Mariana Barros dos Santos Dias

Flambagem e Vibração de Anéis e Tubulações Esbeltas em uma Fundação Elástica

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves

Rio de Janeiro

Setembro de 2020

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Mariana Barros dos Santos Dias

Flambagem e Vibração de Anéis e Tubulações Esbeltas em uma Fundação Elástica

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Paulo Batista Gonçalves
Orientador
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Eliane Maria Lopes Carvalho
Universidade Federal Fluminense – UFF

Rio de Janeiro, 29 de Setembro de 2020

Mariana Barros dos Santos Dias

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Federal Fluminense (UFF), em abril de 2017.
Ingressou no mestrado em Engenharia Civil da PUC-Rio em agosto de 2017, atuando na área de Instabilidade e Dinâmica das Estruturas.

Ficha Catalográfica

Mariana Barros dos Santos Dias

Flambagem e Vibração de Anéis e Tubulações Esbeltas em uma Fundação Elástica / Mariana Barros dos Santos Dias; orientador: Paulo Batista Gonçalves. – Rio de Janeiro PUC,
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2020.

v.,166 f.: il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia civil – Teses. 2. Anéis. 3. Tubulações. 4. Frequências naturais. 5. Instabilidade estrutural. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar saúde e por poder realizar este trabalho. Agradeço à minha família pelo incentivo e por toda a assistência investida em minha educação.

Agradeço ao Professor Paulo pela orientação, que foi de imensa contribuição na realização deste trabalho. Agradeço pela dedicação, paciência e incentivo e apoio.

Agradeço ao colega Filipe Fonseca pela ajuda na realização do gráfico tridimensional que é a solução do sistema de equações não lineares obtidas através do método de Galerkin, do capítulo 7.

Agradeço aos professores e colegas da Universidade Federal Flumenense, onde eu comecei os meus estudos em engenharia civil.

Agradeço aos professores da PUC-RJ por transmitirem conhecimento através das aulas e por tirarem dúvidas sempre que possível. Agradeço também aos monitores das disciplinas e aos colegas pelo estudo compartilhado.

Agradeço às secretárias do curso Rita e Luana, ao auxiliar administrativo Jardel e ao coordenador do curso professor Raul Rosas por estarem sempre prontos para a ajudar quando preciso em assuntos da secretaria.

Agradeço à CAPES por financiar este trabalho. "O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”

Resumo

Dias, Mariana Barros dos Santos, Gonçalves, Paulo Batista (Orientador). **Flambagem e vibração de anéis e tubulações esbeltas em uma fundação elástica**. Rio de Janeiro, 2020. 165p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Sabe-se que os anéis e tubulações elásticas de paredes finas estão sujeitos a instabilidades quando sob tensões compressivas. Um exemplo particularmente interessante é a flambagem de um anel elástico sob uma pressão hidrostática. A carga de flambagem é fortemente influenciada pela natureza seguidora da força devida à pressão hidrostática e, se esse efeito for desprezado, a previsão da carga de flambagem crítica pode ser de até 50% para anéis esbeltos. Este trabalho estuda, usando uma formulação variacional não linear, as características de flambagem e vibração de anéis e tubulações apoiados em uma fundação elástica de Pasternak, sendo a fundação de Winkler considerada como um caso particular. Primeiro, a equação de movimento do anel pré-carregado é derivada e a solução analítica dos problemas de autovalor é obtida. A análise paramétrica mostra a influência dos parâmetros geométricos e físicos do anel e da fundação na carga crítica, frequências naturais e relação não linear carga-frequência, considerando o efeito da força seguidora da pressão hidrostática. Adicionalmente, o efeito da fundação nas deformações pré-críticas é estudado. Finalmente, o efeito de uma imperfeição geométrica inicial é avaliado usando o método de Galerkin. Os resultados mostram que os parâmetros da fundação de Pasternak têm um efeito considerável na carga e modo crítico, na frequência fundamental do anel.

Palavras-chave

Instabilidade estrutural, frequências naturais, anéis, tubulações, sensibilidade a imperfeições.

Abstract

Dias, Mariana Barros dos Santos, Gonçalves, Paulo Batista (Advisor). **Buckling and vibration of slender rings and pipes on an elastic foundation**. Rio de Janeiro, 2020. 165p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

It is known that thin-walled elastic rings and pipes are subject to instability when under a state of compressive stresses. A particularly interesting example is the buckling of an elastic ring under hydrostatic pressure. The buckling load is strongly influenced by the following nature of the force due to the hydrostatic pressure and, if this effect is neglected, the forecast of the critical buckling load can be up to 50% for slender rings. This work studies, using a non-linear variational formulation, the buckling and vibration characteristics of rings and pipes supported by a Pasternak elastic foundation, the Winkler foundation being considered as a particular case. First, the equation of motion of the preloaded ring is derived and the analytical solution of the eigenvalue problems is obtained. Parametric analysis shows the influence of the geometric and physical parameters of the ring and the foundation on the critical load, natural frequencies and non-linear load-frequency relationship, considering the force following effect of the hydrostatic pressure. Additionally, the effect of the foundation on pre-critical deformations is studied. Finally, the effect of an initial geometric imperfection is assessed using the Galerkin method. The results show that the parameters of the Pasternak foundation have a considerable effect on the critical load and mode as well as on the natural frequencies of the ring.

Keywords

Structural instability, natural frequencies, rings, pipes, imperfection sensitivity.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

a raio da superfície média não deformada do anel

A área da seção transversal

A^* área delimitada pela superfície média do anel após a deformação

b largura do anel

B amplitude do deslocamento na direção θ

B_n amplitude modal do enésimo modo de vibração na direção θ

C amplitude do deslocamento na direção z

C_n amplitude modal do enésimo modo de vibração na direção z

D parâmetro de rigidez à flexão de uma casca cilíndrica

D_n vetor das amplitudes de deslocamento

dA elemento da área de seção transversal

dP força direcionada para o centro original do anel antes da deformação

dP^* força direcionada para o centro original do anel após a deformação

dP_z^* componente da força direcionada para o centro original do anel após a deformação na direção z

dP_θ^* componente da força direcionada para o centro original do anel após a deformação na direção θ

dS comprimento de um elemento curvo referente às coordenadas cartesianas retangulares

dS^* comprimento de um elemento curvo referente às coordenadas cartesianas retangulares após a deformação

E módulo de elasticidade do material

F funcional de energia

F_{af} funcional de energia de deformação do anel acoplado à fundação Pasternak-Winkler

H amplitude de imperfeição

h	espessura do anel
I	momento de inércia da seção do anel com relação ao eixo neutro
k	raíz quadrada do valor associado ao menor autovalor do problema de estabilidade
$\bar{k}$	raio de giração da seção transversal do anel
K_E	matriz de rigidez do anel
K_g	rigidez devida ao cisalhamento no modelo de Pasternak
$\bar{K}_g$	rigidez devida ao cisalhamento no modelo de Pasternak parametrizada
K_G	matriz de rigidez geométrica
K_M	matriz de massa desconsidera o efeito da inércia à rotação
K_r	parcela linear do modelo de Winkler, responsável pela rigidez transversal da fundação
$\bar{K}_r$	parcela linear do modelo de Winkler parametrizada
$\mathcal{L}$	funcional de Lagrange
M	matriz de massa
m	massa por unidade de comprimento
N	força normal
n	número inteiro positivo
n	número de ondas circunferenciais
n_{cr}	número de ondas circunferenciais associado à carga crítica
p	carga por unidade de área
q	carga por unidade de comprimento
$\bar{q}$	parâmetro de carga de pressão adimensional
q_{cr}	carga crítica
$\bar{q}_{cr}$	carga crítica adimensional
q_f	pressão de um meio elástico no qual o anel está completamente envolvido
r	coordenada polar radial de um ponto localizado no anel
T	energia cinética
t	tempo

U	energia de deformação do anel
$\breve{U}$	energia de deformação do anel imperfeito
U_f	energia de deformação da fundação
V	energia potencial total
$\mathcal{v}$	velocidade
v	componente do vetor de deslocamento de um ponto na superfície média ao longo do anel na direção θ
$\bar{v}$	componente do vetor de deslocamento de um ponto qualquer ao longo do anel na direção θ
$\breve{v}$	deslocamento adicional (imperfeição) na direção θ
v_0	representação da configuração circular na direção θ
v_1	incremento infinitesimal na direção θ
v_{total}	deslocamento de um ponto na superfície média ao longo do anel na direção θ com imperfeição
w	componente do vetor de deslocamento de um ponto na superfície média ao longo do anel na direção z
$\overline{w}$	componente do vetor de deslocamento de um ponto qualquer ao longo do anel na direção z
$\breve{w}$	deslocamento adicional (imperfeição) na direção z
w_0	representação da configuração circular na direção z
w_1	incremento infinitesimal na direção z
w_{total}	deslocamento de um ponto na superfície média ao longo do anel na direção z com imperfeição
x	coordenada cartesiana retangular horizontal
x^*	coordenada cartesiana retangular horizontal após a deformação
y	coordenada cartesiana retangular vertical
y^*	coordenada cartesiana retangular vertical após a deformação
z	variável adicional medida positiva externamente a partir da superfície média
β	rotação em um ponto na superfície média
$\bar{\beta}$	rotações entre os elementos da linha circunferencial antes e após a deformação
δ	variável adimensional que expressa a esbeltez do anel

ε	deformação normal de um elemento de linha circunferencial na superfície média
$\bar{\varepsilon}$	deformação normal do elemento circunferencial
θ	coordenada polar
κ	mudança de curvatura
λ	frequência natural ao quadrado
λ_n	frequência natural ao quadrado associada a um número de ondas circunferenciais n
λ_{1n}	menor frequência natural ao quadrado associada a um número de ondas circunferenciais n
λ_{2n}	maior frequência natural ao quadrado associada a um número de ondas circunferenciais n
λ_e	índice de esbeltez do anel
$\lambda_{e_{lim}}$	índice de esbeltez limite do anel
ν	coeficiente de Poisson
Π	energia potencial total
ρ	massa específica
σ	tensão normal
$\bar{\sigma}$	tensão normal na direção θ
σ_{cr}	tensão crítica
σ_y	tensão de escoamento
Ω	energia potencial gravitacional do carregamento externo
$\breve{\Omega}$	energia potencial gravitacional do carregamento externo para a estrutura imperfeita
ω	frequência natural
ω_n	frequência natural associada a um número de ondas circunferenciais n
ω_{1n}	menor frequência natural associada a um número de ondas circunferenciais n
ω_{2n}	maior frequência natural associada a um número de ondas circunferenciais n

Símbolos usados no item 7.1

a	amplitude de imperfeição
A	amplitude de deslocamento na direção radial
B	amplitude de deslocamento na direção circunferencial
$M_{\theta\theta}$	momento fletor na direção θ
$N_{\theta\theta}$	força normal na direção θ
P	pressão externa
P_c	carga crítica teórica
R	raio da superfície média do cilindro $(D - t)/2$
t	espessura da parede do tubo
v	deslocamento na direção circunferencial
$\bar{v}$	imperfeição na direção circunferencial
w	deslocamento na direção radial
$\overline{w}$	imperfeição na direção radial
Δ_O	variável de ovalização inicial
$\varepsilon_{\theta\theta}^{o}$	deformação na direção θ

1
Introdução

Neste capítulo, apresenta-se uma breve revisão bibliográfica sobre estabilidade e vibrações de tubulações e anéis esbeltos. Anéis e tubulações têm uma ampla gama de aplicações em engenharia civil, engenharia mecânica e biomecânica e em muitas outras aplicações práticas.

1.1.
Revisão bibliográfica

1.1.1.
Análise da estabilidade

A flambagem de anéis isotrópicos esbeltos e tubulações longas sob pressão externa atraiu o interesse dos pesquisadores desde o final da década de 1940. Carrier (1947) foi um dos primeiros pesquisadores a analisar este problema, obtendo soluções aproximadas para as equações algébricas considerando pequenas deformações. A seguir este problema foi analisado por Stevens (1952), Boresi (1955), Timoshenko e Gere (1961) e Wasserman (1961). Wasserman (1961) destaca três tipos de carregamento: (a) pressão hidrostática externa onde a carga está sempre perpendicular ao anel, (b) carregamento radial uniforme onde a carga permanece com a direção original radial e (c) pressão direcionada sempre ao centro do anel indeformado, com cada tipo de carga levado a um valor diferente de carga crítica.

A seguir, Smith e Simitses (1969) estudaram o efeito do cisalhamento e comportamento da carga na estabilidade do anel. O efeito da modelagem do carregamento na carga crítica foi discutido por Singer e Babcock (1970).

Brush e Almroth (1975) apresentam uma formulação não linear para análise do equilíbrio estático e estabilidade de anéis circulares sob carga de pressão de fluido em duas situações: a pressão aplicada permanecendo normal à superfície do anel durante a deformação incremental e também quando a carga de pressão está direcionada ao centro do anel. Primeiramente, desenvolveram a formulação da energia interna de deformação e da energia potencial gravitacional do carregamento externo. A seguir, aplicando o princípio da energia potencial mínima, obtiveram as equações de Euler-Lagrange. As mesmas equações foram obtidas aplicando o princípio do equilíbrio adjacente. Através dessas equações, determinaram a carga crítica. Também estenderam a análise de estabilidade para o caso em que se acrescenta uma fundação elástica do tipo Winkler. Na mesma publicação, os autores apresentaram a formulação não linear para cascas cilíndricas esbeltas, que pode ser aplicada à análise de tubulações longas de parede fina.

Schmidt (1980) discute as diferentes expressões e valores da pressão crítica de anéis esbeltos sob carregamento distribuído ao longo do anel. Ele então deduz a carga crítica para o caso de carga externa com direcional constante para anéis e arcos circulares e o compara com os valores comumente citados na literatura.

Singer e Babcock (1970) e Schmidt (1980), dentre outros, mostraram que de uma forma geral a carga crítica de um anel pode ser escrita na forma

$$q_{cr} = k^2 \frac{EI}{a^3} \qquad (1.1)$$

onde q_{cr} é a carga crítica por unidade de comprimento da linha do centroide; E é o módulo de elasticidade do material; I é o momento de inércia da seção transversal; a é o raio do anel e k^2 está associado ao menor autovalor do problema de estabilidade em consideração. Eles mostram que o valor de k^2 encontrado na literatura varia entre 0.701 e 5.6.

Tadjbakhsh e Odeh (1967) estudaram os possíveis estados de equilíbrio pós-flambagem de anéis elásticos sob pressão, usando a teoria não linear baseada na teoria da elástica de Euler-Bernoulli. Eles consideraram o equilíbrio de um anel circular elástico inextensível submetido a uma pressão externa uniforme constante em magnitude e na direção da normal ao anel deformado. Rehfield (1972) estudou o comportamento pós-crítico inicial de um anel esbelto, com base na teoria de Koiter, seguindo a metodologia proposta por Budiansky (1974).

O comportamento pós-crítico foi também estudado por El Naschie (1975), Sills e Budiansky (1978) e Fu e Waas (1995). O comportamento de anéis fabricados com materiais compostos também foi estudado por vários pesquisadores dentre estes Pavlović *et al.* (1999), Huang *et al.* (2017).

Gumbel (2001) descreveu os mecanismos básicos de flambagem sob pressão hidrostática de revestimentos circulares de tubulações e explicou a origem e limitações das fórmulas de projeto atuais baseadas na teoria linear de flexão simples de anéis. Como base de uma nova abordagem prática para dimensionar o revestimento de tubulações, apresentou uma teoria não linear totalmente consistente e desenvolveu tabelas e fórmulas algébricas para projeto, refletindo a influência das tensões de compressão devidas à pressão na flambagem do anel de revestimento e das imperfeições "características" relacionadas a técnicas de renovação e relacionadas à tubulação hospedeira. Mostrou como a incorporação desses tópicos permite que a teoria seja aplicada com muito mais confiança a uma ampla gama de técnicas de renovação e dimensões de tubulações de revestimento. Finalmente, comparou as previsões de teorias de projeto antigas e novas, circunstâncias em que divergências significativas foram identificadas.

Segundo Rasheed *et al.* (2001), a flambagem de anéis isotrópicos sob pressão externa atraiu o interesse dos pesquisadores desde o final da década de 1950. A fórmula para a pressão crítica de flambagem de anéis esbeltos sob pressão externa é bem conhecida. Essa fórmula foi por eles adaptada para levar em consideração anéis ortotrópicos homogêneos. A flambagem de cascas cilíndricas ortotrópicas também era um assunto de interesse desde a década de 1960. No entanto, as formulações desenvolvidas até o momento exigem soluções numéricas para obter a pressão crítica. No trabalho desses autores, foi desenvolvida uma fórmula analítica de forma fechada para a carga de flambagem de anéis laminados ortotrópicos e cilindros longos. A formulação padrão baseada em energia foi usada para se obter as equações de equilíbrio. A teoria clássica da laminação foi adotada para as equações constitutivas de cascas finas. Essas equações são condensadas estaticamente, em termos das condições de contorno do anel, coeficientes de rigidez para os casos de anéis e cilindros longos são obtidos e usados para se obter a pressão crítica de flambagem. Comparações com alguns resultados existentes e normas de projeto são apresentadas. Várias orientações de fibra e sequências de lâminas são consideradas na análise paramétrica.

Segundo Toscano e Dvorkin (2002), a produção de petróleo e gás a partir de campos de petróleo offshore é hoje em dia cada vez mais importante. Como resultado da crescente demanda de petróleo e, como as reservas de águas rasas não são suficientes, a indústria é impulsionada para desenvolver e explorar campos em águas mais profundas. Na pesquisa desenvolvida pelos autores, uma metodologia para o uso do método dos elementos finitos como uma ferramenta robusta de engenharia para analisar o efeito da tolerância de fabricação no comportamento de colapso e pós-colapso de tubulações de aço foi discutida e ilustrada com exemplos práticos. Embora usando uma formulação de pequena deformação, a correspondência entre os resultados numéricos e os experimentais foi considerada excelente. Para isto, desenvolveram um novo elemento de casca, denominado MITC4-3D, incorporando deformações finitas elasto-plásticas.

Na área de estruturas offshore, Kyriakides e Corona (2007) analisaram em seu livro "*Mechanics of offshore pipelines: buckling and collapse*" a flambagem e colapso de tubulações longas sob pressão externa. Determinaram a pressão clássica de flambagem elástica seguida pela dedução da fórmula de projeto de Timoshenko para o início do colapso de uma tubulação inicialmente ovalizada. Determinaram também as equações de flambagem no regime plástico e a influência de fatores que afetam o colapso foi tratada numericamente. Tais fatores incluem imperfeições iniciais, como ovalização, variações na espessura da parede, tensões residuais, anisotropia de escoamento, dentre outros. Um estudo paramétrico de flambagem e colapso de uma tubulação no regime elástico-plástico sob pressão externa também foi feito. Apresentaram como as imperfeições reais das tubulações podem ser medidas e relataram as imperfeições típicas de forma e espessura da parede em tubulações sem costura, sendo estas usadas nos cálculos de colapso.

Segundo Showkati e Shahandeh (2010), tubulações submarinas são consideradas estruturas de paredes finas nas quais a pressão externa é maior que a pressão interna em alguns casos de transporte de fluidos, levando à flambagem local e sua propagação ao longo de comprimento considerável da tubulação. No estudo feito pelos autores, foi realizado um programa experimental, no qual é investigada a influência de anéis enrijecedores na resistência à flambagem dos dutos. Nos testes, apenas a pressão hidrostática é considerada. O modo de flambagem inicial, a propagação da flambagem, o comportamento pós-flambagem, o desenvolvimento de escoamento da tubulação e o colapso final do oleoduto foram avaliados. Verifica-se que a carga de flambagem cresce muito quando são considerados alguns anéis esbeltos de reforço. Ao diminuir o espaçamento estre anéis, a diferença entre as cargas de flambagem e colapso diminui.

Segundo Azzuni e Guzey (2018), anéis circulares elásticos esbeltos são frequentemente usados para enrijecer tubulações longas ou tanques de armazenamento cilíndricos. Estas estruturas têm sido analisadas usando carregamentos uniformemente distribuídos, mas em muitos casos, perfis de carga não uniformes e têm sido utilizados por alguns pesquisadores em análises teóricas. No entanto, os padrões de carregamento reais podem divergir ligeiramente da aproximação teórica, sobretudo quando se considera a sensibilidade dos anéis às imperfeições iniciais. Azzuni e Guzey (2018) investigam o efeito de pequenas imperfeições e uma carga não uniforme da forma de cosseno no comportamento do anel. Uma equação diferencial não linear do tipo Duffing foi obtida e resolvida usando uma técnica de perturbação para descrever os efeitos de uma carga seguidora normal a um anel com grandes deformações.

1.1.2. Análise de vibrações

O estudo de vibrações é importante na análise de estruturas que podem estar sujeitas a algum movimento oscilatório. No caso de anéis, dependendo do tipo de aplicação, seja em máquinas ou tubulações que podem conter líquido em movimento, carga móvel de trânsito ferroviário em túneis, carga móvel em túnel submerso flutuante, dentre outros, podem alcançar grandes oscilações a ponto de causar ressonância e um consequente colapso ou problema estrutural, caso o estudo de dinâmica não seja levado em consideração.

O trabalho de Wasserman (1961) foi um dos primeiros a abordar a vibrações de anéis, determinando as frequências naturais e modos de vibração. Blevins (1979) em seu livro "Formulas for natural frequency and mode shape" apresenta expressões analíticas para os modos de vibração extensionais, torcionais e de flexão no plano e fora do plano, com base nos trabalhos de Sato (1975), Rao (1971), Kirkhope (1976), Kirkhope (1977) e Mallik e Mead (1977). Este problema também foi estudado por Suzuki (1984), Bickford e Reddy (1985) e Celep (1990).

Rao (2007) estudou a vibração de anéis circulares a fim de encontrar as frequências naturais e modos de vibração e estudar resposta dinâmica da estrutura. Foram analisados quatro tipos de vibração, sendo o primeiro tipo, as de flexão, que ocorrem no plano do anel sem sofrer qualquer extensão da linha central do anel (teoria inextensional). No segundo tipo, ocorrem vibrações de flexão, envolvendo tanto o deslocamento em ângulo reto com o plano do anel quanto à torção. No terceiro tipo, a haste curva ou anel vibram em modos semelhantes às vibrações de torção de uma haste reta. No quarto tipo, o anel possui modos de vibração semelhantes à vibração extensional de uma haste reta. Supõe-se que a linha central não deformada do anel tenha um raio R, a seção transversal do anel seja uniforme e as dimensões da seção transversal do anel sejam pequenas (para um anel fino) em comparação com o raio da linha central do anel.

Mais recentemente, Virgin *et al.* (2018) estudaram a deformação e vibração de anéis elásticos comprimidos em base rígida e Lu *et al.* (2020) propuseram um mecanismo não linear para isolamento de vibração por meio de um anel circular.

1.1.3. Fundação elástica tipo Pasternak

Em várias aplicações, anéis e tubulações estão envolvidos por um meio elástico. A fundação elástica do tipo Pasternak leva em consideração o efeito do cisalhamento. Para tal consideração, adota-se que a fundação é composta de molas conectadas a uma camada imcompressível de espessura unitária que só se deforma por cisalhamento, tal como será explicado no Capítulo 2 (Figura 2.7).

Paliwal e Bhalla (1993) apresentaram a análise estática não linear de uma casca cilíndrica em uma fundação de Pasternak, que foi realizada usando uma nova abordagem segundo Sinharay e Banerjee. Essa abordagem envolve o uso de princípios variacionais e técnicas de Galerkin. O efeito dos parâmetros geométricos, materiais e de fundação nas características de deflexão da carga é investigado para condições de contorno simplesmente apoiadas.

Duc e Thang (2014) apresentaram uma abordagem analítica para investigar a flambagem estática não-linear e pós-flambagem para cascas cilíndricas finas circulares imperfeitas, envolvidas por uma base elástica com camadas de cerâmica-metal-cerâmica (S-FGM) e sujeitas à compressão axial. Aplica-se a técnica de reforço de Lekhnitsky com base elástica tipo Pasternak, função de tensão e método de Bubnov-Galerkin. Resultados numéricos são fornecidos para avaliar os efeitos das propriedades geométricas e materiais, fundações elásticas e reforços externos na flambagem e pós flambagem das cascas S-FGM. Os resultados obtidos são validados comparando com os da literatura.

Bakhtiari-nejad e Bideleh (2012) examinaram a vibração livre não linear de cascas cilíndricas circulares protendidas dispostas em uma fundação Winkler/Pasternak. A não linearidade é considerada devida a grandes deflexões. Os efeitos simultâneos da protensão e da fundação elástica nas frequências naturais das cascas sob várias condições de contorno são examinados extensivamente no estudo. A teoria não linear de Sanders-Koiter é empregada para deduzir as relações deformação-deslocamento. A teoria clássica de casca fina não linear de Love também é aplicada em alguns casos específicos devido ao contraste dos resultados. As funções modais de viga são usadas para aproximar o campo de deslocamento espacial. As equações que governam no estado linear são resolvidas pelo procedimento de Rayleigh–Ritz. Métodos de perturbação são usados para encontrar a relação entre amplitude a de vibração e frequência não linear. Os resultados são comparados com dados teóricos e experimentais publicados para alguns casos específicos.

1.1.4. Exemplos do uso de tubulações e anéis em engenharia

O uso de anéis enrijecedores em tubulações, tanques e vasos de pressões é comum em várias aplicações práticas, aumentando a capacidade de carga e diminuindo a ocorrência de flambagem. Karcher *et al.* (2009) realizaram um teste de flambagem em escala real, Figura 1.1, para tanques de transporte de materiais perigosos, construídos de acordo com as regras do código ASME, Seção XII, com o objetivo de avaliar as cargas máximas permitidas e os detalhes de projeto, já que estes critérios e a base para projetar esses tanques tinham sido questionados. Observa-se no tanque a presença dos enrijecedores circunferenciais constituídos por anéis esbeltos. A Figura 1.2 mostra outro exemplo de um tanque de armazenamento de combustível, enrijecido com anéis, e usado originalmente no projeto Titan da NASA, com um volume de 33.000 galões, estudado por Swanger *et al*. (2015). Em estruturas espaciais, onde o peso da estrutura é um item relevante, empregam-se em geral estruturas leves e esbeltas onde aumenta a probabilidade de perda de estabilidade dos elementos estruturais. A Figura 1.3 ilustra a investigação experimental dos modos de falha de cilindros enrijecidos com anéis sob pressão hidrostática externa conduzida por Cho *et al.* (2018).

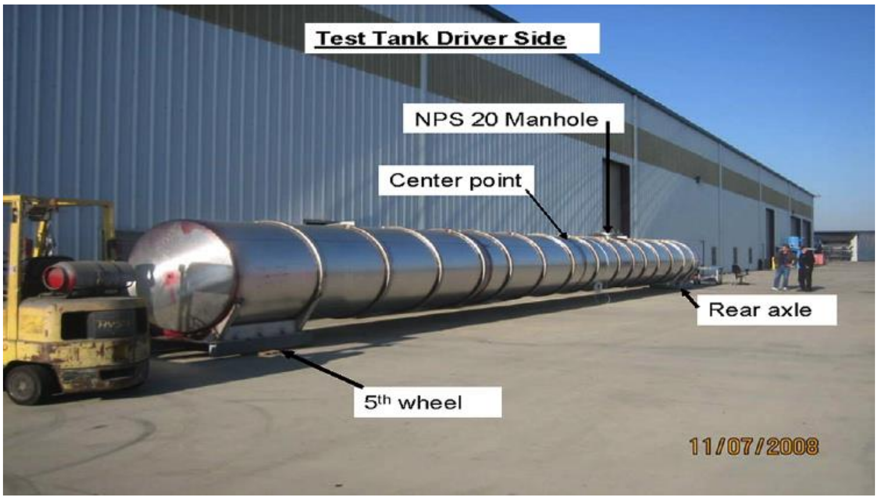


Figura 1.1: Tanque cilíndrico enrijecido com anéis. Karcher *et al*. (2009).

Figura 1.2: Tanque de armazenamento de combustível usado originalmente no projeto Titan da NASA com um volume de 33.000 galões. Swanger *et al*. (2015).

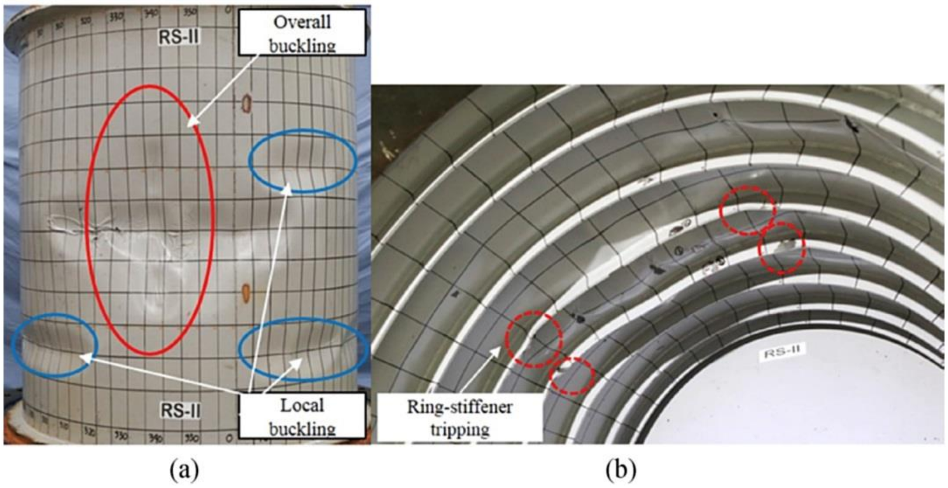


Figura 1.3: Investigação experimental dos modos de falha de cilindros enrijecidos com anéis sob pressão hidrostática externa. Cho *et al*. (2018).

Em muitos casos, a flambagem pode ocorrer devida a uma pressão negativa, como em tubos de vácuo ou em tubulações que sofrem uma rápida despressurização. A Figura 1.4 mostra segmentos do tubo de vácuo do LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) operado por Caltech e MIT, onde residem os componentes óticos do observatório de ondas gravitacionais com uma pressão interna de ar de 10-9 torr, ou seja, um trilionésimo de atmosfera. Criar e manter esse vácuo é absolutamente essencial para a operação do LIGO, pois impede que ondas sonoras causem vibrações nos espelhos. Além disso, operar no vácuo evita que variações de temperatura ocorram dentro dos tubos, o que alteraria a forma ótica do LIGO o suficiente para destruir a qualidade do feixe de laser (Ref. 9.62). Observa-se na figura uma série de anéis paralelos que funcionam como enrijecedores.

a) Vista de um trecho do LIGO-Livingston [1].

b) Interior do LVEA em LIGO-Livingston, Lousiana, fotografado no verão de 2001.

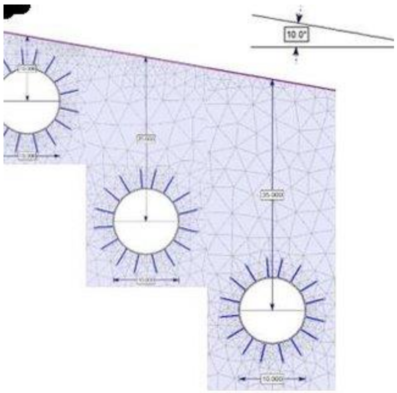
Figura 1.4: Um segmento exposto do tubo de vácuo do LIGO Livingston. Fonte: LIGO.

Tubulações enterradas são usadas em diversas aplicações de engenharia como tubulações de água e esgoto e tubulações para transporte de combustível como gasodutos e oleodutos, dentre outras. Neste caso, tem-se a tubulação em uma fundação que pode ser modelada como uma fundação elástica, como ilustra a Figura 1.5. A Figura 1.6 (a) mostra o revestimento de um túnel de metrô com seção circular, enquanto a Figura 1.6 (b) ilustra a modelagem de um túnel circular com diâmetro de 10 metros, em profundidades de 10, 25 e 35 metros, estudado por Hasanlouyi e Hosseinitoudeshki (2016).

Figura 1.5: Exemplo de tubulação subterrânea. Fonte: TÜV Rheinland[2]

[1] Disponível em: <https://www.ligo.caltech.edu/page/what-is-ligo> Acesso em set. 2020.
[2] Disponível em: <https://www.tuv.com/world/en/sewers-and-underground-piping.html> Acesso em set. 2020.

a) Revestimento de um túnel de metrô (túnel de São Gotardo, Suíça) com seção circular[3].

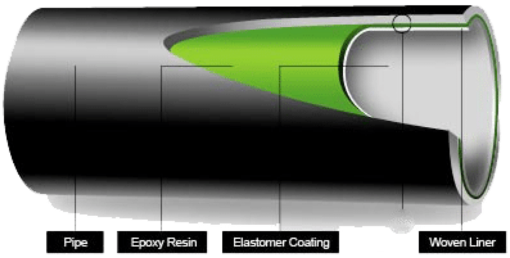


b) modelagem do túnel circular com diâmetro de 10 metros, em profundidades de 10, 25 e 35 metros. Hasanlouyi e Hosseinitoudeshki (2016).

Figura 1.6: Exemplo de túnel e modelagem de túnel

Em muitas aplicações, a tubulação possui internamente um revestimento de outro material (*pipe lining*), que pode ser usado, por exemplo, para proteger a tubulação de fluídos agressivos, minimizando, por exemplo, a corrosão do tubo, ou para evitar vazamentos em tubulações avariadas ou mesmo impedir a invasão de raízes em tubulações subterrâneas (Mogielski *et al.*, 2017). Em alguns casos, o comportamento mecânico do revestimento pode ser analisado como uma tubulação envolvida por uma fundação elástica. A Figura 1.7 ilustra exemplos tubulação com revestimento interno. Em virtude da esbeltez do revestimento, este pode sofrer perda de estabilidade na presença de vácuo ou pressão externa e o tubo externo pode ser modelado como uma fundação elástica.

[3] Disponível em: <https://civildigital.com/road-tunnels-vehicular-tunnels-types-shapes-components-advantages-considerations/circular-metro-tunnel/> Acesso em set. 2020.



a) Tubo com revestimento de epoxy[4].

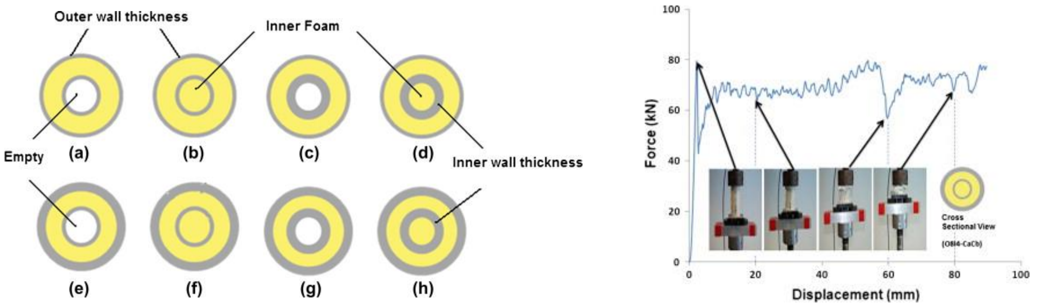
b) tubo HDPE com revestimento de nylon - 6"× 40' [5]

Figura 1.7: Tubulações com revestimento interno em material polimérico.

Em alguns casos, principalmente em estruturas sanduíche, têm-se elementos estruturais tubulares metálicos preenchidos com um material deformável que pode ser também modelado como uma fundação elástica. Um exemplo são as colunas tubulares preenchidas com um material polimérico ou concreto, como ilustra a Figura 1.8, onde uma estrutura sanduíche constituída de tubos preenchidos com espuma é proposta por Tarlochan *et al.* (2012) para serem aplicados em absorção de energia em casos de explosão e choques. Nesta mesma área de pesquisa, Vuong e Dung (2017) estudaram uma casca cilíndrica enrijecida preenchidas internamente por fundações elásticas, como ilustra na Figura 1.9. Colunas de aço preenchidas por concreto têm sido cada vez mais empregadas em edificações. Hsiao *et al*. (2015), Figura 1.10, investigaram colunas tubulares aço de ultra-alta resistência preenchidas com concreto.

[4] Disponível em: <https://pipelt.com/pipelining/epoxy-pipe-lining-benefits> Acesso em set. 2020.

[5] Disponível em: <https://www.repurposedmaterialsinc.com/hdpe-pipe/hdpe-pipe-with-nylon-liner-6-x-40> Acesso em set. 2020.



a) Possíveis seções

b) Diagrama de tensão-deformação para célula fechada de poliestireno com densidade de 32 kg/m^3

Figura 1.8: Projeto de estrutura sanduíche para aplicações em absorção de energia como proteção contra explosão e resistência a choques. Tarlochan *et al*. (2012).

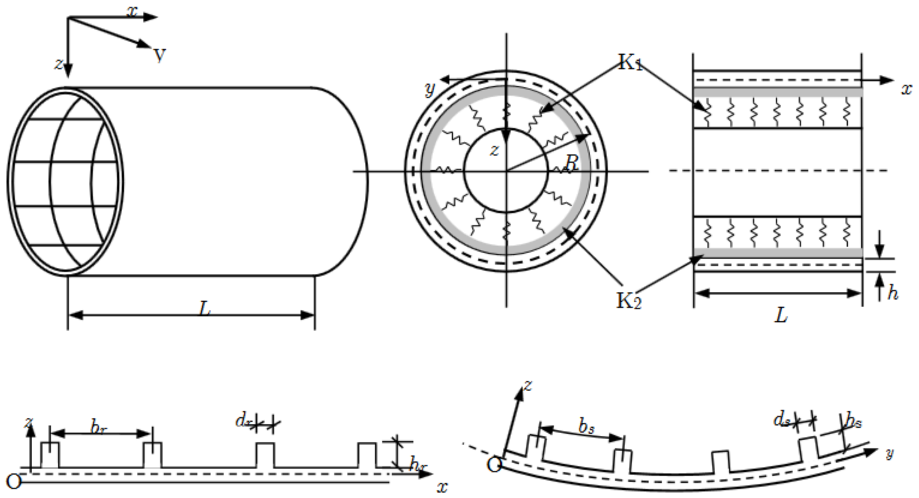


Figura 1.9: Casca cilíndrica enrijecida preenchidas internamente por fundações elásticas Vuong e Dung. (2017)[6].

[6] Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1679-78252017000500950&script=sci_arttext > Acesso em set. 2020.

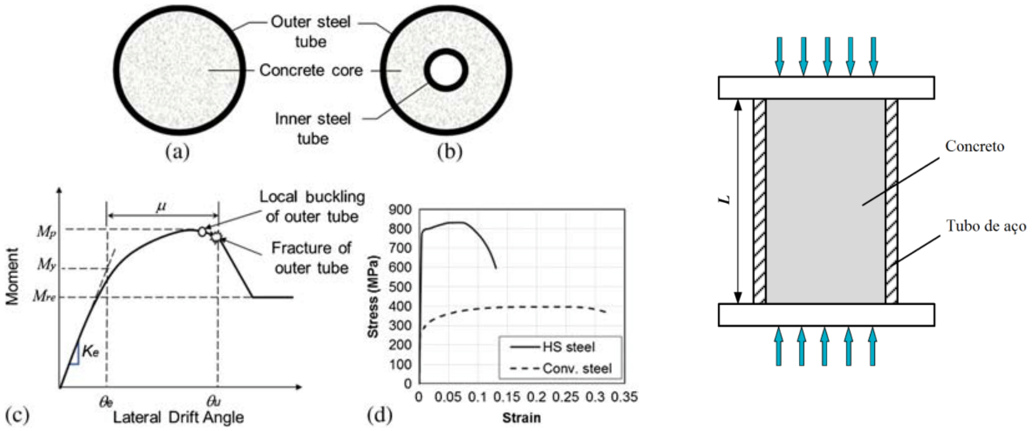


Figura 1.10: Investigação de colunas tubulares aço de ultra-alta resistência preenchidas com concreto Hsiao *et al*. (2015).

As tubulações de águas profundas e ultraprofundas são vulneráveis à propagação de flambagem devida às altas pressões externas. A Figura 1.11 mostra diversos exemplos de estruturas offshore para exploração de óleo e gás, onde se observam várias tubulações submetidas à pressão hidrostática. A tubulação pode entrar em colapso devido a imperfeições geométricas e ovalizações da parede da tubulação. Este é um problema bastante complexo e grave em estruturas offshore, onde a flambagem pode levar a danos irreversíveis e prejuízos elevados. O colapso muda a seção transversal da tubulação, como ilustrado na Figura 1.12, de Karampour e Alrsai (2019). A Figura 1.13 ilustra os experimentos sobre a flambagem de dutos reforçados com anel sob pressão hidrostática conduzidos por Showkati e Shahandeh (2010).

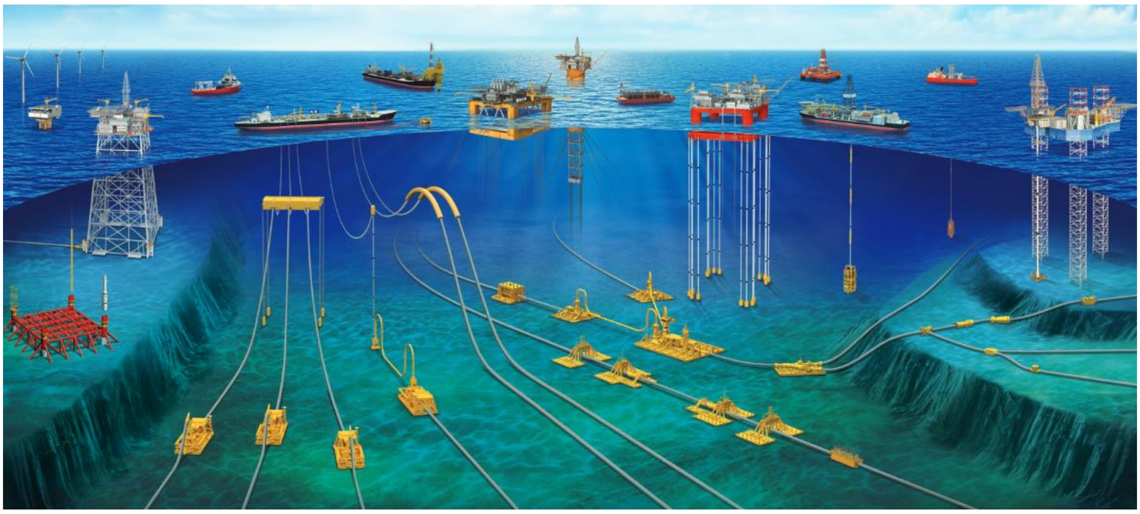


Figura 1.11: Exemplos de estruturas offshore para exploração de óleo e gás onde se observam várias tubulações submetidas a pressão hidrostática [7]

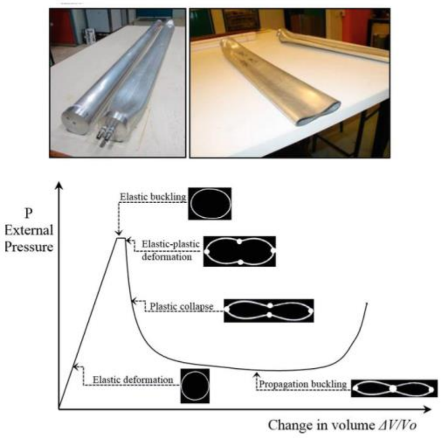


Figura 1.12: Propagação-flambagem-de-dutos submarinos[8]

[7] Disponível em: <https://oilstates.com/offshore/subsea-pipeline-products/> Acesso em set. 2020.

[8] Disponível em: <https://www.intechopen.com/books/new-innovations-in-engineering-education-and-naval-engineering/propagation-buckling-of-subsea-pipelines-and-pipe-in-pipe-systems> Acesso em set. 2020.

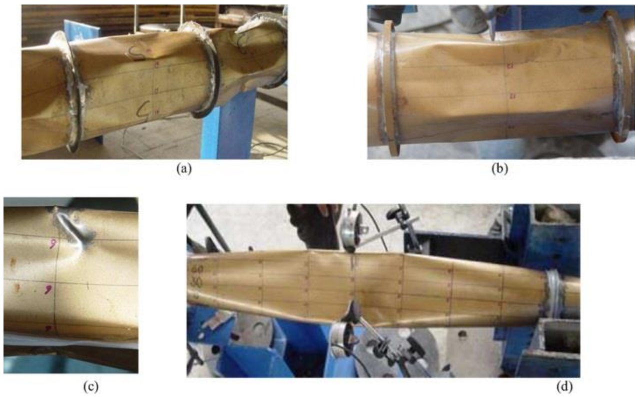


Figura 1.13: Experimentos sobre a de flambagem de dutos reforçados com anel sob pressão hidrostática. Showkati e Shahandeh (2010).

Anéis são também usados em várias aplicações cirúrgicas. A Figura 1.14 mostra um par de anéis após sua inserção na córnea. Neste procedimento cirúrgico, um segmento de anel conhecido como anel intraestromal da córnea, implante ou inserção da córnea, é implantado no olho para corrigir a visão. O procedimento envolve uma pequena incisão na córnea do olho, onde se insere o anel em forma de crescente ou semicircular entre as camadas do estroma da córnea, um de cada lado da pupila. A incorporação dos dois anéis na córnea tem como objetivo achatar a córnea e mudar a refração da luz que passa pela córnea em seu caminho para o olho. Os segmentos de anel intraestromal têm muitos tipos diferentes, incluindo Intacs (EUA), Keraring (Brasil), anel Ferrara (Brasil), Myoring (Áustria) e Intraseg (Reino Unido) (Ref. 9.23).

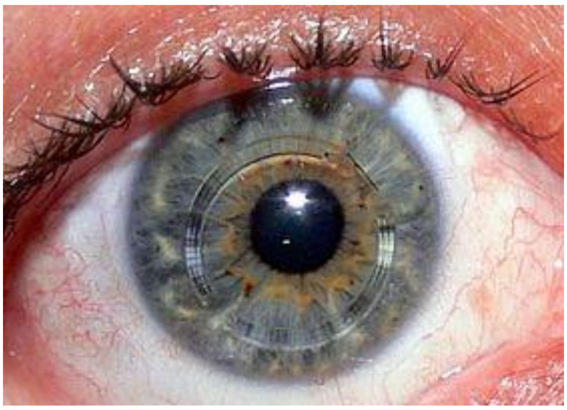


Figura 1.14: Um par de anéis após a inserção na córnea[9]

[9] Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Intrastromal_corneal_ring_segment> Acesso em set. 2020.

1.2. Justificativa do tema dentro da linha de pesquisa

O objetivo desta dissertação é estudar a estabilidade e vibrações de anéis e tubulações de paredes finas em uma base elástica de Pasternak. A importância deste tema se deve à ampla utilização de estruturas enterradas em engenharia. Cabe ressaltar que nenhum trabalho foi encontrado na literatura sobre o efeito da fundação de Pasternak na estabilidade e vibrações destas estruturas.

Esta dissertação faz parte da linha de pesquisa em instabilidade e dinâmica de estruturas do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio. Sabe-se que anéis e tubulações de paredes finas são propensos a instabilidades de flambagem quando sob cargas compressivas. Um exemplo particularmente interessante é a flambagem de um anel elástico fino sob pressão hidrostática externa. A carga de flambagem é fortemente influenciada pela natureza seguidora da pressão e, se esse efeito for negligenciado, a previsão da carga crítica de flambagem pode ser de até 50% para anéis muito finos. Anéis e tubulações têm uma ampla gama de aplicações em engenharia civil, mecânica e biomecânica e, em muitas aplicações, estão envolvidos por um meio elástico. Este trabalho estuda, utilizando uma formulação não linear variacional, as características de flambagem e vibração de anéis e tubulações apoiados em uma fundação elástica de Pasternak. Para uma tubulação longa, a equação de flambagem pode ser deduzida utilizando a teoria de cascas cilíndricas. A análise paramétrica mostra a influência dos parâmetros geométricos e físicos na relação carga crítica, frequências naturais e relação não linear de carga-frequência, considerando o efeito da força seguidora da pressão hidrostática. O efeito de imperfeições geométricas também é considerado na análise.

1.3. Descrição da tese

O presente Capítulo 1 apresenta a revisão bibliográfica, justificativa do tema e descrição da tese.

No Capítulo 2, apresentam-se os funcionais de energia interna de deformação, como base na teoria não linear descrita em Brush e Almroth (1975), energia potencial das cargas externas, energia interna de deformação da fundação de Pasternak e energia cinética. Com base da função de Lagrange e no princípio de Hamilton, são obtidas as equações não lineares de movimento do anel.

No Capítulo 3, obtém-se a solução fundamental de equilíbrio do anel sob pressão externa e são deduzidas as equações de equilíbrio crítico com base no critério do equilíbrio adjacente e da energia potencial mínima. A seguir, apresentam-se as expressões analíticas para o cálculo da carga crítica do anel. Como parte deste estudo, o efeito diferentes hipóteses na obtenção das matrizes de rigidez e rigidez geométrica é investigado.

No Capítulo 4, apresentam-se, com base nas equações de movimento linearizadas, as expressões analíticas para o cálculo das frequências naturais e modos de vibração.

No Capítulo 5, apresentam-se as expressões da carga crítica em forma adimensional e estuda-se, através de uma análise paramétrica, a influência dos parâmetros da fundação elástica na carga e modo crítico do anel. Apresenta-se também um estudo da influência das imperfeições geométricas iniciais no comportamento do anel.

