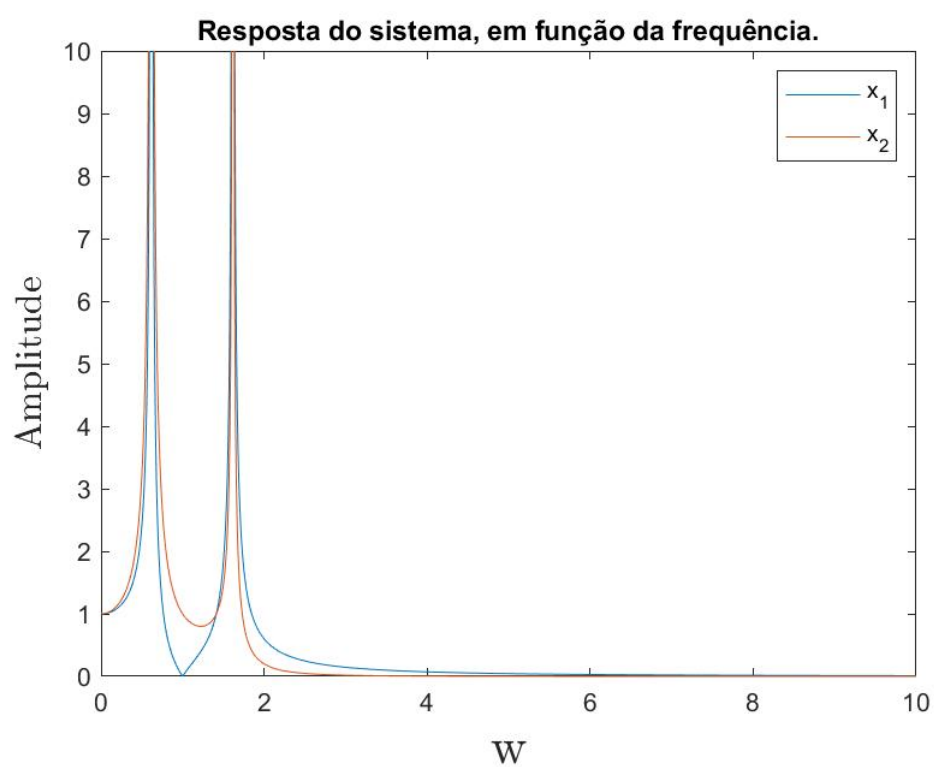


Figura 3.3: Resposta do sistema, em função da frequência.

4

Design do absorvedor

Finalmente possuímos todas as ferramentas para poder projetar absorvedores lineares. Por isso, vamos voltar ao exemplo tratado no final da seção referente a sistemas com 1 grau de liberdade, onde tínhamos um sistema de 1 GL, onde atuava um forçamento externo, que oscilava na mesma frequência que a natural do sistema, provocando ressonância no sistema. Com isso, uma possibilidade para evitar este problema seria acoplando um absorvedor linear a este sistema, transformando-o em um sistema de 2 graus de liberdade, entretanto ainda não foi explicado como projetar o absorvedor.

Para projetar o absorvedor linear temos que definir os parâmetros k_2 e m_2 do absorvedor de modo que o sistema, para uma determinada frequência, tenha sua amplitude de resposta, de um dado grau de liberdade, reduzida. Para isso, devemos igualar a amplitude de oscilação, de um determinado grau de liberdade, a um valor que não prejudique o sistema, como por exemplo zero. Isso significa igualar a componente do vetor $\tilde{X}(w)$ desejada a zero e, com isso descobrir os valores de k_2 e m_2 que satisfazem esses requisitos.

Para facilitar o entendimento vamos considerar que o forçamento continuará atuando sobre o grau de liberdade do sistema original, ou seja, $\tilde{F}(w) = \begin{bmatrix} f_0 \cos w_n t \\ 0 \end{bmatrix}$. Usando este forçamento temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(f_0(-m_2 w^2 + k_2))}{(k_1 m_2 w^2 - k_1 k_2 + k_2 m_1 w^2 + k_2 m_2 w^2 - m_1 m_2 w^4)} \\ \frac{-(f_0 k_2)}{(k_1 m_2 w^2 - k_1 k_2 + k_2 m_1 w^2 + k_2 m_2 w^2 - m_1 m_2 w^4)} \end{bmatrix}. \quad (4-1)$$

