8
Referências Bibliográficas

[1] PEARL, J.. **Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving**. The Addison-Wesley Series in Artificial Intelligence. Addison-Wesley, 1985.

[2] REEVES, C., editor. **Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems**. John Wiley and Sons, 1993.

[3] ZANAKIS, S.; EVANS, J. ; VAZACOPOULOS, A.. **Heuristic methods and applications: A categorized survey**. European Journal of Operational Research, 43:88–110, 1989.

[4] MINTON, S.; JOHNSTON, M.; PHILIPS, A. ; LAIRD, P.. **Minimizing conflicts: a heuristic repair method for constraint satisfaction and scheduling problems**. Artificial Intelligence, 58:161–205, 1992.

[5] RAYWARD-SMITH, V.; OSMAN, I.; REEVES, C. ; SMITH, G., editores. **Modern Heuristic Search Methods**. John Wiley and Sons, 1996.

[6] WELSH, D.. **Matroid Theory**. Academic Press, 1976.

[7] HODGSON, J.. **Automatic generation of heuristics**. Em: Banerji, R., editor, FORMAL TECHNIQUES IN ARTIFICIAL INTELLIGENCE: A SOURCEBOOK, Studies in Computer Science and Artificial Intelligence, p. 123–171. North Holland, 1990.

[8] MENEZES, P.; HAEUSLER, E.. **Teoria das Categorias para Ciência da Computação**. Sagra Luzzatto, 2001.

[9] GOLDBLATT, R.. **Topoi – the Categorial Analysis of Logic**. North Holland, 1979.

[10] ADAMEK, J.; HERRLICH, H. ; STRECKER, G.. **Abstract and Concrete Categories – The Joy of Cats**. John Wiley and Sons, 1990.

[11] ARBIB, M.; MANES, E.. **Arrows, Structures, and Functors – The Categorical Imperative**. Academic Press, 1975.

[12] LANE, S. M.. **Categories for the Working Mathematician**. Springer-Verlag, 1971.

[13] BELL, J.. **Toposes and Local Set Theories, an Introduction**. Oxford University Press, 1988.

[14] HOPCROFT, J.; ULLMAN, J.. **Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation**. Addison-Wesley, 1979.

[15] WINSKEL, G.. **Synchronization trees**. Theoretical Computer Science, 34:33–82, 1984.

[16] KORF, R.. **Toward a model of representation changes**. Artificial Intelligence, 14:41–78, 1980.

[17] NAU, D.; KUMAR, V. ; KANAL, L.. **General branch and bound, and its relation to A* and AO***. Artificial Intelligence, 23:29–58, 1984.

[18] KUMAR, V.. **A general heuristic bottom-up procedure for searching AND/OR graphs**. Information Sciences, 56(1–3):39–57, 1991.

[19] KUMAR, V.; KANAL, L.. **The CDP: A unifying formulation for heuristic search, dynamic programming, and branch-and-bound**. Em: Kanal, L.; Kumar, V., editores, SEARCH IN ARTIFICIAL INTELLIGENCE, cap. 1, p. 1–27. Springer-Verlag, 1988.

[20] RAYWARD-SMITH, V.. **A unified approach to tabu search, simulated annealing and genetic algorithms**. Em: Rayward-Smith, V., editor, APPLICATIONS OF MODERN HEURISTIC METHODS, p. 17–38. Alfred Waller Limited, Henley-on-Thames, UK, 1995.

[21] TALBI, E.-G.. **A taxonomy of hybrid metaheuristics**. Journal of Heuristics, 8:541–564, 2002.

[22] FINK, A.; VOSS, S. ; WOODRUFF, D.. **Metaheuristic class libraries**. Em: Glover, F.; Kochenberger, G., editores, HANDBOOK OF METAHEURISTICS. Kluwer, 2002.

[23] VOSS, S.; WOODRUFF, D., editores. **Optimization Software Class Libraries**. Kluwer, 2002.

[24] LEAL, L.; CLAUDIO, D.; MENEZES, P. ; TOSCANI, L.. **Modelling the approximation hierarchy to optimisation problems through category theory**. Em: Dubois, D., editor, INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTING ANTICIPATORY SYSTEMS – PARTIAL PROCEEDINGS OF CASYS'01, 5TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTING ANTICIPATORY SYSTEMS, volume 11, p. 336–349. CHAOS, 2001.