No Capítulo 6, estuda-se, através de uma análise paramétrica, a influência dos parâmetros geométricos e físicos do anel, dos parâmetros da fundação elástica e da carga externa nas frequências naturais e modos de vibração.

No Capítulo 7, estuda-se a sensibilidade da estrutura a imperfeições geométricas iniciais.

Finalmente, no Capítulo 8, apresentam-se as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2
Formulação de Energia

As equações não lineares de equilíbrio e movimento de um anel esbelto podem ser deduzidas através da aplicação, respectivamente, do princípio da energia potencial estacionária e do princípio de Hamilton. A energia potencial total, Π, é a soma da energia interna de deformação U e da energia potencial Ω da carga externa. A função de Lagrange é a diferença entre a energia cinética T e a energia potencial total, Π.

Para a obtenção da energia potencial total, aplica-se a expressão (2.1).

$$V = \int_0^{2\pi} F \, d\theta \qquad (2.1)$$

onde F é a soma dos funcionais de energia, que são descritos ao longo do capítulo. A integral de cada parcela de funcional resulta nas respectivas parcelas de energia. Pode-se também calcular a energia de cada parcela e somá-las em vez de somar as parcelas dos funcionais para integrá-los adiante.

Pelo princípio da energia potencial estacionária, em um ponto estacionário, a energia potencial é mínima e tem equilíbrio estável. Para que isso ocorra, é preciso aplicar as equações de Euler-Lagrange no funcional de energia.

2.1.
Energia interna de deformação

A seguir, apresenta-se a formulação geometricamente não linear de um anel esbelto com base no trabalho de Brush e Almroth (1975).

2.1.1. Geometria

Antes de iniciar uma análise das equações de equilíbrio e movimento para anéis circulares esbeltos, as relações cinemáticas para um anel esbelto como mostrado na Figura 2.1 são determinadas.

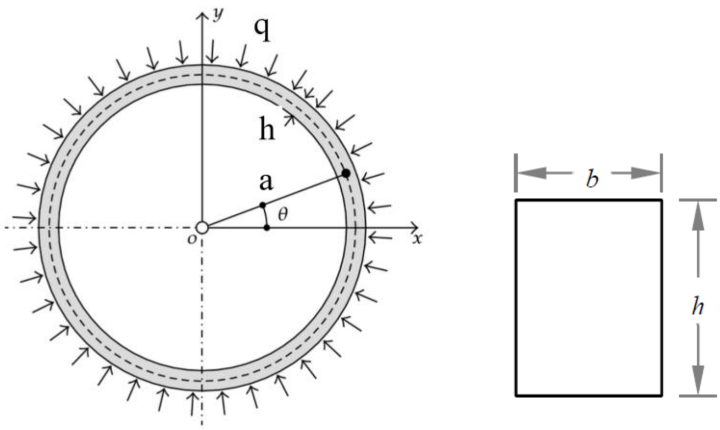


Figura 2.1: Anel circular esbelto sujeito à pressão externa uniforme. Geometria e sistema de coordenadas.

Considera-se que o anel tem uma seção transversal com base b e altura h. Em virtude da simetria, apenas a flexão no plano é considerada. A constante a representa o raio da superfície média não deformada do anel e admite-se que $h \ll a$, de modo que o anel pode ser considerado esbelto.

Os pontos no anel são referidos às coordenadas polares r e θ, como mostra a Figura 2.2.

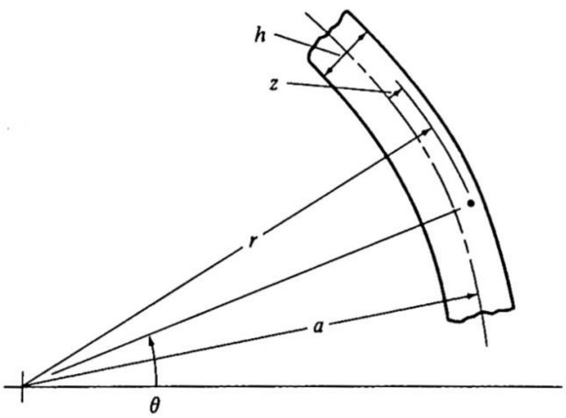
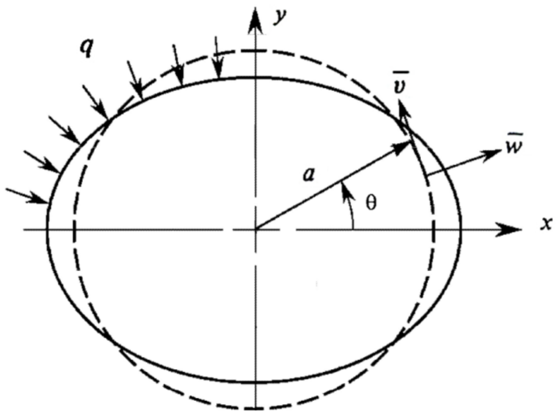


Figura 2.2: Sistema de coordenadas. Brush e Almroth (1975).

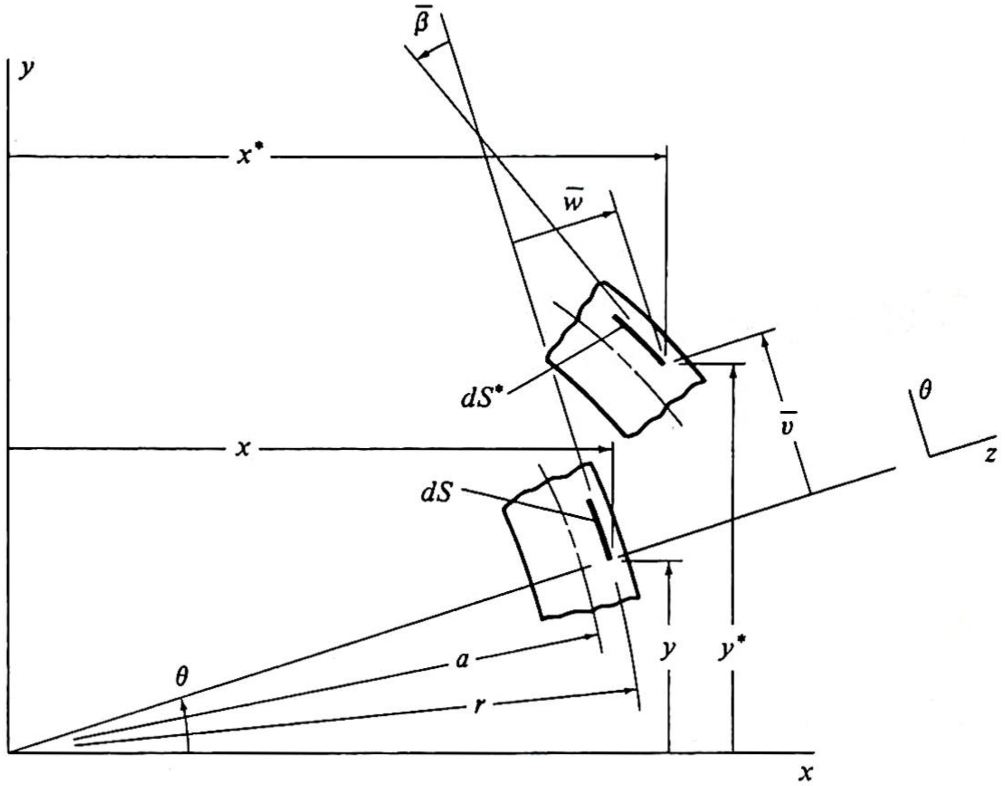
Por conveniência, uma variável adicional é definida pela relação $z = r - a$. Assim, z é medida a partir da superfície média do anel.

2.1.2.
Campo de deslocamentos

Foi considerado um elemento curvo de comprimento indeformado dS, a uma distância z do eixo neutro, cuja posição é definida pelas coordenadas cartesianas x, y, conforme ilustra a Figura 2.3. Após a deformação, o comprimento do elemento é dado por dS^* e sua posição é definida às novas coordenadas x^*, y^*.



(a) Kyriakides e Corona (2007) adaptado pela autora.



(b) Brush e Almroth (1975).

Figura 2.3: Elemento infinitesimal circunferencial antes e depois da deformação.

Sejam $\bar{v}$, $\bar{w}$ as componentes do vetor deslocamento de um ponto qualquer ao longo do anel nas direções θ e z, respectivamente. Então, da Figura 2.3, obtêm-se as seguintes relações entre os dois sistemas de coordenadas:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\
x^* &= r\cos\theta - \bar{v}\,\mathrm{sen}\,\theta + \bar{w}\cos\theta \\
y^* &= r\,\mathrm{sen}\,\theta - \bar{v}\cos\theta + \bar{w}\,\mathrm{sen}\,\theta
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

2.1.3. Deformação específica

Tendo em vista que $\bar{v}$ e $\bar{w}$ são funções contínuas de θ, obtêm-se as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{d\theta} &= -r\,\mathrm{sen}\,\theta - \bar{v}'\,\mathrm{sen}\,\theta - \bar{v}\cos\theta + \bar{w}'\,\mathrm{sen}\,\theta - \bar{w}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \frac{dy^*}{d\theta} &= r\cos\theta + \bar{v}'\cos\theta - \bar{v}\,\mathrm{sen}\,\theta + \bar{w}'\cos\theta + \bar{w}\cos\theta \end{aligned} \qquad (2.3)$$

onde $\bar{v}' \equiv \dfrac{d\bar{v}}{d\theta}$, etc.

Tem-se que o comprimento de arco circunferencial na posição indeformada e deformada é dado em coordenadas polares respectivamente por:

$$(dS)^2 = (r\,d\theta)^2 \qquad (2.4)$$

e

$$\begin{aligned} (dS^*)^2 &= (dx^*)^2 + (dy^*)^2 \\ &= [r^2 + 2r(\bar{v}' + \bar{w}) + (\bar{v}' + \bar{w})^2 + (\bar{v} - \bar{w}')^2](d\theta)^2 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Portanto, tem-se que:

$$\left(\frac{dS^*}{dS}\right)^2 - 1 = 2\left[\frac{\bar{v}' + \bar{w}}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{v}' + \bar{w}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{v} - \bar{w}'}{r}\right)^2\right] \qquad (2.6)$$

que é uma expressão exata para a medida de deformação.

Agora, a deformação específica de um elemento circunferencial a uma distância z do eixo neutro, denotada por $\bar{\varepsilon}$, é definida pela relação (2.7):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{dS^* - dS}{dS} \qquad (2.7)$$

Rearranjando e elevando ao quadrado resulta em:

$$\bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dS^*}{dS}\right)^2 - 1\right] \qquad (2.8)$$

Para $\bar{\varepsilon}$ pequeno comparado com a unidade, a equação pode ser aproximada pela relação:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dS^*}{dS}\right)^2 - 1\right] \qquad (2.9)$$

Introduzindo a Equação (2.6) na Equação (2.9), obtém-se para a deformação específica a expressão não linear:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{v}' + \bar{w}}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{v}' + \bar{w}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{v} - \bar{w}'}{r}\right)^2 \qquad (2.10)$$

Para uma classe intermediária de deformações, a rotação $\bar{\beta}$ mostrada na Figura 2.3 é pequena. As pequenas rotações do elemento infinitesimal são vistas como compostas por duas partes, uma componente no sentido horário devida à rotação $d\bar{w}/dS = d\bar{w}/(r\,d\theta)$ e uma no sentido anti-horário devida ao deslocamento circunferencial do elemento e dada aproximadamente por $\bar{v}/r$.

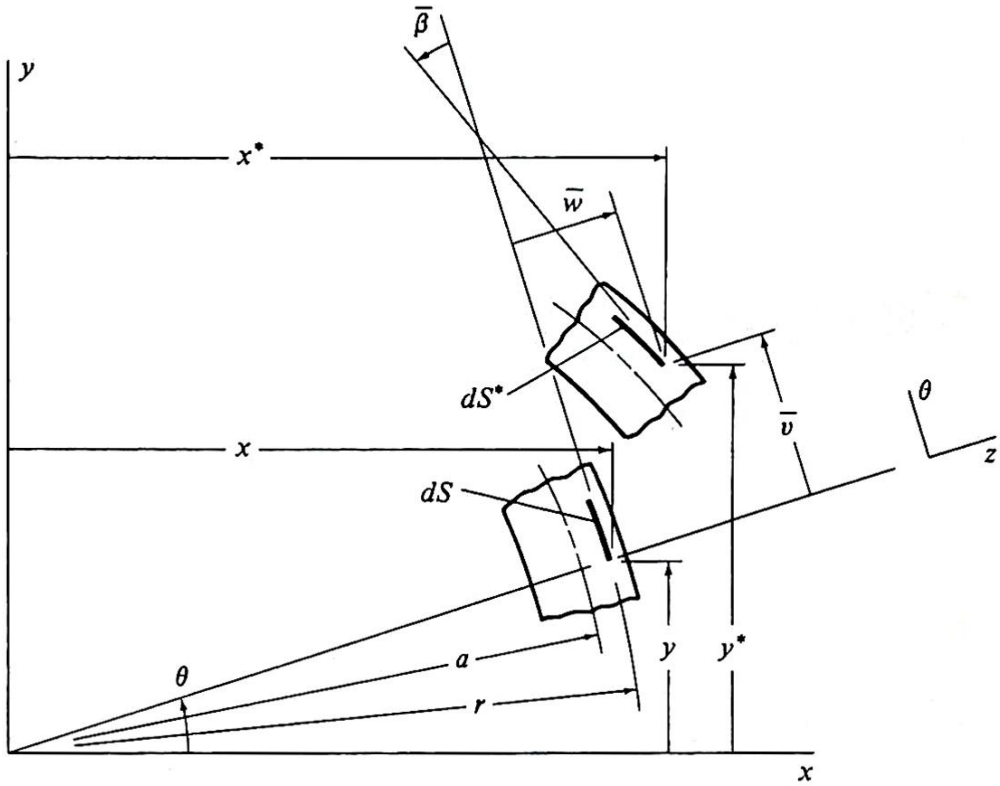


Figura 2.4: Linha circunferencial antes e depois da deformação. Brush e Almroth (1975).

Da combinação das duas partes, tem-se que:

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{v} - \bar{w}'}{r} \qquad (2.11)$$

A rotação $\bar{\beta}$ é positiva no sentido anti-horário.

Para $\bar{\varepsilon}$ e $\bar{\beta}$ pequenos, o quadrado do termo $(\bar{v}' + \bar{w})/r$ pode ser desprezado na Eq. (2.10) resultando em:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{v}' + \bar{w}}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{v} - \bar{w}'}{r}\right)^2 \qquad (2.12)$$

A Equação (2.12) é a relação não linear deformação-deslocamemto para a classe intermediária de deformações em termos de coordenadas polares a ser usada neste trabalho.

2.1.4. Mudança de curvatura

A teoria da flexão de anéis é baseada na aproximação simplificadora de que as normais à superfície média não deformada permanecem retas e normais após a deformação. Portanto, da Figura 2.5, as componentes de deslocamento $\bar{v}$, $\bar{w}$ podem ser expressas em termos dos deslocamentos correspondentes v e w de um ponto na superfície média pelas relações:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v + z\beta \\ \bar{w} &= w \end{aligned} \qquad (2.13)$$

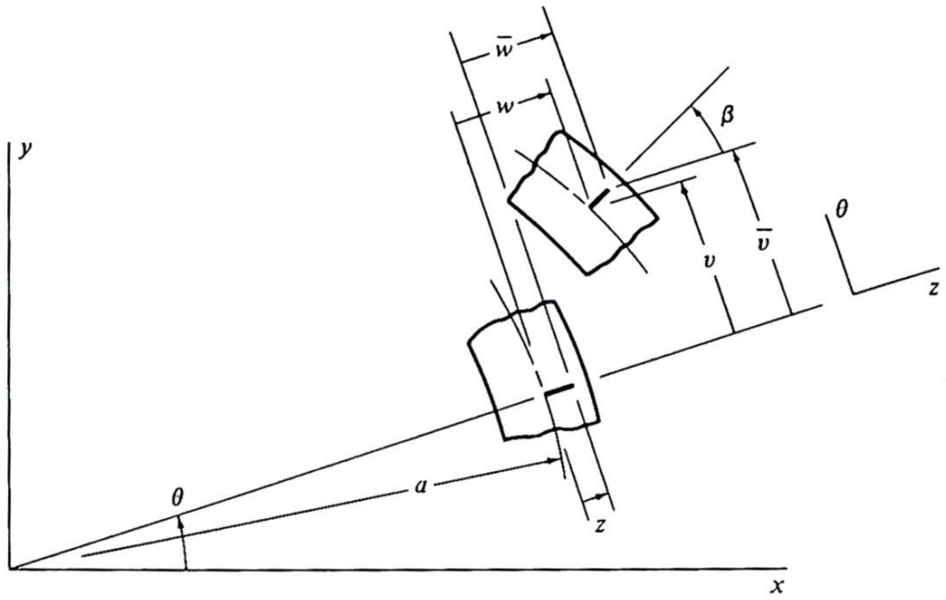


Figura 2.5: Normal à superfície média antes e após a deformação. Brush e Almroth (1975).

onde

$$\beta = \frac{v - w'}{a} \qquad (2.14)$$

representa a rotação na superfície média.

Com a introdução da Eq. (2.14) na Eq. (2.12) e considerando que para um anel esbelto $r \approx a$, tem-se que:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{v' - w}{a} + \frac{1}{2}\beta^2 + z\frac{\beta'}{a} \qquad (2.15)$$

onde o último termo representa a mudança de curvatura κ que pode ser definida como a taxa de variação da rotação β na direção circunferencial, sendo dada por

$$\kappa = \frac{v' - w''}{a^2} \qquad (2.16)$$

e os dois primeiros termos representam a deformação específica da superfície neutra na direção circunferencial, ε.

Assim pode-se escrever de forma concisa que a deformação a uma distância z da superfície neutra é dada por:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + z\kappa \qquad (2.17)$$

Considera-se a seguir que o material é elástico, isotrópico e linear, sendo a relação tensão-deformação dada, seguindo a lei de Hooke, por:

$$\bar{\sigma} = E\bar{\varepsilon} = E(\varepsilon + z\kappa \ ) \qquad (2.18)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a tensão normal circunferencial a uma distância z da superfície neutra.

2.1.5. Energia interna de deformação

A energia de deformação do anel pode ser escrita como:

$$U = \frac{E}{2}\iint \bar{\sigma}\,\bar{\varepsilon}\,dA\,dS^{*} = \frac{E}{2}\iint \bar{\varepsilon}^{2}\,dA\,(r\,d\theta) \qquad (2.19)$$

onde dA é um elemento da área de seção transversal. Introduzindo a Eq. (2.17) e observando que $r \approx a$ para um anel esbelto, torna-se:

$$U = \frac{Ea}{2}\iint (\varepsilon + z\kappa)^{2}\,dA\,d\theta \qquad (2.20)$$

As variáveis ε e κ são funções somente de θ, e a coordenada z é medida a partir do eixo centroide. Portanto, a integração fornece, para a energia de deformação, a expressão:

$$U = \int_{0}^{2\pi}\left(\frac{EAa}{2}\varepsilon^{2}\right)d\theta + \int_{0}^{2\pi}\left(\frac{EIa}{2}\kappa^{2}\right)d\theta \qquad (2.21)$$

onde o primeiro termo corresponde à energia de membrana e o segundo, à energia de deformação por flexão.

2.2. Potencial gravitacional do carregamento externo

O potencial gravitacional do carregamento externo foi deduzido por Brush e Almroth (1975), tanto para a pressão hidrostática (item 2.2.1) quanto para a carga de pressão centralmente direcionada (item 2.2.2).

2.2.1. Pressão hidrostática

Seja um anel sujeito à pressão externa de fluido. Seguindo a notação usual, seja p a carga por unidade de área e q, a carga por unidade de comprimento circunferencial. Então, para um anel de largura b, tem-se que $|q| = |bp|$.

Conforme Bodner (1958) apud Brush e Almroth (1975) (Ref. 9.6), um anel submetido à pressão externa uniforme é um sistema conservativo. Para um sistema conservativo, a variação da energia potencial das cargas aplicadas, à medida que a estrutura se deforma, é o negativo do trabalho das cargas durante a deformação. Para o carregamento de pressão de fluido, a pressão em cada ponto da superfície do anel permanece normal à superfície à medida que o anel se deforma. Assim, a energia potencial da pressão aplicada pode ser expressa em termos do produto da carga q vezes a mudança na área delimitada pela superfície externa do anel. Uma vez que a espessura do anel h não muda significativamente durante a deformação, a mudança na área delimitada pela superfície externa é aproximadamente igual à mudança na área delimitada pela superfície média. Consequentemente, a expressão para a energia potencial Ω é dada por

$$\Omega = -q(\pi a^2 - A^*) \qquad (2.22)$$

onde A^* é a área delimitada pela superfície média do anel após a deformação, e q é considerada positiva apontando para o interior do anel.

Das equações (2.2), as coordenadas de um ponto na superfície média, após deformação, são dadas por:

$$\begin{aligned} x^* &= (a + w)\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y^* &= (a + w)\,\mathrm{sen}\,\theta - v\cos\theta \end{aligned} \qquad (2.23)$$

A área delimitada pela superfície média é convenientemente expressa em termos da integral de linha ao redor do contorno, como segue (veja, por exemplo, a, Kaplan (1952, p. 242 da referência 9.24) apud Brush e Almroth (1975):

$$A^* = \frac{1}{2}\oint_C (-y^*\,dx^* + x^*\,dy^*) \qquad (2.24)$$

Portanto, pode-se escrever que

$$A^* = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-y^*\frac{dx^*}{d\theta} + x^*\frac{dy^*}{d\theta}\right)d\theta \qquad (2.25)$$

Incluindo as equações (2.23) e manipulando algebricamente, obtém-se:

$$A^* = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2 + av' + 2aw + v^2 - vw' + v'w + w^2)\,d\theta \qquad (2.26)$$

mas

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\,d\theta = \pi a^2 \qquad (2.27)$$

é a área inicial do anel e, devido à periodicidade do campo de deslocamentos na direção circunferencial, tem-se que

$$\int_0^{2\pi} v'\,d\theta = 0 \qquad (2.28)$$

Assim pode-se reescrever a Equação (2.26) na forma:

$$A^* = \pi a^2 + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2aw + v^2 - vw' + v'w + w^2)\,d\theta \qquad (2.29)$$

Inserindo (2.29) na Equação (2.22), resulta na expressão da energia potencial gravitacional da pressão hidrostática (2.30).

$$\Omega = qa\int_0^{2\pi}\left[w + \frac{1}{2a}(v^2 - vw' + v'w + w^2)\right]d\theta \qquad (2.30)$$

2.2.2.
Carga de pressão centralmente direcionada

Na análise do item anterior (2.2.1), presumiu-se que a pressão aplicada permanecesse normal à superfície do anel durante a deformação. Considerando que o anel submetido à pressão dirigida sempre ao centro do mesmo, tem-se novamente que o carregamento também é conservativo. Um esboço de um elemento do anel antes e depois da deformação é mostrado na Figura 2.6.

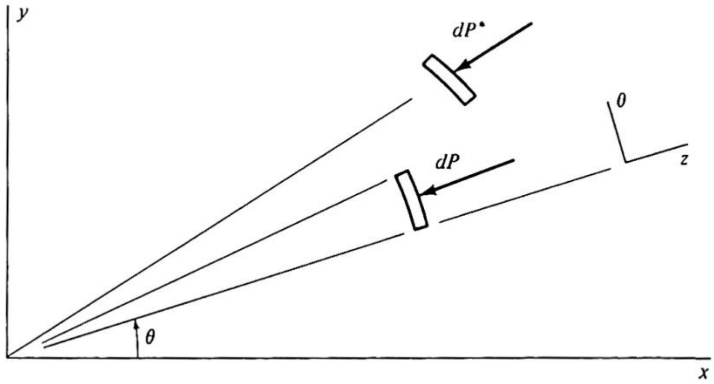


Figura 2.6: Carregamento de pressão direcionado centralmente. Brush e Almroth (1975).

Considere que a força dP após a deformação, dP^*, é direcionada para o centro original do anel. Neste caso, o ângulo entre dP^* e a direção z é aproximadamente v/a. Pressupõe-se que a magnitude da força total permaneça constante durante a deformação; isto é, a alteração no comprimento do elemento do anel durante a deformação é desprezada. Assim, as componentes dP^* nas direções z e θ são dadas aproximadamente pelas expressões:

$$dP_z^* = qa\, d\theta \qquad dP_\theta^* = qv\, d\theta \tag{2.31}$$

e a energia potencial gravitacional pode ser escrita como:

$$\Omega = qa \int_0^{2\pi} \left(w + \frac{1}{2a} v^2 \right) d\theta \tag{2.32}$$

Um outra aproximação que tem sido usada na análise da estabilidade de cascas cilíndricas é considerar que a carga q realiza trabalho só em relação ao deslocamento transversal, reduzindo a Equação (2.32) a:

$$\Omega = qa \int_0^{2\pi} w\, d\theta \tag{2.33}$$

Schmidt (1980) discute as diferentes descrisções do potencial gravitacional encontradas na literature e chama a atenção sobre o seu efeito na carga crítica.

2.3.
Energia de deformação da fundação tipo Pasternak

Existem diversas formulações para fundações elásticas na literatura: Kerr, (1964), Zhaohua e Cook (1983). Dentre estes, os modelos propostos por Winkler (1867) e Pasternak (1954), estão entre os mais utilizados na análise de vigas, placas e cascas sobre base elástica. O modelo de fundação proposto por Winkler tem sido usado por mais de um século. Ele assume que a fundação aplica apenas uma reação q_f normal à estrutura, e que q_f é diretamente proporcional à deflexão da estrutura. Efetivamente, esta fundação é um conjunto de molas lineares perpendiculares à estrutura, como ilustra a Figura 2.7. Assim, existe apenas um parâmetro para caracterizar de base na fundação de Winkler. Dieversos estudos são encontrados na literatura para o cálculo de K_r com base nas características do solo da fundação − Poulos e Davis (1980), Daloglu e Vallabhan (2000). Para melhorar o modelo de Winkler, alguns autores consideraram interações entre as molas e adicionaram um segundo parâmetro ao modelo de fundação. Pasternak estudou o efeito do cisalhamento no material da fundação e introduziu no modelo de Winkler interações de entre as molas. Ele assumiu que as extremidades superiores das molas estão conectadas a uma camada incompressível que resiste apenas à deformação por cisalhamento transversal, como ilustra a Figura 2.7. Outros modelos com dois parâmetros incluem o modelo de Filonenko-Borodic e o modelo de Vlasov (Zhaohua e Cook, 1983).

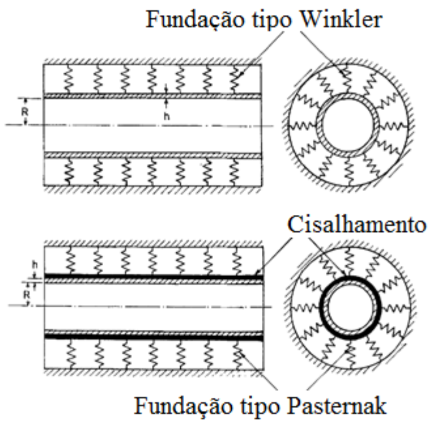


Figura 2.7: Modelos de fundação de Winkler e Pasternak

O efeito da fundação elástica do tipo Pasternak foi empregado por Paliwal e Bhalla (1993), Duc e Thang (2014) e Bakhtiari-nejad e Bideleh (2012), entre outros, na análise de cascas cilíndricas. Para o modelo de fundação de Pasternak, a expressão da energia interna de deformação para um anel esbelto é dada por:

$$U_f = \frac{1}{2} K_r \int_0^{2\pi} w^2 a \; d\theta \; + \frac{1}{2} K_g \int_0^{2\pi} \frac{w_{,\theta}^2}{a} d\theta \qquad (2.34)$$

onde K_r é a parcela linear do modelo de Winkler, responsável pela rigidez transversal ao anel e K_g representa a rigidez devida ao cisalhamento no modelo de Pasternak.

2.4. Energia cinética

A energia cinética de uma partícula de massa m com uma velocidade v é dada por definição por:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (2.35)$$

Para o anel, a energia cinética é dada por:

$$T = \rho \int_A \int_\theta \left(\frac{\dot{\bar{v}}}{2} + \frac{\dot{\bar{w}}}{2} \right) dA \, a d\theta \qquad (2.36)$$

onde ρ é a massa por unidade de volume, o ponto representa a derivada com relação ao tempo $(\partial(\,)/\partial t)$, logo, $\dot{\bar{v}}$ e $\dot{\bar{w}}$ são as derivadas do campo de deslocamentos com relação ao tempo, ou seja, o campo de velocidades.

Derivando a Equação (2.13) com relação ao tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} &= \dot{v} + z\dot{\beta} \\ \dot{\bar{w}} &= \dot{w} \\ \dot{\beta} &= \frac{\dot{v} - \dot{w}'}{a} \end{aligned} \qquad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em (2.36), e realizando a integral ao longo da área da seção transversal, obtém-se:

$$T = \frac{1}{2}\rho A a \int_0^{2\pi} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2)\, d\theta + \frac{1}{2}\rho I a \int_0^{2\pi} \left(\frac{\dot{v} - \dot{w}'}{a}\right)^2 d\theta \qquad (2.38)$$

onde $A = bh$ é a área da seção transversal e $I = (bh^3)/12$, o seu momento de inércia. A primeira integral é a energia cinética associada à inércia à translação e a segunda integral é a energia cinética associada à inércia à rotação.

2.5. Função de Lagrange e equações não lineares de movimento

2.5.1. Equações de equilíbrio estático

Pelo princípio da energia potencial mínima, para que haja equilíbrio estável, a energia potencial deve ser mínima. Analogamente à Equação (2.1), para extremizar a energia potencial total, obtém-se as equações de Euler-Lagrange relativas ao funcional:

$$V = \int_0^{2\pi} F[\theta, v(\theta), w(\theta), v'(\theta), w'(\theta), w''(\theta)]\, d\theta \qquad (2.39)$$

onde F é o funcional considerado.

As equações de Euler-Lagrange, para um integrando da forma da Equação (2.39), são da forma:

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial v'} = 0 \qquad (2.40)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial w'} + \frac{d^2}{d\theta^2}\frac{\partial F}{\partial w''} = 0 \qquad (2.41)$$

O funcional do anel carregado com a fundação consiste na soma do funcional da energia de deformação do anel mais o funcional da pressão hidrostática mais o funcional da fundação, sendo dado por:

$$\begin{aligned} F_{af} = \frac{1}{2}EAa\left[\frac{v'+w}{a}+\frac{1}{2}\frac{(v-w')^2}{a^2}\right]^2+\frac{EIa}{2}\,\frac{(v'-w'')^2}{a^4} \\ +qa\left(w+\frac{1}{2}\frac{v^2-v\,w'+v'w+w^2}{a}\right)+\frac{1}{2}K_r w^2 a \\ +\frac{1}{2}\,\frac{K_g(w')^2}{a} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Obtendo as parcelas da Equação (2.40), obtém-se, considerando o funcional (2.42), a primeira equação não linear de equilíbrio do anel:

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{a^3}(v''-w''')+\frac{1}{2}\frac{EA}{a^3}(v-w')^3+\frac{EA}{a^2}[(v-w')(w+w'')]-\frac{EA}{a}(v''+w') \\ +q(v-w')=0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde se observa a presença de termos lineares, termos não lineares quadráticos, resultantes da curvatura do anel, e termos não lineares cúbicos, que são dados respectivamente por:

- Termos lineares

$$-\frac{EI}{a^3}(v''-w''')-\frac{EA}{a}(v''+w')+q(v-w') \quad (2.44)$$

- Termos não lineares quadráticos

$$\frac{EA}{a^2}[(v-w')(w+w'')] \quad (2.45)$$

- Termos não lineares cúbicos

$$\frac{1}{2}\frac{EA}{a^3}(v-w')^3 \quad (2.46)$$

A segunda equação não linear de equilíbrio (2.41), com base no funcional (2.42), é dada por:

$$-\frac{EI}{a^3}(v_1 - w_1')''' + \frac{3}{2}\frac{EA}{a^3}[(v - w')^2(v' - w'')]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{EA}{a^2}[2(v' - w'')(v' + w) + v(v + 2v'') - w'(2v'' + w')]$$
$$+\frac{EA}{a}(v' + w) - \frac{K_g w''}{a} + (q + K_r w)a + q(v' + w) = 0 \quad (2.47)$$

onde novamente se observa a presença de termos lineares, quadráticos e cúbicos, que são dados respectivamente por:

- Termos lineares

$$-\frac{EI}{a^3}(v - w')''' + \frac{EA}{a}(v' + w) - \frac{K_g w''}{a} + (q + K_r w)a + q(v' + w) \qquad (2.48)$$

- Termos não lineares quadráticos

$$\frac{1}{2}\frac{EA}{a^2}[2(v_1' - w_1'')(v_1' + w_1) + v_1(v_1 + 2v_1'') - w_1'(2v_1'' + w_1')] \qquad (2.49)$$

- Termos não lineares cúbicos

$$\frac{3}{2}\frac{EA}{a^3}[(v - w')^2(v' - w'')] \qquad (2.50)$$

2.5.2. Equações de movimento

As equações de movimento são obtidas a partir da função de Lagrange e o princípio de Hamilton. A função de Lagrange é definida pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial total, ou seja:

$$\mathcal{L} = T - \Pi \qquad (2.51)$$

Assim tem-se um funcional da forma

$$F[\theta, t, v(\theta,t), w(\theta,t), v'(\theta,t), \dot{v}(\theta,t), w'(\theta,t), \dot{w}(\theta,t), \dot{w}'(\theta,t), w''(\theta,t)] \quad (2.52)$$

cujas equações de Euler-Lagrange são dadas por:

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial v'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{v}} = 0 \qquad (2.53)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial w'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{w}} + \frac{d^2}{d\theta^2}\frac{\partial F}{\partial w''} + \frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial \dot{w}'} = 0 \qquad (2.54)$$

Com base na Equação (2.53) e na função de Lagrange (2.51), obtém-se a seguinte equação não linear de movimento do anel na direção circunferencial

$$\frac{EI}{a^3}(v'' - w''') - \frac{1}{2}\frac{EA}{a^3}(v - w')^3 - \frac{EA}{a^2}[(v - w')(w + w'')] + \frac{EA}{a}(v'' + w') - \frac{I\rho}{a}(\ddot{v} - \ddot{w}') - q(v - w') - A\rho\ddot{v}a = 0 \qquad (2.55)$$

Com base na Equação (2.54), obtém-se a equação não linear de movimento na direção radial:

$$\frac{EI}{a^3}(v_1 - w_1')''' - \frac{3}{2}\frac{EA}{a^3}[(v - w')^2(v' - w'')] - \frac{1}{2}\frac{EA}{a^2}[2(v' - w'')(v' + w) + v(v + 2v'') - w'(2v'' + w')] - \frac{EA}{a}(v' + w) + \frac{K_g w''}{a} - \frac{I\rho}{a}(\ddot{v}' - \ddot{w}'') - (q + K_r w + A\rho\ddot{w})a - q(v' + w) = 0 \qquad (2.56)$$

3
Determinação da carga crítica

Neste capítulo, deriva-se analiticamente a carga crítica do anel com uma fundação elástica. A carga crítica q_{cr} é a menor carga para a qual o anel pode ser mantido em equilíbrio estável em sua configuração original circular. Brush e Almroth (1975), na dedução da carga crítica de barras, placas e cascas (incluindo os anéis), usa tanto o método do equilíbrio adjacente quanto o princípio da energia potencial mínima (critério de Trefftz) para obter as equações de equilíbrio crítico.

3.1.
Aplicação do critério do equilíbrio adjacente

Segundo o critério do equilíbrio adjacente, há duas configurações de equilíbrio infinitesimalmente adjacentes em $q = q_{cr}$, a circular e a ligeiramente não circular. Ambas as configurações são governadas pelas equações de equilíbrio. Sejam v_0, w_0 os campo de deslocamentos da solução fundamental axissimétrica de equilíbrio e $v_0 + v_1$, $w_0 + w_1$ o campo de deslocamentos incremental descrevendo a configuração não circular adjacente, onde v_1, w_1 são perturbações infinitesimais. Sendo o campo de deslocamentos fundamental axissimétrica, tem-se que $v_0 = 0$.

3.2.
Determinação da solução fundamental de membrana

No estado fundamental, o anel permanece circular e o deslocamento v_0 e suas derivadas e as derivadas de w_0 com relação a θ são iguais a zero (anel permanece circular). Assim a primeira equação de equilíbrio é satisfeita identicamente, e a segunda equação se reduz a:

$$q+\frac{EAw_0}{a^2}+\frac{qw_0}{a}+K_r w_0=0 \tag{3.1}$$

Isolando w_0 na expressão (3.2), tem-se:

$$w_0=\frac{-q}{\frac{EA}{a^2}+\frac{q}{a}+K_r}\cong\frac{-q}{\frac{EA}{a^2}+K_r}=\frac{-qa^2}{EA+K_r a^2} \tag{3.2}$$

onde, segundo Brush e Almroth (1975), supondo que a pressão hidrostática tenha, durante a fase de deformação pré-crítica, direção constante, o termo q/a no denominador pode ser desprezado em w_0.

Para o caso do anel sem fundação, usa-se normalmente a expressão:

$$w_0=\frac{qa^2}{EA} \tag{3.3}$$

que é a mesma adotada por Brush e Almroth (1975) quando considera uma fundação tipo Winkler.

3.3.
Determinação da solução do caminho pós-crítico

Seja, portanto:

$$\begin{aligned} v &\rightarrow v_1 \\ w &\rightarrow w_0+w_1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) nas duas equações não lineares de equilíbrio (2.43) e (2.47), omitindo os termos que contêm apenas q ou w_0; pois a soma de tais termos representa a configuração fundamental de equilíbrio e desprezando os termos não lineares quadráticos ou cúbicos em v_1 e w_1, obtêm-se as duas equações de equilíbrio crítico.

3.3.1.
Anel com carregamento de pressão hidrostática sem fundação

Aplicando o critério do equilíbrio adjacente, as equações de equilíbrio crítico são dadas por:

$$-\frac{EI}{a^3}(v_1 - w_1')'' + \frac{EA}{a^2}[(v_1 - w_1')w_0] - \frac{EA}{a}(v_1'' + w_1') + q(v_1 - w_1') = 0 \qquad (3.5)$$

$$-\frac{EI}{a^3}(v_1 - w_1')''' + \frac{EA}{a^2}w_0(v_1' - w_1'') + \frac{EA}{a}(v_1' + w_1) + q(v_1' + w_1) = 0 \qquad (3.6)$$

Substituindo nas equações (3.5) e (3.6) a solução fundamental w_0, Equação (3.4) resulta em

$$\begin{gathered}(v_1'' + w_1')EAa^2 + (v_1 + w_1')''EI = 0 \\ (w_1 + w_1'')qa^3 + (v_1' + w_1)EAa^2 - (v_1 - w_1')'''EI = 0\end{gathered} \qquad (3.7)$$

A solução analítica do sistema de equações diferenciais são funções periódicas em θ sendo dadas por:

$$\begin{aligned} v &= B\,\mathrm{sen}(n\theta) \\ w &= C\cos(n\theta)\end{aligned} \qquad (3.8)$$

onde B e C são as amplitudes modais e n é um número inteiro positivo. Introduzindo (3.8) às equações (3.7) e simplificando, leva ao sistema de equações homogêneo, que representa o problema de autovalor que fornece os autovalores e autovetores:

$$\begin{gathered} n^2\left(1 + \frac{I}{Aa^2}\right)B + n\left(1 + n^2\frac{I}{Aa^2}\right)C = 0 \\ n\left(1 + n^2\frac{I}{Aa^2}\right)B + \left[\left(1 + n^4\frac{I}{Aa^2}\right) - (n^2 - 1)\frac{qa}{EA}\right]C = 0 \end{gathered} \qquad (3.9)$$

Para $n = 1$, a primeira equação se torna:

$$(B + C)\left(1 + \frac{I}{Aa^2}\right) = 0 \qquad (3.10)$$

Portanto, $B = -C$ e tem-se que $v_1 = C\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $w_1 = C\cos\theta$. Esse modo de deslocamento representa uma translação de corpo rígido do anel. Postula-se, portanto, que o anel é restrito contra essa translação e consideramos apenas modos para os quais n é maior que a unidade. O sistema (3.9) tem sempre solução trivial ($B = C = 0$).

Matricialmente, como em qualquer problema estrutural, o problema de autovalor pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} n^2\left(1+\frac{I}{Aa^2}\right) & n\left(1+n^2\frac{I}{Aa^2}\right) \\ n\left(1+n^2\frac{I}{Aa^2}\right) & \left(1+n^4\frac{I}{Aa^2}\right)-(n^2-1)\frac{qa}{EA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.11)$$

A matriz de rigidez contém os termos da matriz de (3.11) com excessão dos termos multiplicados pela carga.

$$[K_E - qK_G\,]D_n = 0; \qquad D_n = [B, C]^T \qquad (3.12)$$

onde

$$K_E = \begin{bmatrix} n^2\left(1+\frac{I}{Aa^2}\right) & n\left(1+n^2\frac{I}{Aa^2}\right) \\ n\left(1+n^2\frac{I}{Aa^2}\right) & \left(1+n^4\frac{I}{Aa^2}\right) \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

é a matriz de rigidez do anel e a matriz de rigidez geométrica contém somente os termos da matriz de (3.11) multiplicados pela carga.

$$K_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(n^2-1)\frac{a}{EA} \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

K_G é a matriz de rigidez geométrica.

Para que o sistema (3.11) tenha solução não trivial, o determinante dos coeficientes das equações (3.9) deve ser igual a zero, ou seja:

$$\begin{vmatrix} n^2\left(1+\frac{I}{Aa^2}\right) & n\left(1+n^2\frac{I}{Aa^2}\right) \\ n\left(1+n^2\frac{I}{Aa^2}\right) & \left(1+n^4\frac{I}{Aa^2}\right)-(n^2-1)\frac{qa}{EA} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.15)$$

Calculando o determinante (3.15) e isolando q, resulta na expressão:

$$q = \frac{n^2-1}{1+\frac{I}{Aa^2}}\left(\frac{EI}{a^3}\right) \qquad n = 2,3,4\ldots \qquad (3.16)$$

que representa as infinitas cargas de bifurcação do anel.

Conforme Brush e Almroth (1975), o termo I/Aa^2 pode ser desprezado para anéis esbeltos por ser muito menor que a unidade, resultando em:

$$q = (n^2 - 1)\frac{EI}{a^3} \qquad n = 2,3,4\ldots \tag{3.17}$$

Para o caso de cascas cilíndricas, considera-se um anel com base b unitária e a rigidez a flexão EI é substituído na expressão acima pela rigidez à flexão da casca dada por (Brush e Almroth, 1975)

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.18}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson do material e a carga de bifurcação é dada por

$$q = (n^2 - 1)\frac{E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^3 \qquad n = 2,3,4\ldots \tag{3.19}$$

O valor da carga crítica do anel é o menor autovalor que corresponde a $n = 2$, que corresponde a uma ovalização do anel, ou seja:

$$q_{cr} = 3\frac{EI}{a^3} \tag{3.20}$$

Para o caso de cascas cilíndricas, a rigidez a flexão EI é substituída na expressão acima, e em toda a formulação que se segue, pela rigidez à flexão da casca dada por (comprimento b unitário) (Kyriakides e Corona, 2007):

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.21}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson do material.

Para o caso de uma casca cilíndrica longa (tubulação), tem-se (Kyriakides e Corona, 2007):

$$q_{cr} = \frac{E}{4(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^3 \tag{3.22}$$

A Figura 3.1 mostra o modo de flambagem de um duto sob pressão hidrostática por ovalização ($n_{cr} = 2$) e estágios avançados de deformação de uma tubulação, onde se observa o fenômeno de propagação da flambagem no modelo experimental da figura (b), que se constitui em um fenômeno bastante perigoso em tubulações submarinas, gerando grandes prejuízos, que condiz com o resultado numérico obtido pelo programa ABAQUS como ilutrado na figura (a) (Oliveira e Netto, 2020).

(a) (b) (c)

Figura 3.1: Experimentos de colapso e análises de confiabilidade de tubos corroídos para aplicações offshore. Oliveira e Netto (2020)

3.3.2. Anel com carregamento de pressão hidrostática e fundação

Aplicando-se novamente o critério do equilíbrio adjacente, tem-se, com base nas equações de equilíbrio (2.43) e (2.47), o seguinte sistema de equações linearizado

$$\frac{EI}{a^3}(w_1''' - v_1'') + \frac{EA}{a^2}[w_0(v_1 - w_1')] - \frac{EA}{a}(v_1'' + w_1') + q(v_1 - w_1') = 0 \qquad (3.23)$$

$$-\frac{EI}{a^3}(v_1 - w_1')''' + \frac{EA}{a^2}w_0(v_1' - w_1'') + \frac{EA}{a}(v_1' + w_0 + w_1) - \frac{K_g w_1''}{a} + K_r a(w_0 + w_1) + q(v_1' + w_0 + w_1 + a) = 0 \qquad (3.24)$$

Brush e Almroth (1975), ao considerarem o efeito de uma fundação tipo Winkler na carga crítica, desconsideram o efeito da reação da fundação no deslocamento pré-crítico − ver pg. 143, Eq. (4.32). Neste caso, a substituição de

w_0 dado pela Equação (3.3) nas equações (3.23) e (3.24) resulta nas seguintes equações de equilíbrio crítico:

$$\begin{gathered}(v_1' + w_1)'EAa^2 + (v_1 + w_1')''EI = 0 \\ K_r a^4 w_1 + (w_1 + w_1'')qa^3 + [(v_1' + w_1)EA - K_g w_1'']a^2 - (v_1 - w_1')'''EI = 0\end{gathered} \tag{3.25}$$

Introduzindo (3.8) nas equações (3.24) leva a:

$$\begin{gathered}Ea\, n^2\left(1 + \frac{I}{Aa^2}\right)B + Ea\, n\left(1 + n^2\frac{I}{Aa^2}\right)C = 0 \\ n\left(1 + n^2\frac{I}{Aa^2}\right)B + \left[\left(1 + n^4\frac{I}{Aa^2}\right) - (n^2 - 1)\frac{qa}{EA} + \frac{1}{EA}\left(K_r a^2 + K_g n^2\right)\right]C = 0\end{gathered} \tag{3.26}$$

Para uma solução não trivial, o determinante da matriz dos coeficientes os nas equações (3.26) deve ser igual a zero, ou seja:

$$\begin{vmatrix} n^2\left(1 + \frac{I}{Aa^2}\right) & n\left(1 + n^2\frac{I}{Aa^2}\right) \\ n\left(1 + n^2\frac{I}{Aa^2}\right) & \left(1 + n^4\frac{I}{Aa^2}\right) - (n^2 - 1)\frac{qa}{EA} + \frac{1}{EA}\left(K_r a^2 + K_g n^2\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.27}$$

Neste caso, muda apenas a matriz de rigidez que passa a ser dada por:

$$K_E = \begin{bmatrix} Ea\, n^2\left(1 + \frac{I}{Aa^2}\right) & Ea\, n\left(1 + n^2\frac{I}{Aa^2}\right) \\ n\left(1 + n^2\frac{I}{Aa^2}\right) & \left(1 + n^4\frac{I}{Aa^2}\right) + \frac{1}{EA}\left(K_r a^2 + K_g n^2\right) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Isolando q na expressão (3.27) resulta em:

$$q = \frac{EI[n^2(n^2 - 2\,) + 1]}{a^3\left(1 + \frac{I}{Aa^2}\right)(n^2 - 1)} + \frac{\left(K_r a^2 + K_g n^2\right)}{a(n^2 - 1)} \qquad n = 2{,}3{,}4\,... \tag{3.29}$$

De forma análoga ao item 3.3.1, desprezando o termo I/Aa^2 por ser muito menor que a unidade, tem-se:

$$q = \frac{EI[n^2(n^2 - 2\,) + 1] + a^2\left(K_r a^2 + K_g n^2\right)}{a^3(n^2 - 1)} \tag{3.30}$$

Análogo a uma coluna com uma fundação tipo Winkler, o número de ondas circunferências n associado ao modo crítico depende dos parâmetros de rigidez da fundação, como será mostrado através da análise paramétrica no Capítulo 5.

3.3.3. Carga de pressão centralmente direcionada

Singer e Babcock (1970), Brush e Almroth (1975) e Schmidt (1980), dentre outros, mostram que a carga crítica de um anel varia bastante em função da expressão adotada para o trabalho da carga distribuída e da energia potencial gravitacional. Em particular, Schmidt (1980) discute as diferentes expressões e valores da pressão crítica de anéis esbeltos sob carregamento distribuído ao longo do anel. Ele então deduz a carga crítica para o caso de carga externa com direção constante para anéis e arcos circulares e compara com os valores comumente citados na literatura.

