

## 4

### Análise de Antenas pelo Método FE-BI

O problema de espalhamento e transmissão através de fendas é de interesse em diversas aplicações, incluindo aquelas associadas ao controle de seção reta de radar (RCS), interferências eletromagnéticas, penetração de pulsos eletromagnéticos (EMP), projetos de antenas tipo fenda e casamentos através de fendas em dispositivos de microondas.

A seguir, as propriedades de radiação de uma antena espiral que utiliza como elementos radiadores, fendas, serão analisadas através do método descrito no item 3.1.3., o método FE-BI.

#### 4.1.

##### Descrição da Antena Espiral Tipo Fenda

A antena utilizada foi uma antena espiral de Arquimedes tipo fenda apoiada por uma cavidade, como mostrada na figura 4.1.

A geometria da antena espiral em discussão é aquela de uma Espiral arquimediana que pode ser matematicamente descrita pela equação (4.1):

$$\rho = a\phi + b \quad (4.1)$$

onde  $\rho$  é a distância radial da origem (cm),  $a$  é taxa de crescimento da espiral (cm/radianos),  $\phi$  é a posição angular (radianos), e  $b$  é o raio inicial da espira (cm).



Figura 4.1 – Exemplo de antena espiral de Arquimedes tipo fenda.

Para uma espiral completamente descarregada (dielétrico ar), o maior diâmetro,  $D_{\max}$ , utilizado para as fendas (espiral) deve ser da ordem de  $\frac{\lambda_{\min}}{\pi}$ , onde  $\lambda_{\min}$  é o comprimento de onda na menor frequência de operação.

Já para espirais em substratos dielétricos,  $D_{\max}$  é escalonado pelo fator  $(\epsilon_{\text{eff}})^{1/2}$ , onde  $\epsilon_{\text{eff}}$  é uma constante efetiva dielétrica que leva em consideração o substrato dielétrico, a geometria da fenda e o casamento da abertura.

O diâmetro da cavidade refletora deve ser escolhido de maneira a acomodar a fenda. Sua altura é determinada de acordo com a máxima frequência de operação, devendo ser da ordem de  $\lambda_{\max}/4$ .

## 4.2. Formulação Geral

Considerando o problema de uma cavidade terminada por um plano de terra, e relembando o sistema de equações presente no item 3.1.3.1:

$$\sum_{e=1}^M [A^e] \{E_j^e\} - k_0^2 \sum_{e=1}^M [B^e] \{E_j^e\} - jk_0 Z_0 \sum_{e=1}^M [C^e] \{E_j^e\} = -\{\bar{f}^{\text{int}}\} \quad (3.28)$$

onde

$$A_{ij}^e = \int_{V^e} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \bar{W}_i^e) \cdot (\nabla \times \bar{W}_j^e) dv \quad (3.29 \text{ a})$$

$$B_{ij}^e = \int_{V^e} \epsilon_r \bar{W}_i^e \cdot \bar{W}_j^e dv \quad (3.29 \text{ b})$$

$$C_{ij}^e = \int_S \bar{M}_i \cdot \bar{H}^{\text{ext}} (\bar{M}_j) dS \quad (3.29 \text{ c})$$

É importante notar que no caso estudado,  $\mu_r$ , permeabilidade relativa, e  $\epsilon_r$ , permissividade relativa, são iguais à unidade, e que no problema inicial, considerar-se-á  $\bar{f}^{\text{int}}$  como uma fonte de tensão igual a área do elemento que se encontra na origem, no caso um quadrilátero.

Pelas equações (3.29), é possível encontrar-se os coeficientes  $A_{ij}^e$ ,  $B_{ij}^e$  e  $C_{ij}^e$ . Assim, substituindo-os na equação (3.28), soluciona-se o problema, determinando-se as correntes magnéticas.

### 4.2.1. Região Interior

O problema na região interior consiste na determinação dos dois parâmetros  $A_{ij}^e$  e  $B_{ij}^e$ . Para isso, primeiramente é necessário a discretização da cavidade em elementos finitos, como mostrado no item 4.2.1.1:

#### 4.2.1.1. Geração da Malha

Uma malha de elementos finitos é determinada de acordo com os parâmetros geométricos da cavidade e da antena.

Observa-se que a abertura da antena é melhor discretizada em quadriláteros, já que se triângulos são utilizados, o número de incógnitas é absurdamente maior. Assim, quadriláteros são traçados primeiramente observando a largura da fenda.

