

## 2 Modelagem Matemática

A modelagem selecionada no presente trabalho é baseada na técnica do “*slug capturing*” no qual, usando uma aproximação Euleriana, o escoamento em padrão *slug* é predito como um resultado mecânico e automático do crescimento das instabilidades hidrodinâmicas (Issa e Woodburn, 1998; Issa e Kempf, 2003). Os padrões estratificado, *slug* e transientes são modelados com o mesmo conjunto de equações governantes (o modelo de dois fluidos, transiente unidimensional), e relações de fechamento em todas as posições da tubulação.

Na simulação, a fração volumétrica do líquido pode aumentar e eventualmente atingir a unidade, dando início à formação de um *slug*. Os *slugs* se desenvolvem, crescem, se fundem e colapsam a partir somente da solução das equações de transporte de massa e quantidade de movimento para cada fase. A única informação empírica requerida é para as relações de fechamento das forças cisalhantes líquido–parede, gás–parede e interfacial (Vernier e Delhaye, 1968; Bouré e Réocreux, 1972; Ishii, 1975; Ishii e Mishima, 1984).

O escoamento no padrão *slug* é sempre transiente. *Slugs* com diferentes comprimentos, frequências e velocidades de translação são continuamente criados e destruídos. No entanto, pode-se definir o regime de escoamento no padrão *slug* estatisticamente permanente quando as diferentes grandezas associadas ao *slug* oscilam em torno de um valor médio. Para o escoamento no padrão *slug* no regime estatisticamente permanente a condição inicial deixa de ser relevante.

### 2.1 Equações Governantes

A base do modelo de dois fluidos é a formulação de dois conjuntos de equações de conservação para o balanço de massa, quantidade de movimento e energia para cada uma das fases. A forma unidimensional do modelo é obtida através de médias na área, integrando as grandezas do escoamento sobre a seção transversal do fluxo do escoamento. Transferência de quantidade de movimento e

energia entre as paredes e os fluidos, assim como as interações dinâmicas entre as mesmas fases na interfase são adicionadas via termos fontes nas equações de transporte. Adicionalmente, relações empíricas para estes termos precisam ser fornecidas para o fechamento do conjunto de equações (Ishii e Mishima, 1984; Jones e Prosperetti, 1985). Estes últimos exercem uma influência direta na análise da mudança do padrão de escoamento, que são frequentemente atribuídos às instabilidades das interfases (Ishii, 1975; Drew, 1983; Ishii e Mishima, 1984).

O presente trabalho consiste em determinar numericamente a evolução de um escoamento estratificado em um escoamento no padrão *slug*, considerando o escoamento como isotérmico. A hipótese de escoamento isotérmico é somente por questão de simplificação. Por conseguinte as equações a serem resolvidas são as equações de conservação de massa e quantidade de movimento para cada uma das fases líquida e gasosa.

As equações de conservação para cada fase em sua forma conservativa são

$$\frac{\partial(\rho_g \alpha_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g \alpha_g u_g)}{\partial x} = -\dot{m} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho_l \alpha_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_l \alpha_l u_l)}{\partial x} = \dot{m} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho_g \alpha_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g \alpha_g u_g^2)}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$= -\alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_g \alpha_g g \sin(\beta) - \rho_g \alpha_g g \frac{\partial h}{\partial x} \cos(\beta) - \widehat{F}_{gw} - \widehat{F}_i$$

$$\frac{\partial(\rho_l \alpha_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_l \alpha_l u_l^2)}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$= -\alpha_l \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_l \alpha_l g \sin(\beta) - \rho_l \alpha_l g \frac{\partial h}{\partial x} \cos(\beta) - \widehat{F}_{lw} + \widehat{F}_i$$

sendo

$$\alpha_g + \alpha_l = 1 \quad (2.5)$$

onde os subscrito  $g$ ,  $l$ , e  $i$  referem-se às fases gasosa e líquida e à interfase