[25] LEAL, L.; MENEZES, P.; CLAUDIO, D. ; TOSCANI, L.. **Optimization problems categories**. Em: Moreno-Diaz, R.; Quesada-Arencibia, A., editores, EUROCAST 2001 – EXTENDED ABSTRACTS, p. 93–96. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2001.

[26] VELOSO, P.; VELOSO, S.. **Problem decomposition and reduction: Applicability, soundness, completeness**. Em: Trappl, R., editor, PROGRESS IN CYBERNETICS AND SYSTEMS RESEARCH, volume 8, p. 199–203. Hemisphere Publ. Co., 1981.

[27] ROGERS, H.. **Theory of Recursive Functions and Effective Computability**. MIT Press, 2^a edição, 1987.

[28] GAREY, M.; JOHNSON, D.. **Computers and Intractability – a Guide to the Theory of NP-Completeness**. W.H. Freeman and Co., 1979.

[29] AUSIELLO, G.; CRESCENZI, P.; GAMBOSI, G.; KANN, V.; MARCHETTI-SPACCAMELA, A. ; PROTASI, M.. **Complexity and Approximation – Combinatorial Optimization Problems and Their Approximability Properties**. Springer-Verlag, 1999.

[30] PAPADIMITRIOU, C.. **Computational Complexity**. Addison-Wesley, 1994.

[31] VELOSO, P.; MARTINS, R.. **Une hiérarchie logique de réductions de problèmes**. Em: 6TH INTERNATIONAL CONGRESS OF CYBERNETICS AND SYSTEMS. AFCET, 1984.

[32] VELOSO, P.; MARTINS, R.. **Reductions of problems: A general perspective**. Em: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS RESEARCH, INFORMATICS AND CYBERNETICS, BADEN-BADEN, 1984.

[33] MACLANE, S.; BIRKHOFF, G.. **Algebra**. Macmillan, 1967.

[34] RADO, R.. **Note on independence functions**. Proc. London Math. Society, 7:300–320, 1957.

[35] HOLLAND, J.. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. University of Michigan Press, 1975.

[36] REEVES, C.. **Genetic algorithms**. Em: Glover, F.; Kochenberger, G., editores, HANDBOOK OF METAHEURISTICS. Kluwer, 2002.

A
Provas

Capítulo 2

2.3.4 Teorema: $\mathbf{Prob}_2^S$ é uma subcategoria co-reflectiva de $\mathbf{Prob}_2$.

Prova. Mostraremos que S é adjunto à direita do funtor inclusão $I : \mathbf{Prob}_2^S \to \mathbf{Prob}_2$.

Dado um problema $\langle\, D, R, p \,\rangle$ em $\mathbf{Prob}_2^S$, temos que $SP = P$, e a componente correspondente a P da unidade da adjunção é a redução identidade id_P.

Dado qualquer problema $\langle\, D', R', p' \,\rangle$ e qualquer redução $(\tau, \sigma) : P \to SP'$ em $\mathbf{Prob}_2^S$, existe exatamente uma redução $(\varphi, \psi) : P \to P'$ em $\mathbf{Prob}_2$ que faz o seguinte diagrama comutar em $\mathbf{Prob}_2^S$:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\mathrm{id}_P)"] \arrow[dr, "(\tau,\sigma)"'] & SP = P \arrow[d, dotted, "(\varphi_S,\psi)"] \\
& SP'
\end{tikzcd}$$

Na verdade, mostra-se facilmente que $\varphi = \tau$ e $\psi = \sigma$. $\square$

2.4.5 Proposição: U é um funtor de $\mathbf{Prob}_2^S$ para $\mathbf{Prob}_1^S$.

Prova. U preserva identidades e composição:

– O morfismo identidade para um problema $\langle\ D, R, p\ \rangle$ em $\mathbf{Prob}_2^S$ é um par $(\tau_{\text{id}}, \sigma_{\text{id}})$ com

$$\begin{array}{rccl} \tau_{\text{id}}: & D & \to & D \\ & d & \mapsto & d \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \sigma_{\text{id}}: & D \times R & \to & R \\ & (d, r) & \mapsto & r \end{array}$$

O mapeamento U leva τ_{id} a si mesma, e σ_{id} a $\overline{\sigma_{\text{id}}}$, que mapeia uma função $f \in \text{poly}(D^R)$ na função $\sigma_{\text{id}} \circ < \text{id}_D, f \circ \tau_{\text{id}} >$, que é a própria f.