A parte metálica da antena é então discretizada por triângulos. Os triângulos são formados de maneira que se assemelhem, na medida do possível, com triângulos equiláteros e para isso, na definição de cada triângulo, três dentre quatro nós são escolhidos.

Com a determinação dos elementos finitos, alguns cuidados devem ser tomados de maneira a verificar a malha formada. Primeiramente, não pode haver interseção entre as arestas dos elementos, além disso, é necessária a verificação de elementos repetidos, e também da existência de regiões vazias, ou seja, aquelas que não pertencem a elemento algum.

Com a malha bidimensional criada, determina-se a quantidade de camadas de acordo com a altura da cavidade e repete-se a malha bidimensional ao longo desta, de maneira a formar hexaedros e prismas.

É importante lembrar que a grande vantagem do método concentra-se neste caso tridimensional, onde a necessidade de memória computacional é muito grande.

Neste caso, todas as faces livres, isto é, faces na fronteira, possuem contribuição nula na integral de superfície. Isto reduz o número de incógnitas e elimina a necessidade de gerar equações para estas arestas / incógnitas que deveriam ser incluídas na solução.

#### 4.2.1.2.

##### Determinação dos Coeficientes $A_{ij}^e$ e $B_{ij}^e$

Para o caso volumétrico são as matrizes  $[A_{ij}^e]$  e  $[B_{ij}^e]$  as responsáveis pela determinação do campo na cavidade.

As matrizes são  $N \times N$  simétricas, matrizes esparsas, com  $N$  sendo o número total de arestas resultantes da subdivisão da estrutura excluindo as arestas localizadas na fronteira. Seus elementos são dados pelas eqs. (3.29 a) e (3.29 b).

Os elementos das matrizes são determinados pelas funções de base escolhidas para os elementos finitos.

Para os prismas como o ilustrado pela figura 4.2, o vetor campo elétrico dentro do elemento é uma interpolação dentre as nove incógnitas vetoriais cada uma paralela à, e constante ao longo de uma aresta particular do prisma. As funções de base utilizadas correspondentes a cada aresta ( $i$ ) são:

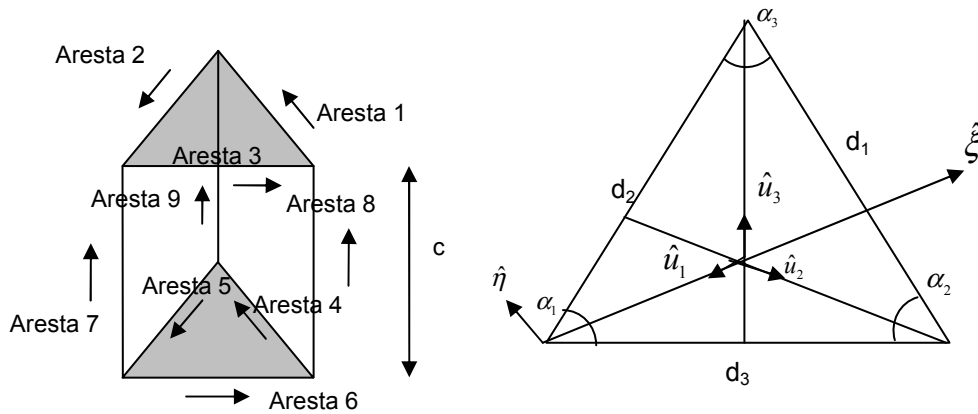


Figura 4.2 – prismas com as incógnitas baseadas em arestas. (a) Vista em perspectiva. (b) Vista superior.

Para aresta = 1:

$$\overline{W}_1^e = d_1 \left( L_2^e \frac{\hat{u}_3}{h_3} - L_3^e \frac{\hat{u}_2}{h_2} \right) (z/c) \quad (4.5 \text{ a})$$

Para aresta = 2:

$$\overline{W}_2^e = d_2 \left( L_3^e \frac{\hat{u}_1}{h_1} - L_1^e \frac{\hat{u}_3}{h_3} \right) (z/c) \quad (4.5 \text{ b})$$

Para aresta = 3:

$$\overline{W}_3^e = d_3 \left( L_1^e \frac{\hat{u}_2}{h_2} - L_2^e \frac{\hat{u}_1}{h_1} \right) (z/c) \quad (4.5 \text{ c})$$

Para aresta = 4:

$$\overline{M}_1^e = d_1 \left( L_2^e \frac{\hat{u}_3}{h_3} - L_3^e \frac{\hat{u}_2}{h_2} \right) (1 - z/c) \quad (4.5 d)$$