respectivamente. A coordenada axial é  $x$ , a massa específica é  $\rho$ , a fração volumétrica é  $\alpha$ , a velocidade é  $u$ , e a transferência de massa por unidade de volume entre as fases é  $\dot{m}$ . No presente trabalho não será considerada transferência de massa entre as fases por questão de simplificação, logo  $\dot{m} = 0$ . Considera-se igualdade entre a pressão interfacial, da fase líquida e da fase gasosa, sendo igual a  $P$ . A inclinação da tubulação é  $\beta$ , a altura da superfície do líquido (assumindo que a mesma é plana) sobre o fundo da tubulação é  $h$ , e a aceleração gravitacional é  $g$ . Considera-se o líquido como incompressível, enquanto que o gás é considerado compressível obedecendo a equação de estado do gás ideal.

$$\rho_g = \frac{P}{RT} \quad (2.6)$$

onde  $R$  é a constante do gás e  $T$  é a temperatura de referência do escoamento.

O terceiro termo no lado direito das eqs. (2.3) e (2.4) refere-se à pressão hidrostática no gás e líquido, respectivamente, e deve ser especificado no padrão estratificado e *slug*, que são objeto de nosso interesse. O termo  $\widehat{F}$  significa a força de fricção ou cisalhamento por unidade de volume entre cada fase e a parede, e entre as mesmas fases (na interfase), dadas pelas seguintes relações:

$$\widehat{F}_{gw} = \frac{\tau_{gw} S_g}{A} \quad \widehat{F}_{\ell w} = \frac{\tau_{\ell w} S_\ell}{A} \quad \widehat{F}_i = \frac{\tau_i S_i}{A} \quad (2.7)$$

onde  $\tau$  é o tensão de cisalhamento,  $S$  é o perímetro molhado e  $A$  é área da seção transversal da tubulação.

As relações de fechamento necessárias ao modelo de dois fluidos são para as forças de cisalhamento. A maioria dos modelos é baseada na prescrição de um fator de fricção  $f$ , onde a tensão de cisalhamento para um escoamento unidimensional é dada por:

$$\tau = \frac{1}{2} f \rho |u_r| u_r \quad (2.8)$$

O termo  $u_r$  significa a velocidade relativa entre o líquido e a parede, o gás e a parede, ou entre o gás e líquido. A massa específica do líquido é usada na

eq.(2.8), quando deseja-se determinar a tensão cisalhante no contato líquido–parede; para o gás–parede e a interfase líquido–gás a massa específica do gás é usada.

Para o cálculo do fator de fricção foram considerados os seguintes critérios:

- i) Uma correta predição das fronteiras na transição dos padrões do escoamento.
- ii) Uma boa predição das características do *slug*, como sua frequência e sua velocidade de translação.
- iii) Uma razoável faixa de concordância com relação aos dados experimentais em todas as condições do escoamento.

Sujeito a estes critérios selecionou-se os modelos descritos a seguir. Para os fatores de fricção gás–parede e interfacial, as fórmulas de Hagen-Poiseulle devem ser usadas se o escoamento for laminar ( $\mathbf{Re}_g \leq 2100$  e  $\mathbf{Re}_i \leq 2100$ ):

$$f_g = \frac{16}{\mathbf{Re}_g}, \quad f_i = \frac{16}{\mathbf{Re}_i} \quad (2.9)$$

Se o escoamento for turbulento, as correlações de Taitel e Dukler (1976) devem ser adotadas:

$$f_g = 0,046(\mathbf{Re}_g)^{-0,25}, \quad f_i = 0,046(\mathbf{Re}_i)^{-0,25} \quad (2.10)$$

Para o fator de fricção líquido–parede a correlação de Hand (1991) deve ser usada se o escoamento for laminar ( $\mathbf{Re}_l \leq 2100$ ):

$$f_l = \frac{24}{\mathbf{Re}_l^s} \quad (2.11)$$

e a correlação de Spedding e Hand (1997) se o escoamento for turbulento:

$$f_l = 0,0262 \left( \alpha_l \mathbf{Re}_l^s \right)^{-0,139} \quad (2.12)$$

onde  $\alpha_l$  é a fração volumétrica da fase líquida ou *hold-up*. Nas equações anteriores os números de Reynolds  $\mathbf{Re}_g$ ,  $\mathbf{Re}_i$  e  $\mathbf{Re}_l$  são fornecidos como:

$$\mathbf{Re}_g = \frac{4A_g u_g \rho_g}{(S_g + S_i) \mu_g}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{Re}_i = \frac{4A_g |u_g - u_l| \rho_g}{(S_g + S_i) \mu_g}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{Re}_l = \frac{4A_l u_l \rho_l}{S_l \mu_l} \quad (2.15)$$