Considerando, como formulado no Capítulo 2, que carga é sempre direcionada ao centro do anel, as equações de equilíbrio crítico tomam a forma

$$\begin{gathered} EAa^2(v_1' + w_1)' + EI(v_1 - w_1')'' - qa^3 w_1' = 0 \\ EAa^2(v_1' + w_1) - EI(v_1 - w_1')''' + qa^3(v_1 + w_1')' = 0 \end{gathered} \qquad (3.31)$$

Considerando a solução analítica (3.8), obtém-se o determinante:

$$\begin{vmatrix} n^2\left(1 + \dfrac{I}{Aa^2}\right) & n\left(1 + n^2\dfrac{I}{Aa^2} - \dfrac{qa}{EA}\right) \\ n\left(1 + n^2\dfrac{I}{Aa^2} - \dfrac{qa}{EA}\right) & \left(1 + n^4\dfrac{I}{Aa^2}\right) - n^2\dfrac{qa}{EA} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.32)$$

que leva ao seguinte polinômio quadrático em q:

$$(n^2 - 1)^2\frac{I}{Aa^2} + (2 - n^2)\frac{qa}{EA} + \left(\frac{qa}{EA}\right)^2 = 0 \qquad (3.33)$$

Para anéis esbeltos, $[I/(Aa^2)] \ll 1$, ignorando o terceiro termo em (3.33), obtém-se a aproximação para as cargas de bifurcação do anel sem fundação:

$$q = \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 - 2}\left(\frac{EI}{a^3}\right) \qquad n = 2,3,4 \ldots \qquad (3.34)$$

Como no caso da pressão hidrostática, o menor autovalor ocorre para $n = 2$, sendo igual a:

$$q = 4.5\frac{EI}{a^3} \qquad (3.35)$$

Este resultado é 50% maior que a pressão crítica considerando a pressão hidrostática. Cabe ressaltar que isto se deve ao pequeno valor de n crítico. Para cascas cilíndricas longas, também se observa uma grande diferença entre as cargas críticas para pequenos valores de n quando diferentes teorias de cascas são empregadas e quando se usa diferentes aproximações para o potencial gravitacional da carga externa (ver, por exemplo, Brush e Almroth (1975), Cap. 5, pg. 166).

Verificou-se que os autovalores encontrados da carga de pressão-fluido e da carga de pressão direcionada centralmente, são respectivamente

$$q = (n^2 - 1)\frac{EI}{a^3} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{(n^2-1)^2}{n^2-2}\left(\frac{EI}{a^3}\right) \tag{3.36}$$

Em ambos os casos, a carga crítica corresponde a $n = 2$, e a magnitude da carga crítica para o anel circular é extremamente sensível ao comportamento da carga aplicada durante a deformação do anel.

Por outro lado, se n fosse muito maior que a unidade, como pode ocorrer, digamos, para um anel em uma fundação elástica, as cargas críticas dadas pelas duas equações são aproximadamente as mesmas, e a distinção entre diferentes modelagens de carregamento são em geral de pouca importância.

Para o caso do anel com fundação elástica, considerando a hipótese de carga externa com direção constante, tem-se o seguinte determinante característico:

$$\begin{vmatrix} n^2\left(1 + \dfrac{I}{Aa^2}\right) & n\left(1 + n^2\dfrac{I}{Aa^2} - \dfrac{qa}{EA}\right) \\ n\left(1 + n^2\dfrac{I}{Aa^2} - \dfrac{qa}{EA}\right) & \left(1 + n^4\dfrac{I}{Aa^2}\right) - (n^2-1)\dfrac{qa}{EA} + \dfrac{1}{EA}\left(K_r a^2 + K_g n^2\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.37}$$

3.4. Efeito da fundação na solução pré-crítica

Considerando o efeito da fundação na solução pré-crítica, Equações (3.38) e (3.39), tem-se, com base nas equações de equilíbrio (2.43) e (2.47), o seguinte sistema de equações linearizado:

$$\frac{EI}{a^3}(w_1''' - v_1'') - \frac{qEA}{EA + K_r a^2}(v_1 - w_1') - \frac{EA}{a}(v_1'' + w_1') + q(v_1 - w_1') = 0 \qquad (3.38)$$

$$-\frac{EI}{a^3}(v_1 - w_1')''' - \frac{qEA}{EA + K_r a^2}(v_1' - w_1'') + \frac{EA}{a}(v_1' + w_1) - \frac{K_g w_1''}{a} + K_r a(w_1) + q(v_1' + w_1) = 0 \qquad (3.39)$$

Neste caso do anel com fundação elástica, tem-se a seguinte matriz de rigidez geométrica:

$$K_G = \begin{vmatrix} \dfrac{q\Delta}{(1+\Delta)} & \dfrac{q\Delta n}{(1+\Delta)} \\ \dfrac{qa\Delta n}{(1+\Delta)EA} & \dfrac{qa}{EA}\left(1 - \dfrac{n^2}{(1+\Delta)}\right) \end{vmatrix} \qquad (3.40)$$

onde $\Delta = K_r a^2/EA$.

3.5. Aplicação do princípio da energia potencial mínima

Os mesmos resultados podem ser obtidos usando-se o princípio da energia potencial mínima. Neste caso, calcula-se a variação da energia potencial total entre as configurações fundamental e a configuração perturbada, ou seja:

$$\Delta\Pi = \Pi(v_0 + v_1, w_0 + w_1) - \Pi(v_0, w_0) \qquad (3.41)$$

A Equação (3.41) pode ser reescrita como:

$$\Delta\Pi = \delta\Delta\Pi + \frac{1}{2!}\,\delta^2\Delta\Pi + \frac{1}{3!}\,\delta^3\Delta\Pi + \frac{1}{4!}\,\delta^4\Delta\Pi \qquad (3.42)$$

onde $\delta^n\Delta\Pi$ é a enésima variação do funcional $\Delta\Pi$.

Sendo (v_0, w_0) a configuração original de equilíbrio, $\delta\Delta\Pi = 0$ e, seguindo o critério de Trefftz, tem-se que:

$$\delta(\delta^2\Delta\Pi) = 0 \qquad (3.43)$$

cujas equações de Euler-Lagrange são as equações de equilíbrio crítico do anel, as mesmas obtidas anteriormente pelo critério do equilíbrio adjacente.

Considerando todos os termos em $\Delta\Pi$, obtêm-se as equações não lineares do caminho pós-crítico.

4
Frequências naturais da estrutura carregada e modos de vibração

Neste capítulo, são obtidas as expressões analíticas para as frequências naturais e modos de vibração considerando o efeito de um pré-carregamento estático e da fundação.

4.1.
Equações não lineares de movimento

Com base nas equações de movimento obtidas no Capítulo 2 e aplicando o critério do equilíbrio adjacente, obtêm-se as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned}\frac{EI}{a^3}(v_1'' - w_1''') - \frac{1}{2}\frac{EA}{a^3}(v_1 - w_1')^3 - \frac{EA}{a^2}[(w_0 + w_1 + w_1'')(v_1 - w_1')]\\ + \frac{EA}{a}(v_1'' + w_1') - \frac{I\rho}{a}(\ddot{v}_1 - \ddot{w}_1') - q(v_1 - w_1') - A\rho\ddot{v}_1 a\\ = 0\end{aligned} \qquad (4.1)$$

$$\begin{aligned}\frac{EI}{a^3}(v_1 - w_1')''' - \frac{3}{2}\frac{EA}{a^3}[(v_1 - w_1')^2(v_1' - w_1'')]\\ - \frac{EA}{a^2}\left[\frac{1}{2}\left(v_1^2 - {w_1'}^2\right) + v_1''(v_1 - w_1') + v_1'(w_0 + w_1 - w_1'')\right.\\ \left. - w_1''(w_0 + w_1) + {v_1'}^2\right] - \frac{EA}{a}\left(v_1' + w_0 + w_1 - K_g w_1''\right)\\ - \frac{I\rho}{a}(\ddot{v}_1 - \ddot{w}_1')' - q(v_1' + w_0 + w_1)\\ - [K_r(w_0 + w_1) + A\rho\ddot{w}_1 - q]a = 0\end{aligned} \qquad (4.2)$$

Para o cálculo das frequências naturais e modos de vibração, linearizam-se as equações em torno de uma configuração de equilíbrio estático dada por w_0 (ver item 3.2).

4.1.1. Anel com carregamento de pressão hidrostática

Inicialmente as equações de equilíbrio estático linearizadas são obtidas considerando somente o efeito da pressão hidrostática. Neste caso, tem-se:

$$\frac{EI}{a^3}(v_1 - w_1')'' - \frac{EA}{a^2}[(v_1 - w_1')w_0] + \frac{EA}{a}(v_1'' + w_1') - \frac{I\rho}{a}(\ddot{v}_1 - \ddot{w}_1') - q(v_1 - w_1') - A\rho\ddot{v}_1 a = 0 \qquad (4.3)$$

$$\frac{EI}{a^3}(v_1 - w_1')''' - \frac{EA}{a^2}w_0(v_1' - w_1'') - \frac{EA}{a}(v_1' + w_0 + w_1) - \frac{I\rho}{a}(\ddot{v}_1 - \ddot{w}_1')' - q(v_1' + w_0 + w_1) - qa - A\rho\ddot{w}_1 a = 0 \qquad (4.4)$$

A substituição de w_0 (3.3) em (4.3) e (4.4) resulta em:

$$-A\rho\ddot{v}_1 a^4 + (v_1' + w_1)'EAa^2 - (\ddot{v}_1 - \ddot{w}_1')I\rho a^2 + (v_1 - w_1')''EI = 0 \qquad (4.5)$$

$$-A\rho\ddot{w}_1 a^4 - (w_1 + w_1'')qa^3 - (v_1' + w_1)EAa^2 - (\ddot{v}_1 - \ddot{w}_1')'I\rho a^2 + (v_1 - w_1')'''EI = 0 \qquad (4.6)$$

A solução analítica do problema de valor de contorno, em termos das funções em θ e t, tem a forma:

$$\begin{aligned} v_n &= B_n \operatorname{sen}(\omega_n t)\operatorname{sen}(n\theta) \\ w_n &= C_n \operatorname{sen}(\omega_n t)\cos(n\theta) \end{aligned} \qquad (4.7)$$

onde B_n e C_n são as amplitudes modais do enésimo modo de vibração, ω_n é a frequência natural em rad/s e n é o número de ondas circunferenciais do enésimo modo de vibração.

Substituindo (4.7) em (4.5) e (4.6), obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas homogêneas:

$$-BA\rho\omega^2 a^4 - I(\rho\omega^2 a^2 + En^2)(B + Cn) + EAa^2 n(Bn + C) = 0 \qquad (4.8)$$

$$-CA\rho\omega^2 a^4 - In(\rho\omega^2 a^2 - En^2)(B + Cn)(B + Cn) + EAa^2(Bn + C) - Cqa^3(n^2 - 1) = 0 \qquad (4.9)$$

que, em forma matricial, pode ser escrito como

$$[K_E - \omega_n^2 M\ ]\ D_n = 0; \qquad D_n = [B_n, C_n]^T \tag{4.10}$$

onde K_E é matriz de rigidez para o anel com carregamento de pressão hidrostática

$$K_E = \begin{bmatrix} En^2(I + Aa^2) & En(In^2 + Aa^2) \\ En(In^2 + Aa^2) & E(In^4 + Aa^2) - qa^3(n^2 - 1) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

e M é a matriz de massa

$$M = -\rho\omega^2 a^2 \begin{bmatrix} I + Aa^2 & In \\ In & In^2 + Aa^2 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Se não for considerado o efeito da inércia à rotação, a matriz de massa se reduz a:

$$K_M = \begin{bmatrix} -A\rho\omega^2 a^4 & 0 \\ 0 & -A\rho\omega^2 a^4 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Para que o problema de autovalor tenha solução não trivial, o determinante da matriz dos coeficientes $|K_E - \omega_n^2 M|$ deve ser igual a zero . Calculando-se o determinante e igualando o mesmo a zero, obtém-se a equação:

$$\begin{aligned} A^2\rho^2\lambda^2 a^8 + \rho\lambda a^6(IA\rho\lambda - EA^2)(n^2 + 1) + qa^5[\rho\lambda(I + Aa^2) - EAn^2](n^2 - 1) \\ - EIA\rho\lambda a^4 n^2(2n^2 - 1) + EIAa^2(En^2 - \rho\lambda a^2)(n^4 - n^2 + 1) \\ = 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $\lambda = \omega^2$ são os autovalores do polinômio característico.

Para cada valor de n, obtêm-se duas raízes onde a menor delas (λ_{n1}) está associada ao modo de vibração de flexão no plano do anel e a maior (λ_{n2}), ao modo de vibração circunferencial. A raiz quadrada de λ_n resulta na frequência natural (ω_n) em rad/s, sendo as duas frequências dadas por (4.15) e (4.16).

$$\omega_{1n} = \left\{ \frac{EI}{2\rho a^2 (Aa^2 + In^2 + I)} \left\{ 2n^4 - n^2 + 1 + \frac{Aa^2}{I}(n^2+1) \right.\right.$$

$$- \left(\frac{qa^3}{EI} + \frac{qa}{EA} \right)(n^2 - 1)$$

$$- \left\{ \frac{2Aa^2}{I}(5n^4 - 2n^2 + 1) + \frac{4qa^3}{EI}(2n^4 - 3n^2 + 1) \right.$$

$$+ \frac{2qa}{EA}(3n^4 - 4n^2 + 1) + (9n^4 - 6n^2 + 1)$$

$$+ \left[\frac{qa}{EA}\left(\frac{qa}{EA} + \frac{2qa^3}{EI} \right) + \frac{qa^3}{EI}\left(\frac{2Aa^2}{I} + \frac{qa^3}{EI} \right) \right](n^4 - 2n^2 + 1)$$

$$\left.\left.\left. + \frac{A^2a^4}{I^2}(n^4 + 2n^2 + 1) \right\}^{1/2} \right\} \right\}^{1/2} \qquad (4.15)$$

$$\omega_{2n} = \left\{ \frac{EI}{2\rho a^2 (Aa^2 + In^2 + I)} \left\{ 2n^4 - n^2 + 1 + \frac{Aa^2}{I}(n^2+1) \right.\right.$$

$$- \left(\frac{qa^3}{EI} + \frac{qa}{EA} \right)(n^2 - 1)$$

$$+ \left\{ \frac{2Aa^2}{I}(5n^4 - 2n^2 + 1) + \frac{4qa^3}{EI}(2n^4 - 3n^2 + 1) \right.$$

$$+ \frac{2qa}{EA}(3n^4 - 4n^2 + 1) + (9n^4 - 6n^2 + 1)$$

$$+ \left[\frac{qa}{EA}\left(\frac{qa}{EA} + \frac{2qa^3}{EI} \right) + \frac{qa^3}{EI}\left(\frac{2Aa^2}{I} + \frac{qa^3}{EI} \right) \right](n^4 - 2n^2 + 1)$$

$$\left.\left.\left. + \frac{A^2a^4}{I^2}(n^4 + 2n^2 + 1) \right\}^{1/2} \right\} \right\}^{1/2} \qquad (4.16)$$

4.1.2. Anel com carregamento de pressão hidrostática e fundação

No caso de se considerar adicionalmente o efeito da fundação elástica, as equações de movimento linearizadas tomam a forma:

$$-A\rho\ddot{v}_1 a^4 + [(v_1' + w_1)'EA - (\ddot{v}_1 - \ddot{w}_1')I\rho]a^2 + (v_1 - w_1')''EI = 0 \qquad (4.17)$$

$$-(A\rho\ddot{w}_1 + K_r w_1)a^4 - (w_1 + w_1'')qa^3 - \left[(v_1' + w_1)EA + (\ddot{v}_1 - \ddot{w}_1')'I\rho - K_g w_1''\right]a^2 + (v_1 - w_1')'''EI = 0 \qquad (4.18)$$

Como no caso anterior, a solução exata das equações diferenciais parciais é dada por (4.7), e chega-se novamente a um problema de autovalor da forma:

$$[K_E - \omega_n^2 M\ ]\ D_n = 0; \qquad D_n = [B_n, C_n]^T \qquad (4.19)$$

onde a matriz de massa continua a ser dada por (4.12) ou, não considerando a inércia à rotação, por (4.13) e a matriz de rigidez (4.20) é da forma

$$K_E = \begin{bmatrix} En^2\left(I + Aa^2\right) & En\left(In^2 + Aa^2\right) \\ En^2\left(In^2 + Aa^2\right) & E\left(In^4 + Aa^2\right) - qa^3\left(n^2 - 1\right) + a^2\left(K_r a^2 + K_g n^2\right) \end{bmatrix} \qquad (4.20)$$

Assim tem-se o polinômio característico:

$$A^2\rho^2\lambda^2 a^8 + A\rho\lambda a^6(I\rho\lambda - EA)(n^2 + 1) + E^2 IAa^2 n^2(n^4 - 2n^2 + 1) - EIA\rho\lambda a^4(2n^4 - n^2 + 1) + a^2(En^2 - \rho\lambda a^2)(I + Aa^2)\left[-qa(n^2 - 1) + \left(K_r a^2 + K_g n^2\right)\right] = 0 \qquad (4.21)$$

onde $\lambda = \omega^2$ são os autovalores do polinômio característico.

As frequências naturais para cada valor de n (ω_n) são as raízes quadradas de λ_{1n} e λ_{2n}, sendo estas as raízes de (4.21). Os resultados são ω_{1n} (4.22) e ω_{2n} (4.23).

$$
\begin{aligned}
\omega_{1n} = \Bigg\{ \frac{EI}{2A\rho a^2(Aa^2 + In^2 + I)} \Bigg\{ & A(2n^4 - n^2 + 1) + \frac{A^2a^2}{I}(n^2 + 1) \\
& - \left(\frac{Aqa^3}{EI} + \frac{qa}{E}\right)(n^2 - 1) + \left(\frac{1}{E} + \frac{Aa^2}{EI}\right)(K_r a^2 + K_g n^2) \\
& - \Bigg\{ \frac{A^4a^4}{I^2}(n^4 + 2n^2 + 1) + \frac{2A^3a^2}{I}(5n^4 - 2n^2 + 1) \\
& + A^2(9n^4 - 6n^2 + 1) \\
& + \left[\frac{A^2qa^5}{E^2I^2}(2EA + qa) + \frac{q^2a^2}{E^2I}(I + 2Aa^2)\right](n^4 - 2n^2 + 1) \\
& + \frac{4A^2qa^3}{EI}(2n^4 - 3n^2 + 1) + \frac{2Aqa}{E}(3n^4 - 4n^2 + 1) \\
& - \left[\frac{2a^4A^2}{E^2I^2}(EA + qa) + \frac{2qa}{E^2I}(I + 2Aa^2)\right](K_r a^2 + K_g n^2)(n^2 - 1) \\
& - \frac{4A^2a^2}{EI}(K_r a^2 + K_g n^2)(2n^2 - 1) - \frac{2A}{E}(K_r a^2 + K_g n^2)(3n^2 - 1) \\
& + \frac{1}{E^2I^2}(I + Aa^2)^2(K_r a^2 + K_g n^2)^2 \Bigg\}^{1/2} \Bigg\} \Bigg\}^{1/2}
\end{aligned}
\qquad (4.22)
$$

$$\omega_{2n} = \left\{ \frac{EI}{2A\rho a^2(Aa^2 + In^2 + I)} \left\{ A(2n^4 - n^2 + 1) + \frac{A^2a^2}{I}(n^2 + 1) \right.\right.$$

$$- \left(\frac{Aqa^3}{EI} + \frac{qa}{E}\right)(n^2 - 1) + \left(\frac{1}{E} + \frac{Aa^2}{EI}\right)(K_r a^2 + K_g n^2)$$

$$+ \left\{ \frac{A^4a^4}{I^2}(n^4 + 2n^2 + 1) + \frac{2A^3a^2}{I}(5n^4 - 2n^2 + 1) \right.$$

$$+ A^2(9n^4 - 6n^2 + 1)$$

$$+ \left[\frac{A^2qa^5}{E^2I^2}(2EA + qa) + \frac{q^2a^2}{E^2I}(I + 2Aa^2)\right](n^4 - 2n^2 + 1)$$

$$+ \frac{4A^2qa^3}{EI}(2n^4 - 3n^2 + 1) + \frac{2Aqa}{E}(3n^4 - 4n^2 + 1)$$

$$- \left[\frac{2a^4A^2}{E^2I^2}(EA + qa) + \frac{2qa}{E^2I}(I + 2Aa^2)\right](K_r a^2 + K_g n^2)(n^2 - 1)$$

$$- \frac{4A^2a^2}{EI}(K_r a^2 + K_g n^2)(2n^2 - 1) - \frac{2A}{E}(K_r a^2 + K_g n^2)(3n^2 - 1)$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{E^2I^2}(I + Aa^2)^2(K_r a^2 + K_g n^2)^2 \right\}^{1/2} \right\} \right\}^{1/2} \tag{4.23}$$

5
Análise paramétrica da carga crítica

Neste capítulo, apresenta-se uma análise paramétrica da influência da geometria do anel e das características físicas do anel e da fundação na carga e modo crítico. Para generalizar os resultados, as expressões deduzidas no Capítulo 3 são reescritas em uma forma adimensional.

5.1.
Influência da fundação na carga crítica e modo crítico

Inicialmente, estuda-se a influência da fundação nas cargas de bifurcação desconsiderando o efeito da fundação na solução fundamental, Equação (3.3), seguindo o procedimento apresentado por Brush e Almroth (1975). A equação das cargas de bifurcação do anel submetido ao carregamento de pressão hidrostática em função do número de ondas circunferenciais e características geométricas do anel e do material do anel e fundação é dada pela Equação (3.29):

$$q = \frac{EI[n^2(n^2-2)+1]}{a^3\left(1+\frac{I}{Aa^2}\right)(n^2-1)} + \frac{K_r a^2 + K_g n^2}{a(n^2-1)} \qquad n = 2,3,4\ldots \qquad (3.29)$$

Considerando as variáveis adimensionais:

$$\bar{q} = \frac{qa^3}{EI};\ \ \bar{K}_r = \frac{K_r a^4}{EI};\ \bar{K}_g = \frac{K_g a^2}{EI} \qquad (5.1)$$

e substituindo (5.1) em (3.29), obém-se a expressão da carga crítica adimensional:

$$\bar{q} = \frac{n^2(n^2-2)+1}{n^2-1} + \frac{\bar{K}_r + \bar{K}_g n^2}{n^2-1} \qquad n = 2,3,4\ldots \qquad (5.2)$$

que é função apenas do número de ondas circunferenciais n e dos parâmetros da fundação $\overline{K}_r$ e $\overline{K}_g$. Cabe ressaltar que estes parâmetros adimensionais expressam a relação entre a rigidez da fundação e a rigidez à flexão do anel, EI.

Inicialmente, analisa-se o efeito da fundação de Winkler na carga e modo crítico do anel. A Figura 5.1 mostra a variação das cargas de bifurcação em função do número de ondas circunferenciais n para valores selecionados de $\overline{K}_r$ com base na Equação (5.2). A variável n é aqui tratada como uma variável contínua. Na Figura 5.1, verifica-se que para cada valor da rigidez da fundação $\overline{K}_r$, a carga atinge um mínimo em um certo valor de n_{cr}, que corresponde à carga crítica do anel. Observa-se que, à medida que a rigidez da fundação cresce, aumenta o número de ondas circunferenciais n associado ao modo crítico. Por exemplo, para $\overline{K}_r = 100$, percebe-se que $n_{cr} = 3$, enquanto para o anel sem fundação, como visto no capítulo 3, $n_{cr} = 2$. Observa-se também o aumento significativo da carga crítica com a da rigidez da fundação $\overline{K}_r$, já que esta contribui para o aumento da rigidez efetiva do conjunto anel-fundação.

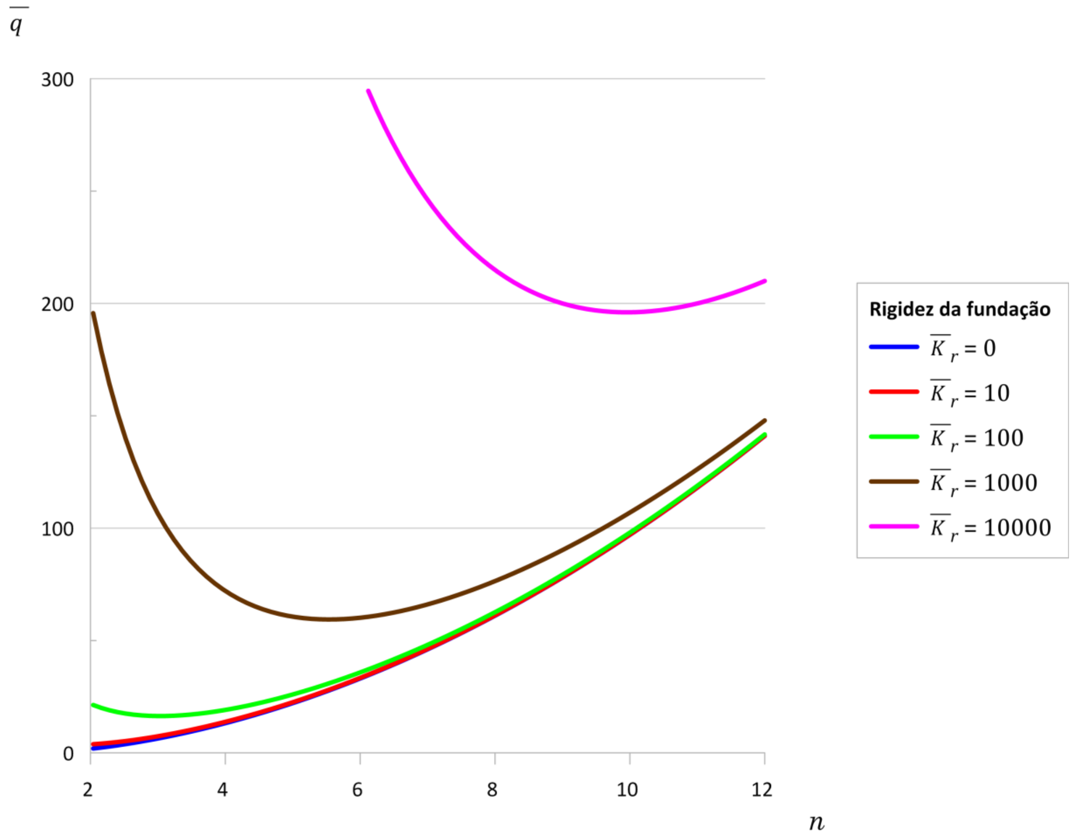


Figura 5.1: Variação da carga crítica com o número de ondas circunferências n para valores selecionados da rigidez da fundação $\overline{K}_r$ para $\overline{K}_g = 0$

Entretanto, n é uma variável inteira. Conforme observado na Figura 2.1, à medida que a rigidez da fundação cresce, vai crescendo o valor de n crítico e, portanto, a carga crítica. A Figura 5.2 mostra a variação da carga crítica com o parâmetro de rigidez da fundação de Winkler $\bar{K}_r$ para valores selecionados da n. Observa-se inicialmente (curva em azul) que, para $\bar{K}_r < 96$, o modo crítico tem duas ondas circunferenciais ($n_{cr} = 2$), como ocorre para o anel sem fundação, como mostrado no Capítulo 3. Para $\bar{K}_r < 1$, praticamente não se tem efeito da fundação sobre a carga crítica, sendo $\bar{q}_{cr} \cong 3$. No intervalo $96 < \bar{K}_r < 166$, o modo crítico passa a ter três ondas circunferenciais (curva em vermelho, $n_{cr} = 3$). No intervalo $166 < \bar{K}_r < 438$, o modo crítico passa a ter quatro ondas circunferenciais (curva em verde, $n_{cr} = 4$). A seguir, no intervalo $438 < \bar{K}_r < 958$, o modo crítico passa a ter cinco ondas circunferenciais (curva em marrom, $n_{cr} = 5$). Portanto, onde as curvas se interceptam, o anel apresenta duas cargas de bifurcação coincidentes, o que pode dar origem ao fenômeno de acoplamento modal segundo Gioncu (1994). Observa-se, pois, que, à medida que $\bar{K}_r$ aumenta, vai aumentando o número de ondas associado ao modo crítico, o que já foi visto também na Figura 5.1. O mesmo fenômeno é observado em vigas sobre base elástica, como mostra Bazant e Cedolin (1991). Cabe observar que o parâmetro $\bar{K}_r = K_r a^4/EI$ é a razão da rigidez da fundação de Winkler pela rigidez à flexão do anel. Assim valores elevados de $\bar{K}_r$ significam que a rigidez da fundação é bem superior à rigidez a flexão do anel. Quando $\bar{K}_r \to \infty$ tem-se uma fundação rígida, o que leva a uma carga crítica infinita. Quando as forças de contato entre o anel e a fundação se tornam elevadas, pode ocorrer em certas fundações o descolamento do anel e tem-se então um problema de contato unilateral, onde o anel, ao perder a estabilidade, descola da fundação em uma região definida pelo ângulo ϕ, como ilustrado na Figura 5.3, de Silveira *et al*., (2013).

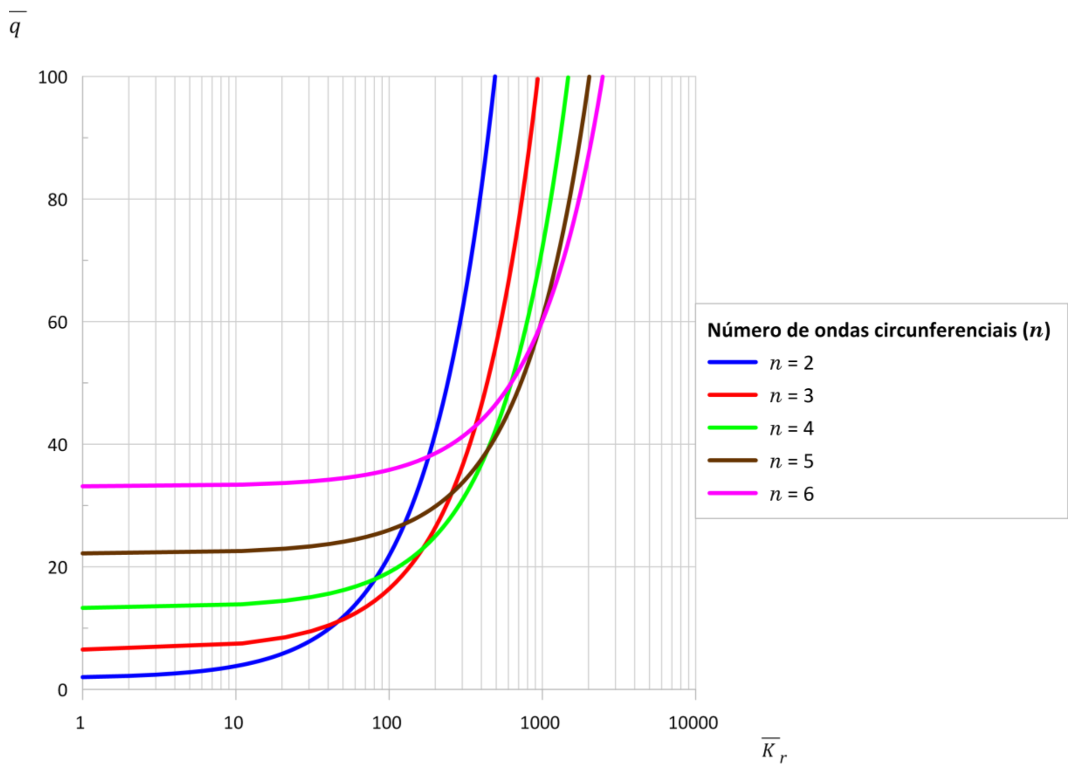


Figura 5.2: Variação da carga crítica com a rigidez da fundação $\overline{K}_r$ para valores selecionados do número de ondas circunferenciais n

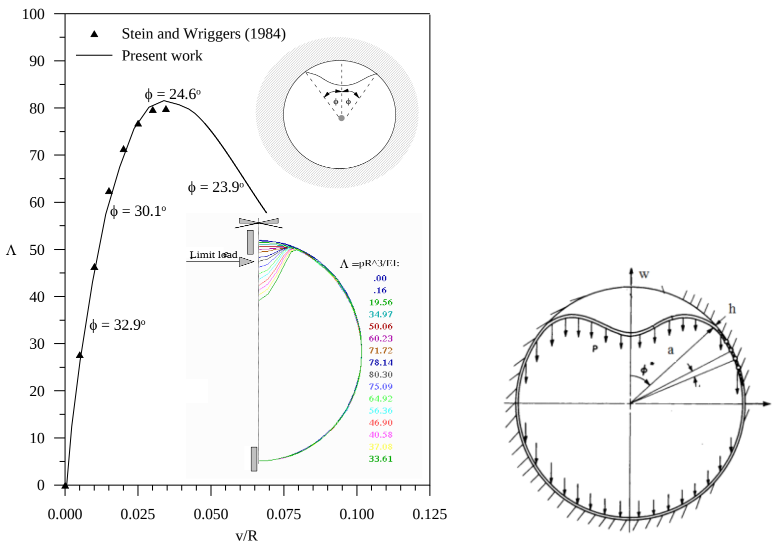
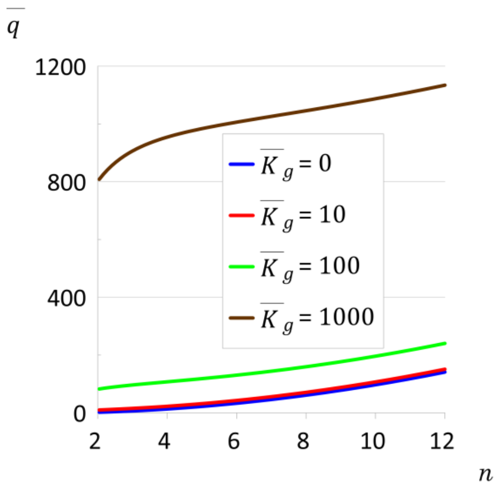
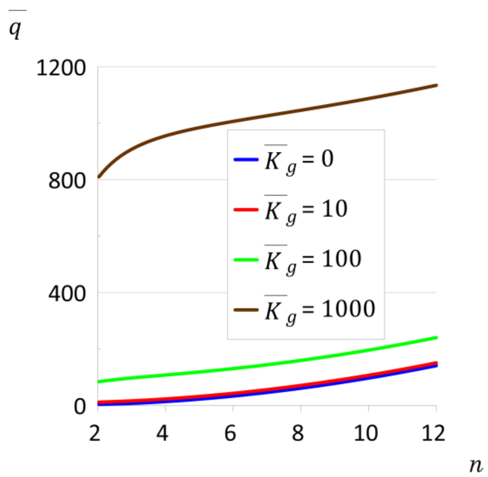


Figura 5.3: Caminho não linear de equilíbrio de um anel esbelto em contato unilateral com uma fundação. Silveira *et al*. (2013).

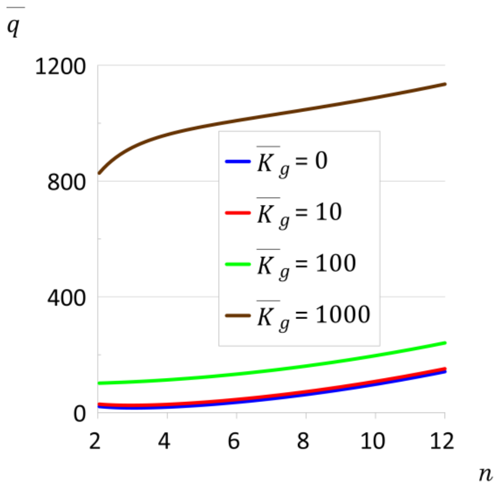
Estuda-se agora o efeito do coeficiente de fundação de Pasternak associado ao cisalhamento, $\overline{K}_g$, na carga crítica do anel. A Figura 5.4 (pp 78 a 80) mostra, para valores selecionados de $\overline{K}_r$ e $\overline{K}_g$, a variação da carga de bifurcação com o número de ondas circunferenciais n. Observa-se, como esperado, um aumento na carga crítica à medida que $\overline{K}_g$ cresce. A Figura 5.5 mostra a variação da carga crítica com a rigidez da fundação $\overline{K}_r$ para valores selecionados de $\overline{K}_g$ e do número de ondas circunferenciais n. A Figura 5.5 ilustra o efeito de $\overline{K}_g$ na carga crítica e modo crítico. Observa-se que, à medida que $\overline{K}_g$ cresce, a faixa de $\overline{K}_r$ associado a cada valor de número de ondas crítico varia, como mostra a Tabela 5.1, onde se apresentam os valores de $\overline{K}_r$ onde o modo crítico muda de n para $n+1$. Observa-se que a faixa de valores de $\overline{K}_r$ associada ao modo crítico com duas ondas circunferenciais cresce e a zona de transição onde o número de ondas crítico aumenta vai se tornando cada vez menor e para $\overline{K}_g = 1000$, os pontos de transição se acumulam no intervalo $1046 < \overline{K}_r < 1958$, ou seja, em uma pequena faixa de variação de $\overline{K}_r$, o número de ondas crítico cresce rapidamente. Complementando esta análise, a Figura 5.6 ilustra, para cada valor de n, a influência do parâmetro de rigidez da fundação $\overline{K}_g$ na carga crítica. Como observado na equação da carga crítica adimensional, a carga crítica aumenta com $\overline{K}_g$ e n^2. Para um dado valor de n, a diferença entre as sucessivas cargas de bifurcação decresce à medida que $\overline{K}_r$ aumenta.



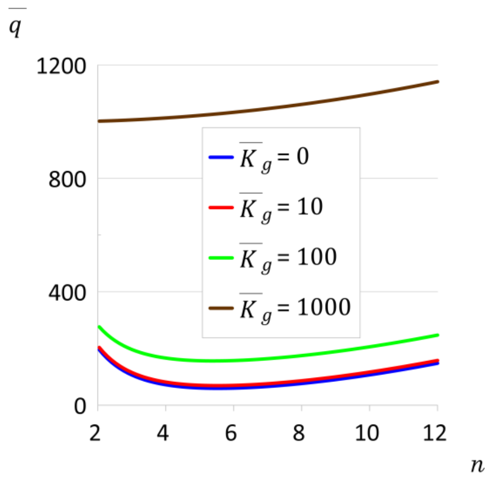
a) $\overline{K}_r = 0$



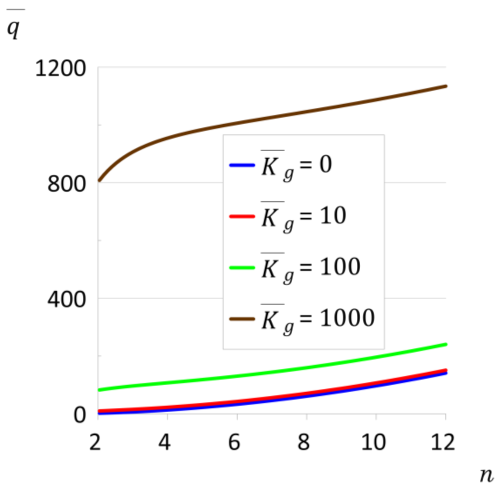
b) $\overline{K}_r = 10$



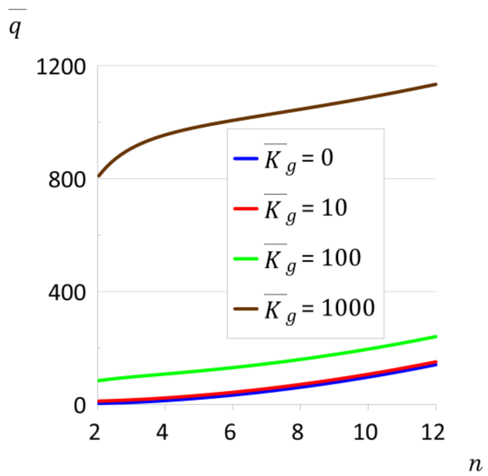
c) $\bar{K}_r = 100$



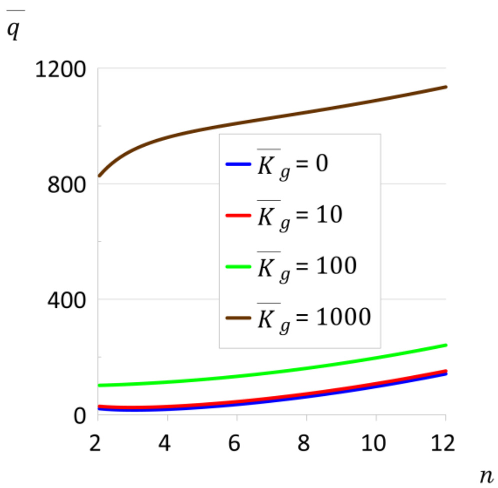
d) $\bar{K}_r = 1000$



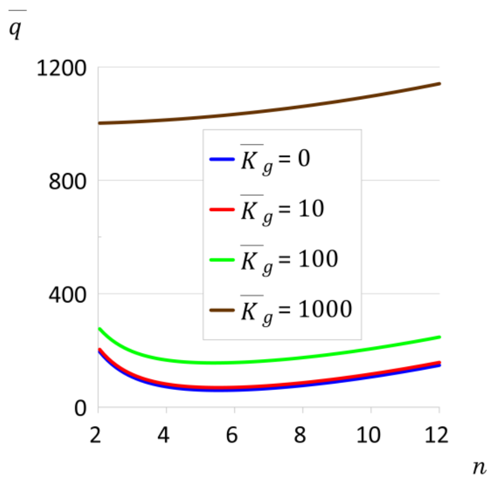
a) $\bar{K}_r = 0$



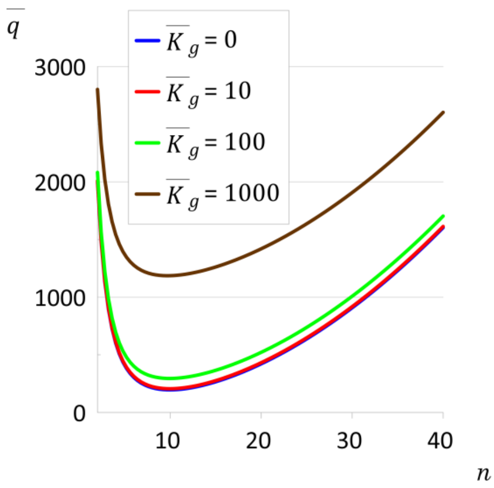
b) $\bar{K}_r = 10$



c) $\bar{K}_r = 100$

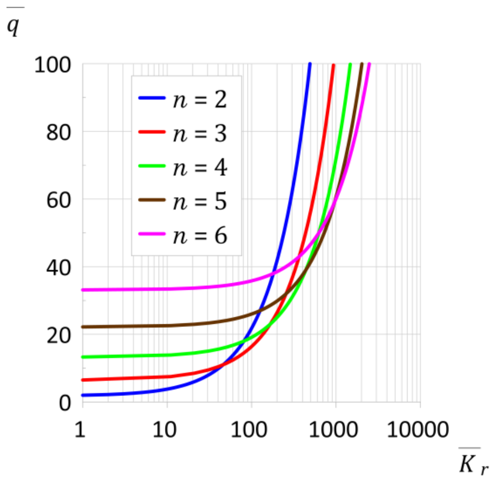


d) $\bar{K}_r = 1000$

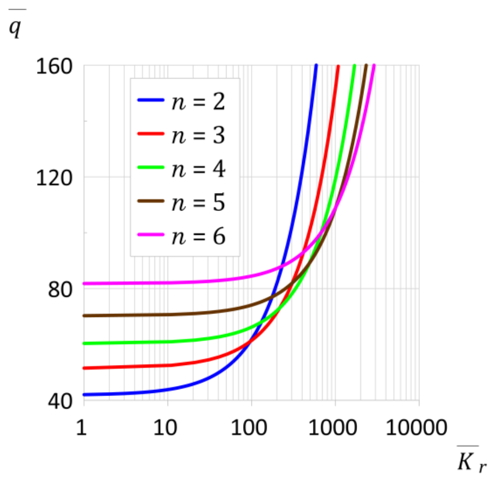


e) $\bar{K}_r = 10000$

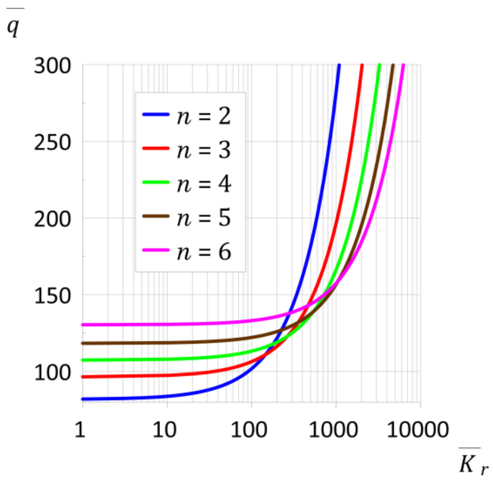
Figura 5.4: Variação da carga de bifurcação com o número de ondas circunferenciais n para valores selecionados da rigidez da fundação $\bar{K}_g$ e $\bar{K}_r$.



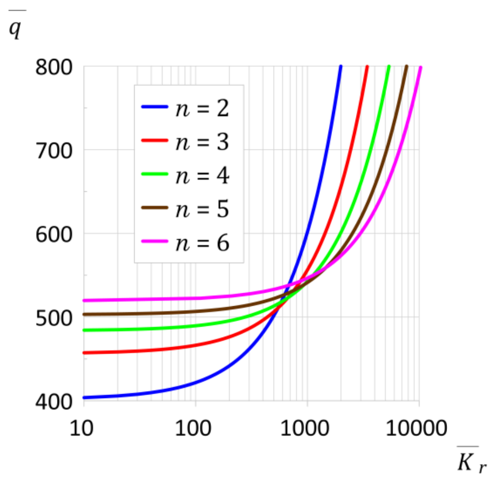
a) $\bar{K}_g = 0$



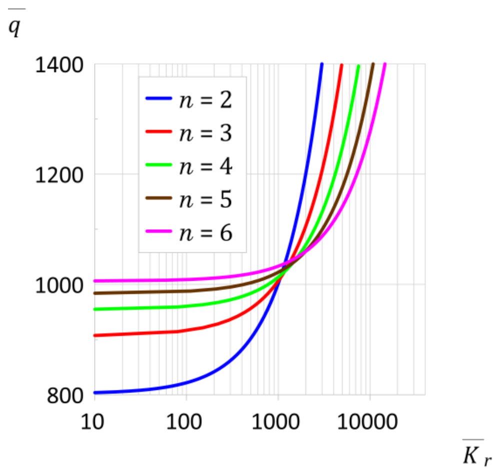
b) $\bar{K}_g = 50$



c) $\bar{K}_g = 100$



d) $\bar{K}_g = 500$

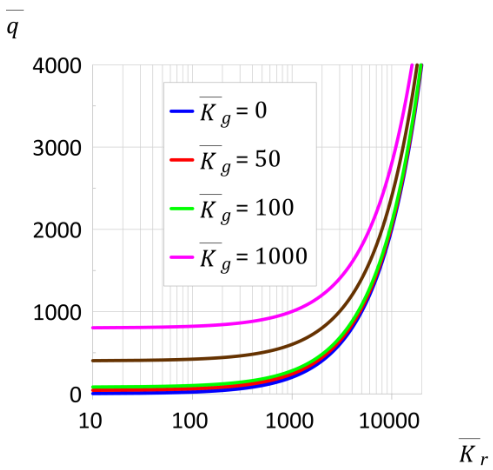


e) $\overline{K}_g = 1000$

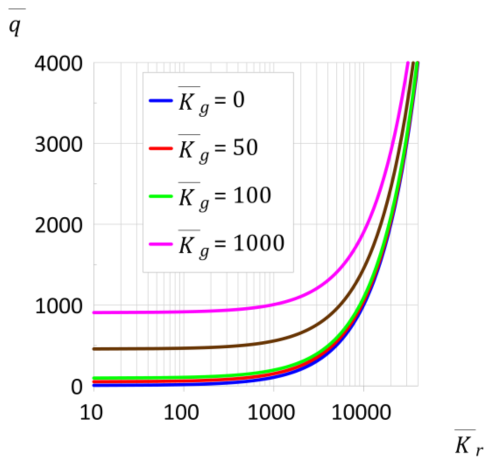
Figura 5.5: Variação da carga crítica com a rigidez da fundação $\overline{K}_r$ para valores selecionados do número de ondas circunferenciais n e da rigidez da fundação $\overline{K}_g$

Tabela 5.1: Valores de $\overline{K}_r$ onde ocorre mudança do modo crítico para valores crescentes de $\overline{K}_g$.

