4 IMPACTO EM MATERIAIS COMPÓSITOS

A resistência ao impacto é uma das mais importantes características do material em um projeto em que se queira prever as possibilidades de fratura prematura (Marshall et al., 1973). Entretanto essa é uma das propriedades menos compreendidas e estudadas em materiais compósitos. Este fato pode ser explicado em parte por essa propriedade não ser muito bem definida. Alguns autores (Martinez et al., 1993) atestam mesmo que o impacto não é uma propriedade fundamental do material, e depende, entre outros fatores, da temperatura, do tipo e geometria do ensaio assim como da microestrutura e da orientação do material.

De acordo com N.L. Hancox (Hancox, 2000) a resistência ao impacto pode ser definida como a aplicação repentina de uma força de impulso, em um volume limitado de um material ou parte de uma estrutura. Já de acordo com Abrate (Abrate, 1998) a resistência ao impacto é definida como o estudo do dano induzido pelo impacto de um objeto em um determinado material e os fatores que afetam o impacto. Neste trabalho o impacto é definido como a aplicação repentina de uma carga a qual leva o material a fratura.

O impacto é categorizado em de baixa e de alta velocidade (e algumas vezes em de hipervelocidade), entretanto não existe uma transição muito clara entre estas categorias e alguns autores discordam destas definições (Richardson et al., 1996). Sjoblom et al. (1988) definem impacto de baixa velocidade como eventos que podem ser tratados como quase-estáticos. O limite superior pode variar de 1 m/s a dezenas de m/s dependendo da rigidez do impactador. Impactos de alta velocidade são dominados por propagação de uma onda de tensão através do material, onde a estrutura não dispõe de um tempo de resposta, sendo então submetida a um dano local. Já de acordo com Abrate (2001), impactos de baixa velocidade ocorrem quando a velocidade do impactador é inferior a 100 m/s e para impactos de hipervelocidade, a velocidade é superior a 1 km/s. Cantwell et al. (1991) caracterizam o impacto de baixa velocidade como impactos com pode ser classificado de acordo com o dano ocorrido no material. Robinson e Davies (1992) definem impacto de baixa velocidade como sendo aquele no qual as ondas de tensão, que se propagam através da espessura, não têm comportamento significativo na distribuição de tensões e sugere um modelo simples de transição para alta velocidade. Uma zona cilíndrica embaixo do impactador é submetida a uma deformação uniforme, enquanto a onda de tensão se propaga através da placa, resultando em uma deformação de compressão apresentada pela equação 4.1:

$$\varepsilon_c = \frac{\text{velocidade de impacto}}{\text{velocidade do som no material}}$$
(4.1)

Para falhas causadas por deformações entre 0,5 e 1%, é gerada uma transição para eventos dominados por onda de tensão entre 10 e 20 m/s para compósitos de epóxi.

De acordo com Abrate (1988), outros pesquisadores consideram que impactos de alta velocidade ocorrem quando a deformação da estrutura é localizada em uma pequena zona ao redor da área de contato na duração do mesmo. Impacto de baixa velocidade se refere a situações onde, durante o contato, a estrutura como um todo se deforma enquanto ondas se propagam ao limite da estrutura e são refletidas, ocorrendo este procedimento várias vezes.

4.1. Tipos de ensaio

Durante a primeira metade do século XX, um metalúrgico chamado Izod inventou um tipo de ensaio de impacto para se determinar a capacidade de usar alguns metais como ferramentas de corte. O teste envolvia um pêndulo com massa conhecida o qual impactava o corpo-de-prova que estava engastado em posição vertical. Alguns anos mais tarde outro metalurgista chamado Charpy efetuou uma pequena modificação neste ensaio, orientando o corpo-de-prova em uma posição horizontal. A diferença entre os dois ensaios pode ser vista na figura 4.1. Esses tipos de ensaio pendulares provaram ser muito úteis, produzindo dados confiáveis durante a II Guerra Mundial e até hoje em dia. A partir dos anos 70 começaram a ser utilizados testes com velocidades e energias de impacto mais



Figura 4.1 – Diferença entre ensaio de impacto (a) Charpy e (b) Izod.

elevadas através de ensaios de queda de peso. De fato, máquinas de impacto de queda de peso passaram a ser populares, porém aplicações de impacto com velocidades mais altas se tornaram cada vez mais necessárias com o avanço da tecnologia, principalmente da aeronáutica. Foram então desenvolvidos ensaios de impacto balístico no qual pode se atingir altas velocidades e simular, por exemplo, o impacto de aves em aviões.