As definições do número de Reynolds apresentadas são baseadas na hipótese de que a fase gasosa escoa num canal fechado, enquanto que a fase líquida flui num canal aberto. Adicionalmente, o número de Reynolds baseado na velocidade superficial do líquido  $\mathbf{Re}_l^s$  é fornecido pela seguinte expressão:

$$\mathbf{Re}_l^s = \frac{\rho_l U_{sl} D}{\mu_l} \quad (2.16)$$

Aqui a massa específica é  $\rho$ , a viscosidade dinâmica é  $\mu$ ,  $D$  é o diâmetro da tubulação e a velocidade superficial do líquido é  $U_{sl}$  onde:

$$U_{sl} = \alpha_l u_l \quad (2.17)$$

Para a velocidade superficial do gás se obtém uma equação análoga à anterior.

Os regimes do escoamento laminar e turbulento podem ser determinados mediante o seguinte critério (Spedding e Hand, 1997):

$$\mathbf{Re} \leq 2100 \Rightarrow \text{escoamento em regime laminar}$$

$$\mathbf{Re} > 2100 \Rightarrow \text{escoamento em regime turbulento}$$

As Figs. 2.1 e 2.2 ilustram o esquema da tubulação, com seção transversal  $A$  e diâmetro  $D$ . O líquido encontra-se inicialmente estratificado na parte inferior da tubulação. As áreas e os perímetros molhados ocupados pelo gás e pelo líquido são  $A_g$ ,  $S_g$  e  $A_l$ ,  $S_l$  respectivamente, e o largura interfacial é  $S_i$ .

A partir da geometria, pode-se demonstrar que:

$$\alpha_l = \frac{A_l}{A} \quad ; \quad \alpha_g = \frac{A_g}{A} \quad (2.18)$$

Os parâmetros geométricos da seção transversal foram calculados das seguintes relações (Spedding e Hand, 1997):

$$\alpha_g = \frac{1}{\pi} \left[ \cos^{-1} \left( \frac{\hat{h}}{2\hat{h}-1} \right) - \left( \frac{\hat{h}}{2\hat{h}-1} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{\hat{h}}{2\hat{h}-1} \right)^2} \right] \quad (2.19)$$

$$\hat{h} = \frac{D}{h} \quad ; \quad \xi = 2\hat{h} - 1 \quad (2.20)$$

$$S_g = D \cos^{-1}(\xi) \quad ; \quad S_l = \pi D - S_g \quad ; \quad S_i = D \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.21)$$

$$A_g = \frac{D}{4} [S_g - \xi S_i] \quad ; \quad A_l = \frac{\pi D^2}{4} - A_g \quad (2.22)$$