Como x_1 define a posição da massa 1, podemos estipular qual será a amplitude que a massa percorre, para uma determinada frequência de oscilação. Neste caso queremos zerar a amplitude de oscilação do primeiro grau de liberdade, devemos igualar x_1 a zero, como segue em 4-2:

$$x_1 = -(f_0(-m_2 w^2 + k_2)) = 0. \quad (4-2)$$

Para garantir que a amplitude de vibração do primeiro grau de liberdade seja zero para qualquer valor de f_0 , o termo $(-m_2 w^2 + k_2)$ deve ser zero. Como estamos interessados em zerar a amplitude de frequência de vibração para uma frequência de excitação w igual a frequência natural do sistema sem o absorvedor, isto é, $w_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ encontramos a relação dos parâmetros do absorvedor como mostra na equação 4-3:

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}. \quad (4-3)$$

E substituindo os parâmetros m_1 e k_1 do exemplo, temos:

$$\frac{k_2}{m_2} = 1. \quad (4-4)$$

Ou seja, para zerar amplitude do primeiro grau de liberdade precisamos que os parâmetros m_2 e k_2 tenham valor numérico igual. Após o projeto do absorvedor, vamos comparar as curvas de resposta em frequência da amplitude de vibração da massa m_1 para o sistema, com e sem o absorvedor. A resposta do sistema original em função da frequência já foi encontrada anteriormente e já temos uma imagem que a representa e, podemos compara-la com a figura referente a resposta do 1º grau de liberdade, em função da frequência, exposta em 3.3.

Para facilitar a comparação podemos observar a figura 4.1, que consiste na superposição dos dois gráficos, com e sem o absorvedor, que corresponde a resposta da massa m_1 para cada um dos sistemas:

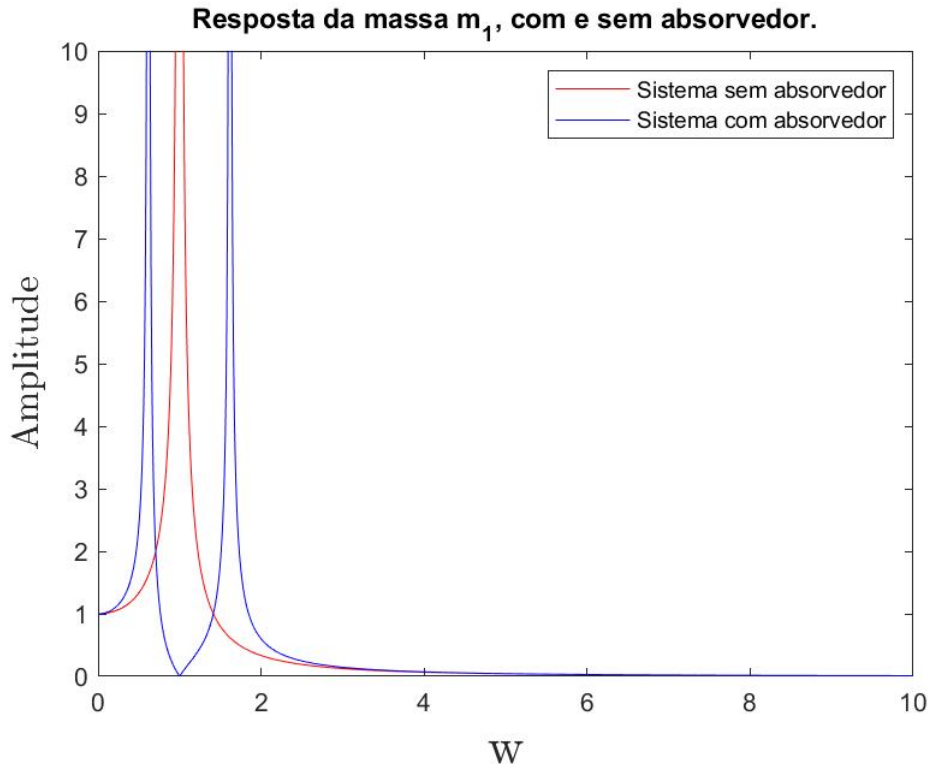


Figura 4.1: Resposta da massa m_1 , com e sem absorvedor.

Podemos observar que para uma frequência igual a 1, temos que a amplitude da resposta do sistema com absorvedor vale zero, enquanto que

no sistema sem absorvedor ela tende a infinito, como exposto no capítulo 5 do livro, cujo autor é Daniel J. Inman [7]. Podemos projetar este absorvedor para diversos sistemas, com múltiplos graus de liberdade.

De forma complementar podemos observar o comportamento dos sistemas com e sem absorvedor, no domínio do tempo, mas esses casos já foram mostrados, quando mostrávamos o caminho para equacionar a resposta no domínio do tempo, nas figuras 2.3 e 2.5.