Até o presente momento não existem normas aceitáveis para ensaio de impacto em materiais compósitos. Assim sendo, existe uma grande variedade de procedimentos de ensaios e geometrias de corpos-de-prova. Técnicas de ensaio na qual se utiliza pêndulo como Charpy e Izod necessitam de geometrias que não são representativas das estruturas, sendo apenas adequadas para uma estimativa da resistência ao impacto em compósitos. Estes métodos, porém, são amplamente empregados para se comparar o comportamento ao impacto de materiais. Já ensaios de queda de peso e ensaios balísticos são mais representativos, pois nestes ensaios podem ser utilização. Mais recentemente máquinas hidráulicas têm sido utilizadas para se determinar a resposta de materiais compósitos em altas taxas de deformação. Embora mais caros que os ensaios convencionais, os ensaios usando estas máquinas são ideais para a análise da dependência de propriedades básicas dos materiais em função da taxa de deformação.

4.1.1. Impacto de baixa velocidade

4.1.1.1. Charpy

Vários dos primeiros ensaios de impacto em materiais compósitos foram realizados utilizando-se o ensaio de Impacto Charpy (figura 4.2), o qual foi desenvolvido originariamente para ensaios em metais. A razão dessa escolha foi devido ao fato do pêndulo Charpy ser ao mesmo tempo simples de se usar e poder ser instrumentado, e assim gerar informações sobre absorção e dissipação de energia nos compósitos.



Figura 4.2 – Configuração do ensaio de impacto Charpy.

O corpo-de-prova para o ensaio de Charpy é geralmente uma viga de espessura considerável, algumas vezes contendo um entalhe no centro. O corpode-prova é posicionado em um plano horizontal com dois apoios, sendo impactado por um pêndulo, conforme mostra a figura 4.2.

O ensaio de impacto Charpy apresenta algumas desvantagens como o fato da curva força x tempo conter oscilações harmônicas devidas à resposta natural do impactador (Cantwell et al., 1991). De acordo com Macke e Quenisset (1990), essas oscilações são atribuídas a efeitos de inércia, que dependem da natureza do material (rigidez e densidade). Também de acordo com Suaris e Shah (1981,1983), que estudaram essas oscilações em compósitos cimentícios, as mesmas são geradas por efeitos de inércia.

4.1.1.2. Izod

O procedimento para o teste de impacto Izod é bastante similar ao Charpy conforme pode ser verificado nas figuras 4.2 e 4.3.



Figura 4.3 – Equipamento para ensaio de impacto Izod.

A única diferença entre os dois é a condição de apoio, como pode ser verificada na figura 4.3 e 4.4 e o formato do martelo. No ensaio Izod o corpo de prova é engastado na vertical como uma viga em balanço. Este teste apresenta limitações similares ao Charpy (Cantwell et al., 1991).



Corpo-de-prova

Figura 4.4 – Detalhe do posicionamento do corpo-de-prova no ensaio de impacto Izod.

4.1.1.3. Queda de peso

Neste tipo de ensaio um peso desprende-se de uma altura pré-determinada e atinge um corpo-de-prova em um plano horizontal. Em geral este evento de impacto não causa a destruição completa do corpo-de-prova, ao invés disso o peso ricocheteia possibilitando assim a determinação de uma energia residual. A velocidade de impacto pode ser obtida através de equações de movimento ou através do uso de sensores ópticos localizados acima do corpo-de-prova. Geralmente, o impactador é instrumentado possibilitando a obtenção da curva força x tempo e também pode haver um transdutor para a determinação da dissipação de energia. A principal vantagem deste teste em relação ao impacto Charpy e ao Izod é devido ao fato de se poder utilizar uma maior variedade de geometrias, proporcionando então o teste de componentes mais complexos.



Figura 4.5 – Equipamento para ensaio de queda de peso instrumentado.

4.1.1.4. Máquinas hidráulicas

Há alguns anos, pesquisadores utilizam-se dessa técnica para caracterizar a deformação e modos de falha de materiais em altas taxas de deformação. O histórico de deformação do corpo-de-prova pode ser medido colando-se extensômetros ou através de transdutores ópticos. Se um extensômetro ou outro dispositivo de medida de deformação é colado ao corpo-de-prova, a sensibilidade à taxa de deformação do adesivo deve ser levada em conta. A vantagem desse teste é que o mesmo permite a determinação de propriedades básicas do material como resistência à tração, módulo de elasticidade e tenacidade à fratura interlaminar, sem efeitos de contato associados à queda de peso.