– Dadas duas reduções $P_1 \overset{(\tau_1,\sigma_1)}{\longrightarrow} P_2 \overset{(\tau_2,\sigma_2)}{\longrightarrow} P_3$, a redução composta $P_1 \overset{(\tau,\sigma)}{\longrightarrow} P_3$ é dada por

$$\begin{array}{rccl} \tau: & D_1 & \to & D_3 \\ & d_1 & \mapsto & \tau_2(\tau_1(d)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & D_1 \times R_3 & \to & R_1 \\ & (d_1, r_3) & \mapsto & \sigma_1(d_1, \sigma_2(\tau_1(d_1), r_3)) \end{array}$$

U leva (τ_2, σ_2) para $(\tau_2, \overline{\sigma_2})$ tal que, para toda função $f_3 \in \text{poly}(R_3^{D_3})$, temos que $\overline{\sigma_2}(f_3)(d_2) = \sigma_2(d_2, f_3(\tau_2(d_2)))$ para todo $d_2 \in D_2$.

Da mesma forma, U leva (τ_1, σ_1) para $(\tau_1, \overline{\sigma_1})$ tal que, para toda função $f_2 \in \text{poly}(R_2^{D_2})$, temos que $\overline{\sigma_1}(f_2)(d_1) = \sigma_1(d_1, f_2(\tau_1(d_1)))$ para todo $d_1 \in D_1$.

U leva a composta $(\tau_2, \sigma_2) \circ (\tau_1, \sigma_1)$ para $(\bar{\tau}, \bar{\sigma})$, com $\bar{\tau} = \tau_2 \circ \tau_1$ e $\bar{\sigma}$ tal que, para toda função $f_3 \in \text{poly}(R_3^{D_3})$, temos que

$$\bar{\sigma}(f_3)(d_1) = \sigma_1(d_1, \sigma_2(\tau_1(d_1), f_3(\tau_2(\tau_1(d_1)))))$$

para todo $d_1 \in D_1$.

Um cálculo simples mostra que $(\bar{\tau}, \bar{\sigma})$ também é o resultado da composição $(\tau_2, \overline{\sigma_2}) \circ (\tau_1, \overline{\sigma_1})$. □

2.4.6 Teorema: o funtor U é uma imersão (não-plena) de $\mathbf{Prob}_2^S$ em $\mathbf{Prob}_1^S$.

Prova. U é injetivo nos objetos e fidedigno (*faithful*):

– U é injetivo nos objetos. Sejam $\langle\ D, R, p\ \rangle$ e $\langle\ D', R', p'\ \rangle$ dois problemas diferentes. Se $D \neq D'$ ou $R \neq R'$, então UP e UP' terão diferentes conjuntos de dados ou conjuntos de respostas, respectivamente. Então, suponhamos que $D = D'$ e $R = R'$, e que P e P' difiram apenas em suas relações ($p \neq p'$). Assim, $UP = \langle\ D, \text{poly}(R^D), \bar{p}\ \rangle$ e $UP' = \langle\ D, \text{poly}(R^D), \bar{p'}\ \rangle$, com

$$\bar{p} = \{(d, f) \mid (d, f(d)) \in p\}$$

e

$$\bar{p'} = \{(d, f) \mid (d, f(d)) \in p'\}$$

Seja $(d, r) \in p' \setminus p$. Ora, existe uma função $f : D \to R$ computável em tempo polinomial tal que $f(d) = r$, e, precisamente por isso, $(d, f) \notin \bar{p}$ e $(d, f) \in \bar{p'}$. Logo $\bar{p} \neq \bar{p'}$;

– U é fidedigno (*faithful*). Sejam (τ, σ) e (τ', σ') duas reduções diferentes de um problema $\langle\ D, R, p\ \rangle$ para um problema $\langle\ D', R', p'\ \rangle$. Se $\tau \neq \tau'$, então estas duas reduções terão imagens diferentes por U, por que as mesmas τ e τ' são as funções de transformação de dados das respectivas imagens. Então, suponhamos que $\tau = \tau'$ e $\sigma \neq \sigma'$. Seja (d, r') um par para o qual σ e σ' atribuam valores diferentes. Existe uma função $f' : D' \to R'$ computável em tempo polinomial tal que $f'(\tau(d)) = r'$. Esta função f' será mapeada por $\bar{\sigma}$ em uma função $\bar{\sigma}(f')$ tal que

$$\bar{\sigma}(f')(d) = \sigma(d, f'(\tau(d)))$$

Além disso, f' será mapeada por $\bar{\sigma'}$ em uma função $\bar{\sigma'}(f')$ tal que

$$\bar{\sigma'}(f')(d) = \sigma'(d, f'(\tau(d)))$$

Como $(d, f'(\tau(d)))$ é precisamente o par para o qual σ e σ' atribuem valores diferentes, $\bar{\sigma}$ e $\bar{\sigma'}$ serão funções diferentes. $\square$