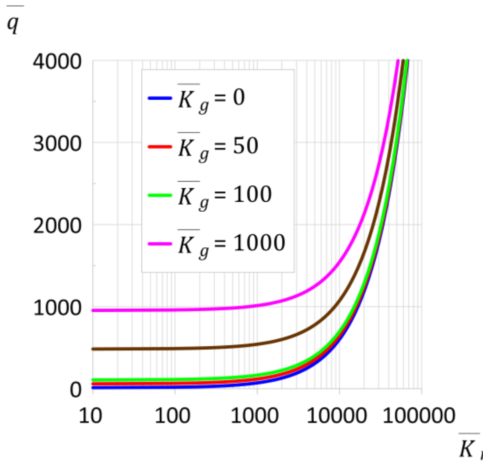
$\overline{K}_g$	$\overline{K}_r$			
	2-3	**3-4**	**4-5**	**5-6**
0	46	166	438	958
50	96	216	488	1008
100	146	266	538	1058
500	546	666	938	1458
1000	1046	1166	1438	1958



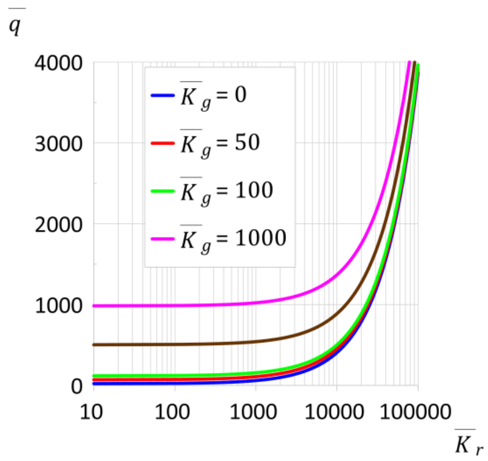
a) $n = 2$



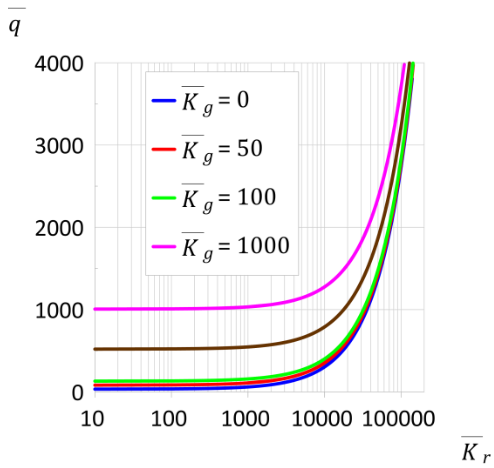
b) $n = 3$



c) $n = 4$



d) $n = 5$



e) $n = 6$

Figura 5.6: Variação da carga crítica com a rigidez da fundação $\bar{K}_r$ para valores selecionados de ridigez da fundação $\bar{K}_g$ para o número de ondas circunferenciais n

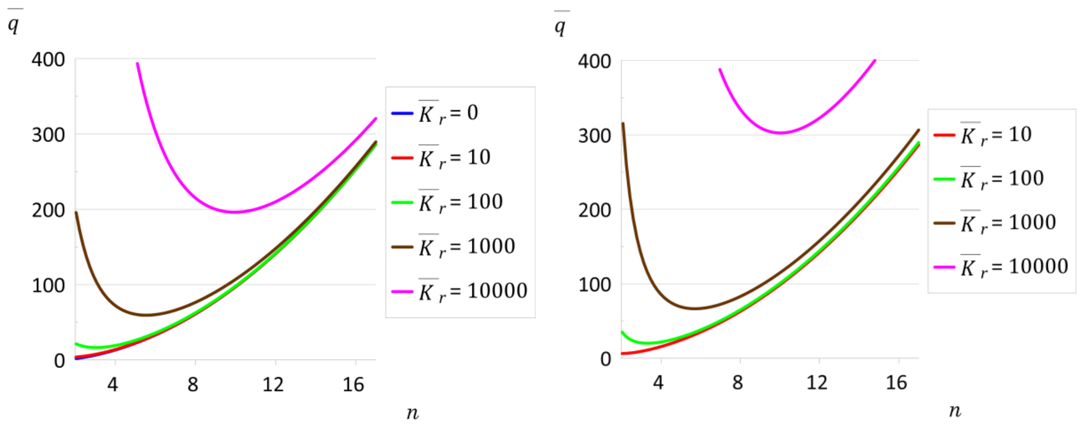
5.2. Consideração da influência da fundação na solução fundamental na carga e modo crítico

Considera-se agora o efeito da fundação de Pasternak na solução fundamental do anel. Neste caso, o deslocamento radial que descreve a solução fundamental passa a ser dado, como deduzido no Capítulo 3, por:

$$w_0 = \frac{-q}{\frac{EA}{a^2} + \frac{q}{a} + K_r} \cong \frac{-q}{\frac{EA}{a^2} + K_r} = \frac{-qa^2}{EA + K_r a^2} \quad (5.3)$$

onde se observa que, como esperado, a contração radial é inversamente proporcional a K_r, ou seja, quanto maior K_r, menor a contração radial w_0, o que necessariamente leva a um aumento da carga crítica.

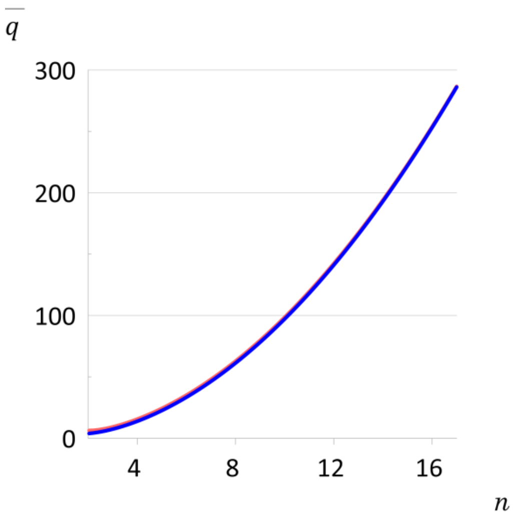
A Figura 5.7 mostra a variação das cargas de bifurcação para valores selecionados de $\overline{K}_r$ em função de n considerando as duas hipóteses quanto à solução fundamental (Equação (3.2) ou Equação (3.3)), enquanto a Figura 5.8 compara as curvas para cada $\overline{K}_r$. Observa-se que as curvas apresentam o mesmo tipo de comportamento. Para pequenos valores de $\overline{K}_r$, os resultados obtidos pelas duas formulações são próximos, tendo pouca influência na carga e modo crítico. Entretanto, à medida que $\overline{K}_r$ aumenta, observa-se uma gradativa diferença entre os resultados. Os resultados mostram que é imprescindível considerar o efeito da fundação na solução fundamental. Cabe ressaltar, como visto no Capítulo 3, que a solução fundamental independe do coeficiente de fundação de Pasternak associado ao cisalhamento, $\overline{K}_g$.



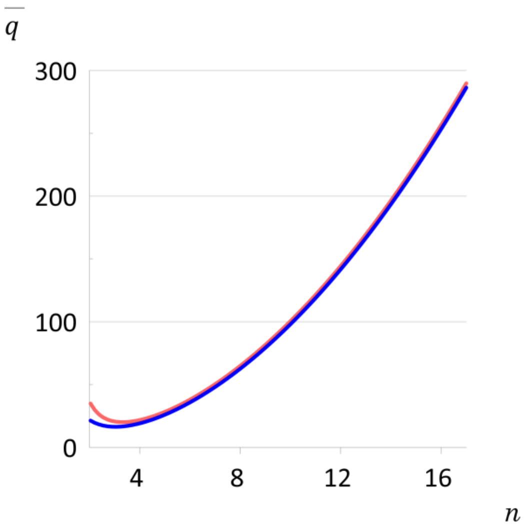
a) Desconsiderando $\overline{K}_r$ na solução fundamental

b) Considerando $\overline{K}_r$ na solução fundamental

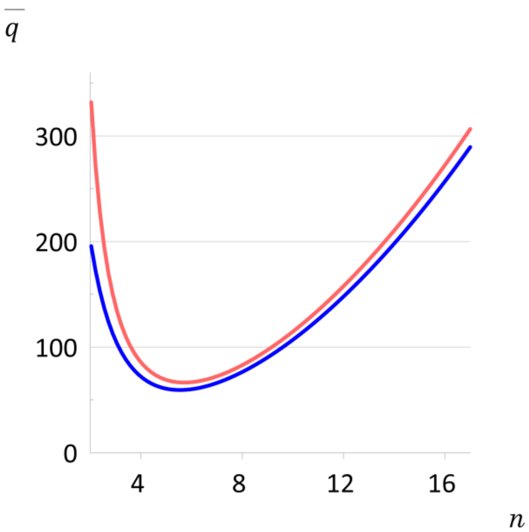
Figura 5.7: Variação da carga crítica com o número de ondas circunferenciais n para valores selecionados da rigidez da fundação $\overline{K}_g$ para $\overline{K}_r = 0, 10, 100$ e 1000



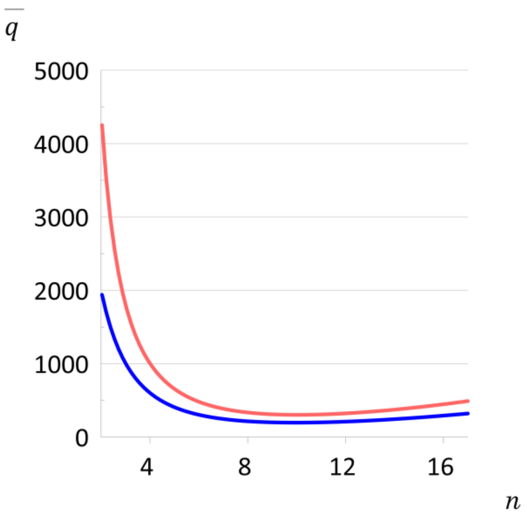
a) $\overline{K}_r = 10$



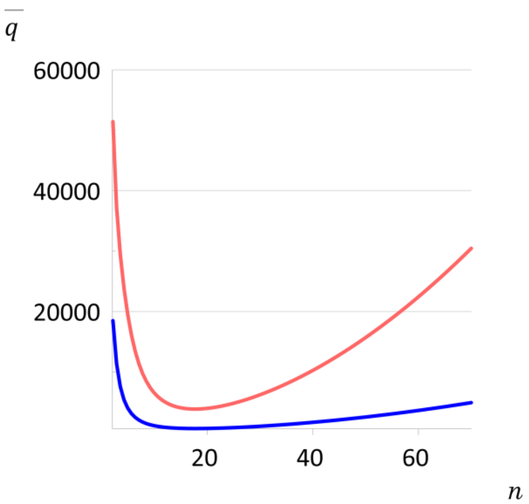
b) $\overline{K}_r = 10^2$



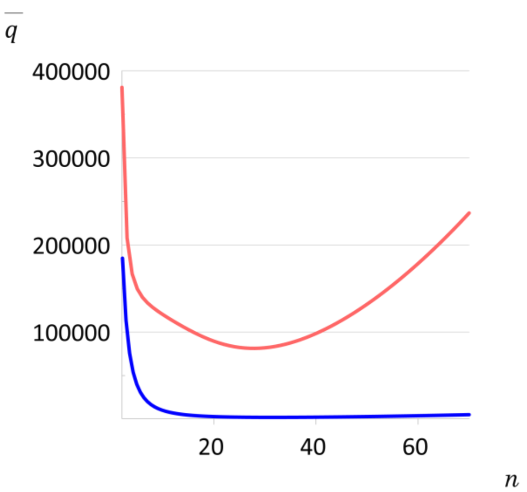
c) $\overline{K}_r = 10^3$



d) $\overline{K}_r = 10^4$



e) $\overline{K}_r = 10^5$



f) $\overline{K}_r = 10^6$

Figura 5.8: Comparação entre as curvas para cada $\overline{K}_r$ nas duas formulações. Legenda: considerando a solução fundamental; desconsiderando a solução fundamental.

5.3. Hipérbole de Euler

Nas normas de projeto de estruturas suscetíveis à flambagem, sempre se apresenta, para cada material, a variação da tensão crítica com um índice de esbeltez característico da geometria do elemento estrutural.

Para um anel de raio a sob pressão radial q, tem-se que o esforço normal circunferencial é dado por $N = qa$. Assim tem-se que a tensão normal na seção transversal é dada por

$$\sigma = \frac{qa}{A} \tag{5.4}$$

onde A é área da seção do anel.

Assim tem-se que a tensão crítica é dada por:

$$\sigma_{cr} = \frac{q_{cr}a}{A} = 3\frac{EI}{Aa^3} = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{a}\right)^3 \tag{5.5}$$

Para o anel sem fundação, tem-se portanto:

$$\sigma_{cr} = \frac{q_{cr}a}{A} = 3\frac{EI}{Aa^2} = 3E\left(\frac{\bar{k}}{a}\right)^2 = \frac{3E}{\left(a/\bar{k}\right)^2} \tag{5.6}$$

onde $\bar{k} = \sqrt{I/A}$ é o raio de giração da seção transversal do anel.

Observa-se que a tensão crítica depende apenas do módulo de elasticidade do material e do coeficiente $(\bar{k}/a)^2$ associado à geometria do anel. Para um anel de seção retangular, tem-se que:

$$\sigma_{cr} = E\left(\frac{h}{2a}\right)^2 = \frac{E}{\lambda_e^2} \tag{5.7}$$

onde $\lambda_e = (2a/h)$ é o índice de esbeltez do anel

Considerando um material com tensão de escoamento σ_y, enquanto $\sigma_{cr} < \sigma_y$, a flambagem ocorre no regime elástico. O caso limite entre o comportamento elástico e plástico ocorre quando

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\lambda_{e_{lim}}^{2}} = \sigma_y \tag{5.8}$$

Assim, o índice de esbeltez limite é função das características do material, sendo dado por:

$$\lambda_{e_{lim}} = \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} \tag{5.9}$$

Considerando, por exemplo, uma tubulação em aço com $E = 200$ GPa e $\sigma_y = 250$ MPa, tem-se o índice de esbeltez limite do anel:

$$\lambda_{e_{lim}} = \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} = 28.28 \tag{5.10}$$

Logo, para $\lambda_e < \lambda_{e_{lim}}$, o anel escoa antes de perder a estabilidade e para $\lambda_e > \lambda_{e_{lim}}$ o anel perde a estabilidade no regime elástico.

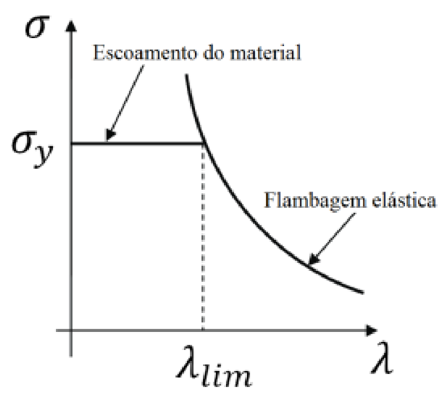


Figura 5.9: Hipérbole de Euler

6
Análise paramétrica para as frequências naturais

Neste capítulo, estuda-se a influência dos parâmetros geométricos e físicos do sistema anel-fundação nas frequências naturais, em particular na primeira frequência natural (frequência fundamental) associada ao modo de vibração de flexão no plano do anel.

6.1.
Frequências naturais adimensionais $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$ do anel sem fundação

A primeira frequência natural (frequência fundamental) para o anel submetido ao carregamento de pressão hidrostática, desconsiderando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa é dada, como apresentado no Capítulo 4, por:

$$\lambda_{1n} = \frac{EI}{2A\rho a^4}\Bigg\{\left(\frac{Aa^2}{I} + n^2\right)(n^2+1) - \frac{qa^3}{EI}(n^2-1) - \Bigg[\left(\frac{q^2a^6}{E^2I^2} + \frac{2Aqa^5}{EI^2} - \frac{2qa^3n^2}{EI}\right)(n^4 - 2n^2 + 1) + \left(\frac{A^2a^4}{I^2} + n^4\right)(n^4 + 2n^2 + 1) - \frac{2Aa^2n^2}{I}(n^4 - 6n^2 + 1)\Bigg]^{1/2}\Bigg\} \quad (6.1)$$

Considerando as variáveis adimensionais

$$\delta = \frac{Aa^2}{I}; \quad \bar{q} = \frac{qa^3}{EI} \quad (6.2)$$

tem-se a frequência fundamental adimensional:

$$\bar{\omega}_1^2 = \bar{\lambda}_1 = \frac{\rho a^2 \lambda_{1n}}{E}$$
$$= \frac{1}{2\delta}\Big\{(\delta + n^2)(n^2+1) - \bar{q}(n^2-1)$$
$$- [\bar{q}(\bar{q} + 2\delta - 2n^2)(n^4 - 2n^2 + 1) + (\delta^2 + n^4)(n^4 + 2n^2 + 1)$$
$$- 2\delta n^2(n^4 - 6n^2 + 1)]^{1/2}\Big\} \qquad (6.3)$$

que é função do parâmetro de carga adimensional $\bar{q}$, do parâmetro geométrico δ e do número de ondas circunferenciais n. Para um anel com seção retangular, tem-se que $\delta = 12(a/h)$, que expressa a esbeltez do anel. Quanto maior (a/h), mais esbelto é o anel.

Considerando $\bar{q} = 0$, a Equação (6.3) se reduz para o anel descarregado a:

$$\bar{\omega}_1 = \Bigg\{\frac{1}{2\delta}\Big\{(\delta + n^2)(n^2+1)$$
$$- [(\delta^2 + n^4)(n^4 + 2n^2 + 1)$$
$$- 2\delta n^2(n^4 - 6n^2 + 1)]^{1/2}\Big\}\Bigg\}^{1/2} \qquad (6.4)$$

A segunda frequência natural adimensional foi obtida de forma análoga à primeira, sendo dada por

$$\bar{\omega}_2 = \Bigg\{\frac{1}{2\delta}\Big\{(\delta + n^2)(n^2+1)$$
$$+ [(\delta^2 + n^4)(n^4 + 2n^2 + 1)$$
$$- 2\delta n^2(n^4 - 6n^2 + 1)]^{1/2}\Big\}\Bigg\}^{1/2} \qquad (6.5)$$

Esta frequência, associada ao modo de vibração circunferencial, é bem superior à frequência fundamental do anel e tem menor importância prática.

Considerando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa, tem-se para a menor frequência:

$$\bar{\omega}_1 = \sqrt{\bar{\lambda}_1} = \sqrt{\frac{\rho a^2 \lambda_{1n}}{E}}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2(\delta + n^2 + 1\,)} \left\{ (2n^4 - n^2 + 1) + \delta(n^2 + 1) \right.\right.$$

$$- \frac{\bar{q}}{\delta}(\delta + 1)(n^2 - 1)$$

$$- \left\{ \delta^2(n^4 + 2n^2 + 1) + 2\delta(5n^4 - 2n^2 + 1) + (9n^4 - 6n^2 + 1) \right.$$

$$+ \left[\frac{\bar{q}}{\delta}\left(\frac{\bar{q}}{\delta} + 2\bar{q}\right) + \bar{q}(2\delta + \bar{q}) \right](n^4 - 2n^2 + 1)$$

$$+ 4\bar{q}(2n^4 - 3n^2 + 1)$$

$$\left.\left.\left. + \frac{2\bar{q}}{\delta}(3n^4 - 4n^2 + 1) \right\}^{1/2} \right\} \right\}^{1/2} \qquad (6.6)$$

Na análise paramétrica apresentada a seguir, observou-se que a influência da inércia à rotação na matriz de massa é desprezível para anéis esbeltos com $a/h \geq 50$, já que todos os resultados são praticamente coincidentes com aqueles obtidos desconsiderando a inércia à rotação. Assim os resultados considerando a inércia à rotação não são apresentados.

A Figura 6.1 mostra a variação da menor frequência natural adimensional do anel com o número de ondas circunferenciais n para valores selecionados do parâmetro do parâmetro de esbeltez a/h, dentro da faixa de valores encontrados em aplicações práticas. Conforme observado na Figura 6.1, para um dado valor a/h, a frequência natural de flexão no plano do anel cresce com o número de ondas circunferenciais n, sendo a menor frequência natural associada ao numero de ondas circunferenciais $n = 2$ (para $n = 1$, tem-se um deslocamento de corpo rígido com frequência nula). Observa-se que à medida que a esbeltez do anel a/h cresce, há uma queda acentuada das frequência naturais, principalmente para valores elevados de n. A Figura 6.2 ilustra os dois primeiros modos de flexão do anel.

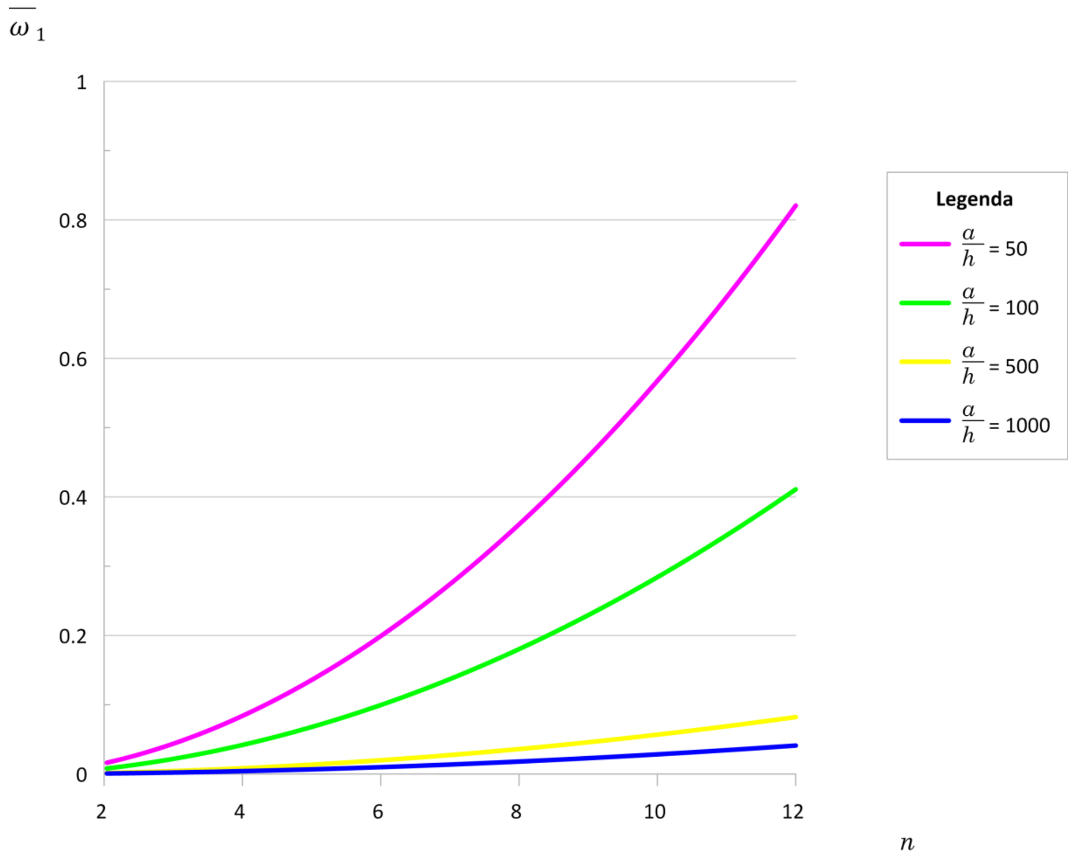


Figura 6.1: Variação da menor frequência natural adimensional do anel com o número de ondas circunferenciais n para valores selecionados do parâmetro a/h

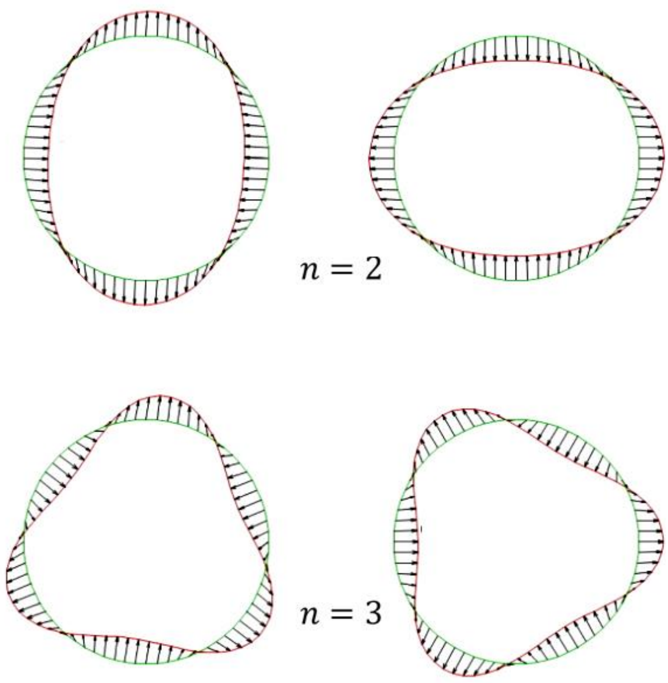


Figura 6.2: Dois primeiros modos de vibração do anel.

A Figura 6.3 mostra a variação da maior frequência natural adimensional do anel com o número de ondas circunferenciais n para valores selecionados do parâmetro a/h. Observa-se que todas as curvas estão sobrepostas, indicando que esta frequência, associada ao modo circunferencial de vibração, independe do valor de a/h na faixa de valores analisada. Observa-se um crescimento linear da frequência $\overline{\omega}_2$ com n.

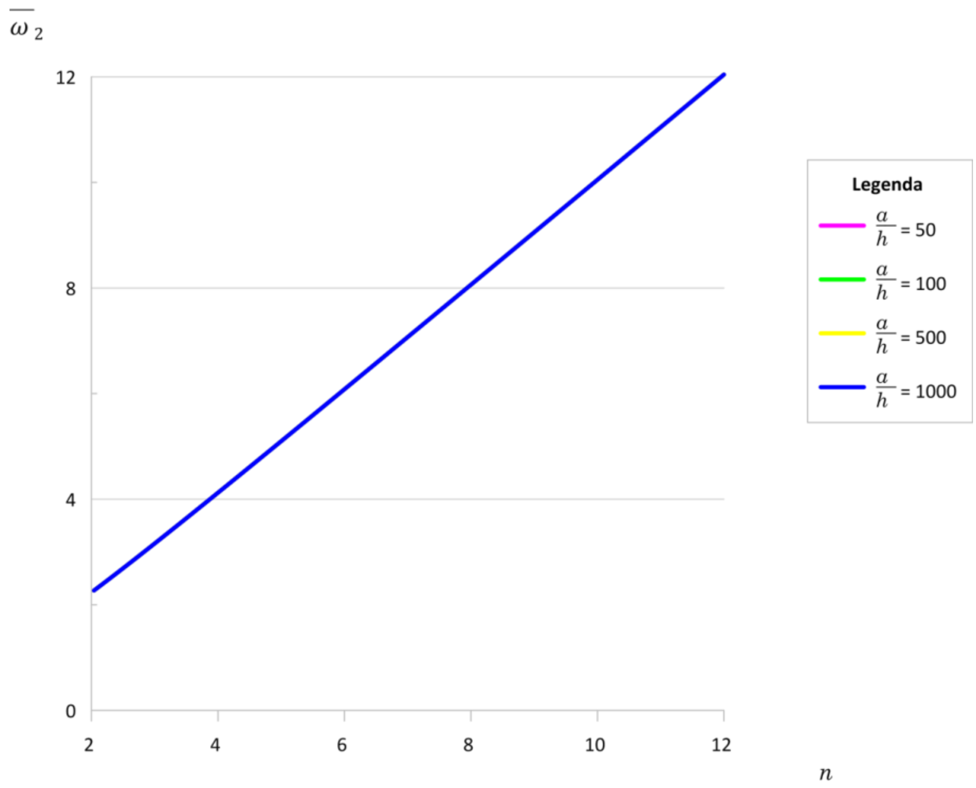


Figura 6.3: Variação da maior frequência natural adimensional do anel com o número de ondas circunferenciais n para valores selecionados do parâmetro a/h

6.2. Efeito dos parâmetros da fundação nas frequências naturais adimensionais $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$

A equação da primeira frequência natural para o anel com fundação submetido ao carregamento de pressão hidrostática desconsiderando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa:

$$\lambda_{1n} = \frac{EI}{2\rho a^4}\left\{\left(\frac{a^2}{I}+\frac{n^2}{A}\right)(n^2+1)-\frac{qa^3}{EIA}(n^2-1)+\frac{a^2}{EIA}\left(K_r a^2+K_g n^2\right)\right.$$
$$-\left[\left(\frac{n^4}{A^2}+\frac{a^4}{I^2}\right)(n^4+2n^2+1)\right.$$
$$+\frac{qa^3}{EIA}\left(\frac{qa^3}{EIA}+\frac{2a^2}{I}-\frac{2n^2}{A}\right)(n^4-2n^2+1)$$
$$-\frac{2a^2n^2}{IA}(n^4-6n^2+1)$$
$$-\frac{2a^2}{EIA}\left(\frac{qa^3}{EIA}+\frac{a^2}{I}-\frac{n^2}{A}\right)\left(K_r a^2+K_g n^2\right)(n^2-1)$$
$$\left.\left.+\frac{a^4}{E^2I^2A^2}\left(K_r a^2+K_g n^2\right)^2\right]^{1/2}\right\} \qquad (6.7)$$

Colocando $1/A$ em evidência, a Equação (6.7) resulta em (6.8).

$$\lambda_{1n} = \frac{EI}{2A\rho a^4}\left\{\left(\frac{Aa^2}{I}+n^2\right)(n^2+1)-\frac{qa^3}{EI}(n^2-1)+\frac{a^2}{EI}\left(K_g n^2+K_r a^2\right)\right.$$
$$+\left[\left(n^4+\frac{A^2a^4}{I^2}\right)(n^4+2n^2+1)\right.$$
$$+\frac{qa^3}{EI}\left(\frac{qa^3}{EI}-2n^2+\frac{2Aa^2}{I}\right)(n^4-2n^2+1)$$
$$-\frac{2Aa^2n^2}{I}(n^4-6n^2+1)$$
$$-\frac{2a^2}{EI}\left(\frac{qa^3}{EI}-n^2+\frac{Aa^2}{I}\right)(n^2-1)\left(K_g n^2+K_r a^2\right)$$
$$\left.\left.+\frac{a^4}{E^2I^2}\left(K_g n^2+K_r a^2\right)^2\right]^{1/2}\right\} \qquad (6.8)$$

Considerando as variáveis adimensionais (6.9) e substituindo em (6.8) e reorganizando, resulta na Equação (6.10).

$$\delta = \frac{Aa^2}{I};\ \ \bar{q} = \frac{qa^3}{EI};\ \ \bar{K}_r = \frac{K_r a^4}{EI};\ \ \bar{K}_g = \frac{K_g a^2}{EI} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 = \sqrt{\bar{\lambda}_1} = \sqrt{\frac{\rho a^2 \lambda_{1n}}{E}} \\ = \left\{\frac{1}{2\delta}\left\{(n^2+\delta)(n^2+1) - \bar{q}(n^2-1) + \left(\bar{K}_r + \bar{K}_g n^2\right)\right.\right. \\ - \left[(\delta^2+n^4)(n^4+2n^2+1) + \bar{q}(\bar{q}-2n^2+2\delta)(n^4-2n^2+1)\right. \\ - 2\delta n^2(n^4-6n^2+1) - 2(\bar{q}-n^2+\delta)(n^2-1)\left(\bar{K}_r+\bar{K}_g n^2\right) \\ \left.\left.\left. + \left(\bar{K}_r+\bar{K}_g n^2\right)^2\right]^{1/2}\right\}\right\}^{1/2}\end{aligned} \tag{6.10}$$

Considerando $\bar{q} = 0$, a Equação (6.10) se reduz a (6.11).

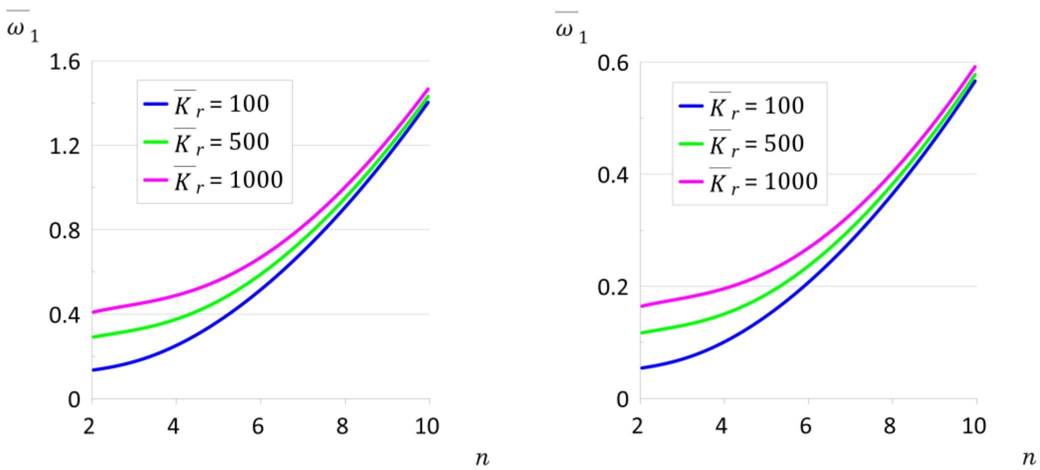
$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 = \sqrt{\bar{\lambda}_1} = \sqrt{\frac{\lambda_{1n}\rho a^2}{E}} = \\ = \left\{\frac{1}{2\delta}\left\{(\delta+n^2)(n^2+1) + \left(\bar{K}_r + \bar{K}_g n^2\right)\right.\right. \\ - \left[(n^4+\delta^2)(n^4+2n^2+1) - 2\delta n^2(n^4-6n^2+1)\right. \\ - 2(\delta-n^2)(n^2-1)\left(\bar{K}_r+\bar{K}_g n^2\right) \\ \left.\left.\left. + \left(\bar{K}_r+\bar{K}_g n^2\right)^2\right]^{1/2}\right\}\right\}^{1/2}\end{aligned} \tag{6.11}$$

A segunda frequência natural adimensional foi obtida de forma análoga à da primeira.

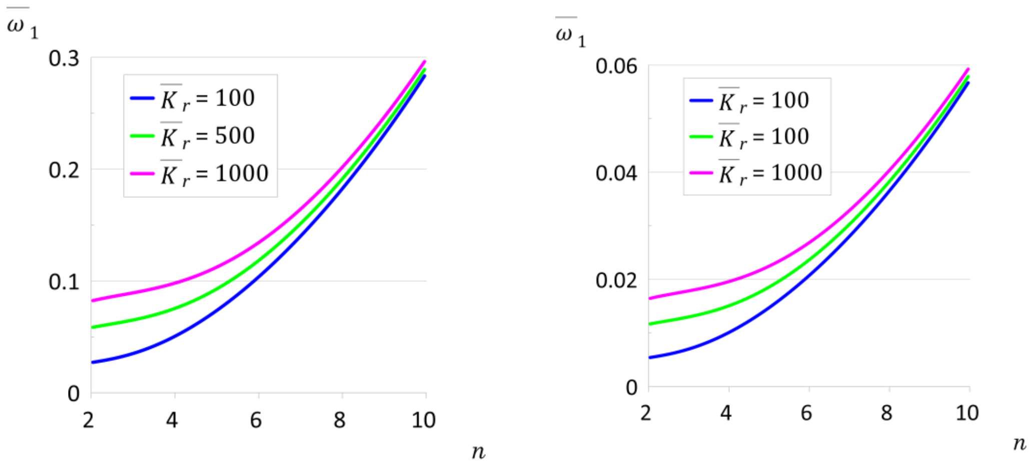
$$\bar{\omega}_2 = \sqrt{\bar{\lambda}_2} = \sqrt{\frac{\lambda_{2n}\rho a^2}{E}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2\delta}\left\{(\delta + n^2)(n^2+1) + \left(\bar{K}_r + \bar{K}_g n^2\right)\right.\right.$$
$$+ \left[(n^4+\delta^2)(n^4+2n^2+1) - 2\delta n^2(n^4 - 6n^2 + 1)\right.$$
$$- 2(\delta - n^2)(n^2-1)\left(\bar{K}_r + \bar{K}_g n^2\right)$$
$$\left.\left.\left. + \left(\bar{K}_r + \bar{K}_g n^2\right)^2\right]^{1/2}\right\}\right\}^{1/2} \qquad (6.12)$$

A Figura 6.4 mostra a variação da frequência natural adimensional de flexão $\bar{\omega}_1$ com o número de ondas circunferenciais n para quatro valores de a/h $(a/h = 20, 50, 100$ e $500)$ e valores selecionados da rigidez da fundação $\bar{K}_r$ $(\bar{K}_r = 100, 500, 1000)$. Conforme mostra a Figura 6.4, quanto maior o número de ondas circunferenciais n, maior a frequência natural. Quanto maior a razão a/h, ou seja, quanto mais esbelto o anel, menores os valores de frequências naturais para os mesmos números de ondas circunferenciais n. Como esperado, as frequências naturais aumentam à medida que a rigidez da fundação aumenta. Para um dado valor de a/h, a diferença entre as frequências naturais diminui à medida que n aumenta.



a) $a/h = 20$ b) $a/h = 50$



c) $a/h = 100$ d) $a/h = 500$

Figura 6.4: Variação da menor frequência natural adimensional do anel com fundação desconsiderando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa com o número de ondas circunferenciais n para $a/h = 20, 50, 100$ e 500 e valores selecionados da rigidez da fundação $\overline{K}_r$

A Figura 6.5 apresenta a variação da frequência natural de flexão com a rigidez da fundação $\overline{K}_r$ para $a/h = 50$ e valores selecionados do número de ondas circunferenciais n. A Figura 6.5 mostra que, quanto maior o número de ondas circunferenciais n, maior a frequência natural de flexão, crescendo a diferença entre os resultados com o aumento de $\overline{K}_r$. Não há diferença visível entre os gráficos conforme aumenta a/h. Para $\overline{K}_r$ próximo a 10^6, cada frequência tende a um determinado valor constante.

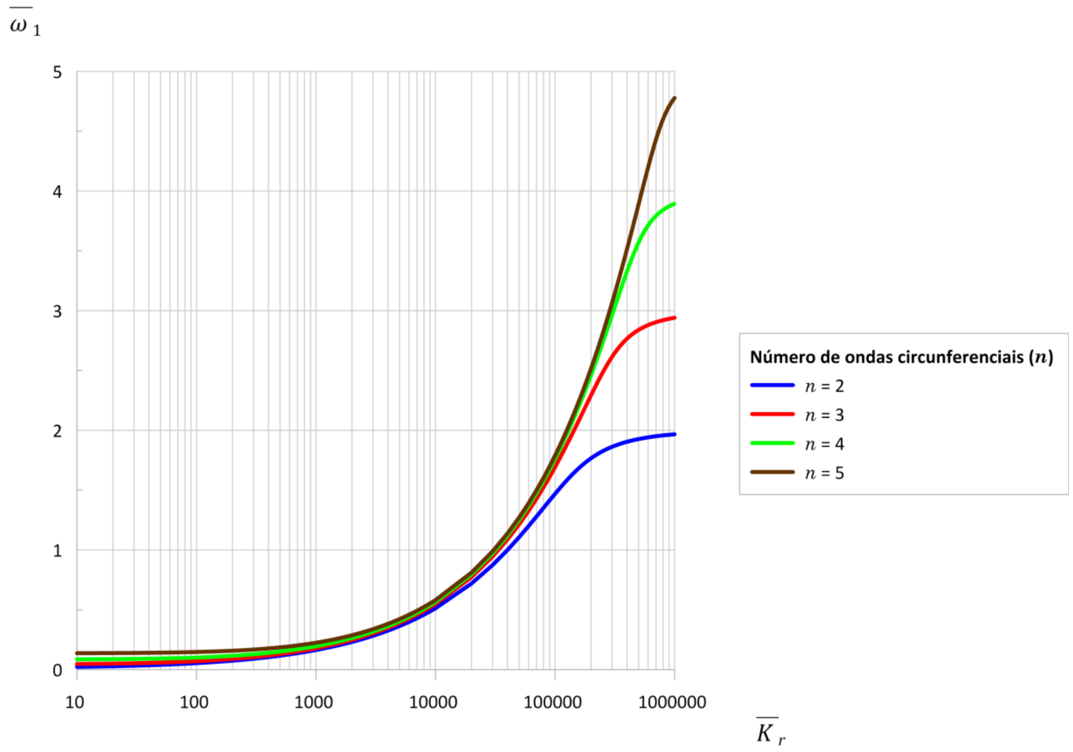


Figura 6.5: Variação da menor frequência natural adimensional do anel com fundação desconsiderando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa com a rigidez da fundação $\overline{K}_r$ para $a/h = 50$ e valores selecionados do número de ondas circunferenciais n

A Figura 6.6 mostra a variação da segunda frequência natural $\overline{\omega}_2$ com o parâmetro de rigidez da fundação $\overline{K}_r$. Obtém-se um comportamento bastante distinto daquele obtido para $\overline{\omega}_1$. Observa-se uma grande influência do número de ondas circunferenciais n para pequenos valores de $\overline{K}_r$, sendo a frequência adimensional praticamente constante nesta região. À medida que $\overline{K}_r$ cresce acima de 10^6, as frequências passam a crescer e todas as curvas convergem para a mesma frequência para valores elevados de $\overline{K}_r$, para todos os valores de n.

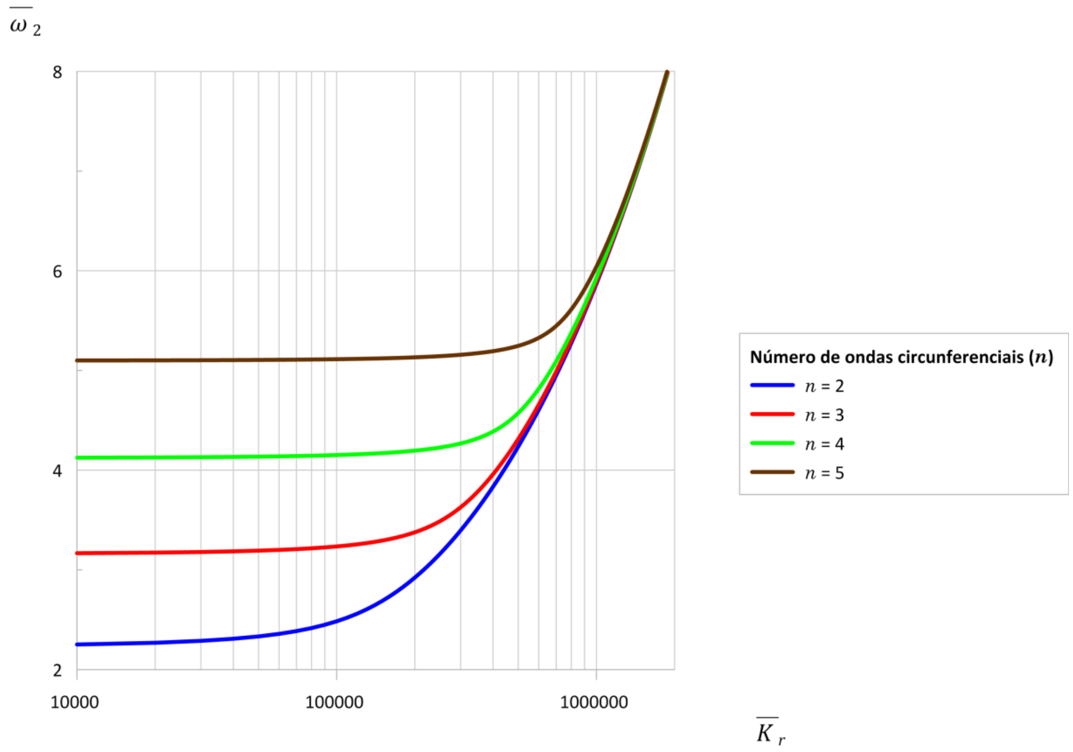


Figura 6.6: Variação da maior frequência natural adimensional do anel com fundação desconsiderando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa com a rigidez da fundação $\overline{K}_r$ para $a/h = 50$ e valores selecionados do número de ondas circunferenciais n

Para um anel em uma fundação tipo Pasternak e submetido a uma pressão hidrostática, as frequências naturais adimensionais são dadas por:

$$\overline{\omega}_1 = \sqrt{\overline{\lambda}_1} = \sqrt{\frac{\rho a^2 \lambda_{1n}}{E}}$$
$$= \left\{\frac{1}{2\delta}\left\{(n^2+\delta)(n^2+1) - \overline{q}(n^2-1) + \left(\overline{K}_r + \overline{K}_g n^2\right)\right.\right.$$
$$- \left[(\delta^2+n^4)(n^4+2n^2+1) + \overline{q}(\overline{q}-2n^2+2\delta)(n^4-2n^2+1)\right.$$
$$- 2\delta n^2(n^4-6n^2+1) - 2(\overline{q}-n^2+\delta)(n^2-1)\left(\overline{K}_r+\overline{K}_g n^2\right)$$
$$\left.\left.\left. + \left(\overline{K}_r + \overline{K}_g n^2\right)^2\right]^{1/2}\right\}\right\}^{1/2} \qquad (6.10)$$

$$\bar{\varpi}_2 = \sqrt{\bar{\lambda}_2} = \sqrt{\frac{\rho a^2 \lambda_{2n}}{E}}$$

$$= \left\{\frac{1}{2\delta}\left\{(n^2+\delta)(n^2+1) - \bar{q}(n^2-1) + \left(\bar{K}_r + \bar{K}_g n^2\right)\right.\right.$$

$$+ \left[(\delta^2+n^4)(n^4+2n^2+1) + \bar{q}(\bar{q}-2n^2+2\delta)(n^4-2n^2+1)\right.$$

$$- 2\delta n^2(n^4-6n^2+1) - 2(\bar{q}-n^2+\delta)(n^2-1)\left(\bar{K}_r+\bar{K}_g n^2\right)$$

$$\left.\left.\left. + \left(\bar{K}_r+\bar{K}_g n^2\right)^2\right]^{1/2}\right\}\right\}^{1/2} \qquad (6.13)$$

A Figura 6.7 mostra a frequência fundamental $\bar{\varpi}_1$ $(n = 2)$ com a magnitude da pressão hidrostática, $\bar{q}$, para valores selecionados do parâmetro de esbeltez a/h, não considerando o efeito da fundação ($\bar{K}_r = \bar{K}_g = 0$). Verifica-se que para todos os valores do parâmetro de esbeltez a/h, a frequência fundamental decresce até se anular em $\bar{q} = \bar{q}_{cr} = 3$, que corresponde à carga crítica do anel, como visto anteriormente. Quanto maior o parâmetro a/h, maior é a variação da frequência com a carga. Caso se considere uma pressão interna, que induz tensões de tração no anel, verifica-se um aumento gradativo da frequência com a carga (continuação das curvas apresentadas para valores negativos de do parâmetro de esbeltez a/h, a frequência fundamental decresce até se anular em $\bar{q}$). A diferença entre as frequências decresce quando $\bar{q}$ se aproxima do valor crítico.

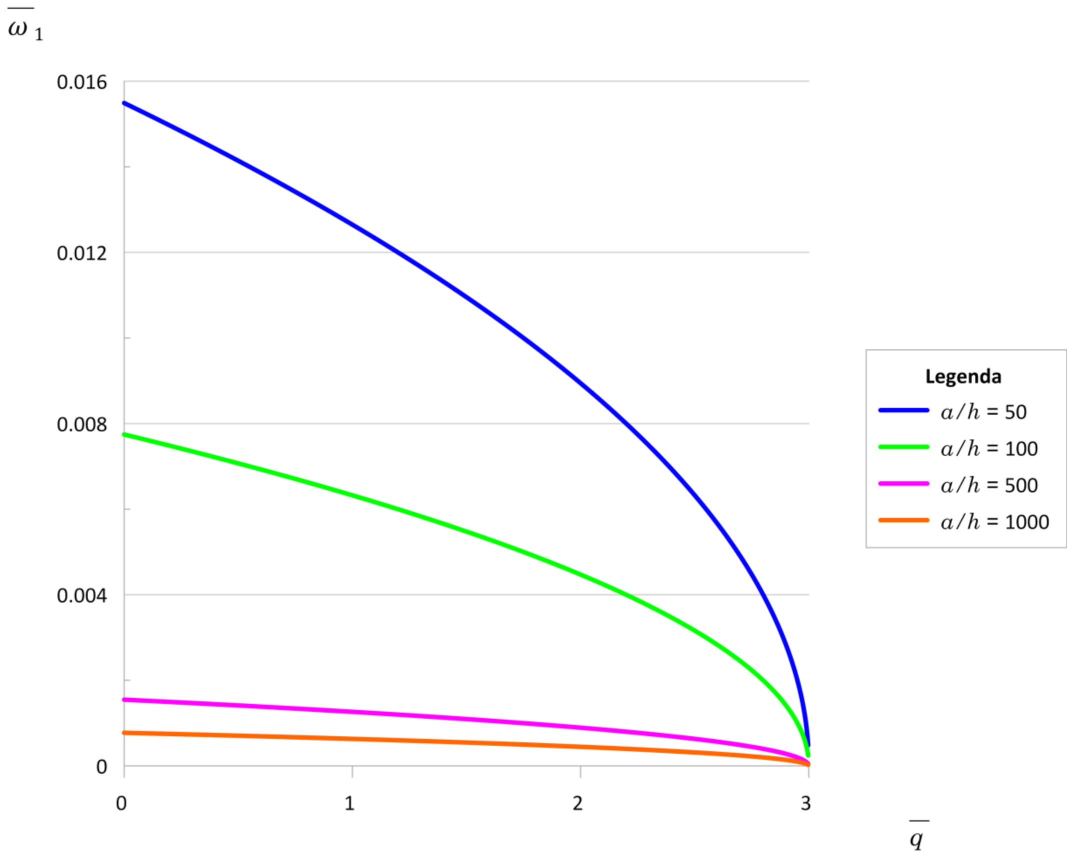


Figura 6.7: Variação da menor frequência natural adimensional $\bar{\omega}_1$ do anel com a carga $\bar{q}$ para valores selecionados da rigidez da fundação e $\bar{K}_r$, sendo $\bar{K}_g = 0$ para $n = 2$

A Figura 6.8 ilustra a influência do parâmetro de rigidez $\bar{K}_r$ na relação carga-frequência para $\bar{K}_g = 0$ e $a/h = 50$. Para cada valor de $\bar{K}_r$, apresentam-se as quatro menores frequências naturais de flexão ($n = 2$ a 5) com a carga $\bar{q}$. Para $\bar{K}_r = 10$, observa-se que à medida que o valor da carga de compressão aumenta, os valores das frequências diminuem até chegar à carga de bifurcação em cada modo. Nota-se que há uma grande influência do carregamento nas frequências de vibração. Para efeito prático, quando se atinge a primeira carga crítica, um dos autovalores se torna negativo e ocorre a flambagem, passando a estrutura a vibrar em torno de uma configuração de equilíbrio pós-crítica. Para $\bar{K}_r = 100$, já se observa um comportamento distinto com a curva relativa a $n = 2$ cruzando as outras 3 curvas. Neste caso, a primeira frequência a se tornar nula é aquela associada a $n = 3$. Este resultado concorda com os resultados obtidos para a carga crítica no Capítulo 5, onde se observa que, para este valor, o anel flamba com três ondas circunferenciais. Para $\bar{K}_r = 500$, como se observa na Figura 6.8 (c), o número de semiondas associado à frequência fundamental cresce com a carga axial compressiva, sendo que a frequência associada a $n = 5$ é a primeira a se tornar nula, concordando com o modo crítico para este valor de $\bar{K}_r$. Nota-se, neste caso, várias intercessões das curvas em torno de $\bar{K}_r = 30$, o que pode levar a diversos problemas de ressonância, incluindo ressonância interna e interação modal. Entretanto, estes fenômenos só podem ser estudados através de uma formulação dinâmica não linear. Para $\bar{K}_r = 1000$, este problema se torna mais evidente, com o número de ondas associado à menor frequência crescendo rapidamente em um pequeno intervalo de $\bar{q}$.