4.1.2. Impacto de alta velocidade

4.1.2.1. Barra Hopkinson

Esta técnica é parecida à utilizada nas máquinas hidráulicas no sentido em que a mesma também permite a determinação de propriedades básicas dos materiais como função da taxa de deformação. O esquema de ensaio pode ser visto na figura 4.6.

Arma de



Figura 4.6 – Esquema de teste da Barra Hopkinson. (Kaiser, 1998)

Diferentes tipos de Barra Hopkinson são utilizadas como: a barra de compressão, a Barra Hopkinson com carregamento de soco, a barra de tração e Barra Hopkinson para testes de cisalhamento. Uma foto de um ensaio da Barra Hopkinson, que segue o modelo da figura 4.6 pode ser vista na figura 4.7.

Arma de gás

Barra de impacto



Figura 4.7 – Teste utilizando a Barra Hopkinson. (Kaiser, 1998).

4.1.2.2. Impacto balístico

Teste de impacto atingindo taxas de deformações balísticas podem ser feitos através de armas de pressão a gás como a mostrada na figura 4.8. Normalmente um gás como o nitrogênio alimenta uma câmara localizada no final de um tubo. O gás é restringido por um diafragma plástico. Quando este atinge um valor pré-determinado o diafragma é queimado, acelerando o projétil em direção ao alvo, ou seja, ao corpo-de-prova. A velocidade de impacto pode ser determinada utilizando-se sensores ópticos. Geralmente o teste não é completamente destrutivo porém freqüentemente resulta em um dano de larga escala ou perfuração do corpo-de-prova. Até recentemente esta técnica tinha a desvantagem de poucas informações poderem ser obtidas através deste ensaio. Porém, já existem armas de gás instrumentadas proporcionando a obtenção de gráficos força x deslocamento e assim possibilitando uma análise mais detalhada do evento de impacto. Armas de gás podem ser usadas para testar grandes estruturas sendo bastante úteis para a determinação de respostas ao impacto em alta velocidade de materiais compósitos.



Figura 4.8 – Aparato utilizado em um teste de impacto balístico. (Larsson e Svensson, 2002)

Na literatura existem várias descrições sobre os diversos tipos de ensaio de impacto. A seguir, no quadro 4.1, são relacionados os diferentes autores com os tipos de impacto descritos em seus respectivos trabalhos.

Quadro 4.1 – Artigos con	n descrição de	e aparato de	impacto.
--------------------------	----------------	--------------	----------

Tipo	Referência		Tipo	Referência	
	Arslan (1995)	Collombet		Gopalaratnam	Yeung e
		(1998)		e Shah (1986)	Broutman
					(1978)
	Server (1978)	Ramsteiner		Sjoblom e	Vincent
		(1999)		Harness	(1973)
Queda de			Pêndulo	(1988)	
peso	Suaris e Shah			Marshall et al.	Cheon et
	(1983)			(1973)	al. (1999)
	Mindess e Yan	Adams et		Wolstenholme	Mills e
	(1993)	al. (1990)		(1962)	Zhang
					(1989)

Tipo	Referência		Tipo	Referência	
	Goldsmith	Hsieh et al.	Impacto	Connell	Mouritz
	et al.(1995)	(1992)	por cargas	(1999)	(2001)
			explosivas		
	Tarim et al.	Iremonger e		Banthia et	
	(2002)	Went		al. (1996)	
		(1996)	Impacto		Tormala et
	DeLuca et	Larsson e	por tração	Chou et	al. (1981)
Impacto	al. (1998)	Svensson		al.(1973)	
balístico		(2002)			
	Starrat et al.	Lamongtane			
	(2000)	et al. (2001)			
	Hou et al.	Morye et al.			
	(2001)	(2000)			
	Okafor et	Cox et al.			
	al. (2001)	(2000)			

4.2. Normas de impacto

Embora não existam normas para todos os tipos de ensaios de impacto e para todos os materiais, já existem algumas normas e recomendações publicadas para impacto. Uma vez que a geometria do material influencia no resultado do teste como já foi provado em alguns materiais (Bader e Ellis, 1974) a normalização deste tipo de ensaio é de grande importância para que se possa comparar resultados de maneira correta. Algumas normas e recomendações para ensaios de impacto estão mostradas no quadro 4.2:

Normas e	Tipo de impacto	Material
Recomendações		
Rilem Technical	Charpy	Compósitos
Committee 49		cimentícios
TFR		reforçados por
(1984)		fibras.
ASTM D1037	Queda de peso	Fibra à base de
(1996)		madeira e painéis
ISO 180	Izod	Plásticos
(1993)		
ACI Committe	Queda de peso	Concreto reforçado
544		por fibras.
(1988)		
ASTM D256	Charpy	Plásticos.
(1978)		

Quadro 4.2- Normas de testes de Impacto.