Apesar deste estudo ter focado no sistema com dois graus de liberdade, este caminho é válido para sistemas com múltiplos graus de liberdade.

5

Conclusão

No presente estudo foram apresentadas formulações para o equacionamento da dinâmica, bem como respostas para sistemas de um e múltiplos graus de liberdade, em função do tempo e em função da frequência de oscilação, para enfim, mostrar como é feito um projeto de um absorvedor linear.

Foi estudado, também, o comportamento de alguns sistemas, que quando expostos a determinadas excitações podem levar a ressonância. Se o sistema é exposto a este fenômeno físico por tempo suficiente o mesmo falhará, visto que os materiais só conseguem se deformar elasticamente até um determinado ponto. Por isso, foi estudado o uso de absorvedores lineares para evitar a falha destes sistemas.

Por meio destes absorvedores conseguimos reduzir ou eliminar a amplitude de vibração de um dos graus de liberdade de um sistema, com múltiplos graus de liberdade em uma determinada faixa de frequências, o que permite controlar de forma passiva as vibrações nas quais o sistema está exposto.

Além disso, com o presente estudo, fica evidente a importância de analisar não só a magnitude da força, que está sendo aplicada a um dado sistema, mas a frequência em que esta atua. Essas forças de baixa magnitude podem causar ressonância no sistema, visto que geram uma amplitude de resposta muito maior do que se tivessem forças relativamente maiores, mas aplicadas de formas contínuas, ou de forma oscilatória, com frequência que não provoquem vibrações indesejadas.

Com isso, podemos perceber que o foco deste projeto foi aprender sobre a teoria e modelagem de absorvedores lineares. Espero que este trabalho sirva de introdução para pessoas que desejem aprender não só sobre absorvedores, mas também como dinâmica e vibrações de sistemas.

Como proposta de trabalhos futuros, para pessoas que desejem se aprofundar em maneiras de controlar as vibrações de forma passiva através do uso de absorvedores, podemos deixar a tarefa de aprimorar a modelagem aqui exposta para absorvedores não-lineares, estudando como eles protegem sistemas da falha. Para incentivar este estudo, podemos já avisar de antemão uma das vantagens de absorvedores não-lineares: estes protegem sistemas em um intervalo maior de frequência de oscilação, quando comparados a um absorvedor linear.

Referências Bibliográficas

- [1] ALSUWAIYAN, Abdullah S., *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering*, Design and Analysis of a Simple Nonlinear Vibration Absorber, Reading, [s. l.], v. 11 (2-VI), p. 84-90, 2014.
- [2] AVITABILE, Peter, *Wiley Sons Ltd*, Modal Testing: A Practitioner's Guide. 1^a. ed. Hoboken, Nova Jersey, EUA, 2017.
- [3] BENAROYA, Haym; MI HAN, Seon; NAGURKA, Mark, *CRC Press*, Probability Models in Engineering and Science. 1^a. ed. Boca Raton, Florida, EUA, 2005.
- [4] FONSECA, Cesar A.; LIMA, Roberta; WAGNER, Gustavo B.; SAMPAIO, Rubens, *Asociación Argentina*, Robust Identification and Passive Control of Vibration of a Test Rig Under Uncertain Conditions, [s. l.], v. Volume XXXIII, p. 1767-1781, 2014.
- [5] GODOY, Willians Roberto Alves, *Escola de Engenharia de São Paulo (USP)*, Projeto, Análise e Otimização de um Absorvedor Dinâmico de Vibrações Não Linear. Orientador: Dr. Marcelo Areias Trindade. 2016. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), [S. l.], 2016. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18149/tde-06112017-140840/publico/Tese-Will-vfinal1804.pdf>. Acesso em: 28 maio 2021.
- [6] HE, Jimin; FU, Zhi-Fang, *Butterworth-Heinemann*, Modal Analysis, 1. ed. Oxônia, Reino Unido, 2001.
- [7] Daniel J., *Pearson Education*, Engineering Vibration. 4. ed. New Jersey, Inc Upper Saddle River, 2014.
- [8] Math is Fun Advanced. Euler's Formula for Complex Numbers. 2017. 11 jun. 2021. Disponível em: <https://www.mathsisfun.com/algebra/eulers-formula.html>. Acesso em: 20 maio 2021.
- [9] MORIN, David, The Lagrangian Method. In: MORIN, David. Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions. [S. l.: s. n.], 2012. cap. 6. Disponível em: <https://scholar.harvard.edu/files/david-morin/files/cmchap6.pdf>. Acesso em: 20 maio 2021.