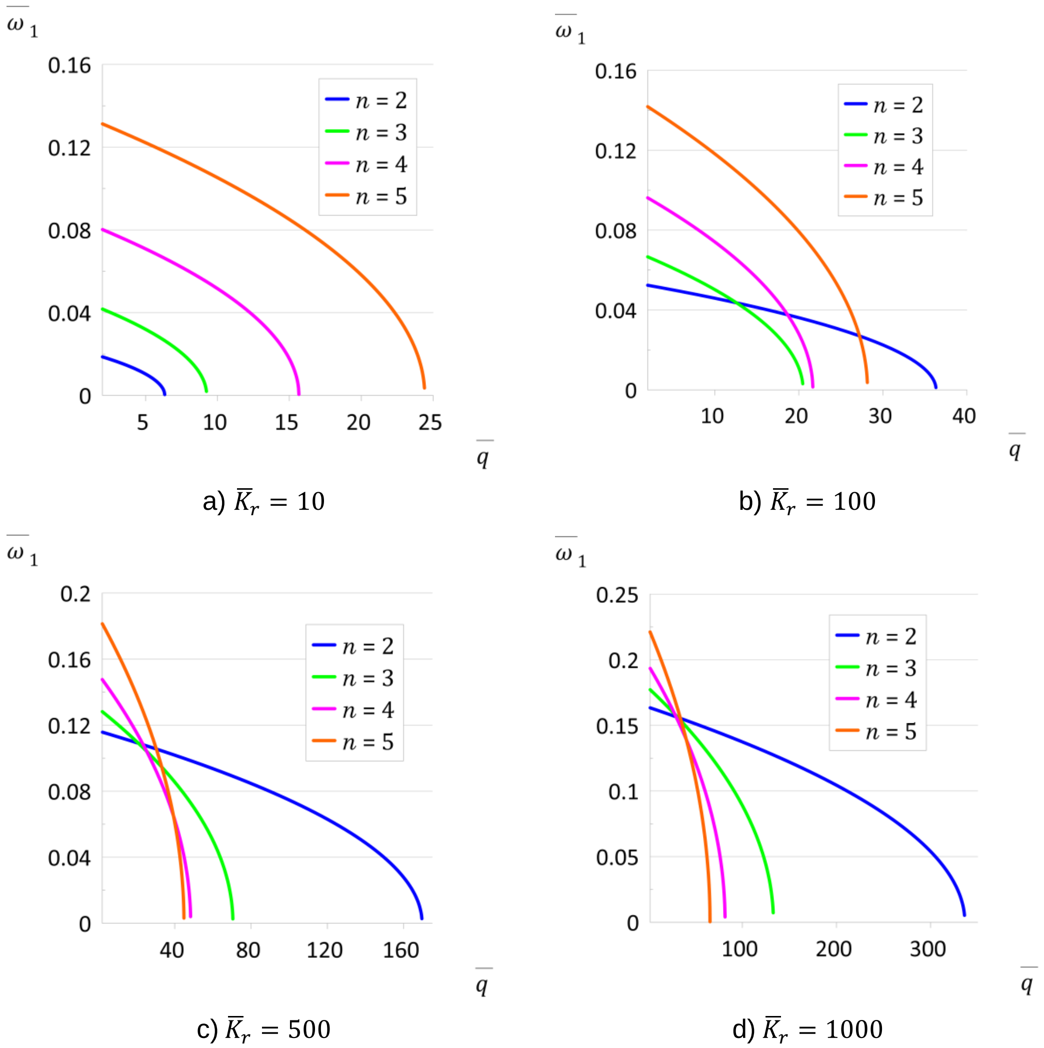
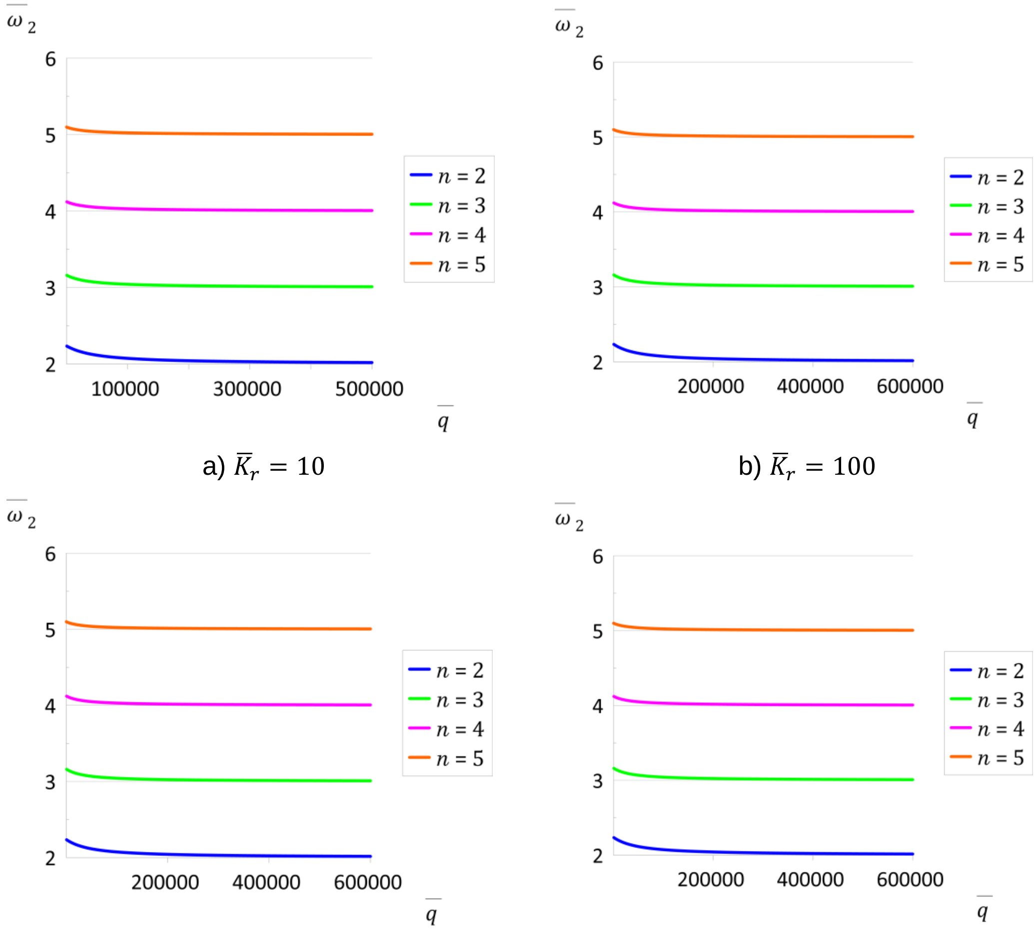


Figura 6.8: Variação da menor frequência natural adimensional $\bar{\omega}_1$ do anel desconsiderando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa com a carga $\bar{q}$ para valores selecionados de ondas circunferenciais n com rigidezes de fundação $\bar{K}_r = 10, 100, 500$ e 1000 e $\bar{K}_g = 0$ para $a/h = 50$

A Figura 6.9 mostra a influência do parâmetro de rigidez $\overline{K}_r$ na relação carga-frequência para $\overline{K}_g = 0$ e $a/h = 50$ nas quatro menores frequências naturais de vibração circunferenciais, $\overline{\omega}_2$. Observa-se que o efeito é muito pequeno para os valores analisados.

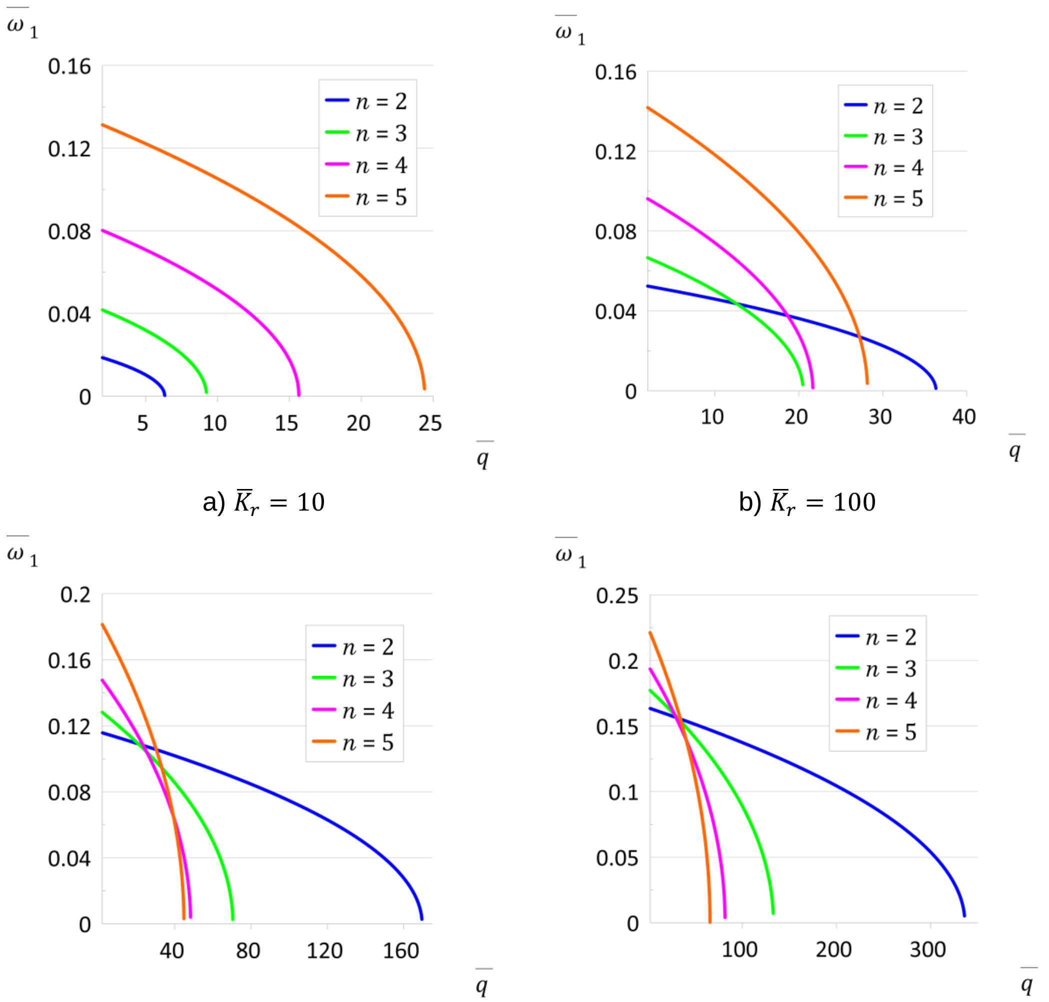


a) $\overline{K}_r = 10$ b) $\overline{K}_r = 100$

c) $\overline{K}_r = 500$ d) $\overline{K}_r = 1000$

Figura 6.9: Variação da maior frequência natural adimensional $\overline{\omega}_2$ do anel desconsiderando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa com a carga $\overline{q}$ para valores selecionados de ondas circunferenciais n com rigidezes de fundação $\overline{K}_r = 10, 100, 500$ e 1000 e $\overline{K}_g = 0$ para $a/h = 50$

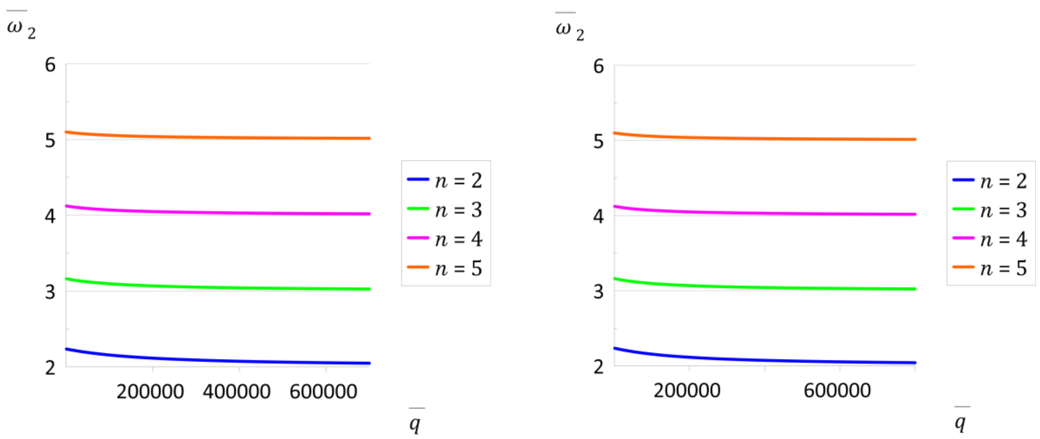
Resultados semelhantes podem ser observados na Figura 6.10 e na Figura 6.11 para $a/h = 100$.



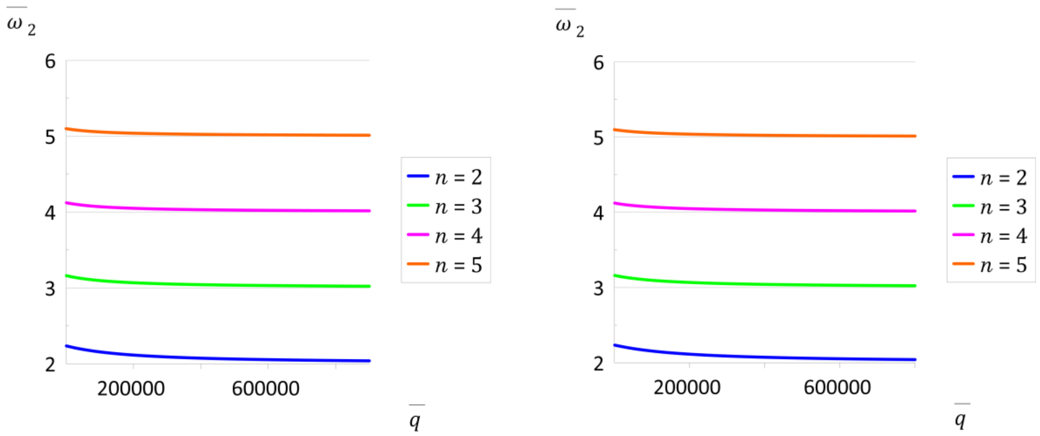
a) $\overline{K}_r = 10$ b) $\overline{K}_r = 100$

c) $\overline{K}_r = 500$ d) $\overline{K}_r = 1000$

Figura 6.10: Variação da menor frequência natural adimensional $\overline{\omega}_1$ do anel desconsiderando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa com a carga $\overline{q}$ para valores selecionados de ondas circunferenciais n com rigidezes de fundação $\overline{K}_r = 10, 100, 500$ e 1000 e $\overline{K}_g = 0$ para $a/h = 100$



a) $\overline{K}_r = 10$ b) $\overline{K}_r = 100$

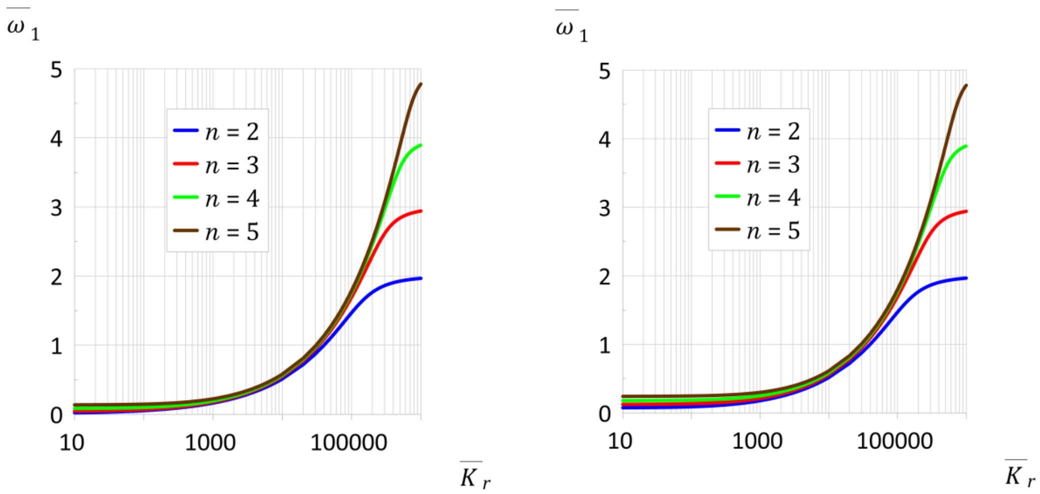


c) $\overline{K}_r = 500$ d) $\overline{K}_r = 1000$

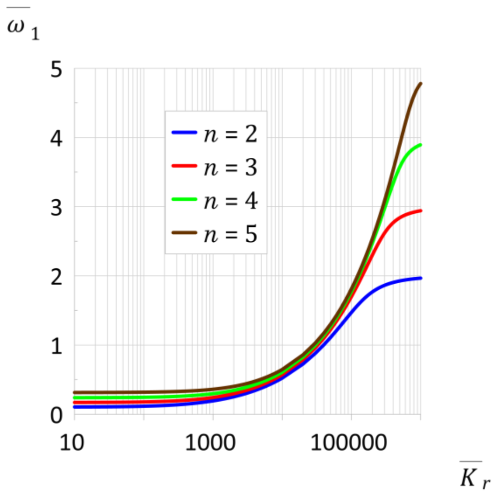
Figura 6.11: Variação da maior frequência natural adimensional $\overline{\omega}_2$ do anel desconsiderando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa com a carga $\overline{q}$ para valores selecionados de ondas circunferenciais n com rigidezes de fundação $\overline{K}_r = 10, 100, 500$ e 1000 e $\overline{K}_g = 0$ para $a/h = 100$

A influência do parâmetro de rigidez da fundação $\overline{K}_g$ na frequência natural adimensional $\overline{\omega}_1$ é estudada a seguir.

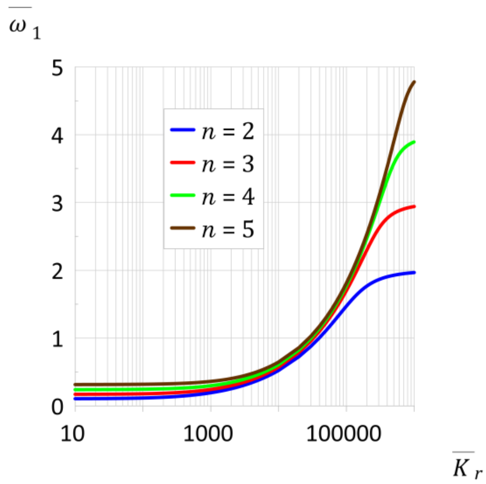
A Figura 6.12 mostra a variação das quatro menores frequências naturais de flexão em função da rigidez da fundação, $\overline{K}_r$, para valores selecionados de $\overline{K}_g$. Verifica-se o mesmo tipo de comportamento para todos os quatro valores de n as frequências naturais crescendo com n e $\overline{K}_g$.



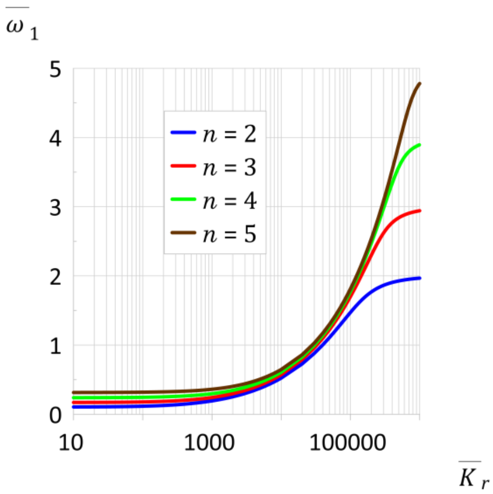
a) $\overline{K}_g = 0$ b) $\overline{K}_g = 50$



c) $\overline{K}_g = 500$



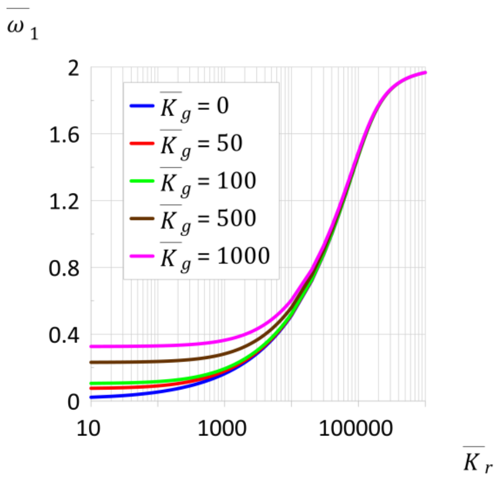
d) $\overline{K}_g = 1000$



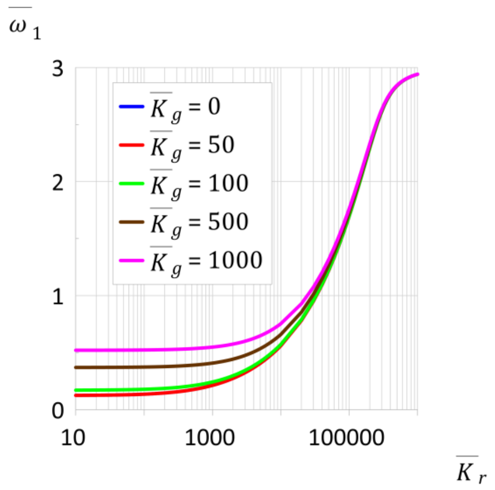
c) $\overline{K}_g = 1000$

Figura 6.12: Variação da menor frequência natural adimensional $\overline{\omega}_1$ do anel desconsiderando o efeito da inércia à rotação na matriz de massa com fundação com a rigidez da fundação $\overline{K}_g = 0, 50, 100, 500$ e 1000 para valores selecionados de ondas circunferenciais n

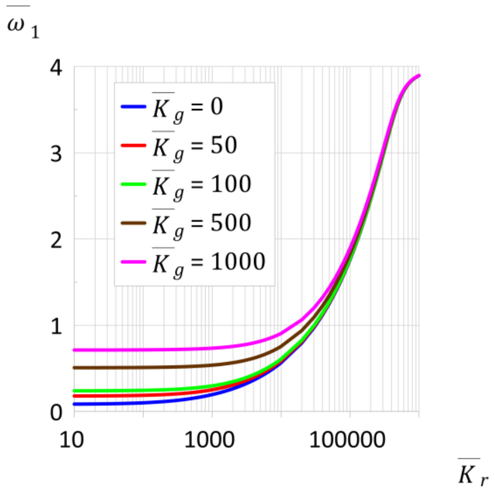
A Figura 6.13 ilustra a influência dos parâmetros da fundação Pasternak $\overline{K}_r$ e $\overline{K}_g$ nas frequências naturais para os quatro primeiros valores de n. A frequência fundamental aumenta com $\overline{K}_g$ para um determinado valor de $\overline{K}_r$, sendo sua influência particularmente importante para $\overline{K}_r < 10^6$. A influência de $\overline{K}_g$ diminui à medida que $\overline{K}_r$ aumenta e desaparece para grandes valores de $\overline{K}_r$ (fundação rígida).



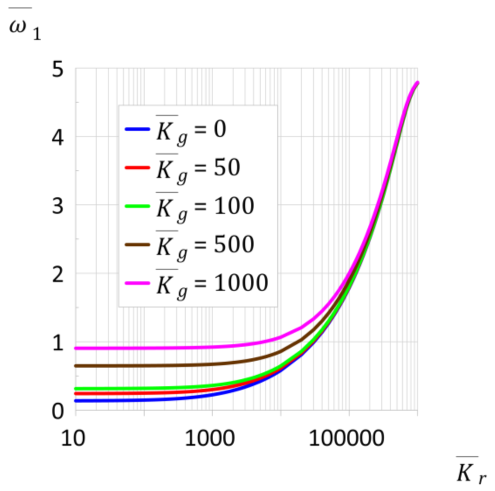
a) $n = 2$



b) $n = 3$



c) $n = 4$



d) $n = 5$

Figura 6.13: Variação da menor frequência natural adimensional $\overline{\omega}_1$ do anel com fundação com a rigidez da fundação de Winkler $\overline{K}_r$ para para valores selecionados de rigidez da fundação ao cisalhamento $\overline{K}_g$ para os números de ondas circunferenciais $n = 2, 3, 4$ e 5.

7 Efeito das imperfeições

Na formulação não linear do anel imperfeito, considerando como referência a posição do anel indeformado, adota-se que os deslocamentos totais com relação a esta configuração são dados por:

$$\begin{aligned} v_{total} &= v + \breve{v} \\ w_{total} &= w + \breve{w} \end{aligned} \qquad (7.1)$$

onde v e w são os deslocamentos devidos ao carregamento e $\breve{v}$ e $\breve{w}$ descrevem a imperfeição geométrica inicial.

A deformação específica considerando a imperfeição é dada por:

$$\varepsilon = \frac{v' + w}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{v - w'}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2}(v - w')(\breve{v} - \breve{w}') \qquad (7.2)$$

e a mudança de curvatura por

$$\kappa = \frac{v' - w''}{a^2} \qquad (7.3)$$

Assim tem-se para a energia interna de deformação:

$$\breve{U} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} EAa \left\{\frac{1}{a}(v' + w) + \frac{1}{a^2}\left[(v - w')^2 + (v - w')(\breve{v} - \breve{w}')\right]\right\}^2 + \frac{1}{2}\frac{EI(v' - w'')^2}{a^3} \, d\theta \qquad (7.4)$$

A energia potencial gravitacional do carregamento externo para o anel considerando imperfeição toma a forma:

$$\breve{\Omega} = qa \int_0^{2\pi} w + \frac{1}{2}\left[v^2 + w^2 + v(2\breve{v} - \breve{w}') + w(\breve{v}' + 2\breve{w}) + v'(w + \breve{w}) - w'(v + \breve{v})\right] d\theta \qquad (7.5)$$

A energia interna de deformação da fundação é dada por:

$$U_f = \frac{1}{2}K_r\int_0^{2\pi} w^2 a\ d\theta\ + \frac{1}{2}K_g\int_0^{2\pi}\frac{w_{,\theta}^2}{a}d\theta \qquad (7.6)$$

Assim tem-se o funcional:

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{1}{2}EAa\left\{\frac{v' + w'}{a} + \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}(v - w')^2 + (v - w')(\breve{v} - \breve{w}')\right]\right\}^2 \\ & + \frac{EIa}{2}\,\frac{(v' - w'')^2}{a^4} \\ & + \frac{q}{2}[v^2 + w^2 + v'(w + \breve{w}) - w'(v + \breve{v}) + \breve{v}'w - v\breve{w}' \\ & + 2(v\breve{v} + w\breve{w} + wa)] + \frac{1}{2}K_r w^2 a + \frac{1}{2}\,\frac{K_g w'^2}{a} \end{aligned} \qquad (7.7)$$

Empregando o cálculo variacional, obtém-se o seguinte sistema de equações não lineares de equilíbrio da estrutura imperfeita:

$$\begin{aligned} & -\frac{EI}{a^3}(v - w')'' + \frac{EA}{a^3}\left[\frac{1}{2}(v - w')(v + 2\breve{v} - w - 2\breve{w})(v + \breve{v} - w' - \breve{w}')\right] \\ & + \frac{EA}{a^2}[(w + w'')(v + \breve{v} - w' - \breve{w}') - (v - w')(\breve{v}' - \breve{w}')] \\ & - \frac{EA}{a}(v'' + w') + q(v + \breve{v} - w' - \breve{w}') = 0 \end{aligned} \qquad (7.8)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{EI}{a^3}(v - w')''' \\ & + \frac{EA}{a^3}\Big\{3[(v - w')(\breve{v} - \breve{w}')(v' - w'') \\ & - vw'(v' + \breve{v}' - w'' - \breve{w}'')] \\ & + \frac{3}{2}\left[\left(v^2 + w'^2\right)(v' + \breve{v}') - \left(v^2 + w'^2\right)(w'' + \breve{w}'')\right]\Big\} \\ & + \frac{EA}{a^2}\Big[(v' + w)(v' + \breve{v}' - w'' - \breve{w}'') + (v + v'')(\breve{v} - \breve{w}') \\ & + v''(v - w') + \frac{1}{2}\left(v^2 - w'^2\right)\Big] + \frac{EA}{a}(v' + w) - \frac{K_g w''}{a} \\ & + q(v' + \breve{v}' + w + \breve{w}) + (q + K_r w)a = 0 \end{aligned} \qquad (7.9)$$

Linearizando o sistema de equações, tem-se:

$$
\begin{aligned}
-\frac{EI}{a^3}(v-w')'' + \frac{EA}{a^3}\left[(v-w')(\breve{v}-\breve{w}')^2\right] \\
-\frac{EA}{a^2}\left[(v-w')(\breve{v}'-\breve{w}'') - (w+w'')(\breve{v}-\breve{w}')\right] - \frac{EA}{a}(v''+w') \\
+ q(v+\breve{v}-w'-\breve{w}') \qquad (7.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{EI}{a^3}(v-w')''' + \frac{EA}{a^3}\left[2(v-w')(\breve{v}-\breve{w}')(\breve{v}'-\breve{w}'') + (v'-w'')(\breve{v}-\breve{w}')^2\right] \\
+\frac{EA}{a^2}\left[(v'+w)(\breve{v}'-\breve{w}'') + (v+v'')(\breve{v}-\breve{w}')\right] + \frac{EA}{a}(v'+w) \\
-\frac{K_g w''}{a} + q(v+\breve{v}+w'+\breve{w}') + (q+K_r w)a \qquad (7.11)
\end{aligned}
$$

Os sistemas de equações considerando as imperfeições não podem ser resolvidos da mesma forma em que foram resolvidos os que não tinham imperfeição, pois não há solução analítica para o sistema de equações, mesmo quando linearizadas, pois tem-se um sistema de equações diferenciais parciais com coeficientes variáveis. Por isso, será utilizado o método de Galerkin, que é uma forma aproximada de se resolver esses sistemas de equações. Tal método é um caso particular do método dos resíduos ponderados. O método consiste em substituir nas equações de equilíbrio uma solução aproximada que atenda as condições de continuidade dos deslocamentos e esforços na direção circunferencial, multiplicar as duas equações de Euler-Lagrange por funções de ponderação e integrar no domínio do problema (neste caso, de 0 a 2π), ou seja

$$
\int_{\theta_1}^{\theta_2} L_i\left[A_j f_i(\theta)\right]\, g_i(\theta)\, d\theta = 0 \quad i = 1,2 \qquad (7.12)
$$

onde $L_i[A_i f_i(\theta)]$ (resíduo) é a equação obtida através da aplicação da equação de Euler-Lagrange ao funcional, cujas funções são aqui substituídas por funções de aproximação trigonométricas. O resíduo nunca é nulo, pois a função é aproximada, mas o método busca minimizá-lo utilizando uma função ortogonal como a função de ponderação. As funções $g_1(\theta) = \operatorname{sen}(m\theta)$ e $g_2(\theta) = \cos(m\theta)$ são as funções de ponderação aqui utilizadas.

Para o anel com carregamento de pressão hidrostática e fundação, o método de Galerkin é aplicado às equações linearizadas.

As funções de aproximação utilizadas mais adequadas para o problema são as seguintes funções trigonométricas baseadas na solução do problema perfeito, onde assume-se que a imperfeição geométrica inicial tem a forma do modo de flambagem:

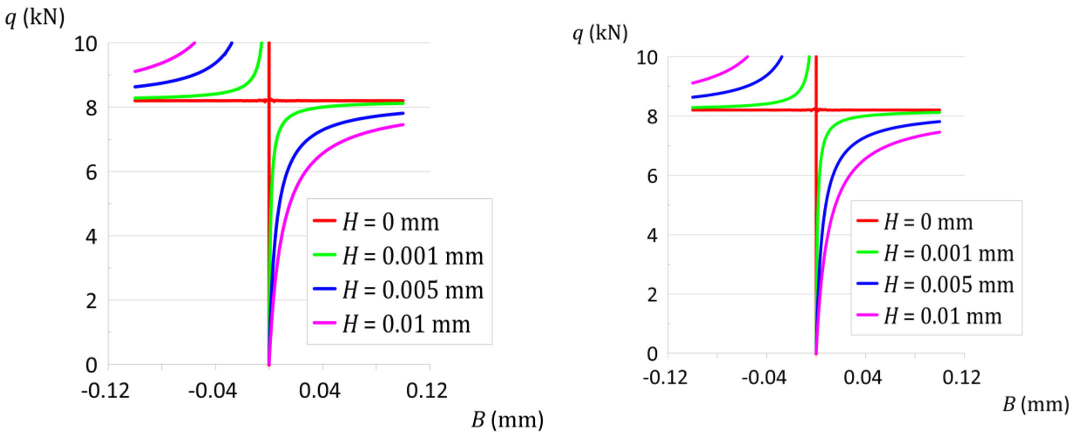
$$\begin{aligned} v &= \frac{B}{2}\operatorname{sen}(2\theta) \\ w &= -C\cos(2\theta) \\ \breve{v} &= \frac{H}{2}\operatorname{sen}(2\theta) \\ \breve{w} &= -H\cos(2\theta) \end{aligned} \tag{7.13}$$

Aplicando o método de Galerkin, obtém-se o sistema não homogêneo, cuja solução fornece os caminhos não lineares de equilíbrio da estrutura imperfeita:

$$2\pi BEAa^2 + \frac{\pi}{2}Bqa^3 - 2\pi Cqa^3 - \frac{27\pi}{32}BH^2EA + 2\pi BEI - 8\pi CEI + \frac{27\pi}{8}CH^2EA - \frac{3\pi}{2}Hqa^3 - 2CEAa^2\pi = 0 \tag{7.14}$$

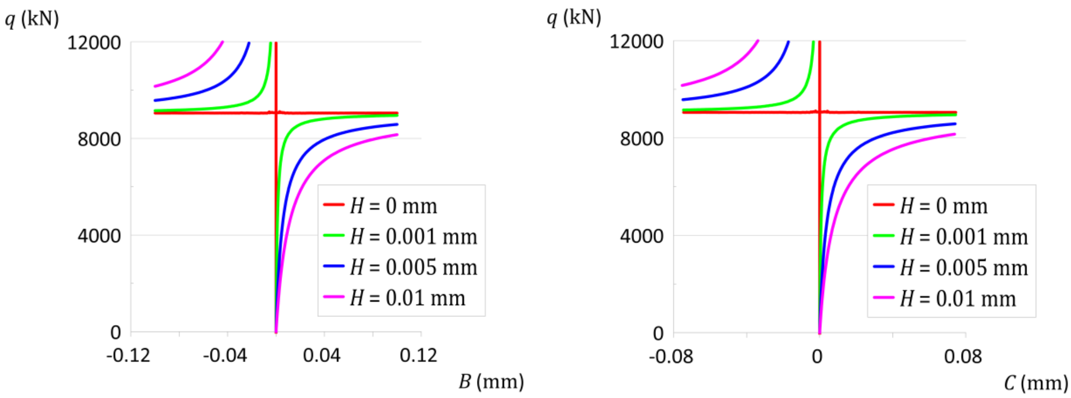
$$-\pi Ca^4K_r - 4\pi Ca^2K_g + 4\pi BEI - 16\pi CEI + \pi Bqa^3 - \pi Cqa^3 + \frac{27\pi}{4}CH^2EA - \pi CEAa^2 - \frac{27\pi}{16}BH^2EA + \pi BEAa^2 = 0 \tag{7.15}$$

Na análise numérica, adota-se um anel de liga de alumínio 6061 com $E = 68.95$ GPa, $a = 0.203$ m, $A = 1.55 \cdot 10^{-4}$ m², $I = 3.3310^{-10}$ m^4 e adota-se níveis crescentes de imperfeição. A Figura 7.1 mostra a variação da carga q com as amplitudes de deslocamento B e C, dos deslocamentos $v(\theta)$ e $w(\theta)$ respectivamente para valores selecionados da amplitude de imperfeição H. São mostrados os resultados para valores positivos de H. Para valores negativos, obtêm-se as mesmas curvas nos outros dois quadrantes. Observa-se que o anel apresenta inicialmente pequenas deflexões, mas estas passam a crescer quando a carga aplicada se aproxima do valor crítico. À medida que a imperfeição cresce, diminui a capacidade de carga do anel. Adicionalmente, crescem as tensões de flexo-compressão e, a partir de um certo nível de deflexão, o material deve iniciar o escoamento (Kyriakides e Corona, 2007). A Figura 7.2 mostra a solução do anel imperfeito para um anel com fundação tendo $K_r = 69.9$ MPa e $K_g = 666.875$ kN.



a) $B \times q$ b) $C \times q$

Figura 7.1: Variação da carga q com a amplitude de deslocamento (B e C) nas direções $v(\theta)$ e $w(\theta)$ respectivamente para valores selecionados da amplitude de imperfeição H para um anel de liga de alumínio 6061. $E = 68.95$ GPa, $a = 0.203$ m, $A = 1.55 \cdot 10^{-4}$ m², $I = 3.33 \cdot 10^{-10}$ m^4



a) $B \times q$ b) $C \times q$

Figura 7.2: Variação da carga q com a amplitude de deslocamento (B e C) nas direções $v(\theta)$ e $w(\theta)$ respectivamente para valores selecionados da amplitude de imperfeição H para um anel de liga de alumínio 6061 com fundação de rigidez linear $K_r = 69.9$ MPa e rigidez de cisalhamento $K_g = 666.875$ kN. $E = 68.95$ GPa, $a = 0.203$ m, $A = 1.55 \cdot 10^{-4}$ m², $I = 3.33 \cdot 10^{-10}$ m^4

7.1. Sensibilidade a imperfeições de uma tubulação

Kyriakides e Corona (2007) apresentam uma formulação simplificada para análise da sensibilidade a imperfeições com base na teoria de cascas cilíndricas esbeltas. Consideramos uma casca longa como um tubo com uma imperfeição geométrica axialmente uniforme definida por $(\bar{v}, \bar{w})$, as equações de equilíbrio da casca imperfeita linearizadas tomam a forma:

$$RN'_{\theta\theta} + M'_{\theta\theta}$$

$$M''_{\theta\theta} - RN_{\theta\theta} + PR^2\left(\frac{v' - w''}{R} - \frac{\bar{v}' - \bar{w}''}{R}\right) - PR(v' + w - \bar{v}' - \bar{w}) = 0 \quad (7.16)$$

com

$$\varepsilon^o_{\theta\theta} = \frac{v' + w}{R} \quad \text{e} \quad \kappa_{\theta\theta} = \frac{v' - w''}{R^2} \quad (7.17)$$

onde v e w são medidos a partir da geometria de referência circular. A imperfeição foi adotada na forma do modo de flambagem (ovalização uniforme), sendo descrita por:

$$\bar{w} = -a\cos 2\theta \quad \text{e} \quad \bar{v} = \frac{a}{2}\operatorname{sen} 2\theta \quad (7.18)$$

Por inspeção, a solução do sistema (7.16) é da forma

$$w = -A\cos 2\theta \quad \text{e} \quad v = \frac{B}{2}\operatorname{sen} 2\theta \quad (7.19)$$

o que resulta nas seguintes equações para A e B:

$$\begin{bmatrix} 2(1+4\rho) & 4(1+\rho) \\ (1+16\rho) - 3\gamma & 2(1+4\rho) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3a\gamma \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

onde

$$\rho = -\frac{1}{12}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{Pa(1-v^2)}{Eh} \quad (7.21)$$

Como $\rho \ll 1$, Kyriakides e Corona (2007) desprezaram os termos contendo ρ em comparação com a unidade e chegaram à seguinte solução para a casca imperfeita:

$$w = -\frac{aP}{P_C - P}\cos 2\theta \qquad e \qquad v = \frac{aP}{2(P_C - P)}\operatorname{sen} 2\theta \tag{7.22}$$

onde P_C é a carga crítica teórica.

A Figura 7.3 mostra a relação pressão-deslocamento máximo para valores crescentes de amplitude da imperfeição (a variável de ovalização inicial é dada por $\Delta_O = {}^{a}/_{R}$). A ovalização da casca cresce com a pressão e se torna singular à medida que se aproxima da pressão crítica da estrutura perfeita. Junto com a ovalização, as tensões de flexão crescem e o material inicia o processo de escoamento levando a uma solução elastoplástica, como mostrado na Figura 7.3.

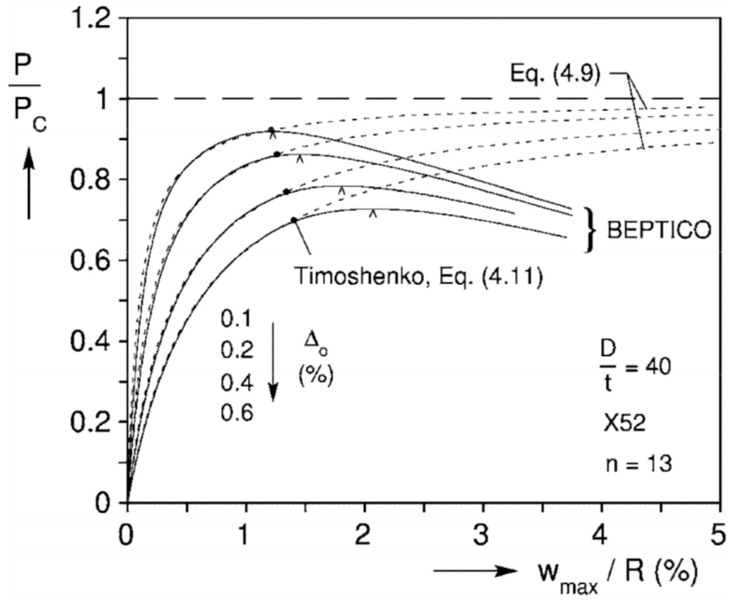


Figura 7.3: Respostas de deslocamento máximo-pressão para um tubo imperfeito. Resultados da análise elástica linear e pelo programa BEPTICO para material elástico-plástico. Kyriakides e Corona (2007).

Seguindo o raciocínio de Kyriakides e Corona (2007), para o anel com fundação tendo um modo crítico com n ondas circunferenciais, assume-se a imperfeição geométrica inicial na forma do modo de flambagem, sendo dada por

$$\bar{w} = -a\cos n\theta \qquad \text{e} \qquad \bar{v} = \frac{a}{2}\operatorname{sen} n\theta \tag{7.23}$$

e a solução aproximada das equações por

$$w = -A\cos n\theta \qquad \text{e} \qquad v = \frac{B}{2}\operatorname{sen} n\theta \tag{7.24}$$

o que resulta nas seguintes equações para A e B

$$\begin{vmatrix} Ea\,n^2\left(1+\dfrac{I}{Aa^2}\right) & Ea\,n\left(1+n^2\dfrac{I}{Aa^2}\right) \\ n\left(1+n^2\dfrac{I}{Aa^2}\right) & \left(1+n^4\dfrac{I}{Aa^2}\right)+\dfrac{1}{EA}\left(K_r a^2+K_g n^2\right) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3a\gamma \end{Bmatrix} \qquad (7.25)$$

8
Conclusões e sugestões

Nesta dissertação, estudou-se a estabilidade e vibrações de anéis e tubulações de paredes finas em uma base elástica de Pasternak.

O estudo começou com a apresentação dos funcionais de energia interna de deformação, como base na teoria não linear descrita em Brush e Almroth (1975), energia potencial das cargas externas, energia interna de deformação da fundação de Pasternak e energia cinética.

Com base na função de Lagrange e no princípio de Hamilton, foram obtidas as equações não lineares de movimento do anel, que, posteriormente, quando linearizadas, deram origem às expressões analíticas para o cálculo das frequências naturais e modos de vibração. Através do critério do equilíbrio adjacente e da energia potencial mínima, foram deduzidas as equações de equilíbrio crítico.

Com as expressões de carga crítica deduzidas, foi possível torná-las adimensionais para estudar, através de uma análise paramétrica, a influência dos parâmetros da fundação elástica na carga e modo crítico do anel. Como referência, foi deduzida a carga crítica do anel sem fundação, considerando uma pressão hidrostática e uma carga distribuída sempre apontando para o centro do anel indeformado. Foi ressaltada a importância da modelagem do carregamento na obtenção da carga crítica, tendo sido adotada na dissertação a modelagem da pressão hidrostática que considera o caráter seguidor da pressão. Quando se considera uma tubulação longa, em vez de um anel, usa-se a teoria de cascas cilíndricas e a carga crítica passa a depender do coeficiente de Poisson do material.

Primeiramente, estudou-se a influência da fundação nas cargas de bifurcação desconsiderando o efeito da fundação na solução fundamental.

Inicialmente, o efeito da fundação de Winkler na carga e modo crítico do anel foi analisado. A análise permitiu concluir que para cada valor da rigidez da fundação $\bar{K}_r$, a carga de bifurcação atinge um mínimo em um certo número de ondas circunferenciais, n_{cr}, que corresponde à carga crítica do anel. Verifica-se que, à medida que a rigidez da fundação cresce, aumenta o número de ondas circunferenciais n associado ao modo crítico.

Ao se analisar a variação da carga crítica com o parâmetro de rigidez da fundação de Winkler $\bar{K}_r$ para valores selecionados da n, foi possível determinar a faixa de valores de $\bar{K}_r$ associados a cada valor do número de ondas circunferenciais crítico, n_{cr}. À medida que $\bar{K}_r$ aumenta, vai aumentando o número de ondas associado ao modo crítico. Quando $\bar{K}_r \to \infty$, tem-se uma fundação rígida, o que leva a uma carga crítica infinita.

Em seguida, foi analisado o efeito do coeficiente de fundação de Pasternak associado ao cisalhamento, $\bar{K}_g$, na carga crítica do anel através de gráficos com valores selecionados de $\bar{K}_r$ e $\bar{K}_g$. Foi observado um aumento na carga crítica à medida que $\bar{K}_g$ aumentava. Analisando separadamente, para cada valor de n, a diferença entre as sucessivas cargas de bifurcação decresce à medida que $\bar{K}_r$ aumenta.

A seguir, estudou-se o efeito da consideração da fundação na solução fundamental do anel. Verifica-se que o coeficiente de Winkler $\bar{K}_r$ modifica a solução fundamental, diminuindo a contração radial devida à pressão hidrostática. Concluiu-se, a partir dos resultados, que é imprescindível considerar o efeito da fundação na solução fundamental, visto que, à medida que $\bar{K}_r$ aumenta, há uma gradativa diferença entre os resultados obtidos pelas duas hipóteses.

A seguir, estudou-se a influência dos parâmetros geométricos e físicos do sistema anel-fundação nas frequências naturais, em particular na primeira frequência natural (frequência fundamental) associada ao modo de vibração de flexão no plano do anel. Observou-se que a influência da inércia à rotação é desprezível para anéis esbeltos com $a/h \geq 50$, já que todos os resultados foram praticamente coincidentes com aqueles obtidos desconsiderando a inércia à rotação.

Em seguida, foi analisada a variação da menor frequência natural adimensional de flexão $\overline{\omega}_1$ com o número de ondas circunferenciais n para valores selecionados de a/h e $\overline{K}_r$. Concluiu-se que quanto maior o número de ondas circunferenciais n, maior a frequência natural. As frequências naturais aumentam à medida que a rigidez da fundação aumenta e decrescem com a razão raio/espessura (a/h), que representa a esbeltez do anel ou tubulação. Para um dado valor de a/h, a diferença entre as frequências naturais para os valores selecionados de $\overline{K}_r$ diminui à medida que n aumenta.

A seguir, analisou-se a influência dos parâmetros $\overline{K}_r$ e $\overline{K}_g$ na variação das frequências naturais. Para um determinado valor de $\overline{K}_r$, conforme $\overline{K}_g$ aumenta, sua influência é particularmente importante para $\overline{K}_r < 10^6$. A influência de $\overline{K}_g$ diminui à medida que $\overline{K}_r$ aumenta e desaparece para grandes valores de $\overline{K}_r$ (fundação rígida).