Para aresta = 5:

$$\overline{M}_2^e = d_2 \left( L_3^e \frac{\hat{u}_1}{h_1} - L_1^e \frac{\hat{u}_3}{h_3} \right) (1 - z/c) \quad (4.5 e)$$

Para aresta = 6:

$$\overline{M}_3^e = d_3 \left( L_1^e \frac{\hat{u}_2}{h_2} - L_2^e \frac{\hat{u}_1}{h_1} \right) (1 - z/c) \quad (4.5 f)$$

Para aresta = 7:

$$\overline{K}_1^e = \hat{z} L_1^e \quad (4.5 g)$$

Para i = 8:

$$\overline{K}_2^e = \hat{z} L_2^e \quad (4.5 h)$$

Para i = 9:

$$\overline{K}_3^e = \hat{z} L_3^e \quad (4.5 i)$$

onde:

$$c = \text{altura do prisma} \quad (4.6)$$

$$d_1 = \sqrt{d_2^2 + d_3^2 - 2d_2d_3 \cos \alpha_1} \quad (4.7)$$

$$\alpha_2 = \cos^{-1} \left( \frac{d_1^2 + d_3^2 - d_2^2}{2d_1d_3} \right) \quad (4.8)$$

$$\alpha_3 = \cos^{-1} \left( \frac{d_1^2 + d_2^2 - d_3^2}{2d_1d_2} \right) \quad (4.9)$$

$$h_1 = d_2 \sin \alpha_3 \quad (4.10)$$

$$h_2 = d_3 \sin \alpha_1 \quad (4.11)$$

$$h_3 = d_1 \sin \alpha_2 \quad (4.12)$$

$$\hat{u}_1 = -\hat{\xi} \quad (4.13)$$

$$\hat{u}_2 = \cos \alpha_3 \hat{\xi} - \sin \alpha_3 \hat{\eta} \quad (4.14)$$

$$\hat{u}_3 = \cos \alpha_2 \hat{\xi} + \sin \alpha_2 \hat{\eta} \quad (4.15)$$

$$L_1^e(\xi, \eta) = 1 - \frac{1}{h_1} \xi \quad (4.16)$$

$$L_2^e(\xi, \eta) = \frac{\cos \alpha_3}{h_2} \xi - \frac{\sin \alpha_3}{h_2} \eta \quad (4.17)$$

$$L_3^e(\xi, \eta) = \frac{\cos \alpha_2}{h_3} \xi + \frac{\sin \alpha_2}{h_3} \eta \quad (4.18)$$

onde  $\xi$  e  $\eta$  são as coordenadas definidas na figura (4.2).

Logo, substituindo estas funções  $\bar{W}_i$  nas eqs. (3.29 a) e (3.29 b), encontram-se os elementos das matrizes  $[A_{ij}^e]$  e  $[B_{ij}^e]$ , dados por:

$$A_{i,j} = \iiint_{V^e} (\nabla \times \bar{W}_i^e) \cdot (\nabla \times \bar{W}_j^e) dV$$

$$A_{i,j} = \frac{d_i d_j}{c} \left( \frac{\cos \beta_{kn}}{h_k h_n} \chi_{lm} + \frac{\cos \beta_{lm}}{h_l h_m} \chi_{kn} - \frac{\cos \beta_{km}}{h_k h_m} \chi_{ln} - \frac{\cos \beta_{ln}}{h_l h_n} \chi_{km} + \frac{2}{3} \frac{c^2 h_l d_1}{h_l h_k h_m h_n} \sin \beta_{lk} \sin \beta_{mn} \right) \quad (4.19 a)$$

$$B_{i,j} = \iiint_{V^e} (\bar{W}_i^e) \cdot (\bar{W}_j^e) dV$$

$$B_{i,j} = c \frac{d_i d_j}{3} \left( \frac{\cos \beta_{kn}}{h_k h_n} \chi_{lm} + \frac{\cos \beta_{lm}}{h_l h_m} \chi_{kn} - \frac{\cos \beta_{km}}{h_k h_m} \chi_{ln} - \frac{\cos \beta_{ln}}{h_l h_n} \chi_{km} \right) \quad (4.19 b)$$

$$A_{i,j+3} = \iiint_{V^e} (\nabla \times \bar{W}_i^e) \cdot (\nabla \times \bar{M}_j^e) dV$$