4.3. Leis de contato

Deformações locais nas regiões de contato devem ser levadas em conta em análises de impacto para se prever de forma acurada o histórico das forças de contato. A identação, definida como a diferença entre o deslocamento do impactador e a da face oposta do corpo-de-prova, pode ser da mesma ordem ou maior que o deslocamento total do corpo-de-prova (Abrate, 1988). Este fenômeno deve ser incorporado ao processo de impacto, pois a energia necessária para se produzir esta deformação local pode ser uma parte apreciável da energia cinética inicial (Goldsmith, 1960). O impactador e o corpo-de-prova podem ser considerados como dois sólidos em contato e o problema então pode ser considerado como um contato dinâmico. Entretanto, esta abordagem é computacionalmente dispendiosa e não é capaz de descrever o efeito da deformação permanente e o dano local no processo de descarregamento. A fase de descarregamento no processo de identação pode ser modelada usando apenas leis de contato determinadas experimentalmente. Para se prever o histórico da força de contato e a deformação total do corpo-de-prova não é necessário que se faça um modelo detalhado da região de contato. Apesar do impacto ser um evento altamente dinâmico no qual vários modos de vibração do corpo-de-prova são excitados, leis de contato estaticamente determinadas podem ser usadas na análise de impacto dinâmico em impactos de baixa velocidade. Isto ocorre pois, a taxa de deformação e os efeitos de propagação das ondas podem ser negligenciados.

A identação é independente da deflexão global do corpo-de-prova. Quando a área de contato é grande, a deflexão global do corpo-de-prova afeta a distribuição de tensão em baixo do impactador, esta interação deve ser levada em conta de forma precisa.

No anexo A deste trabalho é detalhada a Lei de contato de Hertz.

4.4. Métodos para o cálculo da energia de impacto

De acordo com Hancox (2000) existem 3 abordagens:

1 - Avaliar a energia de deformação armazenada

Se um corpo está submetido a tensões de tração, compressão, flexão ou cisalhamento um método simples de resistência dos materiais pode ser utilizado para o cálculo da energia de deformação armazenada. A área sob a curva tensão deformação, até uma deformação ɛ, é igual a energia U armazenada pelo corpo:

$$U = \int_{0}^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \tag{4.2}$$

Se o material obedece à lei de Hooke, $\sigma = E\varepsilon$, a energia por unidade de volume será, então:

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2} \tag{4.3}$$

Uma expressão similar é aplicada para a energia absorvida no cisalhamento por unidade de volume:

$$U = \frac{\tau^2}{2G} \tag{4.4}$$

As seguintes expressões servem para o cálculo de energia de deformação em uma viga de comprimento l, altura d e largura b:

$$U_t, U_c = \frac{\sigma^2 b dl}{2E}$$
 (tração, compressão) (4.5)

$$U_{bc} = \frac{1}{9}x \frac{\sigma^2 b dl}{2E}$$
 (viga em balanço, viga com carregamento em 3 pontos)

$$U_s = \frac{4}{15} x \frac{\tau^2 b dl}{G} \text{ (cisalhamento, carregamento em 3 pontos)}$$
(4.7)

Outra forma de se utilizar a abordagem de energia de deformação em corpos de prova de área constante, porém de espessura, t, diferente é considerar :

$$U \propto \frac{\sigma^2 t}{2E} \tag{4.8}$$

Se a fibra, com fração volumétrica V_f , é a que mais contribui para a resistência e módulo então a expressão anterior se torna:

$$U \propto V_f t \tag{4.9}$$

2 - Micromecânica

Nesta abordagem a energia absorvida pelo compósito, U, é calculada através do somatório da energia consumida por vários mecanismos de falha. Estes mecanismos incluem:

Falha da fibra, U_{f.}

Falha múltipla da fibra, U_{mf.}

Falha múltipla da matriz, U_{mm.}

Arrancamento da fibra através de uma superfície de falha, U_{p.}

Relaxação da fibra e redistribuição de tensão para a matriz, Ur.