Em seguida, analisou-se a influência do parâmetro de rigidez $\overline{K}_r$ na relação carga-frequência. Para um anel sem fundação, as frequências decrescem à medida que as tensões de compressão devidas à pressão hidrostática $\bar{q}$ aumentam e a menor frequência se torna nula quando a pressão atinge o valor crítico. Dependendo do valor da rigidez da fundação $\overline{K}_r$, pode ocorrer uma variação no número de ondas circunferenciais associadas à frequência mínima à medida que as tensões de compressão devidas à pressão hidrostática $\bar{q}$ aumentam. Isto está associado à mudança do número de ondas associado ao modo crítico com o valor da rigidez da fundação $\overline{K}_r$**,** como mencionado anteriormente. Para a maior frequência, o efeito de $\overline{K}_r$ é muito pequeno para os valores analisados. Resultados semelhantes foram obtidos conforme aumentava o parâmetro a/h.

Por fim, foi realizado o estudo da sensibilidade da estrutura a imperfeições geométricas iniciais. Primeiramente, foram adicionadas as imperfeições iniciais no funcional de energia, e depois foi feita a dedução das equações da estrutura com imperfeição, resultando em um sistema de equações não lineares. Foram analisados dois casos, sendo o primeiro desconsiderando os termos da fundação e o segundo, considerando a fundação. Os sistemas de equações foi discretizado pelo método de Galerkin. Para cada valor e sinal de imperfeição geométrica inicial, considerada na forma do modo crítico, obtém-se um caminho não linear de equilíbrio onde os deslocamentos crescem com a carga bem como o caminho complementar de equilíbrio. Os resultados obtidos para os caminhos de equilíbrio da estrutura imperfeita estão compatíveis com os resultados esperados para anéis e tubulações esbeltas. Cabe destacar que estruturas reais são sempre imperfeitas, sendo o efeito da imperfeição no caminho não linear de equilíbrio da estrutura imprescindível para o projeto estrutural. A resposta da estrutura imperfeita converge assintoticamente por baixo para o valor da carga crítica. Diminuída a magnitude da imperfeição, o caminho se aproxima do caso perfeito.

Explorando a formulação aqui apresentada, alguns trabalhos podem ser desenvolvidos como continuidade deste. As sugestões são apresentadas a seguir.

- desenvolver a análise teórica e experimental de anéis e tubulações esbeltas, caracterizando seu comportamento não linear dinâmico, diante de ações de natureza cíclica;

- analisar anéis e tubulações de materiais compostos como os polímeros reforçados com fibra, desenvolvendo uma formulação que represente o comportamento desses materiais, que podem exibir diferentes regimes, não lineares e lineares de deformação, explorando suas aplicações;

- estudar os caminhos não lineares de equilíbrio do anel, considerando o acoplamento e as interações modais devidas às não linearidades quadráticas e cúbicas observadas nas equações não lineares deduzidas no Capítulo 2 considerando adicionalmente o efeito de imperfeições geométricas iniciais e de carregamento (não uniformidade de carregamento).

- estudar a dinâmica não linear do anel, considerando o acoplamento e as interações modais devidas às não linearidades quadráticas e cúbicas

- tendo em vista que em muitas aplicações a estrutura está continuamente vibrando, recomenda-se estudar a fadiga das tubulações.

- estudar o efeito de imperfeições localizadas na estabilidade e vibrações.

9
Referências bibliográficas

9.1 AZZUNI, E.; GUZEY, S. A perturbation approach on buckling and postbuckling of circular rings under nonuniform loads. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 137, p. 86-95, 2018.

9.2 BAKHTIARI-NEJAD, F.; BIDELEH, S. M. M. Nonlinear free vibration analysis of prestressed circular cylindrical shells on the Winkler/Pasternak foundation. **Thin-Walled Structures**, v. 53, p. 26-39, 2012.

9.3 BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. Stability of Structures. Oxford University Press: New York, Oxford (1991).

9.4 BICKFORD, W. B.; REDDY, E. S. On the in-plane vibrations of rotating rings. **Journal of Sound and Vibration**, v. 101, n. 1, p. 13-22, 1985.

9.5 BLEVINS, R. D. Formulas for natural frequency and mode shape. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1979.

9.6 BODNER, S. R. On the conservativeness of various distributed force systems. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 25, n. 2, p. 132-133, 1958.

9.7 BORESI, A. A Refinement of the Theory of Buckling of Rings Under Uniform Pressure, v. 22, No. 1, March 1955, pp. 95-102.9

9.8 BRUSH, D.O.; ALMROTH, B.O. (1975). Buckling of Bars, Plates and Shells. McGraw-Hill.

9.9 BUDIANSKY, B. Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures. In: **Advances in applied mechanics**. Elsevier, 1974. Vol. 14, p. 1-65.

9.10 CARRIER, G. F. On the buckling of elastic rings. **Journal of Mathematics and Physics**, v. 26, n. 1-4, p. 94-103, 1947.

9.11 CELEP, Z. In-plane vibrations of circular rings on a tensionless foundation. **Journal of sound and vibration**, v. 143, n. 3, p. 461-471, 1990.

9.12 CHO, S. R. et al. Experimental investigations on the failure modes of ring-stiffened cylinders under external hydrostatic pressure. **International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering**, v. 10, n. 6, p. 711-729, 2018.

9.13 DALOGLU, A. T.; VALLABHAN, C. G. Values of k for Slab on Winkler Foundation. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, v. 126, n. 5, p. 463-471, 2000.

9.14 DUC, N. D.; THANG, P. Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic–metal–ceramic FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations and subjected to axial compression. **Composite Structures**, v. 110, p. 200-206, 2014.

9.15 EL NASCHIE, M. S. The initial post-buckling of an extensional ring under external pressure. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 17, n. 6, p. 387-388, 1975.

9.16 FU, Lei; WAAS, A. M. Initial post-buckling behavior of thick rings under uniform external hydrostatic pressure. **J. Appl. Mech**. Jun 1995, 62(2): 338-345.

9.17 GIONCU, V. General theory of coupled instabilities. **Thin-Walled Structures**, v. 19, n. 2-4, p. 81-127, 1994.

9.18 GUMBEL, J. New approach to design of circular liner pipe to resist external hydrostatic pressure. In: **Pipelines 2001: Advances in Pipelines Engineering and Construction**. 2001. p. 1-18.

9.19 HASANLOUYI, S. M.; HOSSEINITOUDESHKI, V. The Effect Of Rock Mass Locked-in Stresses On The Axial Force Of Rock Bolts.

9.20 HOSSEINITOUDESHKI, V.; HASANLOUYI, S. M. The Effect Of Depth And Diameter Of Tunnels On The Axial Force Of Rock Bolts.

9.21 HSIAO, P. C. ; KAZUHIRO HAYASHI, K. ; NISHI, R., LIN, X. C. ; NAKASHIMA, M. Investigation of concrete-filled double-skin steel tubular columns with ultrahigh-strength steel. **Journal of Structural Engineering**, v. 141, n. 7, p. 04014166, 2015.

9.22 HUANG, H.; ZHANG, Y.; HAN, Q. Stability of hydrostatic-pressured FGM thick rings with material nonlinearity. **Applied Mathematical Modelling**, v. 45, p. 55-64, 2017.

9.23 Intrastromal corneal ring segment. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Intrastromal_corneal_ring_segment Acesso em: 20 set 2020.

9.24 KAPLAN, W. Advanced Calculus Addison-Wesley Publishing Company. **Reading**, 1952.

9.25 KARAMPOUR, H.; ALRSAI, M. Propagation Buckling of Subsea Pipelines and Pipe-in-Pipe Systems. In: **New Innovations in Engineering Education and Naval Engineering**. IntechOpen, 2019.

9.26 KARCHER, G. G.; WARD, M.; SPOELSTRA, G., Buckling of Cylindrical, Thin Walled, Trailer Truck Tanks and ASME Section XII. In: **ASME Pressure Vessels and Piping Conference**., Volume 1: Codes and Standards, Prague, Czech Republic, July 26–30, 2009. p. 363-372.

9.27 KERR, A. D. Elastic and viscoelastic foundation models. **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 31, No. 3, 1964, pp. 491-498.

9.28 KIRKHOPE, J. In-plane vibration of a thick circular ring. **Journal of Sound and Vibration**, v. 50, n. 2, p. 219-227, 1977.

9.29 KIRKHOPE, J. Simple frequency expression for the in-plane vibration of thick circular rings. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 59, n. 1, p. 86-89, 1976.

9.30 KYRIAKIDES, S.; CORONA, E. **Mechanics of offshore pipelines: volume 1 buckling and collapse**. Elsevier, 2007.

9.31 LU, Z. Q., GU, D. H., DING, H., LACARBONARA, W., & CHEN, L. Q.. Nonlinear vibration isolation via a circular ring. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 136, p. 106490, 2020.

9.32 MALLIK, A. K.; MEAD, D. J. Free vibration of thin circular rings on periodic radial supports. **Journal of Sound and Vibration**, v. 54, n. 1, p. 13-27, 1977.

9.33 MOGIELSKI, K. A.; KULICZKOWSKI, Andrzej; KULICZKOWSKA, Emilia. Change in Toughness Parameters of Sewer Pipes Rehabilitated with Two Types of Epoxy CIPP Liners. **Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice**, v. 8, n. 4, p. 04017015, 2017.

9.34 OLIVEIRA, N.; NETTO, T. A. Collapse experiments and reliability analyses of corroded pipes for offshore applications. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 142, n. 2, 2020.

9.35 PALIWAL, D. N.; BHALLA, V. Large deflection analysis of cylindrical shells on a Pasternak foundation. **International journal of pressure vessels and piping**, v. 53, n. 2, p. 261-271, 1993.

9.36 PASTERNAK, P. L. On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants (in Russian). **Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstuve i Arkhitekture**, Moscow, U.S.S.R., 1954.

9.37 PAVLOVIĆ, M. N.; ARNAOUT, S.; SERAJ, S. M. Some aspects of composite circular sewer linings under installation conditions. **Engineering structures**, v. 21, n. 1, p. 5-15, 1999.

9.38 POULOS, H. G.; DAVIS, E. H. **Pile foundation analysis and design**. Wiley (John) & Sons, Limited, England, 1980.

9.39 RAO, S. S. Effects of transverse shear and rotatory inertia on the coupled twist-bending vibrations of circular rings. **Journal of Sound and Vibration**, v. 16, n. 4, p. 551-566, 1971.

9.40 RAO, S. S. **Vibration of continuous systems**. New York: Wiley, 2007.

9.41 RAO, S. S.; SUNDARARAJAN, V. In-plane flexural vibrations of circular rings. **J. Appl. Mech**. Sep 1969, 36(3): 620-625

9.42 REHFIELD, L. W. Initial postbuckling of circular rings under pressure loads. **AIAA Journal**, v. 10, n. 10, p. 1358-1359, 1972.

9.43 SATO, K. Free flexural vibrations of an elliptical ring in its plane. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 57, n. 1, p. 113-115, 1975.

9.44 SCHMIDT, R. Critical constant-directional pressure on circular rings and hingeless arches. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP**, v. 31, n. 6, p. 776-779, 1980.

9.45 SHOWKATI, H.; SHAHANDEH, R. Experiments on the buckling behavior of ring-stiffened pipelines under hydrostatic pressure. **Journal of engineering mechanics**, v. 136, n. 4, p. 464-471, 2010.

9.46 SHOWKATI, H.; SHAHANDEH, R. Experiments on the buckling behavior of ring-stiffened pipelines under hydrostatic pressure. **Journal of engineering mechanics**, v. 136, n. 4, p. 464-471, 2010.

9.47 SILLS, L. B., & BUDIANSKY, B. Postbuckling ring analysis. **J. Appl. Mech.** Mar 1978, 45(1): 208-210

9.48 SILVEIRA, R. A. M.; NOGUEIRA, C. L.; GONÇALVES, P. B. A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender arches and rings under contact constraints. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, n. 1, p. 147-159, 2013.

9.49 SINGER, J.; BABCOCK, C. D. On the buckling of rings under constant directional and centrally directed pressure. *J. Appl. Mech*. Mar 1970, 37(1): 215-218)

9.50 SINHARAY, G. C.; BANERJEE, B. Large amplitude free vibrations of shallow spherical shell and cylindrical shell—a new approach. **International journal of non-linear mechanics**, v. 20, n. 2, p. 69-78, 1985.

9.51 SMITH, C. V.; SIMITSES, G. J. Effect of shear and load behavior on ring stability. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 95, n. 3, p. 559-570, 1969.

9.52 STEVENS, G. W. H. The stability of a compressed elastic ring and of a flexible heavy structure spread by a system of elastic rings. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, v. 5, n. 2, p. 221-236, 1952.

9.53 SUZUKI, S.I. In-plane vibrations of circular rings. **Journal of Sound and Vibration**, v. 97, n. 1, p. 101-105, 1984.

9.54 SWANGER, A. M.; NOTARDONATO, W. U.; JUMPER, K. M. ASME Section VIII Recertification of a 33,000 Gallon Vacuum-Jacketed LH2 Storage Vessel for Densified Hydrogen Testing at NASA Kennedy Space Center. In: **Pressure Vessels and Piping Conference**. American Society of Mechanical Engineers, 2015. p. V003T03A055.

9.55 TADJBAKHSH, I.; ODEH, F. Equilibrium states of elastic rings. **Journal of mathematical analysis and applications**, v. 18, n. 1, p. 59-74, 1967.

9.56 TARLOCHAN, F.; RAMESH, S.; HARPREET, S. Advanced composite sandwich structure design for energy absorption applications: blast protection and crashworthiness. **Composites Part B: Engineering**, v. 43, n. 5, p. 2198-2208, 2012.

9.57 TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of elastic stability**. Second Edition, Chapter 7, MacGraw -Hill, New York, 1961, pp. 287-297.

9.58 TOSCANO, R. G.; DVORKIN, E. N. Collapse and post-collapse behavior of steel pipes. In: **Fifth World Congress on Computational Mechanics**. 2002.

9.59 VIRGIN, L. N.; GILIBERTO, J. V.; PLAUT, R. H. Deformation and vibration of compressed, nested, elastic rings on rigid base. **Thin-Walled Structures**, v. 132, p. 167-175, 2018.

9.60 VUONG, P. M.; DUNG, D. V. Nonlinear analysis on buckling and postbuckling of stiffened FGM imperfect cylindrical shells filled inside by elastic foundations in thermal environment using TSDT. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 14, n. 5, p. 950-977, 2017.

9.61 WASSERMAN, E. B. **The Effect of the Behavior of the Load on the Frequency of the Free Vibrations of a Ring**. TT F-52, National Aeronautics and Space Administration, 1961.

9.62 What is LIGO? In: Laser Interferometer Gravitational – Wave Observatory. Disponível em: https://www.ligo.caltech.edu/page/what-is-ligo. Acesso em: 20 de set. 2020

9.63 WINKLER, E. Die Lehre vonder elastizitat und festigkeit. **Do-minicus, Prague**, 1867.

9.64 ZHAOHUA, F.; COOK, R. D. Beam elements on two-parameter elastic foundations. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 109, n. 6, p. 1390-1402, 1983.

APÊNDICE I – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES DE MOVIMENTO

```
> restart;
> with(Student[Calculus1]):
> with(linalg):
> with(plots):
> with(PDEtools):
```

Variáveis que representam o deslocamento no tempo

```
> declare(v(theta,t), prime = theta);
```

$v(\theta, t)$ *will now be displayed as* v

derivatives with respect to θ *of functions of one variable will now be displayed with '* **(1)**

```
> declare(w(theta,t), prime = theta);
```

$w(\theta, t)$ *will now be displayed as* w

derivatives with respect to θ *of functions of one variable will now be displayed with '* **(2)**

Variáveis da energia de deformação

```
> declare(epsilon(theta,t), prime = theta);
```

$\varepsilon(\theta, t)$ *will now be displayed as* ε

derivatives with respect to θ *of functions of one variable will now be displayed with '* **(3)**

```
> declare(kappa(theta,t), prime = theta);
```

$\kappa(\theta, t)$ *will now be displayed as* κ

derivatives with respect to θ *of functions of one variable will now be displayed with '* **(4)**

Variáveis do critério do equilíbrio adjacente

```
> declare(w__1(theta,t), prime = theta);
```

$w_1(\theta, t)$ *will now be displayed as* w_1

derivatives with respect to θ *of functions of one variable will now be displayed with '* **(5)**

```
> declare(v__1(theta,t), prime = theta);
```

$v_1(\theta, t)$ *will now be displayed as* v_1

derivatives with respect to θ *of functions of one variable will now be displayed with '* **(6)**

```
> declare(w__0(theta), prime = theta);
```

$w_0(\theta)$ *will now be displayed as* w_0

derivatives with respect to θ *of functions of one variable will now be displayed with '* **(7)**

Energia Cinética

```
> v__bt:= diff(v(theta,t),t) + z*diff(beta(theta,t),t);
```

$$v_{bt} := v_t + z\,\beta_t \tag{1.1}$$

```
> v__bt2:= diff(v(theta,t),t)^2 + z^2*diff(beta(theta,t),t)^2;
```

$$v_{bt2} := v_t^2 + z^2\,\beta_t^2 \tag{1.2}$$

```
> w__bt:= diff(w(theta,t),t);
```

$$w_{bt} := w_t \tag{1.3}$$

Primeira integração (em θ)

```
> T111:= expand((rho/2)*int(r*((v__bt^2)+(w__bt^2)),theta));
```

$$T111 := \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int\left(z^2\,\beta_t^2 + 2\,v_t\,\beta_t\,z + v_t^2 + w_t^2\right)\mathrm{d}\theta\right) \tag{1.4}$$

```
> T11:= expand(rho*int(r*(((v__bt^2)/2)),theta));
```

$$T11 := \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int\left(v_t^2 + 2\,v_t\,\beta_t\,z + z^2\,\beta_t^2\right)\mathrm{d}\theta\right) \tag{1.5}$$

```
> T12:= expand(rho*int(r*(((w__bt^2)/2)),theta));
```

$$T12 := \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int w_t^2\,\mathrm{d}\theta\right) \tag{1.6}$$

```
> T1:= expand(T11 + T12);
```

$$T1 := \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int v_t^2\,\mathrm{d}\theta\right) + \rho\,r\,z\left(\int v_t\,\beta_t\,\mathrm{d}\theta\right) + \frac{1}{2}\,\rho\,r\,z^2\left(\int \beta_t^2\,\mathrm{d}\theta\right) + \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int w_t^2\,\mathrm{d}\theta\right) \tag{1.7}$$

Segunda integração (na área)

```
> T2:= int((int(T1, z = (-h/2)..(h/2))), x = (-b/2)..(b/2));
```

$$T2 := \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int v_t^2\,\mathrm{d}\theta\right)h\,b + \frac{1}{24}\,\rho\,r\left(\int \beta_t^2\,\mathrm{d}\theta\right)h^3\,b + \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int w_t^2\,\mathrm{d}\theta\right)h\,b \tag{1.8}$$

Colocando a área e o momento de inércia em evidência

```
> with(student):
```

```
> T21:= powsubs((b*h) = A,op(1,T2));
```

$$T21 := \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int v_t^2\,\mathrm{d}\theta\right)A \tag{1.9}$$

```
> T22:= powsubs(((b*(h^3)/12)) = J, op(2,T2));
```

$$T22 := \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int \beta_t^2\,\mathrm{d}\theta\right)J \tag{1.10}$$

```
> T23:= powsubs((b*h) = A, op(3,T2));
```

$$T23 := \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int w_t^2\,\mathrm{d}\theta\right)A \tag{1.11}$$

```
> T:= T21 + T22 + T23;
```

(1.12)

$$T := \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int v_t^2\,d\theta\right)A + \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int \beta_t^2\,d\theta\right)J + \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int w_t^2\,d\theta\right)A \quad (1.12)$$

Substituindo as expressões

```
> beta__t(theta,t):= diff(((v(theta,t) - diff(w(theta,t),theta))
  /r),t);
```

$$\beta_t(\theta,t) := \frac{v_t - w_{t,\theta}}{r} \quad (1.13)$$

```
> subs(diff(beta(theta,t),t) = beta__t(theta,t), T);
```

$$\frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int v_t^2\,d\theta\right)A + \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int \frac{\left(v_t - w_{t,\theta}\right)^2}{r^2}\,d\theta\right)J + \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int w_t^2\,d\theta\right)A \quad (1.14)$$

```
> T:= %;
```

$$T := \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int v_t^2\,d\theta\right)A + \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int \frac{\left(v_t - w_{t,\theta}\right)^2}{r^2}\,d\theta\right)J + \frac{1}{2}\,\rho\,r\left(\int w_t^2\,d\theta\right)A \quad (1.15)$$

```
> T:= subs(r = a,%);
```

$$T := \frac{1}{2}\,\rho\,a\left(\int v_t^2\,d\theta\right)A + \frac{1}{2}\,\rho\,a\left(\int \frac{\left(v_t - w_{t,\theta}\right)^2}{a^2}\,d\theta\right)J + \frac{1}{2}\,\rho\,a\left(\int w_t^2\,d\theta\right)A \quad (1.16)$$

```
> int((diff(v(theta, t), t))^2, theta);
```

$$\int v_t^2\,d\theta \quad (1.17)$$

```
> T := (1/2)*rho*a*(int((diff(v(theta, t), t))^2, theta))*A +
  (1/2)*rho*a*(int((diff(v(theta, t), t) - (diff(w(theta, t),
  theta, t)))^2/a^2, theta))*J + (1/2)*rho*a*(int((diff(w(theta,
  t), t))^2, theta))*A;
```

$$T := \frac{1}{2}\,\rho\,a\left(\int v_t^2\,d\theta\right)A + \frac{1}{2}\,\rho\,a\left(\int \frac{\left(v_t - w_{t,\theta}\right)^2}{a^2}\,d\theta\right)J + \frac{1}{2}\,\rho\,a\left(\int w_t^2\,d\theta\right)A \quad (1.18)$$

Funcionais

1ª parcela

```
> F__T11:= op(1,T);
```

$$F_{T11} := \frac{1}{2}\,\rho\,a\left(\int v_t^2\,d\theta\right)A \quad (1.1.1.1)$$

```
> F__T12:= op(4,%);
```

$$F_{T12} := \int v_t^2\,d\theta \quad (1.1.1.2)$$

```
> F__T13:= op(1,F__T12);
```

$$F_{T13} := v_t^2 \quad (1.1.1.3)$$

```
> F__T1:= op(1,F__T11)*op(2,F__T11)*op(3,F__T11)*F__T13*op
```

```
(5,F__T11);
```

$$F_{T1} := \frac{1}{2}\,\rho\,a\,v_t^2\,A \tag{1.1.1.4}$$

2ª parcela

```
> F__T21:= op(2,T);
```

$$F_{T21} := \frac{1}{2}\,\rho\,a\left(\int \frac{\left(v_t - w_{t,\,\theta}\right)^2}{a^2}\,\mathrm{d}\theta\right) J \tag{1.1.2.1}$$

```
> F__T22:= op(4,%);
```

$$F_{T22} := \int \frac{\left(v_t - w_{t,\,\theta}\right)^2}{a^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{1.1.2.2}$$

```
> F__T23:= op(1,F__T22);
```

$$F_{T23} := \frac{\left(v_t - w_{t,\,\theta}\right)^2}{a^2} \tag{1.1.2.3}$$

```
> F__T2:= op(1,F__T21)*op(2,F__T21)*op(3,F__T21)*F__T23*op
(5,F__T21);
```

$$F_{T2} := \frac{1}{2}\,\frac{\rho\left(v_t - w_{t,\,\theta}\right)^2 J}{a} \tag{1.1.2.4}$$

3ª parcela

```
> F__T31:= op(3,T);
```

$$F_{T31} := \frac{1}{2}\,\rho\,a\left(\int w_t^2\,\mathrm{d}\theta\right) A \tag{1.1.3.1}$$

```
> F__T32:= op(4,%);
```

$$F_{T32} := \int w_t^2\,\mathrm{d}\theta \tag{1.1.3.2}$$

```
> F__T33:= op(1,F__T32);
```

$$F_{T33} := w_t^2 \tag{1.1.3.3}$$

```
> F__T3:= op(1,F__T31)*op(2,F__T31)*op(3,F__T31)*F__T33*op
(5,F__T31);
```

$$F_{T3} := \frac{1}{2}\,\rho\,a\,w_t^2\,A \tag{1.1.3.4}$$

Juntando as parcelas

```
> F__T:= F__T1 + F__T2 + F__T3;
```

$$F_T := \frac{1}{2}\,\rho\,a\,v_t^2\,A + \frac{1}{2}\,\frac{\rho\left(v_t - w_{t,\,\theta}\right)^2 J}{a} + \frac{1}{2}\,\rho\,a\,w_t^2\,A \tag{1.1.1}$$

Energia de Deformação

```
> epsilon__b:= epsilon(theta,t) + z*kappa(theta,t);
```

$$\varepsilon_b := \varepsilon + z\,\kappa \tag{2.1}$$

```
> epsilon__b2:= (epsilon(theta,t))^2 + (z*kappa(theta,t))^2;
```

$$\varepsilon_{b2} := \varepsilon^2 + z^2\,\kappa^2 \tag{2.2}$$

Primeira integração (em θ)

```
> U1:= expand(((E*a)/2)*int(epsilon__b2,theta));
```

$$U1 := \frac{1}{2}\,E\,a\left(\int \varepsilon^2\,\mathrm{d}\theta\right) + \frac{1}{2}\,E\,a\,z^2\left(\int \kappa^2\,\mathrm{d}\theta\right) \tag{2.3}$$

Segunda integração (na área)

```
> U2:= int((int(U1, z = (-h/2)..(h/2))), x = (-b/2)..(b/2));
```

$$U2 := \frac{1}{2}\,E\,a\left(\int \varepsilon^2\,\mathrm{d}\theta\right) h\,b + \frac{1}{24}\,E\,a\left(\int \kappa^2\,\mathrm{d}\theta\right) h^3\,b \tag{2.4}$$

Colocando a área e o momento de inércia em evidência

```
> with(student):
```

```
> U21:= powsubs((b*h) = A, op(1,U2));
```

$$U21 := \frac{1}{2}\,E\,a\left(\int \varepsilon^2\,\mathrm{d}\theta\right) A \tag{2.5}$$

```
> U22:= powsubs(((b*(h^3)/12)) = J,op(2,U2));
```

$$U22 := \frac{1}{2}\,E\,a\left(\int \kappa^2\,\mathrm{d}\theta\right) J \tag{2.6}$$

```
> U:= U21 + U22;
```

$$U := \frac{1}{2}\,E\,a\left(\int \varepsilon^2\,\mathrm{d}\theta\right) A + \frac{1}{2}\,E\,a\left(\int \kappa^2\,\mathrm{d}\theta\right) J \tag{2.7}$$

Substituindo as expressões

```
> beta:= (v(theta,t) - diff(w(theta,t),theta))/a;
```

$$\beta := \frac{v - w_{\theta}}{a} \tag{2.8}$$

```
> kappa(theta,t):= (diff(beta,theta))/a;
```

$$\kappa := \frac{v_{\theta} - w_{\theta,\,\theta}}{a^2} \tag{2.9}$$

```
> epsilon(theta,t):= ((diff(v(theta,t),theta) + w(theta,t))/a) +
  (1/2)*beta^2;
```

$$\varepsilon := \frac{v_{\theta} + w}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{\left(v - w_{\theta}\right)^2}{a^2} \tag{2.10}$$

```
> U;
```

$$\frac{1}{2} E\, a \left(\int \left(\frac{v_\theta + w}{a} + \frac{1}{2} \frac{(v - w_\theta)^2}{a^2} \right)^2 \mathrm{d}\theta \right) A + \frac{1}{2} E\, a \left(\int \frac{(v_\theta - w_{\theta,\theta})^2}{a^4} \mathrm{d}\theta \right) J \qquad \textbf{(2.11)}$$

Energia Potencial Total

$$V = a \int_0^{2\pi} F \, \mathrm{d}\theta$$

onde

$$F = \frac{EA}{2}\varepsilon^2 + \frac{EI}{2}\kappa^2 + q\left[w + \frac{1}{2a}\left(v^2 - vw' + v'w + w^2 \right) \right]$$

e

$$\varepsilon = \frac{v' + w}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{v - w'}{a} \right)^2 \qquad \kappa = \frac{v' - w''}{a^2}$$

```
> F:= ((E*A)/2)*epsilon(theta,t)^2 + ((E*J)/2)*kappa(theta,t)^2 +
  q*(w(theta,t) + (1/(2*a))*(v(theta,t)^2 - v(theta,t)*diff(w
  (theta,t),theta) + diff(v(theta,t),theta)*w(theta,t) + w(theta,
  t)^2));
```

$$F := \frac{1}{2} E\, A \left(\frac{v_\theta + w}{a} + \frac{1}{2} \frac{(v - w_\theta)^2}{a^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{E\, J\,(v_\theta - w_{\theta,\theta})^2}{a^4} + q\left(w + \frac{1}{2} \frac{v^2 - v\, w_\theta + v_\theta\, w + w^2}{a} \right) \qquad \textbf{(3.1)}$$

Equações de Equilíbrio do Anel

Funcional do anel

```
> F__a:= a*F;
```

$$F_a := a\left(\frac{1}{2} E\, A \left(\frac{v_\theta + w}{a} + \frac{1}{2} \frac{(v - w_\theta)^2}{a^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{E\, J\,(v_\theta - w_{\theta,\theta})^2}{a^4} + q\left(w + \frac{1}{2} \frac{v^2 - v\, w_\theta + v_\theta\, w + w^2}{a} \right) \right) \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

```
>
```

Funcional da inércia do anel

```
> F__T;
```

$$\frac{1}{2} \rho\, a\, v_t^2 A + \frac{1}{2} \frac{\rho\,(v_t - w_{t,\theta})^2 J}{a} + \frac{1}{2} \rho\, a\, w_t^2 A \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

```
>
```

Funcional do anel + inércia do anel

$F\,[\theta, t, v(\theta,t), w(\theta,t), v'(\theta,t), w'(\theta,t), \dot{v}(\theta,t), \dot{w}(\theta,t), w''(\theta,t)]$

$F\,\left[\theta, t, v(\theta,t), w(\theta,t), v_{\theta}(\theta,t), w_{\theta}(\theta,t), v_{t}(\theta,t), w_{t}(\theta,t), w_{\theta,\theta}(\theta,t)\right]$

$L = T - \Pi$ (*função de Euler − Lagrange = energia cinética - energia potencial total*)

$F_{at} = F_T - F_a \rightarrow$ funcional de Euler-Lagrange = funcional da energia cinética - funcional da energia potencial total do anel + fundação)

```
> F__at:= - F__a + F__T;
```

$$F_{at} := -a\left(\frac{1}{2}EA\left(\frac{v_{\theta}+w}{a}+\frac{1}{2}\frac{(v-w_{\theta})^2}{a^2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{EJ\,(v_{\theta}-w_{\theta,\theta})^2}{a^4}+q\left(w+\frac{1}{2}\frac{v^2-v\,w_{\theta}+v_{\theta}\,w+w^2}{a}\right)\right)+\frac{1}{2}\rho\,a\,v_t^2 A+\frac{1}{2}\frac{\rho\,(v_t-w_{t,\theta})^2 J}{a}+\frac{1}{2}\rho\,a\,w_t^2 A \quad (3.1.3)$$

```
>
```

Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F_{at}}{\partial v} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial v'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{v}} = 0$$

$$\frac{\partial F_{at}}{\partial w} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial w'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{w}} + \frac{d^2}{d^2\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial w''} + \frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{w}'} = 0$$

Primeira Equação (em função de *v*)

$$\frac{\partial F_{at}}{\partial v} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial v'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{v}} = 0$$

Parcelas

Primeira Parcela: $\dfrac{\partial F_{at}}{\partial v}$

```
> Eq1_Parc1:= Physics[diff](F__at, v(theta,t));
```

$$Eq1\_Parc1 := -a\left(\frac{EA\left(\frac{v_{\theta}+w}{a}+\frac{1}{2}\frac{(v-w_{\theta})^2}{a^2}\right)(v-w_{\theta})}{a^2}+\frac{1}{2}\frac{q\,(2\,v-w_{\theta})}{a}\right) \quad (3.1.1.1.1)$$

Segunda Parcela : $\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial v'}$

$\frac{\partial F_{at}}{\partial v'}$

```
> Physics[diff](F__at, diff(v(theta,t),theta));
```

$$-a\left(\frac{EA\left(\frac{v_\theta+w}{a}+\frac{1}{2}\frac{(v-w_\theta)^2}{a^2}\right)}{a}+\frac{EJ\,(v_\theta-w_{\theta,\theta})}{a^4}+\frac{1}{2}\frac{q\,w}{a}\right) \quad \textbf{(3.1.1.1.2)}$$

$\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial v'}$

```
> Eq1_Parc2:= diff(%,theta);
```

$$Eq1\_Parc2 := -a\left(\frac{EA\left(\frac{v_{\theta,\theta}+w_\theta}{a}+\frac{(v-w_\theta)(v_\theta-w_{\theta,\theta})}{a^2}\right)}{a}+\frac{EJ\,(v_{\theta,\theta}-w_{\theta,\theta,\theta})}{a^4}+\frac{1}{2}\frac{q\,w_\theta}{a}\right) \quad \textbf{(3.1.1.1.3)}$$

Terceira Parcela : $\frac{d}{dt}\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{v}}$

$\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{v}}$

```
> Physics[diff](F__at, diff(v(theta,t),t));
```

$$\rho\, a\, v_t A+\frac{\rho\,(v_t-w_{t,\theta})\,J}{a} \quad \textbf{(3.1.1.1.4)}$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial F_{af}}{\partial \dot{v}}$

```
> Eq1_Parc3:= diff(%,t);
```

$$Eq1\_Parc3 := \rho\, a\, v_{t,t} A+\frac{\rho\,(v_{t,t}-w_{t,t,\theta})\,J}{a} \quad \textbf{(3.1.1.1.5)}$$

Juntando as parcelas :

```
> Eq1:= Eq1_Parc1 - Eq1_Parc2 - Eq1_Parc3 = 0;
```

$$Eq1 := -a\left(\frac{EA\left(\frac{v_\theta+w}{a}+\frac{1}{2}\frac{(v-w_\theta)^2}{a^2}\right)(v-w_\theta)}{a^2}+\frac{1}{2}\frac{q\,(2\,v-w_\theta)}{a}\right) \quad \textbf{(3.1.1.1)}$$

$$+a\left(\frac{E\,A\left(\frac{v_{\theta,\theta}+w_{\theta}}{a}+\frac{\left(v-w_{\theta}\right)\left(v_{\theta}-w_{\theta,\theta}\right)}{a^{2}}\right)}{a}+\frac{E\,J\left(v_{\theta,\theta}-w_{\theta,\theta,\theta}\right)}{a^{4}}+\frac{1}{2}\,\frac{q\,w_{\theta}}{a}\right)-\rho\,a\,v_{t,t}\,A-\frac{\rho\left(v_{t,t}-w_{t,t,\theta}\right)J}{a}=0$$

>

Expandindo a equação

```
> Eq1__exp:= expand(Eq1);
```

$$Eq1_{exp}:=-\frac{E\,A\,w\,v}{a^{2}}+\frac{E\,A\,w\,w_{\theta}}{a^{2}}-\frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,v^{3}}{a^{3}}+\frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v^{2}\,w_{\theta}}{a^{3}}-\frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v\,w_{\theta}^{2}}{a^{3}}+\frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,w_{\theta}^{3}}{a^{3}}-q\,v+q\,w_{\theta}+\frac{E\,A\,v_{\theta,\theta}}{a}+\frac{E\,A\,w_{\theta}}{a}-\frac{E\,A\,v\,w_{\theta,\theta}}{a^{2}}+\frac{E\,A\,w_{\theta}\,w_{\theta,\theta}}{a^{2}}+\frac{E\,J\,v_{\theta,\theta}}{a^{3}}-\frac{E\,J\,w_{\theta,\theta,\theta}}{a^{3}}-\rho\,a\,v_{t,t}\,A-\frac{\rho\,J\,v_{t,t}}{a}+\frac{\rho\,J\,w_{t,t,\theta}}{a}=0 \quad \textbf{(3.1.1.2.1)}$$

Termos de 2º grau (quadráticos)

```
> Eq1_2g:= op(1,lhs(Eq1__exp)) + op(2,lhs(Eq1__exp)) +
  op(11,lhs(Eq1__exp)) + op(12,lhs(Eq1__exp));
```

$$Eq1\_2g:=-\frac{E\,A\,w\,v}{a^{2}}+\frac{E\,A\,w\,w_{\theta}}{a^{2}}-\frac{E\,A\,v\,w_{\theta,\theta}}{a^{2}}+\frac{E\,A\,w_{\theta}\,w_{\theta,\theta}}{a^{2}} \quad \textbf{(3.1.1.2.1.1)}$$

Termos de 3º grau (cúbicos)

```
> Eq1_3g:= op(3,lhs(Eq1__exp)) + op(4,lhs(Eq1__exp)) +
  op(5,lhs(Eq1__exp)) + op(6,lhs(Eq1__exp));
```

$$Eq1\_3g:=-\frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,v^{3}}{a^{3}}+\frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v^{2}\,w_{\theta}}{a^{3}}-\frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v\,w_{\theta}^{2}}{a^{3}}+\frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,w_{\theta}^{3}}{a^{3}} \quad \textbf{(3.1.1.2.2.1)}$$

Termos de 1º grau (lineares)

```
> Eq1_1g:= lhs(Eq1__exp) - (Eq1_2g + Eq1_3g);
```

$$Eq1\_1g:=-\rho\,a\,v_{t,t}\,A+\frac{E\,A\,v_{\theta,\theta}}{a}+\frac{E\,A\,w_{\theta}}{a}+\frac{E\,J\,v_{\theta,\theta}}{a^{3}}-\frac{E\,J\,w_{\theta,\theta,\theta}}{a^{3}}-\frac{\rho\,J\,v_{t,t}}{a}+\frac{\rho\,J\,w_{t,t,\theta}}{a}+q\,w_{\theta}-q\,v \quad \textbf{(3.1.1.2.3.1)}$$

Critério do Equilíbrio Adjacente

```
> Eq1_ad:= subs(v(theta,t) = v__1(theta,t),(w(theta,t) =
  w__0 + w__1(theta,t)),Eq1__exp);
```

$$Eq1\_ad := -\frac{E\,A\,(w_0+w_1)\,v_1}{a^2} + \frac{E\,A\,(w_0+w_1)\,(w_0+w_1)_{\theta}}{a^2} - \frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,v_1^{\,3}}{a^3} + \frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v_1^{\,2}\,(w_0+w_1)_{\theta}}{a^3} - \frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v_1\,(w_0+w_1)_{\theta}^{\,2}}{a^3} + \frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,(w_0+w_1)_{\theta}^{\,3}}{a^3} - q\,v_1 + q\,(w_0+w_1)_{\theta} + \frac{E\,A\,v_{1_{\theta,\theta}}}{a} + \frac{E\,A\,(w_0+w_1)_{\theta}}{a} - \frac{E\,A\,v_1\,(w_0+w_1(\theta,t))_{\theta,\theta}}{a^2} + \frac{E\,A\,(w_0+w_1)_{\theta}\,(w_0+w_1(\theta,t))_{\theta,\theta}}{a^2} + \frac{E\,J\,v_{1_{\theta,\theta}}}{a^3} - \frac{E\,J\,(w_0+w_1(\theta,t))_{\theta,\theta,\theta}}{a^3} - \rho\,a\,v_{1_{t,t}}\,A - \frac{\rho\,J\,v_{1_{t,t}}}{a} + \frac{\rho\,J\,(w_0+w_1(\theta,t))_{t,t,\theta}}{a} = 0 \quad \textbf{(3.1.1.3.1)}$$

Expandindo a Equação

```
> Eq1__ad_exp:= expand(Eq1_ad);
```

$$Eq1_{ad\_exp} := -\frac{E\,A\,v_1\,w_0}{a^2} - \frac{E\,A\,v_1\,w_1}{a^2} + \frac{E\,A\,w_{1_{\theta}}\,w_0}{a^2} + \frac{E\,A\,w_{1_{\theta}}\,w_1}{a^2} - \frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,v_1^{\,3}}{a^3} + \frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v_1^{\,2}\,w_{1_{\theta}}}{a^3} - \frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v_1\,w_{1_{\theta}}^{\,2}}{a^3} + \frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,w_{1_{\theta}}^{\,3}}{a^3} - q\,v_1 + q\,w_{1_{\theta}} + \frac{E\,A\,v_{1_{\theta,\theta}}}{a} + \frac{E\,A\,w_{1_{\theta}}}{a} - \frac{E\,A\,v_1\,w_{1_{\theta,\theta}}}{a^2} + \frac{E\,A\,w_{1_{\theta}}\,w_{1_{\theta,\theta}}}{a^2} + \frac{E\,J\,v_{1_{\theta,\theta}}}{a^3} - \frac{E\,J\,w_{1_{\theta,\theta,\theta}}}{a^3} - \rho\,a\,v_{1_{t,t}}\,A - \frac{\rho\,J\,v_{1_{t,t}}}{a} + \frac{\rho\,J\,w_{1_{t,t,\theta}}}{a} = 0 \quad \textbf{(3.1.1.3.1.1)}$$

Termos de 2º grau (quadráticos)

```
> Eq1_ad_2g:= op(2,lhs(Eq1__ad_exp)) + op(4,lhs
  (Eq1__ad_exp)) + op(13,lhs(Eq1__ad_exp)) + op(14,lhs
  (Eq1__ad_exp));
```

(3.1.1.3.1.1.1)

$$Eq1\_ad\_2g := -\frac{E\,A\,v_1\,w_1}{a^2} + \frac{E\,A\,w_{1_\theta}\,w_1}{a^2} - \frac{E\,A\,v_1\,w_{1_{\theta,\theta}}}{a^2} + \frac{E\,A\,w_{1_\theta}\,w_{1_{\theta,\theta}}}{a^2} \quad (3.1.1.3.1.1.1)$$

Termos de 3º grau (cúbicos)

```
> Eq1_ad_3g:= op(5,lhs(Eq1__ad_exp)) + op(6,lhs
  (Eq1__ad_exp)) + op(7,lhs(Eq1__ad_exp)) + op(8,lhs
  (Eq1__ad_exp));
```

$$Eq1\_ad\_3g := -\frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,v_1^{\,3}}{a^3} + \frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v_1^{\,2}\,w_{1_\theta}}{a^3} - \frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v_1\,w_{1_\theta}^{\,2}}{a^3} + \frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,w_{1_\theta}^{\,3}}{a^3} \quad (3.1.1.3.1.2.1)$$

Termos de 1º grau (lineares)

```
> Eq1_ad_1g:= lhs(Eq1__ad_exp) - (Eq1_ad_2g +
  Eq1_ad_3g);
```

$$Eq1\_ad\_1g := -\frac{E\,A\,v_1\,w_0}{a^2} + \frac{E\,A\,w_{1_\theta}\,w_0}{a^2} + \frac{E\,A\,w_{1_\theta}}{a} - \frac{E\,J\,w_{1_{\theta,\theta,\theta}}}{a^3} + \frac{\rho\,J\,w_{1_{t,t,\theta}}}{a} + \frac{E\,A\,v_{1_{\theta,\theta}}}{a} + \frac{E\,J\,v_{1_{\theta,\theta}}}{a^3} - \rho\,a\,v_{1_{t,t}}\,A - \frac{\rho\,J\,v_{1_{t,t}}}{a} - q\,v_1 + q\,w_{1_\theta} \quad (3.1.1.3.1.3.1)$$

Equação Linearizada

```
> Eq1_ad_1g;
```

$$-\frac{E\,A\,v_1\,w_0}{a^2} + \frac{E\,A\,w_{1_\theta}\,w_0}{a^2} + \frac{E\,A\,w_{1_\theta}}{a} - \frac{E\,J\,w_{1_{\theta,\theta,\theta}}}{a^3} + \frac{\rho\,J\,w_{1_{t,t,\theta}}}{a} + \frac{E\,A\,v_{1_{\theta,\theta}}}{a} + \frac{E\,J\,v_{1_{\theta,\theta}}}{a^3} - \rho\,a\,v_{1_{t,t}}\,A - \frac{\rho\,J\,v_{1_{t,t}}}{a} - q\,v_1 + q\,w_{1_\theta} \quad (3.1.1.3.2.1)$$

Multiplicando por a^3

```
> simplify(%*(a^3));
```

$$-\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A - E\,A\,v_1\,w_0\,a + E\,A\,w_{1_\theta}\,a^2 + E\,A\,w_{1_\theta}\,w_0\,a + E\,A\,v_{1_{\theta,\theta}}\,a^2 + \rho\,J\,w_{1_{t,t,\theta}}\,a^2 - \rho\,J\,v_{1_{t,t}}\,a^2 - q\,v_1\,a^3 + q\,w_{1_\theta}\,a^3 - E\,J\,w_{1_{\theta,\theta,\theta}} + E\,J\,v_{1_{\theta,\theta}} \quad (3.1.1.3.2.2)$$

Fatorando

```
> collect(%, E);
```

$$\left(-A\,v_1\,a\,w_0+A\,w_{1_{\theta}}\,a^2+A\,w_{1_{\theta}}\,a\,w_0+A\,v_{1_{\theta,\theta}}\,a^2-J\,w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+J\,v_{1_{\theta,\theta}}\right)E-\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A+\rho\,J\,w_{1_{t,t,\theta}}\,a^2-\rho\,J\,v_{1_{t,t}}\,a^2-q\,v_1\,a^3+q\,w_{1_{\theta}}\,a^3 \tag{3.1.1.3.2.3}$$

```
> collect(%, J);
```

$$\left(\rho\,w_{1_{t,t,\theta}}\,a^2-\rho\,v_{1_{t,t}}\,a^2+\left(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\right)J+\left(-A\,v_1\,a\,w_0+A\,w_{1_{\theta}}\,a^2+A\,w_{1_{\theta}}\,a\,w_0+A\,v_{1_{\theta,\theta}}\,a^2\right)E-q\,v_1\,a^3-\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A+q\,w_{1_{\theta}}\,a^3 \tag{3.1.1.3.2.4}$$

```
> collect(%, A);
```

$$\left(\left(-v_1\,a\,w_0+w_{1_{\theta}}\,a^2+w_{1_{\theta}}\,a\,w_0+v_{1_{\theta,\theta}}\,a^2\right)E-\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\right)A+\left(\rho\,w_{1_{t,t,\theta}}\,a^2-\rho\,v_{1_{t,t}}\,a^2+\left(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\right)J-q\,v_1\,a^3+q\,w_{1_{\theta}}\,a^3 \tag{3.1.1.3.2.5}$$

```
> collect(%, a);
```

$$-\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A+\left(-q\,v_1+q\,w_{1_{\theta}}\right)a^3+\left(\left(w_{1_{\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,A+\left(-\rho\,v_{1_{t,t}}+\rho\,w_{1_{t,t,\theta}}\right)J\right)a^2+\left(-v_1\,w_0+w_{1_{\theta}}\,w_0\right)E\,A\,a+\left(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,J \tag{3.1.1.3.2.6}$$

```
> collect(%, w__0);
```

$$\left(-v_1+w_{1_{\theta}}\right)E\,A\,a\,w_0-\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A+\left(-q\,v_1+q\,w_{1_{\theta}}\right)a^3+\left(\left(w_{1_{\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,A+\left(-\rho\,v_{1_{t,t}}+\rho\,w_{1_{t,t,\theta}}\right)J\right)a^2+\left(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,J \tag{3.1.1.3.2.7}$$

```
> collect(%, q);
```

$$\left(-v_1+w_{1_{\theta}}\right)a^3\,q+\left(-v_1+w_{1_{\theta}}\right)E\,A\,a\,w_0-\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A+\left(\left(w_{1_{\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,A+\left(-\rho\,v_{1_{t,t}}+\rho\,w_{1_{t,t,\theta}}\right)J\right)a^2+\left(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,J \tag{3.1.1.3.2.8}$$

```
> subs(w__0 = -(a^2)*q/(E*A), %);
```

$$-\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A+\left(\left(w_{1_{\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,A+\left(-\rho\,v_{1_{t,t}}+\rho\,w_{1_{t,t,\theta}}\right)J\right)a^2+\left(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,J \tag{3.1.1.3.2.9}$$

```
> Eq1_ad_1g_simp_L:= % = 0;
```

$$Eq1\_ad\_1g\_simp\_L := -\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A+\left(\left(w_{1_{\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,A+\left(-\rho\,v_{1_{t,t}}+\rho\,w_{1_{t,t,\theta}}\right)J\right)a^2+\left(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,J=0 \tag{3.1.1.3.2.10}$$

Equação Não Linear

```
> Eq1__ad_exp;
```

$$-\frac{E\,A\,v_1\,w_0}{a^2}-\frac{E\,A\,v_1\,w_1}{a^2}+\frac{E\,A\,w_{1_{\theta}}\,w_0}{a^2}+\frac{E\,A\,w_{1_{\theta}}\,w_1}{a^2}-\frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,v_1^{3}}{a^3}+\frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v_1^{2}\,w_{1_{\theta}}}{a^3}-\frac{3}{2}\,\frac{E\,A\,v_1\,w_{1_{\theta}}^{2}}{a^3}+\frac{1}{2}\,\frac{E\,A\,w_{1_{\theta}}^{3}}{a^3}-q\,v_1+q\,w_{1_{\theta}}+\frac{E\,A\,v_{1_{\theta,\theta}}}{a}+\frac{E\,A\,w_{1_{\theta}}}{a}-\frac{E\,A\,v_1\,w_{1_{\theta,\theta}}}{a^2}+\frac{E\,A\,w_{1_{\theta}}\,w_{1_{\theta,\theta}}}{a^2}+\frac{E\,J\,v_{1_{\theta,\theta}}}{a^3}-\frac{E\,J\,w_{1_{\theta,\theta,\theta}}}{a^3}-\rho\,a\,v_{1_{t,t}}\,A-\frac{\rho\,J\,v_{1_{t,t}}}{a}+\frac{\rho\,J\,w_{1_{t,t,\theta}}}{a}=0 \quad \textbf{(3.1.1.3.3.1)}$$