$$A_{i,j+3} = \frac{d_i d_j}{c} \left( -\frac{\cos \beta_{kn}}{h_k h_n} \chi_{lm} - \frac{\cos \beta_{lm}}{h_l h_m} \chi_{kn} + \frac{\cos \beta_{km}}{h_k h_m} \chi_{ln} + \frac{\cos \beta_{ln}}{h_l h_n} \chi_{km} + \frac{1}{3} \frac{c^2 h_l d_1}{h_l h_k h_m h_n} \sin \beta_{lk} \sin \beta_{mn} \right) \quad (4.20 a)$$

$$B_{i,j+3} = \iiint_{V^e} (\bar{W}_i^e) \cdot (\bar{M}_j^e) dV$$

$$B_{i,j+3} = \frac{c}{2} \frac{d_i d_j}{3} \left( \frac{\cos \beta_{kn}}{h_k h_n} \chi_{lm} + \frac{\cos \beta_{lm}}{h_l h_m} \chi_{kn} - \frac{\cos \beta_{km}}{h_k h_m} \chi_{ln} - \frac{\cos \beta_{ln}}{h_l h_n} \chi_{km} \right) \quad (4.20 b)$$

$$A_{i,j+6} = \iiint_{V^e} (\nabla \times \bar{W}_i^e) \cdot (\nabla \times \bar{K}_j^e) dV$$

$$A_{i,j+6} = \frac{h_l d_1}{6} d_i \left( \frac{\cos \beta_{lj}}{h_l h_j} - \frac{\cos \beta_{kj}}{h_k h_j} \right) \quad (4.21 a)$$

$$B_{i,j+6} = \iiint_{V^e} (\bar{W}_i^e) \cdot (\bar{K}_j^e) dV$$

$$B_{i,j+6} = 0 \quad (4.21 b)$$

$$A_{i+3,j+3} = \iiint_{V^e} (\nabla \times \overline{M}_i^e) \cdot (\nabla \times \overline{M}_j^e) dV$$

$$A_{i+3,j+3} = \frac{d_i d_j}{c} \left( \frac{\cos \beta_{kn}}{h_k h_n} \chi_{lm} + \frac{\cos \beta_{lm}}{h_l h_m} \chi_{kn} - \frac{\cos \beta_{km}}{h_k h_m} \chi_{ln} - \frac{\cos \beta_{ln}}{h_l h_n} \chi_{km} + \frac{2}{3} \frac{c^2 h_1 d_1}{h_l h_k h_m h_n} \sin \beta_{lk} \sin \beta_{mn} \right) \quad (4.22 a)$$

$$B_{i+3,j+3} = \iiint_{V^e} (\overline{M}_i^e) \cdot (\overline{M}_j^e) dV$$

$$B_{i+3,j+3} = c \frac{d_i d_j}{3} \left( \frac{\cos \beta_{kn}}{h_k h_n} \chi_{lm} + \frac{\cos \beta_{lm}}{h_l h_m} \chi_{kn} - \frac{\cos \beta_{km}}{h_k h_m} \chi_{ln} - \frac{\cos \beta_{ln}}{h_l h_n} \chi_{km} \right) \quad (4.22 b)$$

$$A_{i+3,j+6} = \iiint_{V^e} (\nabla \times \overline{M}_i^e) \cdot (\nabla \times \overline{K}_j^e) dV$$

$$A_{i+3,j+6} = -\frac{h_1 d_1}{6} d_i \left( \frac{\cos \beta_{lj}}{h_l h_j} - \frac{\cos \beta_{kj}}{h_k h_j} \right) \quad (4.23 a)$$

$$B_{i+3,j+6} = \iiint_{V^e} (\overline{M}_i^e) \cdot (\overline{K}_j^e) dV$$

$$B_{i+3,j+6} = 0 \quad (4.23 b)$$

$$A_{i+6,j+6} = \iiint_{V^e} (\nabla \times \overline{K}_i^e) \cdot (\nabla \times \overline{K}_j^e) dV$$

$$A_{i+6,j+6} = c \frac{h_1 d_1}{2} \left( \frac{\cos \beta_{ij}}{h_i h_j} \right) \quad (4.24 a)$$

$$B_{i+6,j+6} = \iiint_{V^e} (\overline{K}_i^e) \cdot (\overline{K}_j^e) dV$$

$$B_{i+6,j+6} = c \chi_{il} \quad (4.24 b)$$

onde:

$$\beta_{rs} = \begin{cases} 0 & , r = s \\ \alpha_r + \alpha_s & \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \chi_{rs} = \frac{h_1 d_1}{2} \left\{ w_r w_s + \frac{h_1}{3} [(\cot \alpha_3 - \cot \alpha_2)(\eta_s w_r + \eta_r w_s) + 2(\xi_s w_r + \xi_r w_s)] \right. \\ \left. + \frac{h_1^2}{12} [3 \cdot (\cot \alpha_3 - \cot \alpha_2)(\eta_s \xi_r + \eta_r \xi_s) + \right. \\ \left. 2\eta_s \eta_r (\cot^2 \alpha_3 - \cot \alpha_2 \cot \alpha_3 + \cot^2 \alpha_2) + 6\xi_r \xi_s] \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde r,s= 1, 2, 3 e  $w_r, \xi_r, \eta_r$  são dados por:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= 1, \quad \xi_1 = -\frac{1}{h_1}, \quad \eta_1 = 0 \\
 w_2 &= 0, \quad \xi_2 = \frac{\cos \alpha_3}{h_2}, \quad \eta_2 = -\frac{\sin \alpha_3}{h_2} \\
 w_3 &= 0, \quad \xi_3 = \frac{\cos \alpha_2}{h_3}, \quad \eta_3 = \frac{\sin \alpha_2}{h_3}
 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Em todas as fórmulas, os índices  $i, l, k$  e  $j, m, n$  seguem uma regra cíclica dada pela seguinte tabela 4.1:

$i$	$l$	$k$		$j$	$m$	$n$
1	2	3		1	2	3
2	3	1		2	3	1
3	1	2		3	1	2

Tabela 4.1 – Índices utilizados nas entradas das matrizes  $[A_{ij}^e]$  e  $[B_{ij}^e]$ .

É importante ressaltar que as matrizes são simétricas.

Considerando agora hexaedros como o ilustrado na figura 4.3:

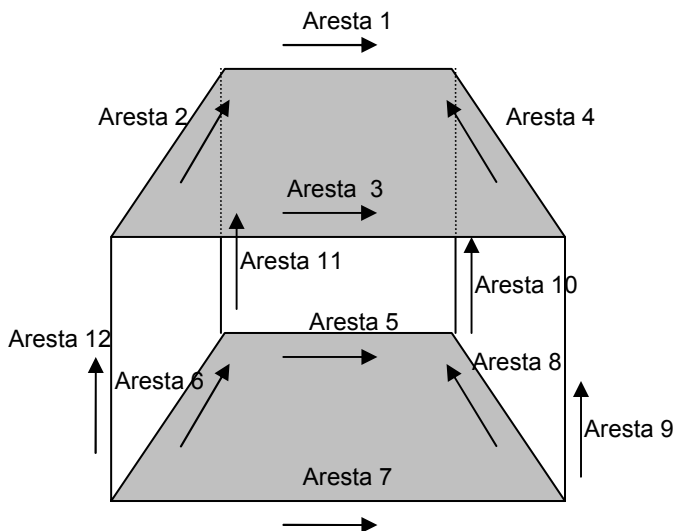


Figura 4.3 – Hexaedro com as incógnitas baseadas em arestas.

Através de uma transformação no plano  $xy$  para o plano  $\xi\eta$ , como observado pela figura 4.4, as funções de base utilizadas em cada aresta ( $i$ ), são dadas pelas equações (4.28).

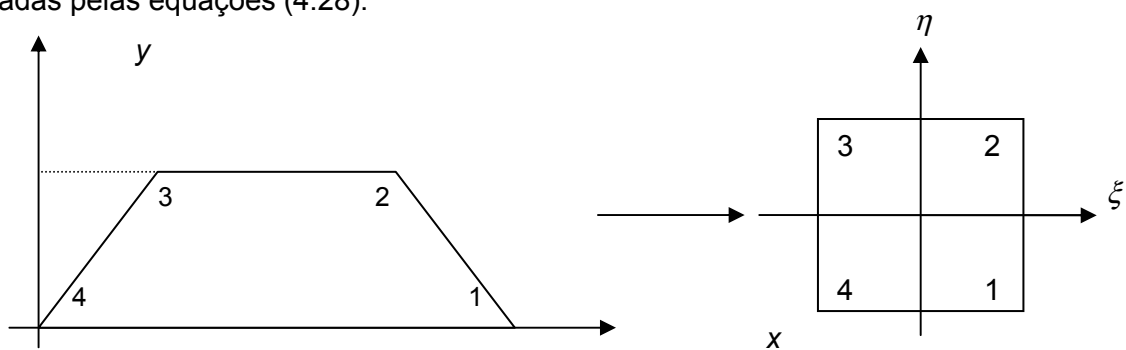


Figura 4.4 – Transformação plano  $xy$  -  $\xi\eta$ .