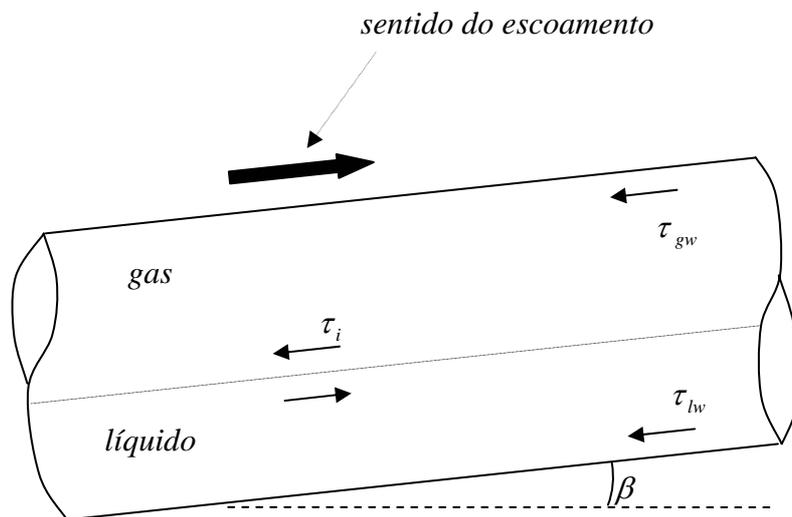


Figura 2.1 – Esquema da tubulação

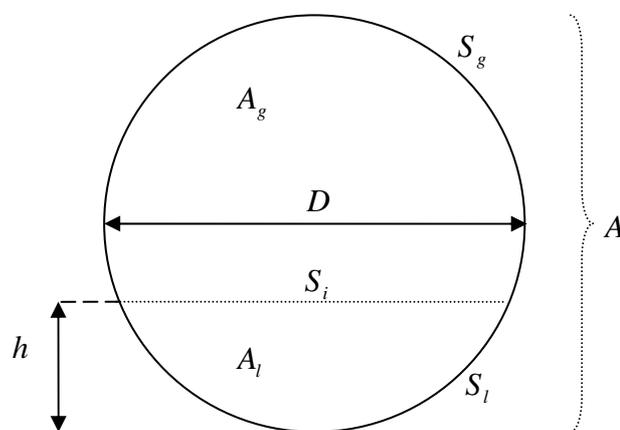


Figura 2.2 – Esquema da seção transversal da tubulação

Quando se forma um *slug*, a fração volumétrica da fase líquida atinge a unidade e a fração volumétrica da fase gasosa tende a zero. Como resultado a equação de quantidade de movimento linear para o gás, eq. (2.3) fica singular, pois a fração volumétrica gasosa multiplica ambos os lados da equação. Uma maneira de evitar esta singularidade consiste em expressar a equação de quantidade de movimento em sua forma não conservativa (Oliveira e Isaa, 2003) como se mostra a seguir:

$$\begin{aligned} & \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial t} + \rho_g u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} \\ & = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_g g \sin(\beta) - \rho_g g \frac{\partial h}{\partial x} \cos(\beta) - \frac{\widehat{F}_{gw}}{\alpha_g} - \frac{\widehat{F}_i}{\alpha_g} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \rho_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial t} + \rho_\ell u_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial x} \\ & = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_\ell g \sin(\beta) - \rho_\ell g \frac{\partial h}{\partial x} \cos(\beta) - \frac{\widehat{F}_{\ell w}}{\alpha_\ell} + \frac{\widehat{F}_i}{\alpha_\ell} \end{aligned} \quad (2.24)$$

A forma não resolve completamente o problema da singularidade mencionado, devido a presença dos termos  $\widehat{F}_{fase-w,i} / \alpha_{fase}$ . O tratamento numérico destes termos é discutido na secção 3.2.

## 2.2 Condições de Contorno e Iniciais

As condições de contorno utilizadas nos cálculos encontram-se ilustradas na Fig. 2.3. Na entrada da tubulação, a fração volumétrica da fase líquida e as taxas das vazões volumétricas das fases líquida e gasosa são especificadas. Considerou-se que não existe transferência de massa entre as fases, por mera simplificação. A pressão na saída da tubulação foi fixada com o valor de uma pressão absoluta de referência.

Como condição de estado inicial foi assumido que o escoamento se encontra no padrão estratificado, onde a fração volumétrica e as velocidades do líquido e do gás são uniformes ao longo da tubulação e, ademais, a pressão varia

linearmente ao longo da tubulação (Issa e Kempf, 2003). O gradiente de pressão inicial foi obtido da combinação das equações de quantidade de movimento, (eqs. (2.3) e (2.4)) em condições de estado estável (Spedding e Hand, 1997):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \left( \frac{\tau_{lw} S_l + \tau_{gw} S_g}{A} \right) \tag{2.25}$$