Fissuração da matriz, U_{m.}

Descolamento fibra/matriz, Ud.

A energia total de fratura é dada pela equação:

$$U_{tot} = U_f + U_m + U_d + U_p + U_r + U_{mf} + U_{mm}$$
(4.10)

Expressões típicas para o cálculo de U_d, U_r e U_p são:

$$U_d = \frac{V_f \sigma_f^2 y}{2E_f} \tag{4.11}$$

$$U_{\rm r} = \frac{V_{\rm f} \sigma_{\rm f}^2 L_{\rm c}}{3E_{\rm f}}$$
(4.12)

$$U_{p} = \frac{V_{f}\sigma_{f}L_{c}}{12} = \frac{V_{f}\sigma_{f}^{2}d}{24\tau}$$
(4.13)

onde y é o comprimento de descolamento da fibra, V_f é a fração volumétrica de fibras, σ_f a resistência à tração da fibra, τ é a resistência cisalhante interfacial, d o diâmetro da fibra e L_c o comprimento crítico de transferência de tensão.

Uma dificuldade no uso destas equações é a obtenção de informações realísticas para resistência ao descolamento fibra-matriz e a estimativa da tensão de cisalhamento na interface fibra-matriz quando ocorre arrancamento da fibra. Outras complicações podem aparecer se os modelos são aplicados a compósitos laminados ou estruturas reforçadas com fibras distribuídas aleatoriamente.

3 - Mecânica da fratura linear elástica

O propósito da mecânica da fratura é o de identificar critérios de fratura como a energia de fratura, G_{Ic} , e a tenacidade à fratura, K_{Ic} , os quais são independentes da geometria do corpo-de-prova (Kinloch, 1987). Os valores destes parâmetros ajudam a desenvolver um melhor entendimento do processo da fratura e são um benefício considerável nas áreas de formulação e seleção de materiais e no projeto de engenharia. Estes parâmetros são determinados pelas equações a seguir:

$$G_{1c} = \frac{U_c}{Bw\phi} = \frac{U_t - U_k}{Bw\phi}$$
(4.14)

onde,

B = espessuraw = largura

 ϕ = fator de forma o qual depende do comprimento da fissura

$$\phi = \frac{C}{\partial C / \partial (a / w)}$$

C = Compliância do material = deslocamento/carga

a = comprimento da trinca

$$U_t = energia total$$

U_k = energia cinética

U_c = energia elástica

$$K_{1c} = y\sigma_c\sqrt{a} = y\frac{3F_cL}{2Bw^2}\sqrt{a}$$
(4.15)

F_c = carrega máxima

y = fator de forma, o qual depende do comprimento da trinca e para um carregamento em três pontos é dado por:

$$y = \frac{(1,99 - \{a / w(1 - a / w)[2,15 - 3,93a / w + 2,7(a / w)^{2}]\})}{(1 + 2a / w)(1 - a / w)^{3/2}}$$

Os valores de F_c são derivados diretamente das curvas experimentais enquanto que os valores de U_c (Energia elástica) e δ_c (deslocamento) são obtidos através da integração de curvas experimentais seguindo as seguintes equações:

$$U_{c} = \int_{0}^{t_{c}} F dt \left(V_{0} - \frac{0}{2M} \right)$$
(4.16)

$$\delta_{c} = V_{0}t_{c} - \frac{1}{M} \int_{0}^{t_{c}} (\int_{0}^{t_{c}} Fdt) dt$$
(4.17)

Onde,

 V_0 = velocidade inicial M = massa do martelo t_c = tempo para fratura

Os valores de G_{Ic} e K_{Ic} podem ser relacionados através do módulo do material para deformação plana:

$$K_{Ic}^{2} = \frac{EG_{Ic}}{(1 - v^{2})}$$
(4.18)

O módulo de elasticidade do material pode ser determinado através da compliância, pela equação:

$$E = \frac{1}{BC} \{19,12 + 24[a / w / (1 - a / w)]^{2} x[5,58 - 19,57(a / w) + 36,82(a / w)^{2} - 34,95(a / w)^{3} + 12,77(a / w)^{4}]\}$$
(4.19)

4.5. Efeitos dinâmicos do impacto Charpy

Os equipamentos instrumentados de impacto têm os captadores de força localizados na cabeça do pêndulo conforme é mostrado na figura 4.9. As forças registradas são, assim, as forças que atuam sobre o pêndulo, e a energia calculada

a partir dessas forças mediante o modelo estático é a energia perdida pelo pêndulo.