Multiplicando por a^3

```
> simplify(lhs(%))*(a^3);
```

$$-\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A-\frac{1}{2}\,E\,A\,v_1^{3}+\frac{3}{2}\,E\,A\,v_1^{2}\,w_{1_{\theta}}-E\,A\,v_1\,w_1\,a-\frac{3}{2}\,E\,A\,v_1\,w_{1_{\theta}}^{2}-E\,A\,v_1\,w_{1_{\theta,\theta}}\,a-E\,A\,v_1\,w_0\,a+E\,A\,w_{1_{\theta}}\,w_1\,a+\frac{1}{2}\,E\,A\,w_{1_{\theta}}^{3}+E\,A\,w_{1_{\theta}}\,w_{1_{\theta,\theta}}\,a+E\,A\,w_{1_{\theta}}\,a^2+E\,A\,w_{1_{\theta}}\,w_0\,a+E\,A\,v_{1_{\theta,\theta}}\,a^2-\rho\,J\,v_{1_{t,t}}\,a^2+\rho\,J\,w_{1_{t,t,\theta}}\,a^2-q\,v_1\,a^3+q\,w_{1_{\theta}}\,a^3+E\,J\,v_{1_{\theta,\theta}}-E\,J\,w_{1_{\theta,\theta,\theta}} \quad \textbf{(3.1.1.3.3.2)}$$

Fatorando

```
> collect(%, E);
```

$$\left(A\,w_{1_{\theta}}\,a\,w_0-\frac{3}{2}\,A\,v_1\,w_{1_{\theta}}^{2}+\frac{1}{2}\,A\,w_{1_{\theta}}^{3}-A\,v_1\,a\,w_0-A\,v_1\,w_1\,a+A\,v_{1_{\theta,\theta}}\,a^2+A\,w_{1_{\theta}}\,a^2-A\,v_1\,w_{1_{\theta,\theta}}\,a+A\,w_{1_{\theta}}\,w_{1_{\theta,\theta}}\,a+J\,v_{1_{\theta,\theta}}-J\,w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+A\,w_{1_{\theta}}\,w_1\,a-\frac{1}{2}\,A\,v_1^{3}+\frac{3}{2}\,A\,v_1^{2}\,w_{1_{\theta}}\right)E-\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A-\rho\,J\,v_{1_{t,t}}\,a^2+\rho\,J\,w_{1_{t,t,\theta}}\,a^2-q\,v_1\,a^3+q\,w_{1_{\theta}}\,a^3 \quad \textbf{(3.1.1.3.3.3)}$$

```
> collect(%, J);
```

$$\left(\rho\,w_{1_{t,t,\theta}}\,a^2-\rho\,v_{1_{t,t}}\,a^2+\left(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\right)J+\left(A\,w_{1_{\theta}}\,a\,w_0-\frac{3}{2}\,A\,v_1\,w_{1_{\theta}}^{2}+\frac{1}{2}\,A\,w_{1_{\theta}}^{3}-A\,v_1\,a\,w_0-A\,v_1\,w_1\,a+A\,v_{1_{\theta,\theta}}\,a^2+A\,w_{1_{\theta}}\,a^2-A\,v_1\,w_{1_{\theta,\theta}}\,a+A\,w_{1_{\theta}}\,w_{1_{\theta,\theta}}\,a+\frac{3}{2}\,A\,v_1^{2}\,w_{1_{\theta}} \quad \textbf{(3.1.1.3.3.4)}$$

$$+A\, w_{1_\theta} w_1 a - \frac{1}{2} A\, v_1^3 \Big) E - q\, v_1 a^3 - \rho\, a^4 v_{1_{t,t}} A + q\, w_{1_\theta} a^3$$

```
> collect(%, A);
```

$$\Big(\Big(w_{1_\theta} a\, w_0 - \frac{3}{2} v_1 w_{1_\theta}^2 + \frac{1}{2} w_{1_\theta}^3 - v_1 a\, w_0 - v_1 w_1 a + v_{1_{\theta,\theta}} a^2 + w_{1_\theta} a^2 - v_1 w_{1_{\theta,\theta}} a + w_{1_\theta} w_{1_{\theta,\theta}} a + \frac{3}{2} v_1^2 w_{1_\theta} + w_{1_\theta} w_1 a - \frac{1}{2} v_1^3\Big) E - \rho\, a^4 v_{1_{t,t}}\Big) A + \Big(\rho\, w_{1_{t,t,\theta}} a^2 - \rho\, v_{1_{t,t}} a^2 + \big(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}} + v_{1_{\theta,\theta}}\big) E\Big) J - q\, v_1 a^3 + q\, w_{1_\theta} a^3 \quad \textbf{(3.1.1.3.3.5)}$$

```
> collect(%, a);
```

$$-\rho\, a^4 v_{1_{t,t}} A + \big(-q\, v_1 + q\, w_{1_\theta}\big) a^3 + \Big(\big(w_{1_\theta} + v_{1_{\theta,\theta}}\big) E A + \big(-\rho\, v_{1_{t,t}} + \rho\, w_{1_{t,t,\theta}}\big) J\Big) a^2 + \big(w_{1_\theta} w_1 + w_{1_\theta} w_{1_{\theta,\theta}} + w_{1_\theta} w_0 - v_1 w_1 - v_1 w_{1_{\theta,\theta}} - v_1 w_0\big) E A\, a + \Big(-\frac{3}{2} v_1 w_{1_\theta}^2 + \frac{1}{2} w_{1_\theta}^3 - \frac{1}{2} v_1^3 + \frac{3}{2} v_1^2 w_{1_\theta}\Big) E A + \big(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}} + v_{1_{\theta,\theta}}\big) E J \quad \textbf{(3.1.1.3.3.6)}$$

```
> collect(%, w__0);
```

$$\big(-v_1 + w_{1_\theta}\big) E A\, a\, w_0 - \rho\, a^4 v_{1_{t,t}} A + \big(-q\, v_1 + q\, w_{1_\theta}\big) a^3 + \Big(\big(w_{1_\theta} + v_{1_{\theta,\theta}}\big) E A + \big(-\rho\, v_{1_{t,t}} + \rho\, w_{1_{t,t,\theta}}\big) J\Big) a^2 + \big(w_{1_\theta} w_1 + w_{1_\theta} w_{1_{\theta,\theta}} - v_1 w_1 - v_1 w_{1_{\theta,\theta}}\big) E A\, a + \Big(-\frac{3}{2} v_1 w_{1_\theta}^2 + \frac{1}{2} w_{1_\theta}^3 - \frac{1}{2} v_1^3 + \frac{3}{2} v_1^2 w_{1_\theta}\Big) E A + \big(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}} + v_{1_{\theta,\theta}}\big) E J \quad \textbf{(3.1.1.3.3.7)}$$

```
> collect(%, q);
```

$$\big(-v_1 + w_{1_\theta}\big) a^3 q + \big(-v_1 + w_{1_\theta}\big) E A\, a\, w_0 - \rho\, a^4 v_{1_{t,t}} A + \big(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}} + v_{1_{\theta,\theta}}\big) E J + \Big(\big(w_{1_\theta} + v_{1_{\theta,\theta}}\big) E A + \big(-\rho\, v_{1_{t,t}} + \rho\, w_{1_{t,t,\theta}}\big) J\Big) a^2 + \big(w_{1_\theta} w_1 + w_{1_\theta} w_{1_{\theta,\theta}} - v_1 w_1 - v_1 w_{1_{\theta,\theta}}\big) E A\, a + \Big(-\frac{3}{2} v_1 w_{1_\theta}^2 + \frac{1}{2} w_{1_\theta}^3 - \frac{1}{2} v_1^3 + \frac{3}{2} v_1^2 w_{1_\theta}\Big) E A \quad \textbf{(3.1.1.3.3.8)}$$

```
> subs(w__0 = -(a^2)*q/(E*A), %);
```

$$-\rho\, a^4 v_{1_{t,t}} A + \big(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}} + v_{1_{\theta,\theta}}\big) E J + \Big(\big(w_{1_\theta} + v_{1_{\theta,\theta}}\big) E A + \big(-\rho\, v_{1_{t,t}} + \rho\, w_{1_{t,t,\theta}}\big) J\Big) a^2 + \big(w_{1_\theta} w_1 + w_{1_\theta} w_{1_{\theta,\theta}} - v_1 w_1 - v_1 w_{1_{\theta,\theta}}\big) E A\, a \quad \textbf{(3.1.1.3.3.9)}$$

$$+\left(-\frac{3}{2}\,v_1\,w_{1_\theta}^{\;2}+\frac{1}{2}\,w_{1_\theta}^{\;3}-\frac{1}{2}\,v_1^{\;3}+\frac{3}{2}\,v_1^{\;2}\,w_{1_\theta}\right)E\,A$$

```
> Eq1_ad_1g_simp_NL:= % = 0;
```

$$Eq1\_ad\_1g\_simp\_NL := -\rho\,a^4\,v_{1_{t,t}}\,A+\left(-w_{1_{\theta,\theta,\theta}}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,J+\left(\left(w_{1_\theta}+v_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,A+\left(-\rho\,v_{1_{t,t}}+\rho\,w_{1_{t,t,\theta}}\right)J\right)a^2+\left(w_{1_\theta}\,w_1+w_{1_\theta}\,w_{1_{\theta,\theta}}-v_1\,w_1-v_1\,w_{1_{\theta,\theta}}\right)E\,A\,a+\left(-\frac{3}{2}\,v_1\,w_{1_\theta}^{\;2}+\frac{1}{2}\,w_{1_\theta}^{\;3}-\frac{1}{2}\,v_1^{\;3}+\frac{3}{2}\,v_1^{\;2}\,w_{1_\theta}\right)E\,A=0 \quad \textbf{(3.1.1.3.3.10)}$$

Segunda Equação (em função de *w*)

$$\frac{\partial F_{at}}{\partial w}-\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial w'}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{w}}+\frac{d^2}{d^2\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial w''}+\frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{w}'}=0$$

Parcelas

Primeira Parcela: $\dfrac{\partial F_{at}}{\partial w}$

```
> Eq2_Parc1:= Physics[diff](F__at,w(theta,t));
```

$$Eq2\_Parc1 := -a\left(\frac{E\,A\left(\frac{v_\theta+w}{a}+\frac{1}{2}\,\frac{\left(v-w_\theta\right)^2}{a^2}\right)}{a}+q\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{v_\theta+2\,w}{a}\right)\right) \quad \textbf{(3.1.2.1.1)}$$

Segunda Parcela: $\dfrac{d}{d\theta}\dfrac{\partial F_{at}}{\partial w'}$

$$\frac{\partial F_{at}}{\partial w'}$$

```
> Physics[diff](F__at, diff(w(theta,t),theta));
```

$$-a\left(-\frac{E\,A\left(\frac{v_\theta+w}{a}+\frac{1}{2}\,\frac{\left(v-w_\theta\right)^2}{a^2}\right)\left(v-w_\theta\right)}{a^2}-\frac{1}{2}\,\frac{q\,v}{a}\right) \quad \textbf{(3.1.2.1.2)}$$

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial w'}$$

```
> Eq2_Parc2:= diff(%,theta);
```

$$Eq2\_Parc2 := -a\left(-\frac{EA\left(\frac{v_{\theta,\theta}+w_{\theta}}{a}+\frac{(v-w_{\theta})\,(v_{\theta}-w_{\theta,\theta})}{a^2}\right)(v-w_{\theta})}{a^2} - \frac{EA\left(\frac{v_{\theta}+w}{a}+\frac{1}{2}\,\frac{(v-w_{\theta})^2}{a^2}\right)(v_{\theta}-w_{\theta,\theta})}{a^2}-\frac{1}{2}\,\frac{q\,v_{\theta}}{a}\right) \quad \textbf{(3.1.2.1.3)}$$

Terceira Parcela: $\frac{d}{dt}\,\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{w}}$

$\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{w}}$

```
> Physics[diff](F__at, diff(w(theta,t),t));
```

$$\rho\, a\, w_t\, A \quad \textbf{(3.1.2.1.4)}$$

$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{w}}$

```
> Eq2_Parc3:= diff(%,t);
```

$$Eq2\_Parc3 := \rho\, a\, w_{t,t}\, A \quad \textbf{(3.1.2.1.5)}$$

Quarta Parcela: $\frac{d^2}{d^2\theta}\,\frac{\partial F_{at}}{\partial w''}$

$\frac{\partial F_{at}}{\partial w''}$

```
> Physics[diff](F__at, diff(w(theta,t),theta$2));
```

$$\frac{EJ\,(v_{\theta}-w_{\theta,\theta})}{a^3} \quad \textbf{(3.1.2.1.6)}$$

$\frac{d^2}{d^2\theta}\,\frac{\partial F_{at}}{\partial w''}$

```
> Eq2_Parc4:= diff(%,theta$2);
```

$$Eq2\_Parc4 := \frac{EJ\,(v_{\theta,\theta,\theta}-w_{\theta,\theta,\theta,\theta})}{a^3} \quad \textbf{(3.1.2.1.7)}$$

Quinta Parcela: $\frac{d}{dt}\,\frac{d}{d\theta}\,\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{w}'}$

$\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{w}'}$

```
> Physics[diff](F__at, diff(w(theta,t),theta,t));
```

$$-\frac{\rho\left(v_t - w_{t,\theta}\right) J}{a} \tag{3.1.2.1.8}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F_{at}}{\partial \dot{w}'}$$

```
> Eq2_Parc5:= diff(%,theta,t);
```

$$Eq2\_Parc5 := -\frac{\rho\left(v_{t,t,\theta} - w_{\theta,t,t,\theta}\right) J}{a} \tag{3.1.2.1.9}$$

Juntando as parcelas :

```
> Eq2:= Eq2_Parc1 - Eq2_Parc2 - Eq2_Parc3 + Eq2_Parc4 +
  Eq2_Parc5 = 0;
```

$$Eq2 := -a\left(\frac{EA\left(\frac{v_\theta + w}{a} + \frac{1}{2}\frac{\left(v - w_\theta\right)^2}{a^2}\right)}{a} + q\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v_\theta + 2w}{a}\right)\right) + a\left(-\frac{EA\left(\frac{v_{\theta,\theta} + w_\theta}{a} + \frac{\left(v - w_\theta\right)\left(v_\theta - w_{\theta,\theta}\right)}{a^2}\right)\left(v - w_\theta\right)}{a^2} - \frac{EA\left(\frac{v_\theta + w}{a} + \frac{1}{2}\frac{\left(v - w_\theta\right)^2}{a^2}\right)\left(v_\theta - w_{\theta,\theta}\right)}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{q\,v_\theta}{a}\right) - \rho\,a\,w_{t,t}A + \frac{EJ\left(v_{\theta,\theta,\theta} - w_{\theta,\theta,\theta,\theta}\right)}{a^3} - \frac{\rho\left(v_{t,t,\theta} - w_{\theta,t,t,\theta}\right)J}{a} = 0 \tag{3.1.2.1}$$

Expandindo a Equação

```
> Eq2__exp:= expand(Eq2);
```

$$Eq2_{\exp} := -\rho\,a\,w_{t,t}A - \frac{EA\,v_\theta}{a} - \frac{EA\,w}{a} - \frac{1}{2}\frac{EA\,v^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{EA\,w_\theta^{\,2}}{a^2} - \frac{EA\,v_\theta^{\,2}}{a^2} + \frac{EJ\,v_{\theta,\theta,\theta}}{a^3} - \frac{EJ\,w_{\theta,\theta,\theta,\theta}}{a^3} - \frac{\rho J\,v_{t,t,\theta}}{a} + \frac{\rho J\,w_{\theta,t,t,\theta}}{a} + \frac{3EA\,v\,v_\theta w_\theta}{a^3} - \frac{3EA\,v\,w_{\theta,\theta}w_\theta}{a^3} - a\,q - q\,v_\theta - q\,w - \frac{EA\,v_{\theta,\theta}v}{a^2} + \frac{EA\,v_{\theta,\theta}w_\theta}{a^2} - \frac{3}{2}\frac{EA\,v^2 v_\theta}{a^3} + \frac{3}{2}\frac{EA\,v^2 w_{\theta,\theta}}{a^3} - \frac{3}{2}\frac{EA\,w_\theta^{\,2} v_\theta}{a^3} \tag{3.1.2.2.1}$$

$$+\frac{3}{2}\frac{E\,A\,w_{\theta}^{2}\,w_{\theta,\,\theta}}{a^{3}}+\frac{E\,A\,v_{\theta}\,w_{\theta,\,\theta}}{a^{2}}-\frac{E\,A\,w\,v_{\theta}}{a^{2}}+\frac{E\,A\,w\,w_{\theta,\,\theta}}{a^{2}}=0$$

Termos de 2º grau (quadráticos)

```
> Eq2_2g := -E*A*(diff(v(theta, t), theta$2))*v(theta,
  t)/a^2+E*A*(diff(v(theta, t), theta$2))*(diff(w(theta,
  t), theta))/a^2 - (1/2)*E*A*v(theta, t)^2/a^2 + (1/2)*
  E*A*(diff(w(theta, t), theta))^2/a^2 - E*A*(diff(v
  (theta, t), theta))^2/a^2 + E*A*(diff(v(theta, t),
  theta))*(diff(w(theta, t), theta$2))/a^2 - E*A*w
  (theta, t)*(diff(v(theta, t), theta))/a^2 + E*A*w
  (theta, t)*(diff(w(theta, t), theta$2))/a^2;
```

$$Eq2\_2g := -\frac{E\,A\,v_{\theta,\,\theta}\,v}{a^{2}}+\frac{E\,A\,v_{\theta,\,\theta}\,w_{\theta}}{a^{2}}-\frac{1}{2}\frac{E\,A\,v^{2}}{a^{2}}+\frac{1}{2}\frac{E\,A\,w_{\theta}^{2}}{a^{2}}-\frac{E\,A\,v_{\theta}^{2}}{a^{2}}+\frac{E\,A\,v_{\theta}\,w_{\theta,\,\theta}}{a^{2}}-\frac{E\,A\,w\,v_{\theta}}{a^{2}}+\frac{E\,A\,w\,w_{\theta,\,\theta}}{a^{2}} \quad \textbf{(3.1.2.2.1.1)}$$

Termos de 3º grau (cúbicos)

```
> Eq2_3g := -(3/2)*E*A*v(theta, t)^2*(diff(v(theta, t),
  theta))/a^3+(3/2)*E*A*v(theta, t)^2*(diff(w(theta, t),
  theta$2))/a^3 + 3*E*A*v(theta, t)*(diff(v(theta, t),
  theta))*(diff(w(theta, t), theta))/a^3 - 3*E*A*v
  (theta, t)*(diff(w(theta, t), theta$2))*(diff(w(theta,
  t), theta))/a^3 - (3/2)*E*A*(diff(w(theta, t), theta))
  ^2*(diff(v(theta, t), theta))/a^3 + (3/2)*E*A*(diff(w
  (theta, t), theta))^2*(diff(w(theta, t), theta$2))
  /a^3;
```

$$Eq2\_3g := -\frac{3}{2}\frac{E\,A\,v^{2}\,v_{\theta}}{a^{3}}+\frac{3}{2}\frac{E\,A\,v^{2}\,w_{\theta,\,\theta}}{a^{3}}+\frac{3\,E\,A\,v\,v_{\theta}\,w_{\theta}}{a^{3}}-\frac{3\,E\,A\,v\,w_{\theta,\,\theta}\,w_{\theta}}{a^{3}}-\frac{3}{2}\frac{E\,A\,w_{\theta}^{2}\,v_{\theta}}{a^{3}}+\frac{3}{2}\frac{E\,A\,w_{\theta}^{2}\,w_{\theta,\,\theta}}{a^{3}} \quad \textbf{(3.1.2.2.2.1)}$$

Termos de 1º grau (lineares)

```
> Eq2_1g:= (lhs(Eq2__exp) - (Eq2_2g + Eq2_3g));
```

$$Eq2\_1g := -\rho\,a\,w_{t,\,t}\,A-\frac{E\,A\,v_{\theta}}{a}-\frac{E\,A\,w}{a}+\frac{E\,J\,v_{\theta,\,\theta,\,\theta}}{a^{3}}-\frac{E\,J\,w_{\theta,\,\theta,\,\theta,\,\theta}}{a^{3}}-\frac{\rho\,J\,v_{t,\,t,\,\theta}}{a}+\frac{\rho\,J\,w_{\theta,\,t,\,t,\,\theta}}{a}-a\,q-q\,v_{\theta}-q\,w \quad \textbf{(3.1.2.2.3.1)}$$

APÊNDICE II – COMO CONVERTER EXPRESSÕES MATEMÁTICAS ENTRE OS SOFTWARES MAPLE E WORD

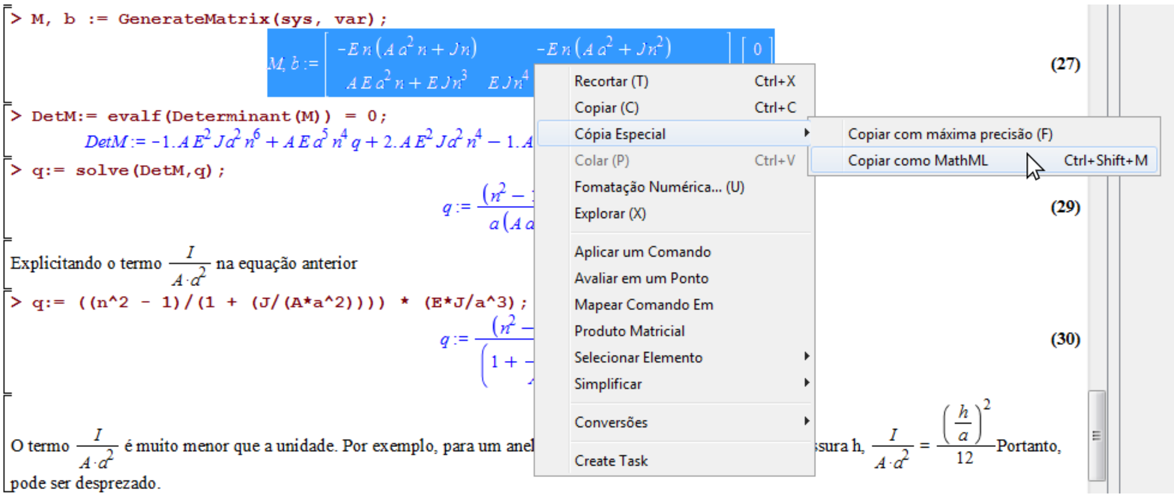
Para que a cópia para o Word (2010) das expressões matemáticas seja possível, o software MathType 7 (2020) (ou versões superiores) precisa já estar instalado. O software Maple 17 (2017) está no idioma Português (BR). Somente da versão 15 em diante desse software, há essa opção de idioma disponível para escolha.

1
Através da cópia em linguagem MathML

1.1.
Do Maple para o Word

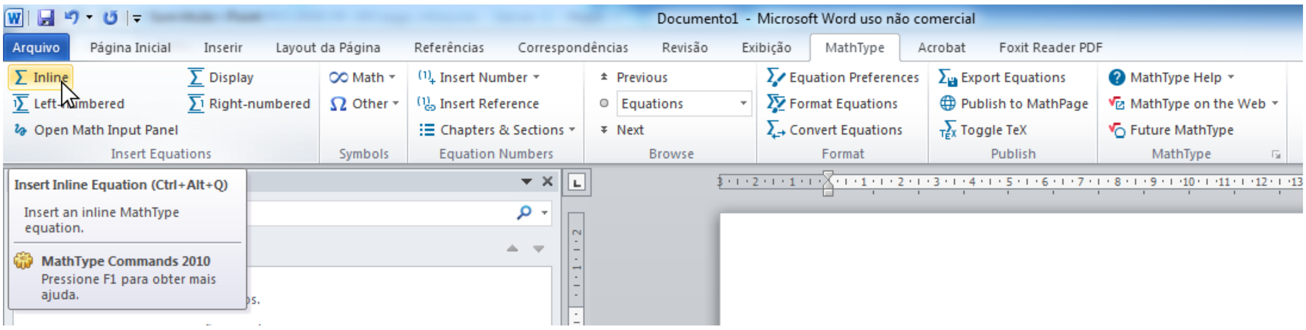
Uma das formas de se converter uma expressão matemática do Maple para o Word é através do seguinte procedimento:

1) Selecionar a expressão matemática desejada.
2) Clicar com o botão direito sobre a seleção.
3) Posicionar o cursor em "Cópia Especial".
4) Clicar em "Copiar como MathML" ou digitar Ctrl+Shift+M.

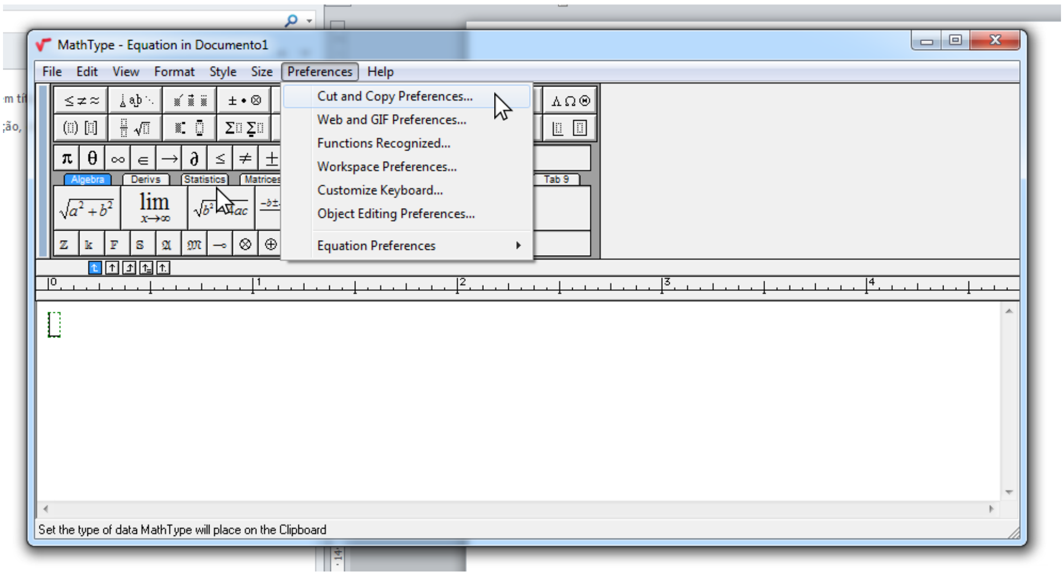


5) Abrir um documento Word.

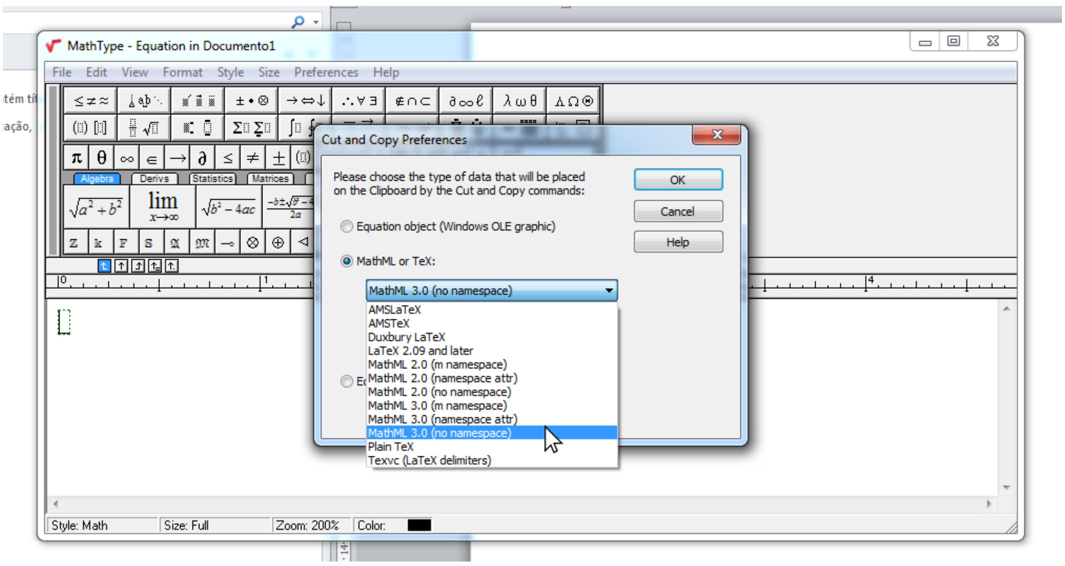
6) Na aba do MathType, clique em “Inline”.



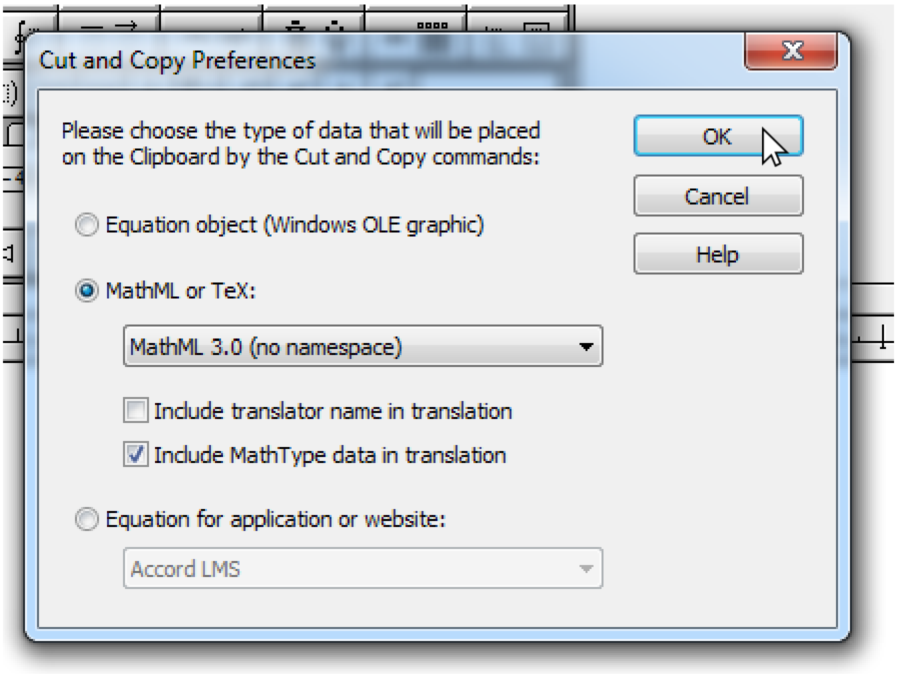
7) Então, a janela do software MathType será aberta. Clique em “Preferences” e, em seguida, em “Cut and Copy Preferences...”.



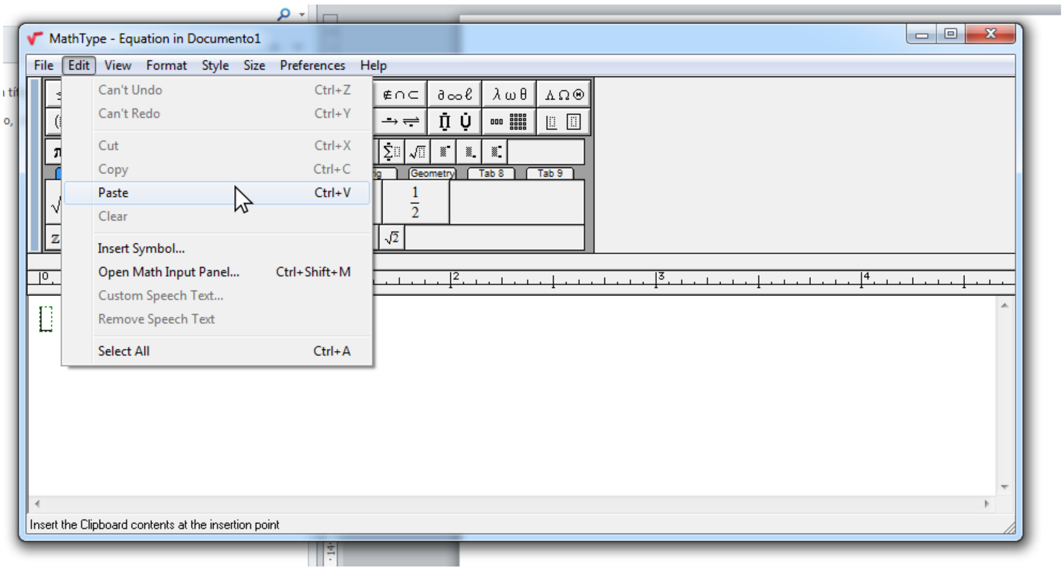
8) Então, a janela do software MathType será aberta. Clique em “Preferences” e, em seguida, em “Cut and Copy Preferences...”.



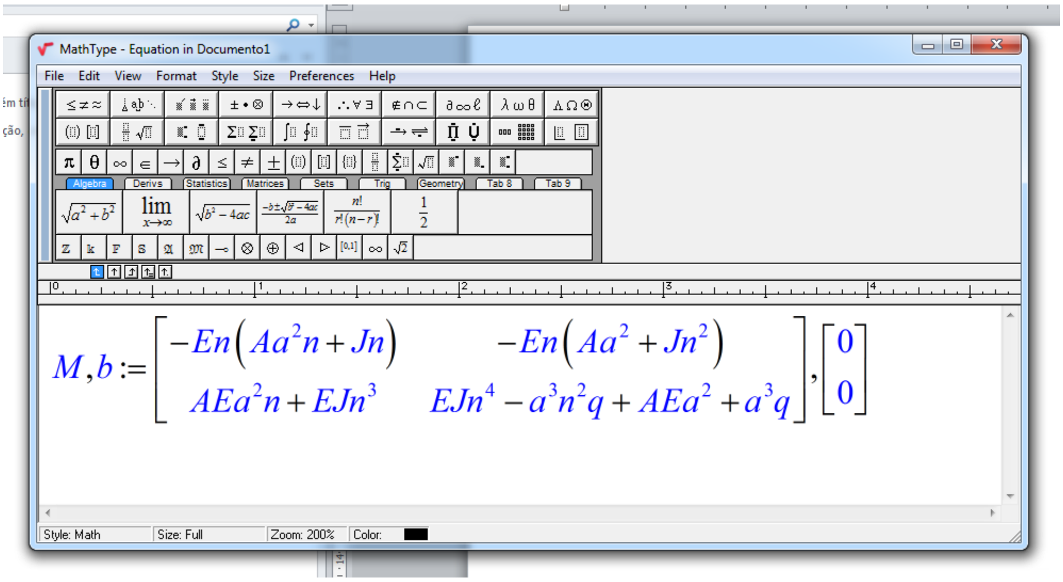
9) Clique em “OK”.



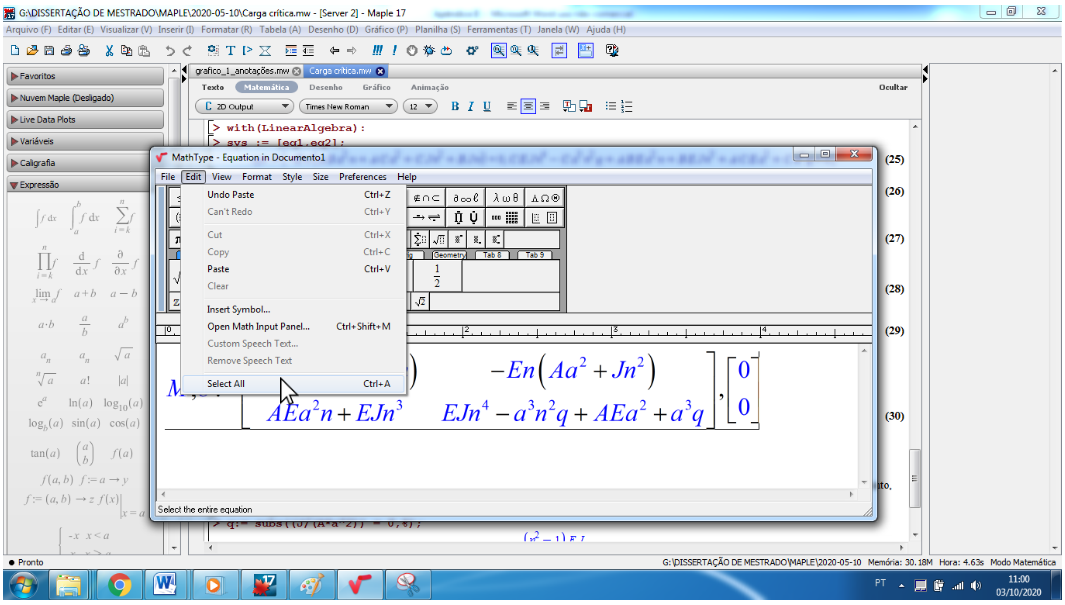
10) Clique em “Edit” e, em seguida, em “Paste” ou digite Ctrl+V.



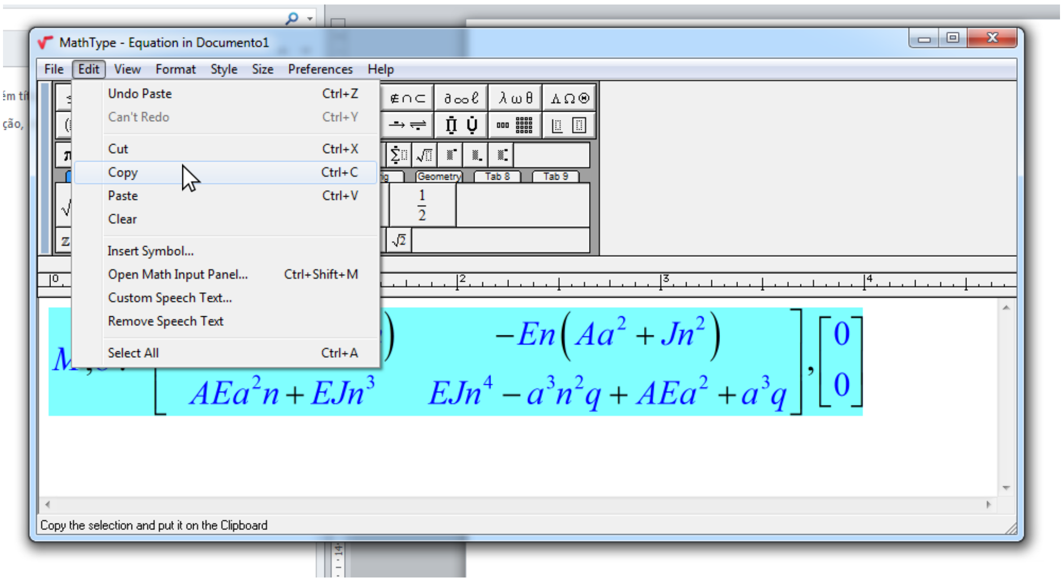
11) A expressão será colada.



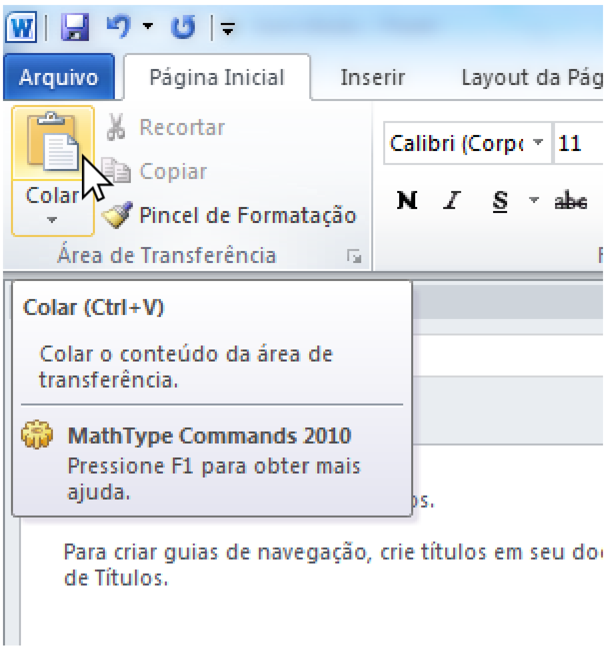
12) Caso seja preciso passar a expressão matemática para a linguagem OMML (Office Math Markup Language), clique em "Edit", e em seguida, em "Select All" ou digite Ctrl+A.



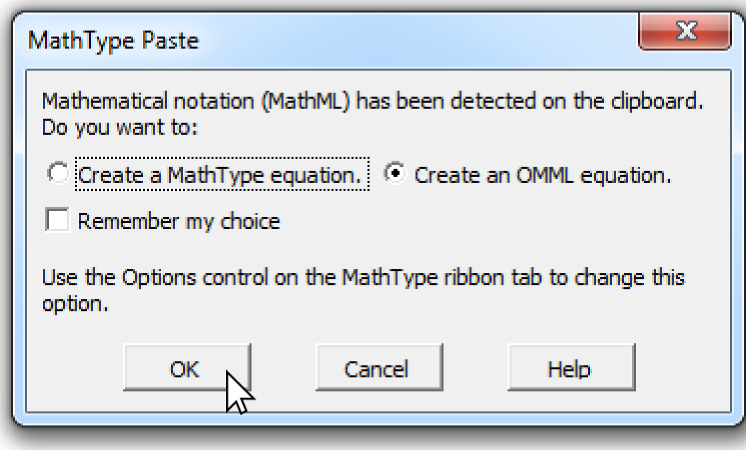
13) Com a expressão selecionada, clique em “Edit” e, em seguida, em “Copy” ou digite Ctrl+C.



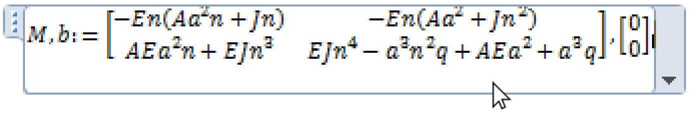
14) Minimizando a janela do MatyType, indo para o Word, na aba “Página Inicial”, clique em “Colar” ou digite Ctrl+V.



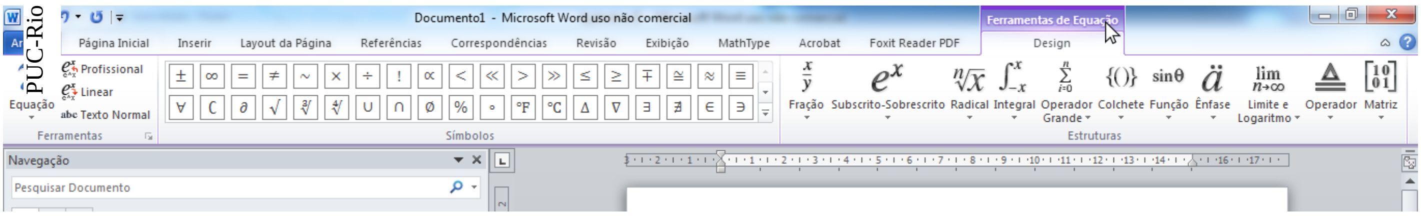
15) A janela “MathType Paste” irá aparecer e clique em OK.



16) A expressão matemática será colada na linguagem OMML.



17) Para editar este tipo de expressão matemática, basta clicar sobre ela e ir à aba “Ferramentas de Equação”.



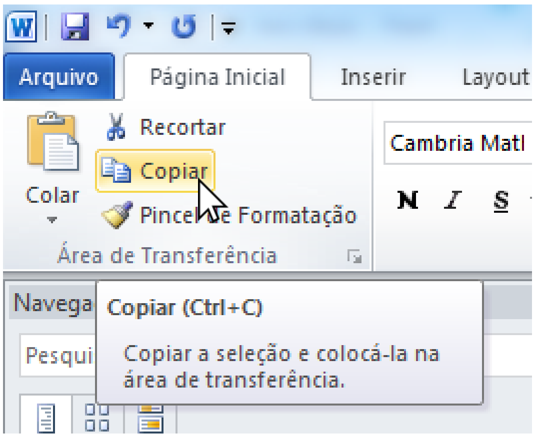
1.2. Do Word para o Maple

Também é possível passar expressão matemática, tanto na linguagem OMML quanto para o software MathType do Word para o Maple. Por exemplo, a expressão agora digitada no Word pode ser copiada como uma expressão matemática do Maple.

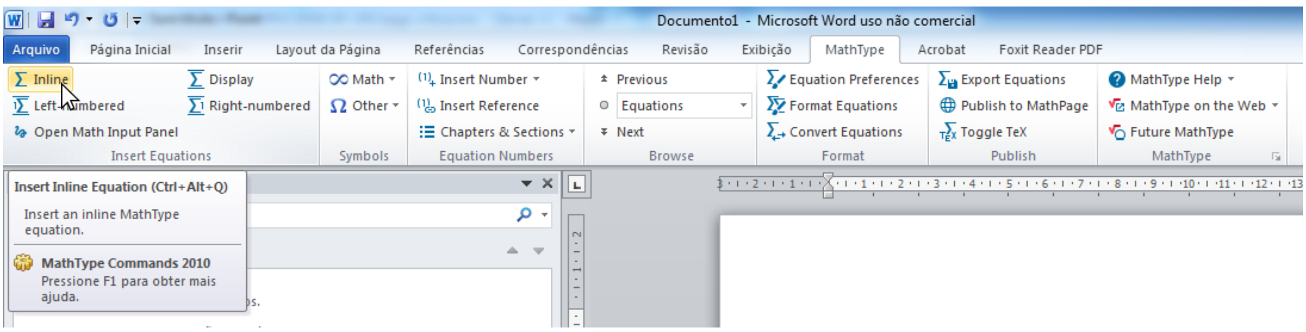
1) Se a equação estiver em OMML, é preciso passá-la para o MathType. Basta selecionar toda a equação.

$$M, b := \begin{bmatrix} -En(Aa^2n + Jn) & -En(Aa^2 + Jn^2) \\ AEa^2n + EJn^3 & EJn^4 - a^3n^2q + AEa^2 + a^3q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

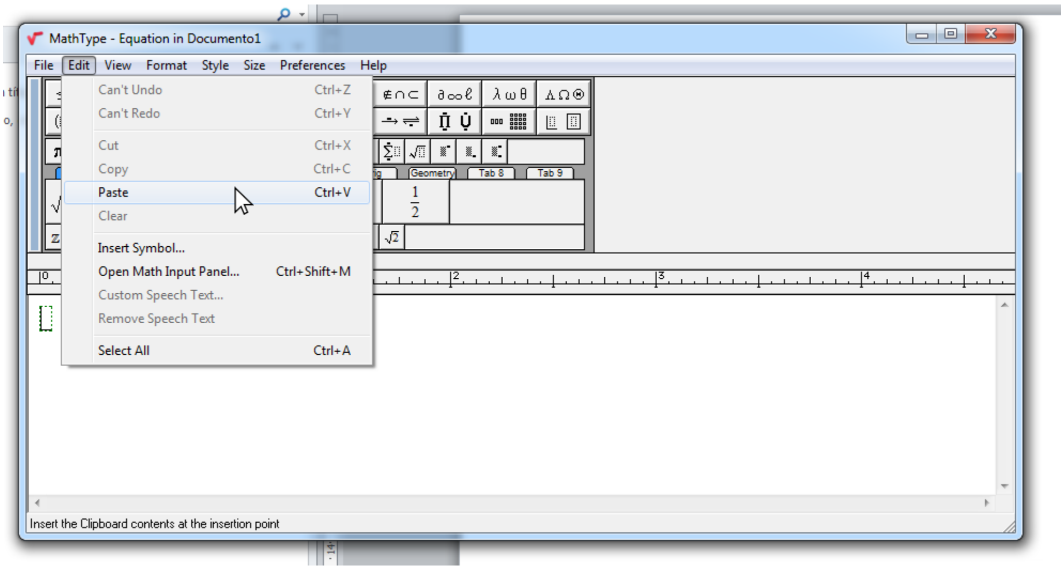
2) e copiar indo na aba "Página Inicial" e clicar em Copiar ou digitar Ctrl+C.



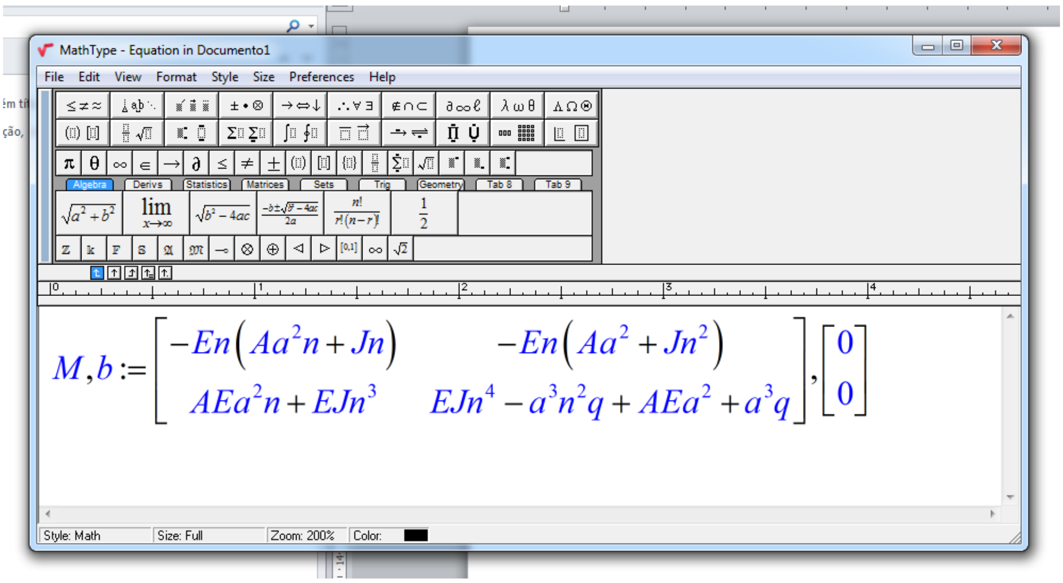
3) Na aba do MathType, clique em "Inline" para abrir o MathType.