Para  $i = 1, 3, 5$  e  $7$ :

$$\overline{W}_i = (1 + S_\eta \eta) \left( \delta_z + S_z \frac{z}{h} \right) \frac{(b + d\eta)}{2(b + dS_\eta)} \hat{x} \quad (4.28 \text{ a})$$

Para  $i = 2, 4, 6$  e  $8$ :

$$\overline{W}_i = (1 + S_\xi \xi) \left( \delta_z + S_z \frac{z}{h} \right) \frac{(c + d\xi)\hat{x} + c'\hat{y}}{2\sqrt{(c + dS_\xi)^2 + c'^2}} \quad (4.28 \text{ b})$$

Para  $i = 9, 10, 11$  e  $12$ :

$$\overline{W}_i = \frac{(1 + S_\xi \xi)(1 + S_\eta \eta)}{4} \hat{z} \quad (4.28 \text{ c})$$

onde:

$h = \text{altura do hexaedro}$

$$S_\eta = \begin{cases} +1 & ; i = 1, 5, 10, 11 \\ -1 & ; i = 3, 7, 9, 12 \end{cases} \quad (4.29 \text{ a})$$

$$S_\xi = \begin{cases} +1 & ; i = 4, 8, 9, 10 \\ -1 & ; i = 2, 6, 11, 12 \end{cases} \quad (4.29 \text{ b})$$

$$S_z = \begin{cases} +1 & ; i = 1, 2, 3, 4 \\ -1 & ; i = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (4.29 \text{ c})$$

$$\delta_z = \begin{cases} 0 & ; i = 1, 2, 3, 4 \\ 1 & ; i = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (4.29 \text{ d})$$

$$a = \frac{x1 + x2 + x3 + x4}{4} \quad (4.29 \text{ e})$$

$$b = \frac{x1 + x2 - x3 - x4}{4} \quad (4.29 \text{ f})$$

$$c = \frac{-x1 + x2 + x3 - x4}{4} \quad (4.29 \text{ g})$$

$$d = \frac{-x1 + x2 - x3 + x4}{4} \quad (4.29 \text{ h})$$

$$a' = \frac{y1 + y2}{2} \quad (4.29 \text{ i})$$

$$c' = \frac{-y1 + y2}{2} \quad (4.29 \text{ j})$$

$$x_i, y_i = \text{coordenadas dos pontos no plano } x, y \quad (4.29 \text{ k})$$

Analogamente ao caso dos prismas, substitui-se as equações (4.28) nas equações (3.29), de forma a determinar os elementos das matrizes  $[A_{ij}^e]$  e  $[B_{ij}^e]$ :

Para  $i = 1, 3, 5$  e  $7$ ;  $j = 1, 3, 5$  e  $7$ :

$$A_{i,j} = \iint W_y^{*i} W_y^{*j} \frac{S_z^i S_z^j}{h} + W_z^{*i} W_z^{*j} \left[ \delta_z^i \delta_z^j h + (\delta_z^i S_z^j + \delta_z^j S_z^i) \frac{h}{2} + S_z^i S_z^j \frac{h}{3} \right] [c'(b + d\eta)] d\xi d\eta \quad (4.30 a)$$

$$B_{i,j} = \frac{2 \cdot c'}{2 \cdot (b + dS_\eta^i) \times 2 \cdot (b + dS_\eta^j)} \left[ \delta_z^i \delta_z^j h + (\delta_z^i S_z^j + \delta_z^j S_z^i) \frac{h}{2} + S_z^i S_z^j \frac{h}{3} \right] \left[ 2b^3 + \frac{2}{3} (3bd^2 + 3b^2 d (S_\eta^i + S_\eta^j) + b^3 (S_\eta^i S_\eta^j)) + \frac{2}{5} (d^3 (S_\eta^i + S_\eta^j) + 3bd^2 (S_\eta^i S_\eta^j)) \right] \quad (4.30 b)$$