Figura 4.9 – Detalhe do captador de força do martelo utilizado no ensaio de impacto Charpy.

É errado considerar que as forças medidas no pêndulo são as mesmas que atuam sobre o corpo-de-prova e, assim, os valores de energia calculados correspondem a energia ganha pelo corpo-de-prova. Em velocidades relativamente baixas de impacto, a diferença entre os valores medidos e os que atuam sobre o corpo-de-prova são desprezíveis, porém à medida que a velocidade do pêndulo aumenta, a diferença pode ser considerável.

A natureza dinâmica dos ensaios de impacto no qual se utilizam pêndulos, como o impacto Charpy e Izod, provoca vibrações nos corpos-de-prova. Devido a essas vibrações, os corpos-de-prova podem se soltar dos apoios e como os captadores de força estão colocados na cabeça do pêndulo, é registrada e gerada uma curva de força em função do tempo oscilante, a qual pode conter inclusive vários zeros.

Quando a magnitude dos efeitos dinâmicos é pequena, existe um estado quase-estático e dessa forma pode-se aplicar a análise estática, porém à medida que os efeitos dinâmicos aumentam, as forças e energias que existem sobre o corpo-de-prova são diferentes das registradas. Neste caso o fenômeno deve ser analisado dinamicamente. Para isso um modelo dinâmico deve ser constituído para o tipo de ensaio em questão. No próximo item é mostrado um modelo dinâmico de dois graus de liberdade para um ensaio de Impacto Charpy utilizado por Williams et al.,(1987).

2.5.1 - Modelagem dinâmica

Análise de impacto usando modelo massa-mola com sistema de dois graus de liberdade. O modelo utilizado por Williams et al., (1987) foi idealizado para a geometria do ensaio de impacto Charpy. Este é modelado com uma mola de rigidez k_2 e massa equivalente "m", calculada igualando-se a energia cinética atuando no ponto de carga a "m". Para essa geometria a massa equivalente é igual a $\frac{17}{35}$ da massa do corpo-de-prova. Um fator vital é a rigidez de contato k_1 , o qual controla a dinâmica do sistema. Na realidade este parâmetro seria não linear, porém para o caso do contato de um cilindro finito em um plano, pode ser considerado linear. Esta rigidez pode ser estimada estaticamente ou dinamicamente e um fator de amortecimento pode também ser incluído. O modelo final é mostrado na figura 4.10, onde o deslocamento da massa é "u" e a massa "m".

O modelo de Williams permite predizer que a magnitude dos efeitos dinâmicos será reduzida ao diminuir a constante dinâmica dos contatos. Isso pode ser conseguido, diminuindo a velocidade ou colocando uma interface elastomérica entre o corpo-de-prova e o pêndulo.



Figura 4.10 – Modelo dinâmico para o teste de impacto Charpy.

O equacionamento do modelo é dado abaixo:

Equação de movimento:

$$m\ddot{u} + (k_1 + k_2)u = k_1 v_t \tag{4.20}$$

Condições iniciais:

$$u = \dot{u} = 0$$
, quando t = 0 (4.21)

Resultando assim em:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{k}_1}{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}\right) \mathbf{v}_t \left(\mathbf{t} - \frac{\operatorname{sen} \,\omega \mathbf{t}}{\omega}\right) \tag{4.22}$$

Onde,

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$
 freqüência natural do sistema em rad/s

Força de contato:

$$P_1 = k_1(v_t - u) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right) k_2 \frac{v_t}{\omega} (x + \alpha \operatorname{sen} x)$$
(4.23)

Onde,

$$\alpha = \frac{k_1}{k_2}$$
$$x = \omega t$$

Força no corpo-de-prova:

$$P_2 = k_2 u = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) k_2 \frac{v_t}{\omega} (x - \operatorname{sen} x)$$
(4.24)

Energia perdida pelo pêndulo:

$$U_{1} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) k_{2} \left(\frac{v_{t}}{\omega}\right)^{2} \left[\frac{x^{2}}{2} - \alpha(\cos x - 1)\right]$$
(4.25)

Energia ganha pelo corpo-de-prova:

$$U_{2} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) k_{2} \left(\frac{v_{t}}{\omega}\right)^{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) (x - \operatorname{sen} x)^{2}\right]$$
(4.26)