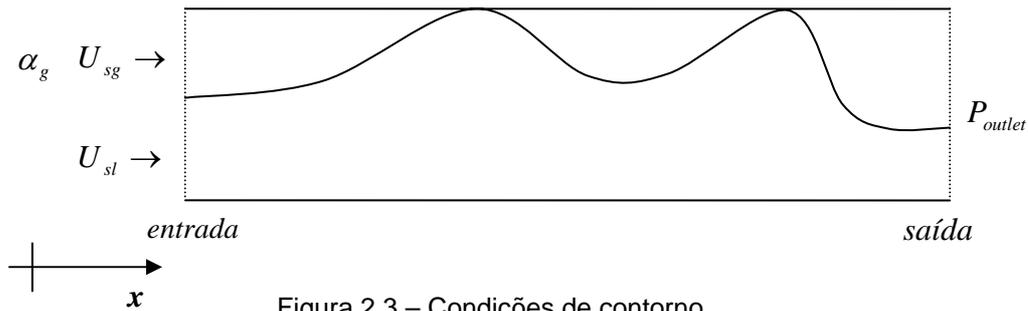


Figura 2.3 – Condições de contorno

### 2.3 Natureza das Equações e a Estabilidade do Escoamento

No escoamento bifásico podem ocorrer diferentes padrões (anular, slug, estratificado, etc.) dependendo das velocidades superficiais. Um mapa de padrão típico é ilustrado na Fig. 2.4. Observa-se que cada padrão só existe para determinadas combinações de velocidades superficiais.

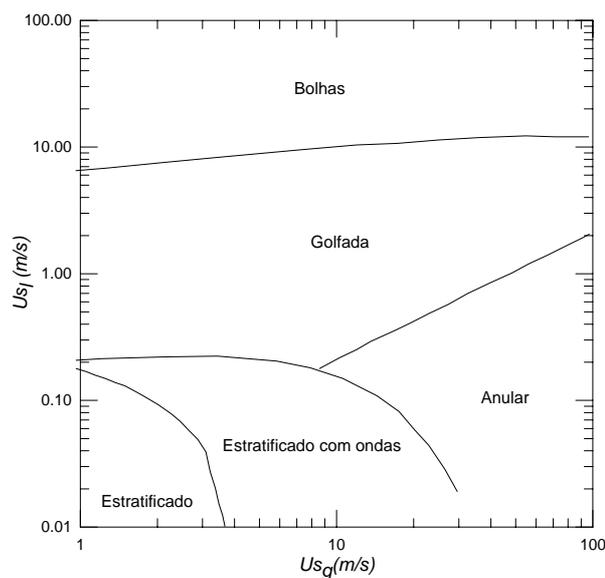


Figura 2.4 – Mapa do padrão de escoamento de Taitel & Dukler (1976).

Para o surgimento do padrão *slug* é necessário que o escoamento seja instável, adicionalmente é necessário que o problema seja *bem posto* do ponto de vista matemático. Visando identificar as condições para a obtenção do padrão *slug* uma análise de estabilidade foi realizado.

As equações do modelo de dois fluidos eqs. (2.1) a (2.4) representam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, que podem ser reescritas de uma maneira mais compacta como (Bonizzi,2003):

$$A \frac{\partial \phi}{\partial t} + B \frac{\partial \phi}{\partial x} = C \quad (2.26)$$

onde  $A$  e  $B$  são as matrizes Jacobianas de dimensão  $4 \times 4$ ,  $C$  é o vetor coluna de dimensão 4, e  $\phi$  é o vetor solução:

$$\phi = [\alpha_g, \alpha_l, u_g, u_l]^T \quad (2.27)$$

O problema de valor inicial em consideração é achar a solução do sistema (2.26) em alguma região:

$$a \leq x \leq b, \quad t \geq 0 \quad (2.28)$$

sujeito a condição inicial:

$$\phi(0, x) = G(x) \quad (2.29)$$

e ao estabelecimento dos valores de  $\phi$  ou de suas derivadas nas fronteiras  $x = a$  e  $x = b$ . O sistema (2.26) é considerado ser *bem posto* quando as equações com as apropriadas condições de contorno e valores iniciais admitem uma única solução, e esta solução depende somente dos dados iniciais e das condições de contorno. A caracterização de um sistema como sendo um sistema *bem posto* é uma propriedade do processo de modelagem e não uma propriedade específica do próprio escoamento.