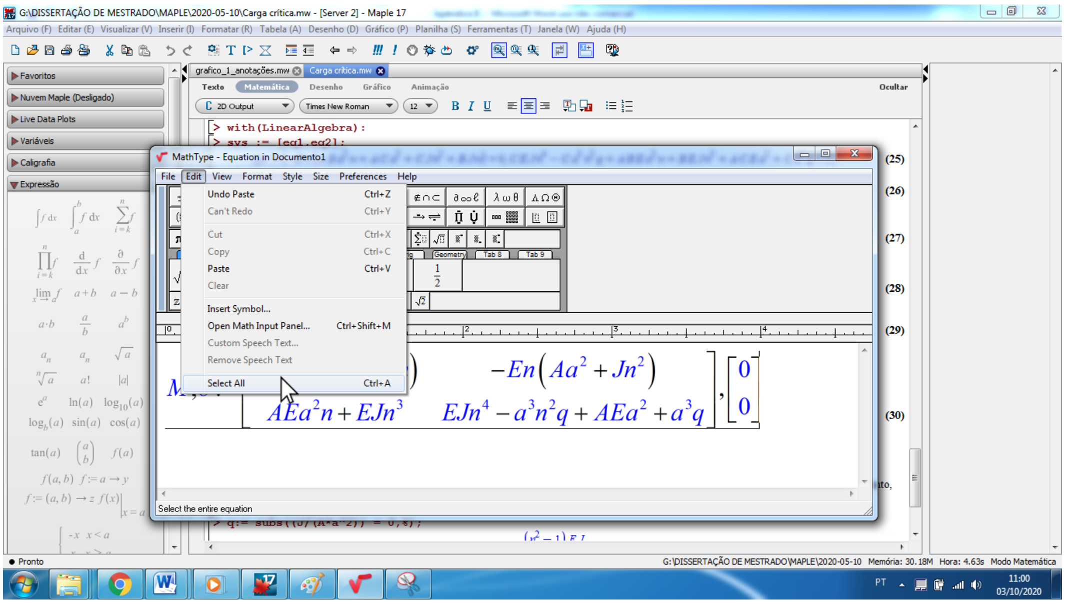
4) Clique em “Edit” e, em seguida, em “Paste” ou digite Ctrl+V.



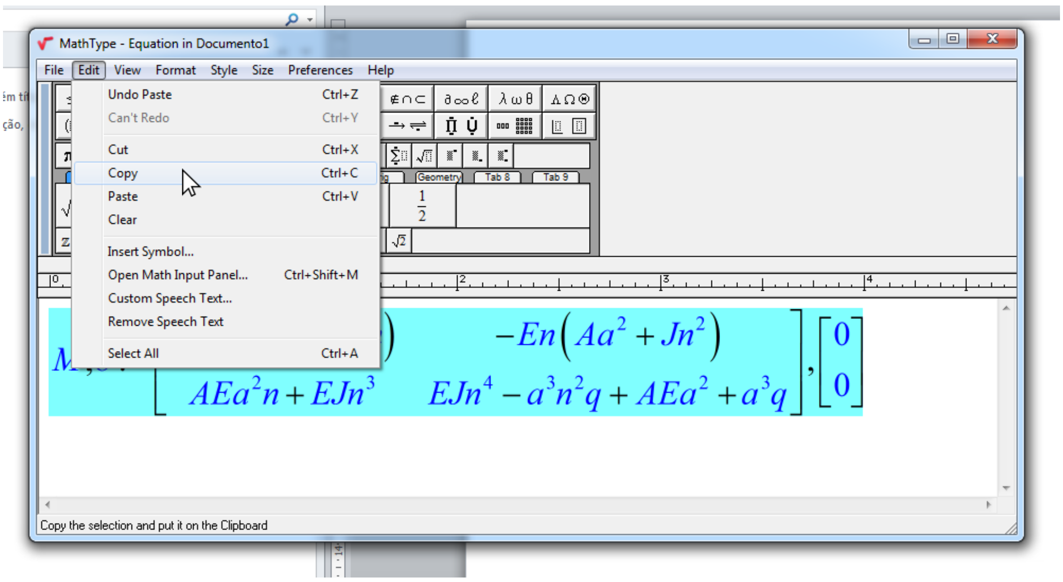
5) A expressão será colada.



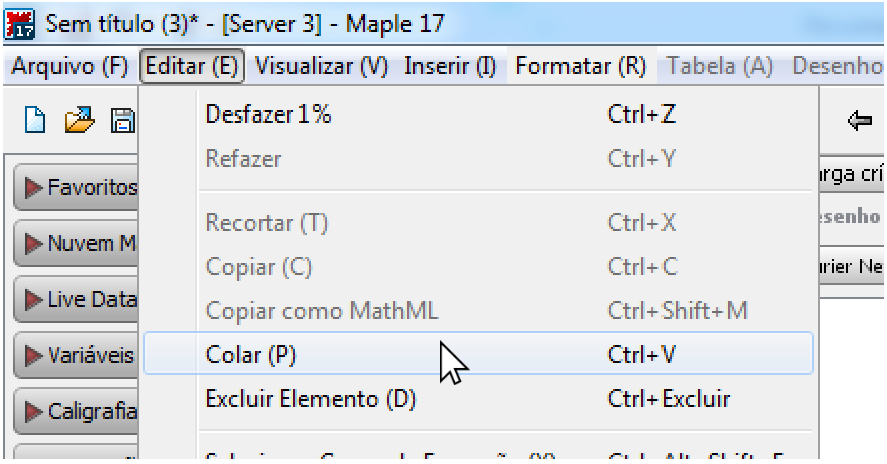
6) Clique em “Edit”, e em seguida, em “Select All” ou digite Ctrl+A.



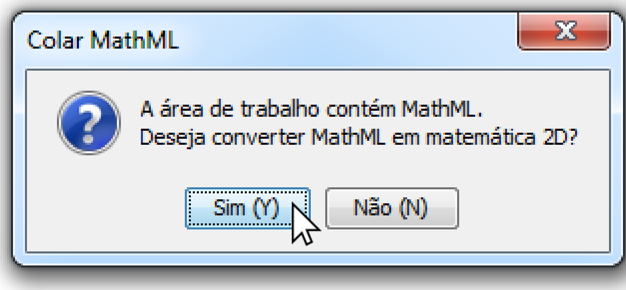
7) Com a expressão selecionada, clique em “Edit” e, em seguida, em “Copy” ou digite Ctrl+C.



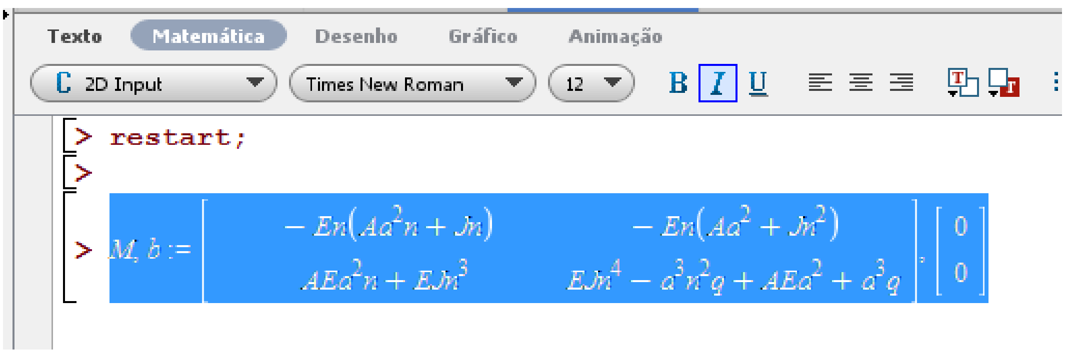
8) Abra o software Maple, clique em “Editar” e, em seguida, em “Colar” ou digite Ctrl+V.



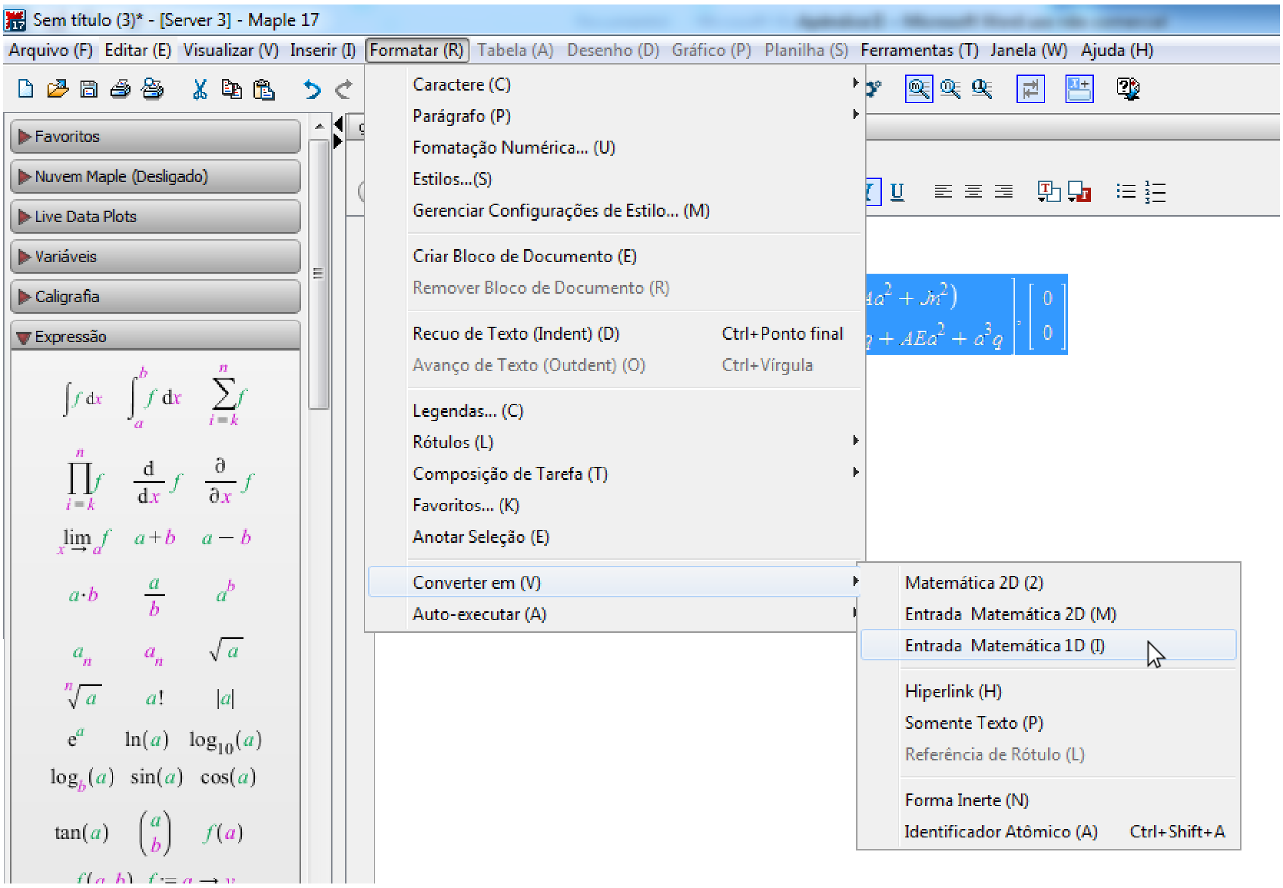
9) A janela “Colar MathML” aparecerá. Clique em “Sim”.



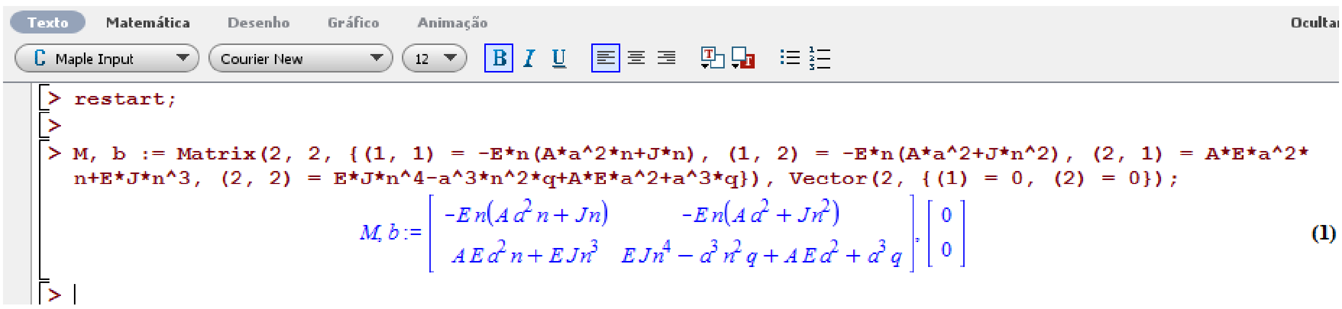
10) A expressão será escrita no formato Matemática 2D do Maple. Para verificar se a expressão está digitada corretamente, é preciso passar para o formato Matemática 1D. Para isso, selecione a expressão.



11) Clique em “Formatar”, em seguida, em “Converter em”, e depois em “Entrada Matemática 1D”.



12) A expressão é convertida no formato 1D do Maple. Apertando o botão Enter do teclado, aparece o output do Maple em azul.



13) No entanto, a expressão não está digitada de forma correta. Os sinais de multiplicação, em alguns casos são omitidos, geralmente, antes de multiplicar por algo que está entre parênteses, falta o símbolo de multiplicação *. É bom também conferir as potências (símbolo ^) antes dos parênteses se houver (neste caso, não há). Expressão matemática corrigida:

```
> M, b := Matrix(2, 2, {(1, 1) = -E*n*(A*a^2*n+J*n), (1, 2) = -E*n*(A*a^2+J*n^2), (2, 1) = A*E*
a^2*n+E*J*n^3, (2, 2) = E*J*n^4-a^3*n^2*q+A*E*a^2+a^3*q}), Vector(2, {(1) = 0, (2) = 0});
```

$$M, b := \begin{bmatrix} -E\,n\left(A\,a^2\,n + J\,n\right) & -E\,n\left(A\,a^2 + J\,n^2\right) \\ A\,E\,a^2\,n + E\,J\,n^3 & E\,J\,n^4 - a^3\,n^2\,q + A\,E\,a^2 + a^3\,q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

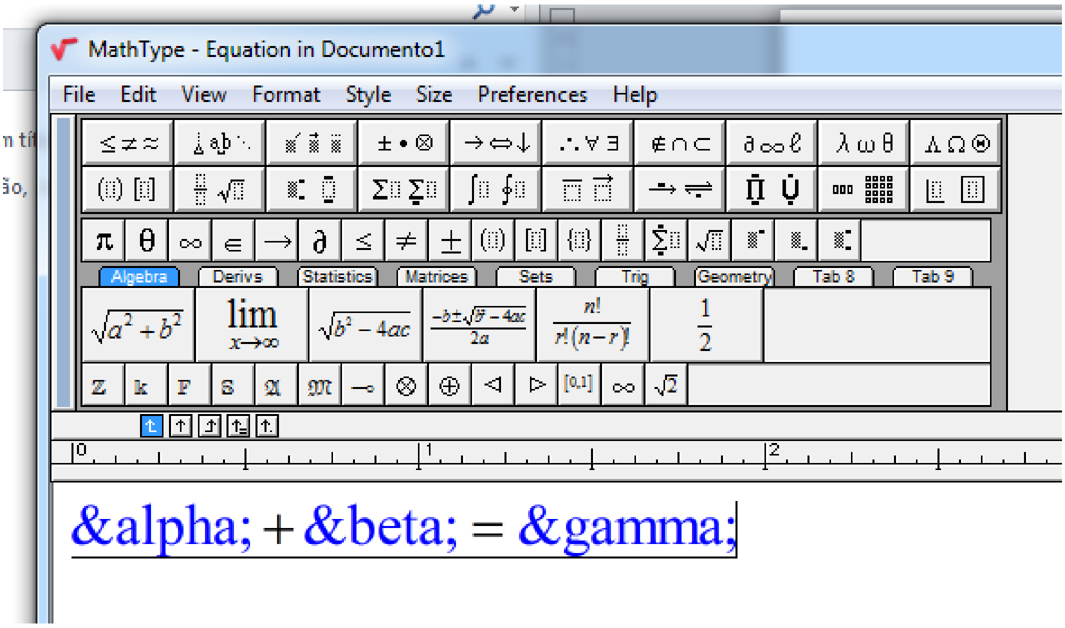
1.3. Desvantagens do método de cópia em linguagem MathML

Este método de transferência de expressões matemáticas é mais simples. No entanto, apresenta alguns problemas, principalmente com o uso de letras gregas, derivadas, expressões matemáticas muito grandes, dentre outros. Por exemplo, para a equação:

```
alpha + beta = gamma;
```

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Ao passar para o MathType:

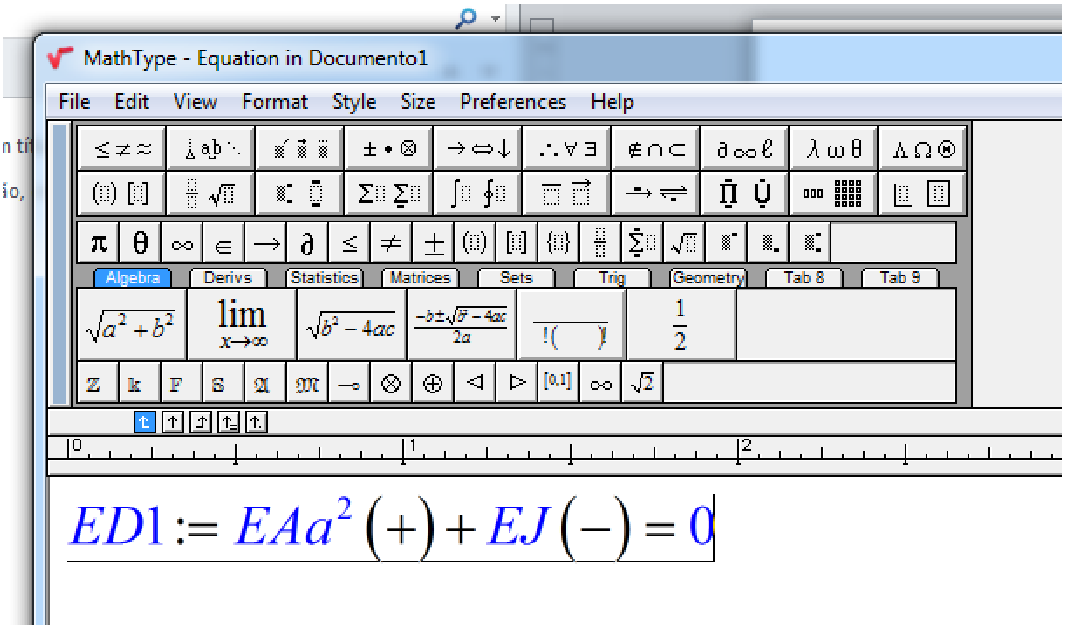


Para expressões com derivadas, o método também não é recomendado. Por exemplo, para copiar a equação do Maple:

```
ED1:= E*A*a^2*(diff(((diff(v(theta),theta)) + w(theta)),theta)) + E*J*(diff((v(theta) - (diff(w
(theta),theta))),theta$2)) = 0;
```

$$ED1 := E\,A\,a^2\,(v'' + w') + E\,J\,(v'' - w''') = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Ao colar no MathType:



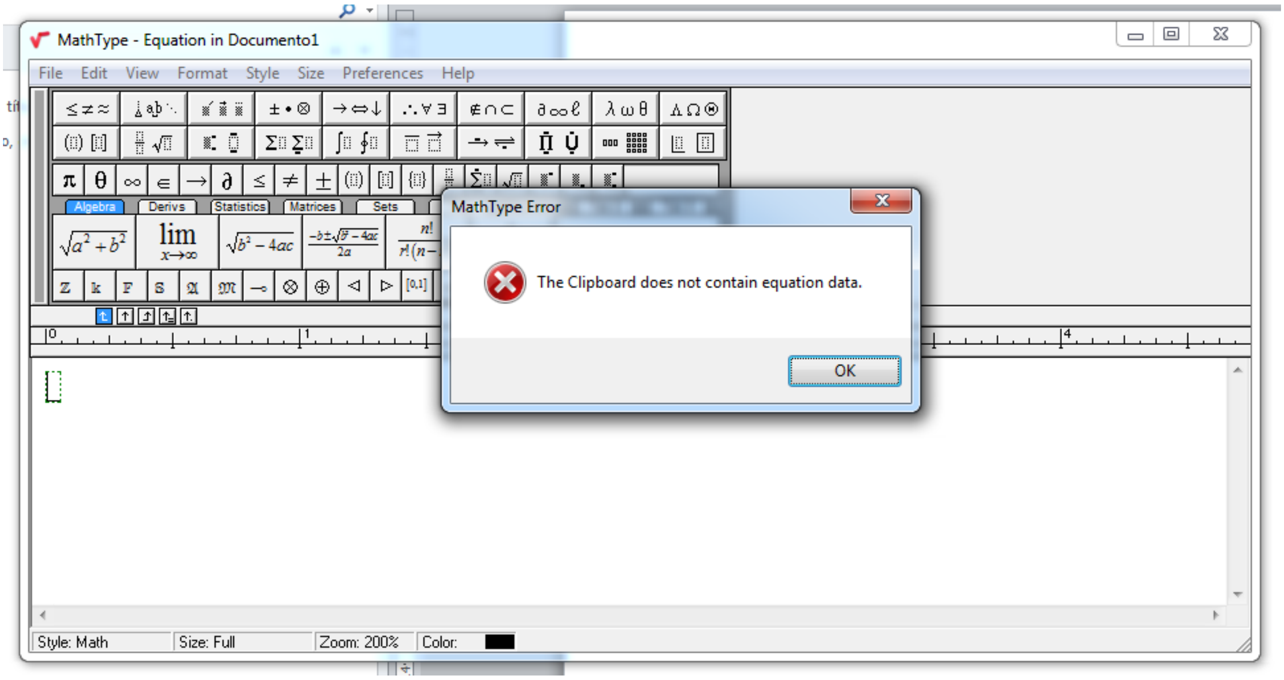
Expressões muito grandes também apresentam erro. Por exemplo:

```
> omega__3:= solve(subs(n = 3,DetM),omega);
```

$\omega_3 :=$ **(30)**

$$\frac{1}{A\,\rho\,(A\,a^2 + 10.J)\,a}\Big(A\,\rho\,(A\,a^2 + 10.J)\,\big(5.A^2\,E\,a^2 - 4.A\,a^3\,q + 77.A\,E\,J - 4.J\,a\,q$$
$$+ (25.A^4\,E^2\,a^4 + 32.A^3\,E\,a^5\,q + 16.A^2\,a^6\,q^2 + 194.A^3\,E^2\,J\,a^2 + 136.A^2\,E\,J\,a^3\,q + 32.A\,J\,a^4\,q^2 + 169.A^2\,E^2\,J^2$$
$$+ 104.A\,E\,J^2\,a\,q + 16.J^2\,a^2\,q^2)^{1/2}\big)\Big)^{1/2},$$
$$-\frac{1}{A\,\rho\,(A\,a^2 + 10.J)\,a}\Big(1.\Big(A\,\rho\,(A\,a^2 + 10.J)\,\big(5.A^2\,E\,a^2 - 4.A\,a^3\,q + 77.A\,E\,J - 4.J\,a\,q$$
$$+ (25.A^4\,E^2\,a^4 + 32.A^3\,E\,a^5\,q + 16.A^2\,a^6\,q^2 + 194.A^3\,E^2\,J\,a^2 + 136.A^2\,E\,J\,a^3\,q + 32.A\,J\,a^4\,q^2 + 169.A^2\,E^2\,J^2$$
$$+ 104.A\,E\,J^2\,a\,q + 16.J^2\,a^2\,q^2)^{1/2}\big)\Big)^{1/2}\Big),$$
$$\frac{1}{A\,\rho\,(A\,a^2 + 10.J)\,a}\Big(A\,\rho\,(A\,a^2 + 10.J)\,\big(5.A^2\,E\,a^2 - 4.A\,a^3\,q + 77.A\,E\,J - 4.J\,a\,q$$
$$- 1.(25.A^4\,E^2\,a^4 + 32.A^3\,E\,a^5\,q + 16.A^2\,a^6\,q^2 + 194.A^3\,E^2\,J\,a^2 + 136.A^2\,E\,J\,a^3\,q + 32.A\,J\,a^4\,q^2 + 169.A^2\,E^2\,J^2$$
$$+ 104.A\,E\,J^2\,a\,q + 16.J^2\,a^2\,q^2)^{1/2}\big)\Big)^{1/2},$$
$$-\frac{1}{A\,\rho\,(A\,a^2 + 10.J)\,a}\Big(1.\Big(A\,\rho\,(A\,a^2 + 10.J)\,\big(5.A^2\,E\,a^2 - 4.A\,a^3\,q + 77.A\,E\,J - 4.J\,a\,q$$
$$- 1.(25.A^4\,E^2\,a^4 + 32.A^3\,E\,a^5\,q + 16.A^2\,a^6\,q^2 + 194.A^3\,E^2\,J\,a^2 + 136.A^2\,E\,J\,a^3\,q + 32.A\,J\,a^4\,q^2 + 169.A^2\,E^2\,J^2$$
$$+ 104.A\,E\,J^2\,a\,q + 16.J^2\,a^2\,q^2)^{1/2}\big)\Big)^{1/2}\Big)$$

Ao colar a expressão no MathType, primeiramente, o cursor vai mudar para, demonstrando que a operação está carregando. Após algum tempo, o software exibe a seguinte mensagem de erro:



Para esses casos, recomenda-se passar as equações através da linguagem TeX e, em seguida, utilizar um conversor de TeX para MathML (item seguinte).

2
Através de um código de equação na linguagem TeX

Para passar as expressões matemáticas do Maple para o Word, pode-se primeiramente passar do Maple para a linguagem TeX e, em seguida, utilizar um mecanismo de conversão da linguagem TeX para MathML. As expressões na linguagem TeX são utilizadas em vários sites da internet, por exemplo, o site Wikipedia. Qualquer expressão matemática retirada deste site também pode ser convertida para MathML através dos mesmos processos descritos a seguir.

Para passar a equação do Maple para a linguagem TeX, basta digitar a função latex () com a equação desejada no argumento (interior dos parênteses). Por exemplo:

```
> alpha + beta = gamma;
```

$$\alpha+\beta=\gamma \tag{3}$$

```
> latex(%);
\alpha+\beta=\gamma
```

Sendo, neste caso, % (último comando), o argumento da função. Selecione o código resultante da função.

```
> alpha + beta = gamma;
```

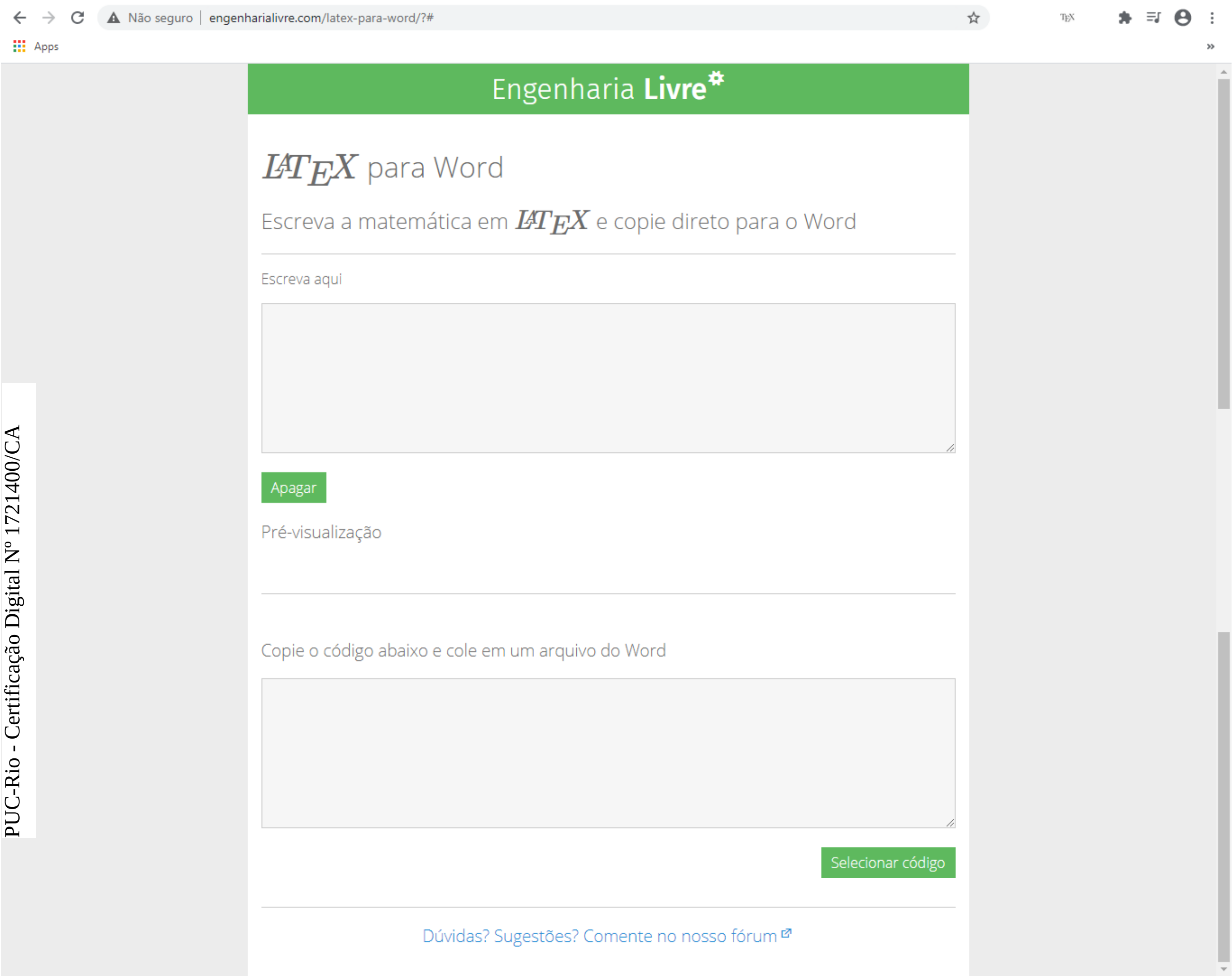
$$\alpha+\beta=\gamma$$

```
> latex(%);
\alpha+\beta=\gamma
```

Copie (Ctrl+C). Em seguida, pode-se utilizar diferentes métodos de conversão da linguagem TeX para MathML. Duas delas são listadas a seguir.

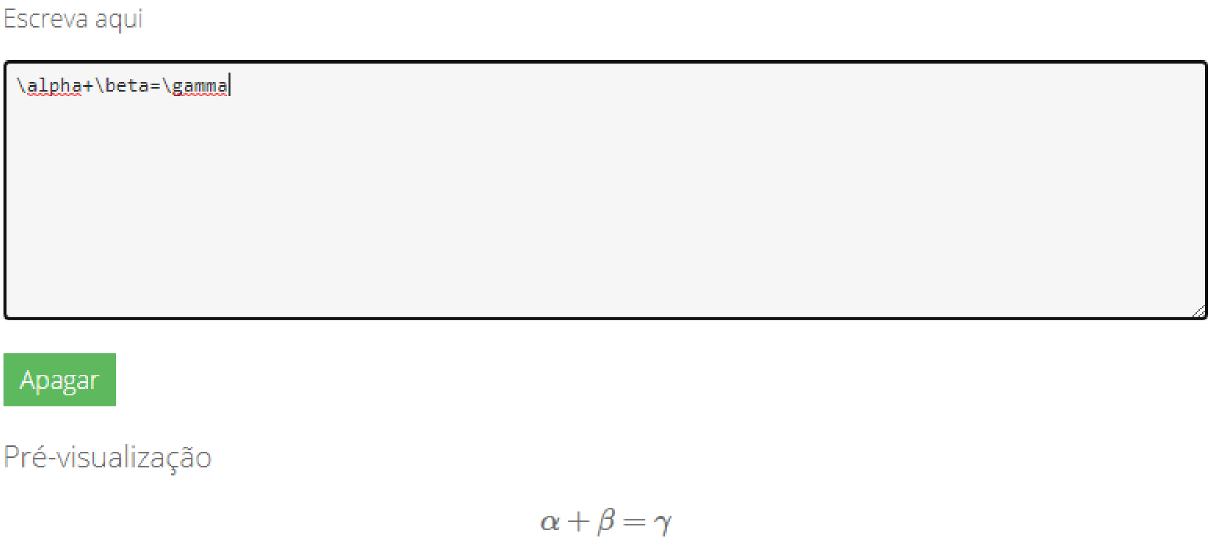
2.1. Através do site Engenharia Livre

1) Digite, no navegador, o site Engenharia Livre[1]: http://engenharialivre.com/latex-para-word/?#

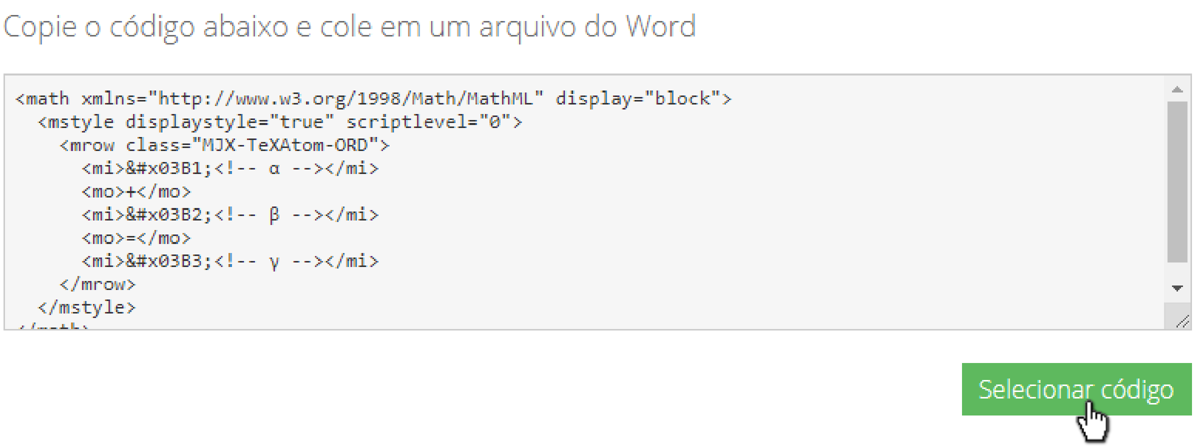


[1] Disponível em: <http://engenharialivre.com/latex-para-word/?#> Acesso em out. 2020.

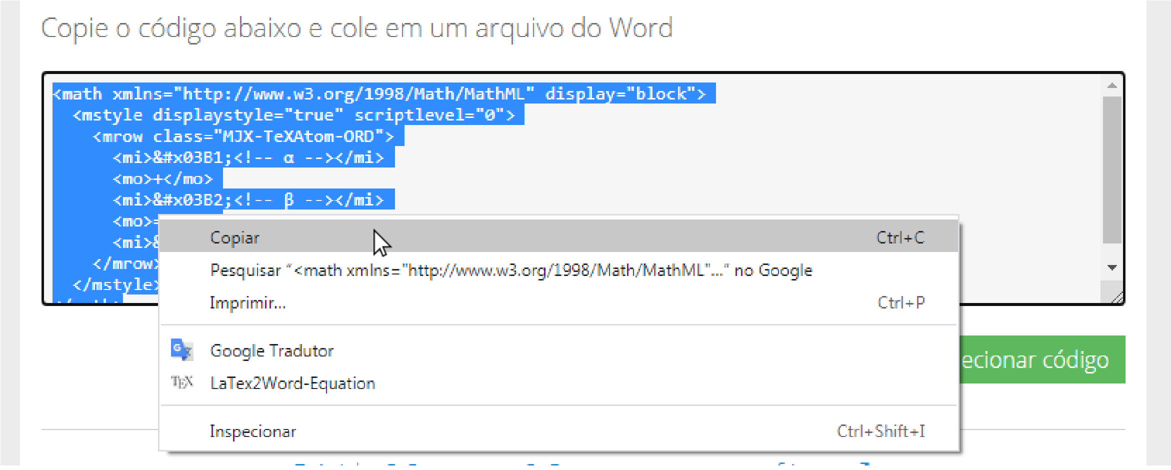
2) Com a equação já copiada, basta colar na caixa de texto abaixo de "Escreva Aqui".



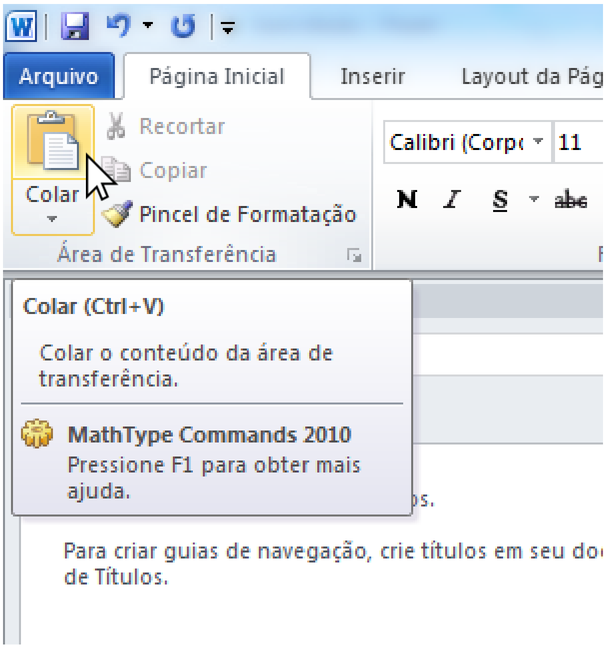
3) Depois, selecione o código na caixa de texto abaixo de "Copie o código abaixo e cole em um arquivo do Word".



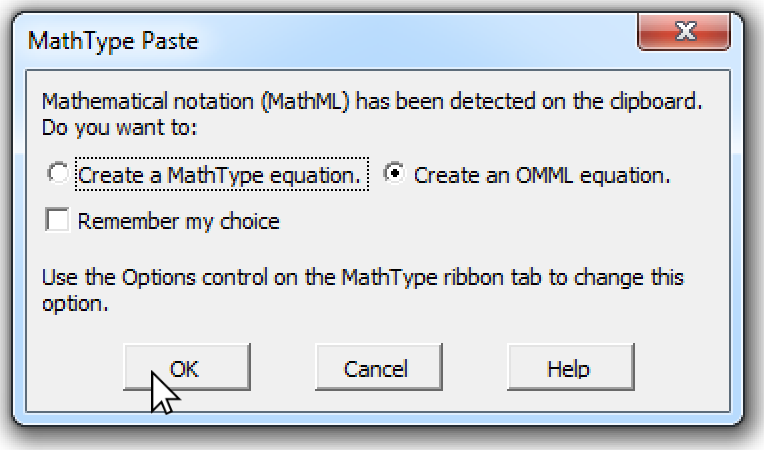
4) Com o código selecionado, clique com o botão direito na seleção e, em seguida, em “Copiar” ou digite Ctrl+C.



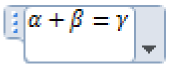
5) No Word, na aba “Página Inicial”, clique em “Colar” ou digite Ctrl+V.



6) Caso tenha definido a área de transferência padrão do Word como MathML 3.0 (no namespace) em MathML or TeX − passos (8) e (9) do item 1.1 − a janela “MathType Paste” irá aparecer. Clique em OK se desejar colar a equação em OMML. Caso deseje colar em MathType, basta selecionar a opção “Create a MatyType equation” no primeiro radio button.



7) Clicando em OK, a equação será colada na linguagem OMML.



2.2.
Através de um código conversor em JavaScript

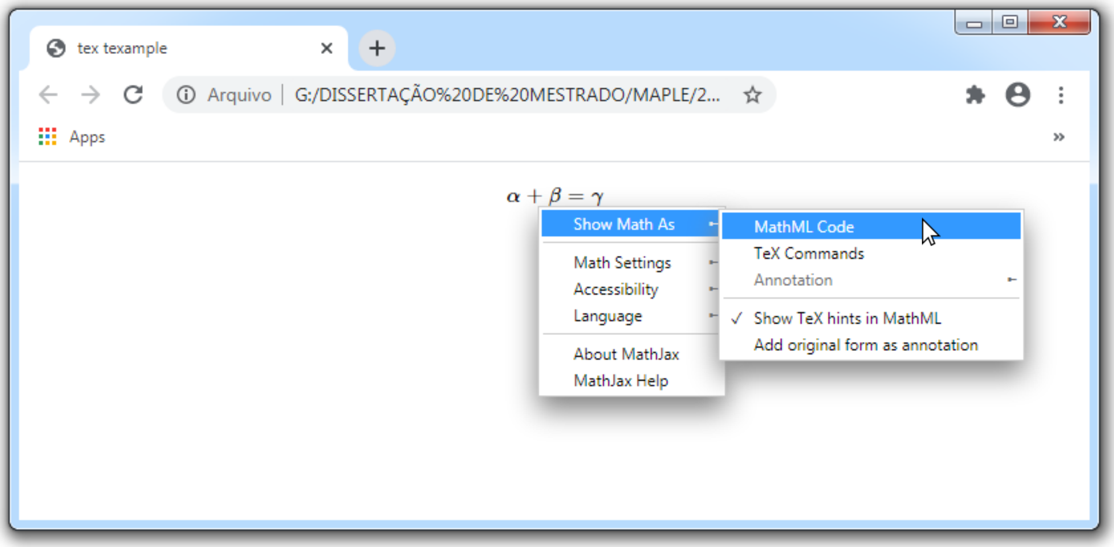
Há um código em JavaScript que transforma a expressão matemática digitada na linguagem TeX para MathML em um arquivo html. O código foi encontrado em um fórum de discussões no site Stack Exchange[2] sobre o assunto e foi uma solução adotada por David Carlisle (Consultor Técnico Principal do Grupo de Algoritmos Numéricos da Universidade de Oxford), 2013, que diz que usou o MathJax em um navegador da web para a conversão inicial de TeX para MathML, pois é o mais fácil de configurar, existem outras alternativas. Além disso, para simplificar, descreveu o processo em termos de recortar e colar, que funciona bem para uma ou duas expressões para esse tipo de conversão.

1) Com a equação copiada do Maple, crie uma página em html em uma IDE que crie páginas web. Há várias IDEs simples como Brackets, Notepad++, VisualStudio, dentre outras, ou até mesmo no bloco de notas, mas precisa ser salvo com a extensão .html. Neste caso, foi utilizado o Brackets. Escreva o seguinte código, sendo a parte selecionada, a equação escrita na linguagem TeX (sempre deve estar entre os símbolos $$) na tag <body>. Salve o arquivo (Ctrl+S).

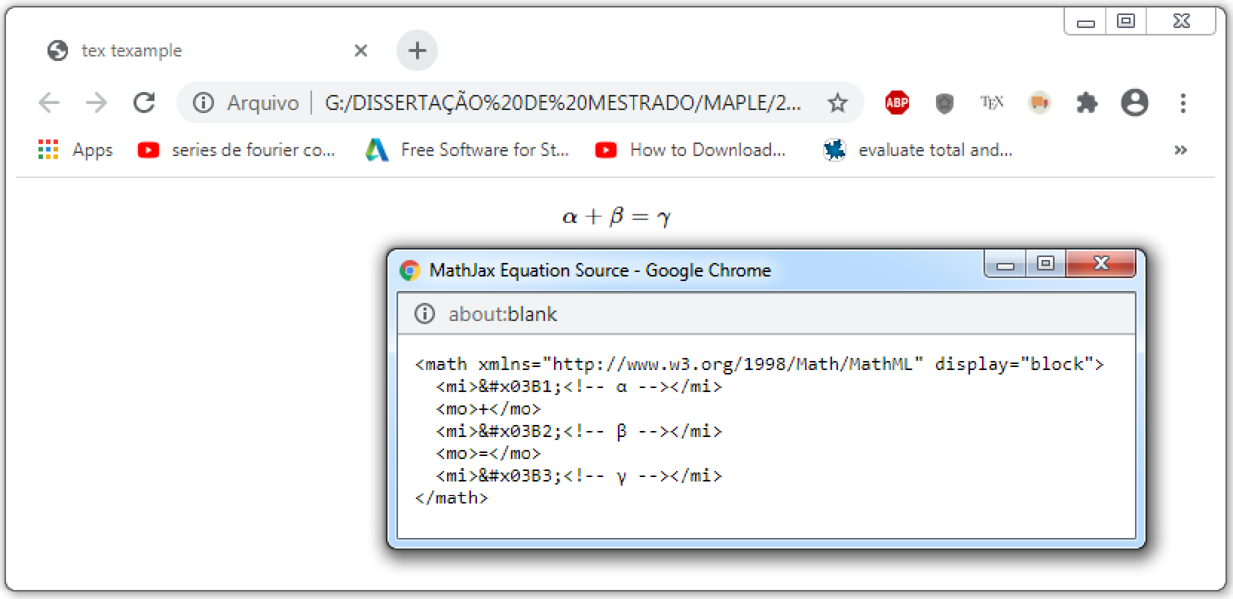
---

[2] Disponível em: < https://tex.stackexchange.com/questions/25223/embed-latex-math-equations-into-microsoft-word> Acesso em out. 2020.

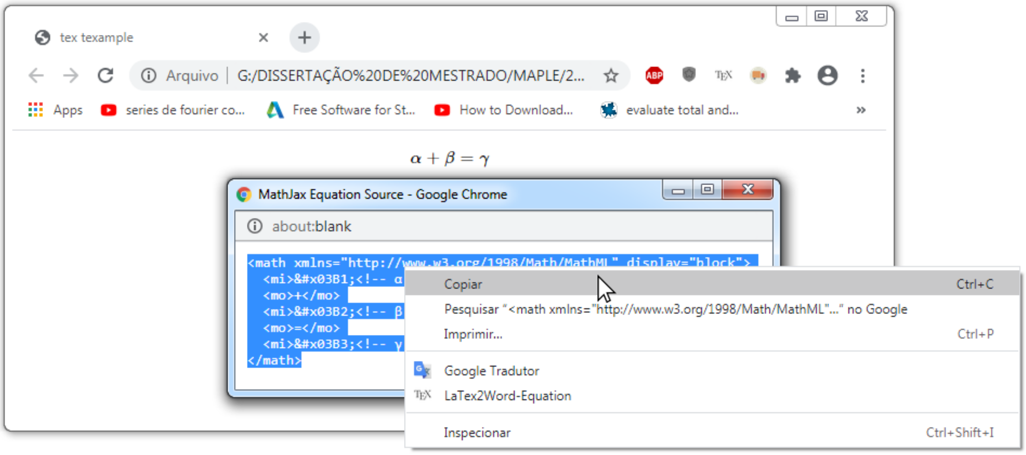
2) Abra a página no navegador. Clique com o botão direito sobre a equação, posicione o mouse em “Show Math as” e, em seguida, clique em “MathML Code”.



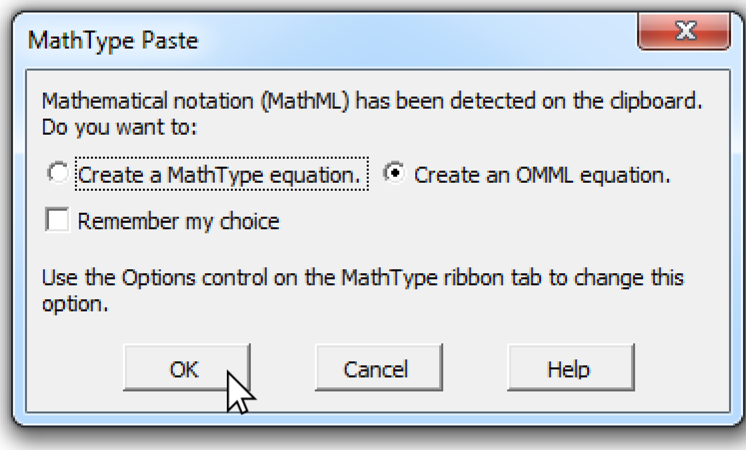
3) Uma outra página será aberta com o código em MathML.



4) Selecione tudo através do atalho Ctrl+A, clique com o botão direito do mouse e, em seguida, em “Copiar” ou digite Ctrol+C.



8) Caso tenha definido a área de transferência padrão do Word como MathML 3.0 (no namespace) em MathML or TeX – passos (8) e (9) do item 1.1 – a janela “MathType Paste” irá aparecer. Clique em OK se desejar colar a equação em OMML. Caso deseje colar em MathType, basta selecionar a opção “Create a MatyType equation” no primeiro radio button.



9) Clicando em OK, a equação será colada na linguagem OMML.