Para i = 1, 3, 5 e 7; j = 2, 4, 6 e 8:

$$A_{i,j} = \iint W_y^{*i} W_y^{*j} \frac{S_z^i S_z^j}{h} + W_z^{*i} W_z^{*j} \left[ \delta_z^i \delta_z^j h + (\delta_z^i S_z^j + \delta_z^j S_z^i) \frac{h}{2} + S_z^i S_z^j \frac{h}{3} \right] [c'(b + d\eta)] d\xi d\eta \quad (4.31 a)$$

$$B_{i,j} = \frac{c'}{2 \cdot (b + dS_\eta^i) \times 2 \cdot [(c + dS_\epsilon^j)^2 + c'^2]^{\frac{1}{2}}} \left[ \delta_z^i \delta_z^j h + (\delta_z^i S_z^j + \delta_z^j S_z^i) \frac{h}{2} + S_z^i S_z^j \frac{h}{3} \right] \cdot [2b^2 + 2(d^2 + 2S_\eta^i bd)] [2c + 2S_\epsilon^j d] \quad (4.31 b)$$

Para i = 1, 3, 5 e 7; j = 9, 10, 11 e 12:

$$A_{i,j} = \iint W_y^{*i} W_y^{*j} S_z^i [c'(b + d\eta)] d\xi d\eta \quad (4.32 a)$$

$$B_{i,j} = 0 \quad (4.32 b)$$

Para i = 2, 4, 6 e 8; j = 2, 4, 6 e 8:

$$A_{i,j} = \iint W_x^{*i} W_x^{*j} \frac{S_z^i S_z^j}{h} + W_y^{*i} W_y^{*j} \frac{S_z^i S_z^j}{h} + W_z^{*i} W_z^{*j} \left[ \delta_z^i \delta_z^j h + (\delta_z^i S_z^j + \delta_z^j S_z^i) \frac{h}{2} + S_z^i S_z^j \frac{h}{3} \right] [c'(b + d\eta)] d\xi d\eta \quad (4.33 a)$$

$$B_{i,j} = \frac{2bc'}{2 \cdot [(c + dS_\epsilon^i)^2 + c'^2]^{\frac{1}{2}} \times 2 \cdot [(c + dS_\epsilon^j)^2 + c'^2]^{\frac{1}{2}}} \left[ \delta_z^i \delta_z^j h + (\delta_z^i S_z^j + \delta_z^j S_z^i) \frac{h}{2} + S_z^i S_z^j \frac{h}{3} \right] \left[ 2 \cdot (c^2 + c'^2) + \frac{2}{3} (d^2 + 2cd (S_\epsilon^i + S_\epsilon^j) + (c^2 + c'^2) S_\epsilon^i S_\epsilon^j) + \frac{2}{5} (d^2 S_\epsilon^i S_\epsilon^j) \right] \quad (4.33 b)$$

Para  $i = 2, 4, 6$  e  $8$ ;  $j = 9, 10, 11$  e  $12$ :

$$A_{i,j} = \iint W_x^{*i} W_x^{*j} S_z^i + W_y^{*i} W_y^{*j} S_z^i [c'(b + d\eta)] d\xi d\eta \quad (4.34 \text{ a})$$

$$B_{i,j} = 0 \quad (4.34 \text{ b})$$

Para  $i = 9, 10, 11$  e  $12$ ;  $j = 9, 10, 11$  e  $12$ :

$$A_{i,j} = \iint W_x^{*i} W_x^{*j} + W_y^{*i} W_y^{*j} [c'(b + d\eta)] d\xi d\eta \quad (4.35 \text{ a})$$

$$B_{i,j} = \frac{c'h}{4} \left[ 1 + \frac{1}{3} S_\xi^i S_\xi^j \right] \left[ b + \frac{1}{3} S_\eta^i S_\eta^j + d (S_\eta^i + S_\eta^j) \right] \quad (4.35 \text{ b})$$

onde

Para  $i = 1, 3, 5$  e  $7$ :

$$\overline{W}_y^{*i} = + \frac{(1 + S_\eta \eta) \cdot (b + d\eta)}{2 \cdot (b + dS_\eta)} \quad (4.36 \text{ a})$$

$$\overline{W}_z^{*i} = - \frac{d \cdot (1 + S_\eta \eta) + S_\eta (b + d\eta)}{c' \cdot 2 \cdot (b + dS_\eta)} \quad (4.36 \text{ b})$$