As características matemáticas do conjunto de equações diferenciais parciais, eq. (2.26), são fornecidas pela solução do seguinte sistema de valor próprio:

$$\det[B - \lambda A] = 0 \quad (2.30)$$

A condição necessária e suficiente para que o sistema seja *bem posto*, é que as raízes  $\lambda$  da eq. (2.30) sejam reais e diferentes, caso contrário o sistema é *mal posto*.

Para um fluido incompressível, pode-se demonstrar que o modelo de dois fluidos é condicionalmente *bem posto* quando a velocidade relativa entre as fases fica abaixo de um dado valor, (Chun & Sung, 1996). Este valor coincide com o critério de estabilidade de Kelvin-Helmholtz para escoamentos não viscosos (IKH), desenvolvido por Barnea e Taitel (1994), sendo apresentado a seguir:

$$|u_g - u_l| < \sqrt{\left(\rho_l \alpha_g + \rho_g \alpha_l\right) \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l \rho_g} g \cos(\beta) \frac{A}{S_i}} \quad (2.31)$$

onde  $S_i$  é o comprimento da interface.

Uma análise recente (Bonizzi, 2003) das características das equações do modelo de dois fluidos, mas com uma fase gasosa compressível, revelou que o critério limite para obter um sistema *bem posto* é o mesmo que quando ambas fases são incompressíveis.

O critério de estabilidade dado pela eq. (2.31) para um sistema de equações *bem posto* pode ser representado por uma única curva num diagrama  $U_{s_g} \times U_{s_l}$ , chamada de padrão de escoamento (Fig. 2.4). Considerando constante a velocidade superficial do gás, a velocidade superficial do líquido pode ser gradualmente incrementada desde  $U_{s_l} \approx 0$  até que o critério da eq. (2.31) deixe de ser satisfeito. Quando isto acontece, o primeiro par de vazões volumétricas  $U_{s_g}, U_{s_l}$  é determinado. O procedimento é repetido para toda a faixa de velocidades superficiais do gás, e eventualmente se obtém a desejada curva do critério dos sistemas *bem postos*, a Fig. 2.5 ilustra a curva obtida por Bonizzi, 2003. Como para obter esta curva é necessário determinar a fração volumétrica da fase líquida, esta é obtida para a condição de *escoamento estratificado em equilíbrio* para dadas vazões volumétricas das fases, independente do padrão de escoamento esperado, isto é, estratificado ou *slug* (Barnea & Taitel, 1994). Assumindo-se escoamento estratificado como condição de entrada, a fração volumétrica do líquido tende a um valor que se aproxima à fração volumétrica do líquido em equilíbrio. Com o objetivo de determinar aquele valor no padrão

estratificado anterior a formação do *slug*, pode-se assumir condições de estado estável para as equações de quantidade de movimento do líquido e do gás eqs. (2.3) e (2.4). Desprezando as derivadas com respeito ao espaço, ao tempo e aos termos hidrostáticos, as equações de quantidade de movimento ficam:

$$-\alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_g \alpha_g g \text{sen}(\beta) - \frac{\tau_{gw} S_g}{A} - \frac{\tau_i S_i}{A} = 0 \quad (2.32)$$

$$-\alpha_l \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_l \alpha_l g \text{sen}(\beta) - \frac{\tau_{lw} S_l}{A} - \frac{\tau_i S_i}{A} = 0 \quad (2.33)$$

Eliminando-se o gradiente de pressão das equações anteriores, a seguinte relação é obtida:

$$(\rho_l - \rho_g) g \text{sen}(\beta) + \frac{\tau_{lw} S_l}{\alpha_l A} - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha_g A} - \frac{\tau_i S_i}{A} \left( \frac{1}{\alpha_l} + \frac{1}{\alpha_g} \right) = 0 \quad (2.34)$$

A fração volumétrica do líquido em equilíbrio,  $\alpha_l^{eq}$ , pode ser calculada da equação anterior para dados valores de velocidades superficiais. As velocidades das fases também podem ser expressas em função de  $\alpha_l^{eq}$  fazendo uso da eq. (2.17) e os esforços cortantes são obtidos da eq. (2.8).

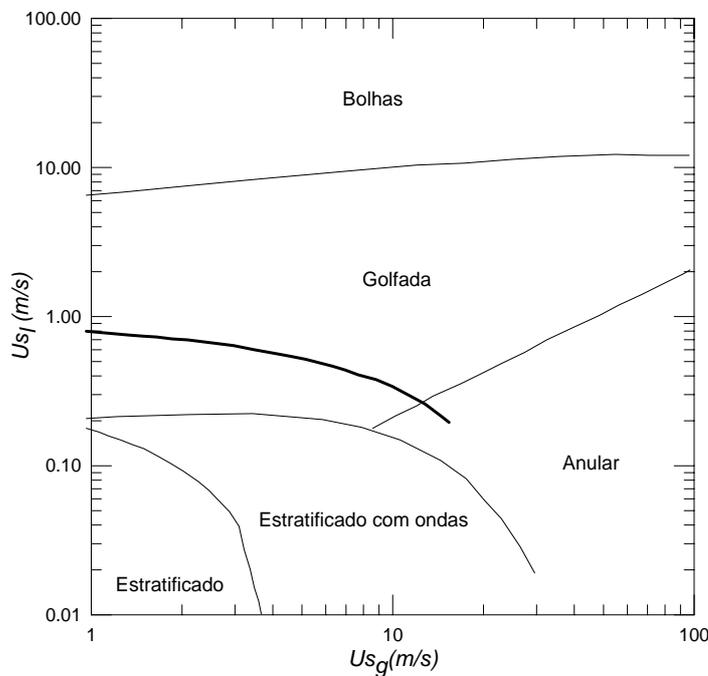


Figura 2.5 – Mapa do padrão de escoamento de Taitel & Dukler (1976) junto com a curva de estabilidade obtida por Bonizzi (2003).

A estabilidade de um escoamento é uma propriedade da dinâmica do fluido. A estabilidade se refere à tendência do escoamento retornar ao seu estado original após ser perturbado. O crescimento e/ou decaimento das perturbações são determinados pela dinâmica do fluido e não pelo processo de modelagem. Sem dúvida, a precisão do modelo pode significativamente afetar a estabilidade do escoamento simulado, e das taxas de crescimento de suas ondas e perturbações. Na análise de estabilidade de Barnea e Taitel (1994) foi demonstrado que um escoamento é estável quando sua velocidade relativa fica abaixo de uma determinada condição, o critério de estabilidade de Kelvin-Helmholtz para escoamentos viscosos (VKH):

$$|u_g - u_l| < K \sqrt{(\rho_l \alpha_g + \rho_g \alpha_l) \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l \rho_g} g \cos(\beta) \frac{A}{S_i}} \quad (2.35)$$

onde o parâmetro  $K$  é o que diferencia a análise não viscoso (IKH) da análise viscoso (VKH), podendo ser definido para fluidos com pequenas viscosidades, de acordo com Taitel e Dukler (1976) como:

$$K = 1 - \frac{h}{D} \quad (2.36)$$

onde  $h$  é altura da superfície do líquido, e  $D$  o diâmetro da tubulação.

Os critérios de estabilidade devem ser verificados a cada passo de tempo ao longo de toda a tubulação. As soluções devem ser descartadas quando o critério é persistentemente violado, i.e., em grandes regiões do domínio e durante grandes intervalos de tempo.

Apesar do explicado anteriormente, deve-se esclarecer que esta análise pode não ser totalmente válida para as equações discretizadas, pois devido aos erros de truncamento gerados pelos processos de discretização, as equações discretizadas podem não corresponder exatamente às equações diferenciais. Porém, como o estudo das características matemáticas das equações discretizadas vai além dos objetivos do presente trabalho, considera-se que, os critérios das desigualdades (2.31) e (2.35) representam as condições para a determinação de sistemas *bem postos* e da estabilidade do escoamento, respectivamente.