Para  $i = 2, 4, 6$  e  $8$ :

$$\overline{W}_x^{*i} = - \frac{(1 + S_\xi \xi) \cdot c'}{2 \cdot [(c + S_\xi d)^2 + c'^2]} \quad (4.36 \text{ c})$$

$$\overline{W}_y^{*i} = + \frac{(1 + S_\xi \xi) \cdot (c + d\xi)}{2 \cdot [(c + S_\xi d)^2 + c'^2]} \quad (4.36 \text{ d})$$

$$\overline{W}_z^{*i} = + \frac{c' S_\xi}{(b + d\eta) \cdot 2 \cdot [(c + S_\xi d)^2 + c'^2]} + \frac{S_\xi (c + d\xi) + d(1 + S_\xi \xi)}{2 \cdot [(c + S_\xi d)^2 + c'^2]} \cdot \frac{[bc + bd\xi + cd\eta + d^2 \xi \eta]}{c' (b + d\eta)^2} \quad (4.36 \text{ e})$$

Para  $i = 9, 10, 11$  e  $12$ :

$$\overline{W}_x^{*i} = - \frac{(1 + S_\xi \xi) \cdot S_\eta}{4c'} - \frac{(1 + S_\eta \eta) \cdot S_\xi \cdot [bc + bd\xi + cd\eta + d^2 \xi \eta]}{4c' (b + d\eta)^2} \quad (4.36 \text{ f})$$

$$\overline{W}_y^{*i} = - \frac{(1 + S_\eta \eta) \cdot S_\xi}{4 \cdot (b + d\eta)} \quad (4.36 \text{ g})$$

É importante observar que as matrizes são também simétricas e que as integrais correspondentes à matriz  $[A_{ij}^e]$  foram realizadas numericamente, ao contrário daquelas referentes à matriz  $[B_{ij}^e]$ .

### 4.2.2. Região Exterior

O problema da região exterior concentra-se na determinação dos coeficientes  $C_{ij}^e$  em cada elemento, como aquele ilustrado na figura 4.5:

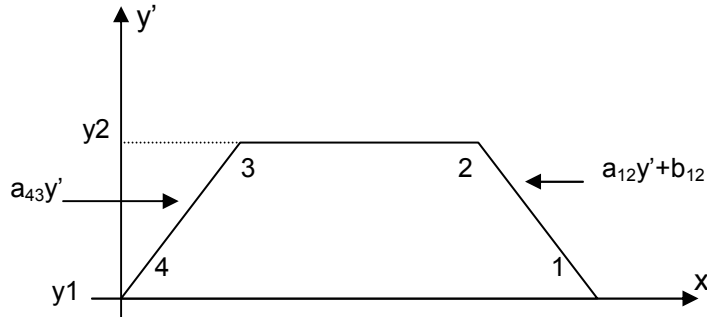


Figura 4.5 – Coordenadas locais dos quadriláteros.

As arestas de cada elemento, em um sistema de coordenadas locais, ligado ao elemento, como mostrado na figura 4.5, são dadas por:

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ y' &= y_2 \\ x' &= a_{43}y' \\ x' &= a_{12}y' + b_{12} \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde:  $a_{43}$ ,  $a_{12}$ : coeficientes angulares das retas 43 e 12

$b_{43}$ ,  $b_{12}$ : coeficientes lineares das retas 43 e 12.

Para computar-se a integral dada por (3.29c), torna-se necessário conhecer a expressão do campo magnético externo  $\overline{H}^{ext}(\overline{M})$ . Considerando-se o efeito do plano de terra, esta expressão é dada por [28]:

$$\overline{H}^{ext}(\overline{M}) = -\frac{j\omega\epsilon_r}{2\pi} \iint_{S'} \overline{M}(\overline{r}') G(\overline{r}, \overline{r}') dS' + \frac{1}{2\pi\mu} \nabla \iint_{S'} \nabla' \cdot \overline{M}(\overline{r}') G(\overline{r}, \overline{r}') dS' \quad (4.38)$$

onde:

$$G(\overline{r}, \overline{r}') = \frac{e^{-jk_r R}}{R} \quad (4.39 \text{ a})$$

$$R = |\overline{r} - \overline{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2} \quad (4.39 \text{ b})$$

Observando a equação (4.38), percebe-se que esta possui uma singularidade quando  $x \rightarrow x'$  e  $y \rightarrow y'$ , ou seja, quando o ponto de observação encontra-se na região da fonte. Desta maneira, para o cálculo das integrais indicadas nessa equação, o uso de um artifício numérico é utilizado, como o descrito no apêndice A. As expressões resultantes para os coeficientes  $C_{ij}^e$  encontram-se, também, nesse apêndice.