2.4.9 Proposição: $\mathbf{Prob}_1^S$ é (isomorfa a) uma subcategoria de $\mathbf{Prob}_2^S$.

Prova. Dada uma redução $P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$ em $\mathbf{Prob}_1^S$, basta ver a função unária $\sigma : R' \to R$ como uma função binária $\sigma^\star : D \times R' \to R$ cujo valor independe do primeiro argumento. Isto define uma imersão $I : \mathbf{Prob}_1^S \to \mathbf{Prob}_2^S$ tal que $IP = P$ para todo problema P e $I(\tau, \sigma) = (\tau, \sigma^\star)$ para toda redução (τ, σ). $\square$

2.4.10 Teorema: $\mathbf{Prob}_1^S$ é (isomorfa a) uma subcategoria reflectiva de $\mathbf{Prob}_2^S$.

Prova. Mostraremos que existe uma adjunção $U \dashv I$ entre os funtores definidos acima.

Dado um problema $\langle\ D, R, p\ \rangle$ em $\mathbf{Prob}_2^S$, a componente correspondente a P da unidade da adjunção é a redução

$$(\mathrm{id}_D, \eta_P) : P \to UP$$

onde

- $UP = \langle\ D, \mathrm{poly}(R^D), \bar{p}\ \rangle$, com $\bar{p} = \{(d, f) \mid (d, f(d)) \in p\}$;
- id_D é a função identidade para D;
- $\eta_P : D \times \mathrm{poly}(R^D) \to R$ mapeia cada par (d, f) no valor $f(d)$.

Dado qualquer problema $\langle\ D', R', p'\ \rangle$ e qualquer redução $(\tau, \sigma) : P \to P'$ em $\mathbf{Prob}_2^S$, existe exatamente uma redução $(\varphi, \psi) : UP \to P'$ em $\mathbf{Prob}_1^S$ (i.e. com ψ unária) que faz o seguinte diagrama comutar em $\mathbf{Prob}_2^S$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "(\mathrm{id}_D, \eta_P)"] \arrow[dr, "(\tau,\sigma)"'] & UP \arrow[d, dotted, "(\varphi,\psi)"] \\ & P' \end{tikzcd}$$

Na verdade, em relação à transformação de dados, temos que $\varphi = \tau$.

No que diz respeito à transformação de respostas, como ψ é unária, a composição de η_P com ψ é uma função que mapeia cada par $(d, r') \in D \times R'$ no valor $\eta_P(d, \psi(r'))$. Pela definição de η_P, este valor é $\psi(r')(d)$. Ora, ψ pode ser definida como

$$\begin{array}{rccc} \psi : & R' & \to & \mathrm{poly}(R^D) \\ & r' & \mapsto & \sigma(\_, r') \end{array}$$

Isto imediatamente acarreta $\psi(r')(d) = \sigma(d, r')$ para todo $d \in D$ e todo $r' \in R'$, mostrando que a composição de η_P com ψ é igual a σ.

Que esta definição de ψ é a única que faz o diagrama comutar advém do fato de que a componente η_P da unidade é simplesmente uma função de avaliação, aplicando seu segundo argumento ao primeiro. Logo, o fato de que $\eta_P(d, \psi(r')) = \sigma(d, r')$ para todos os pares (d, r') significa que $\psi(r')(d) = \tilde{\sigma}(r')(d)$ para todos os pares

(d, r'), onde $\tilde{\sigma}$ é a versão "*curried*" de σ, com a ordem dos argumentos trocada (i.e., $\tilde{\sigma} : R' \to (D \to R)$). Assim, ψ é, essencialmente, σ em uma "roupagem" diferente, e, portanto, única. $\square$

Capítulo 3

3.4.8 Teorema: $\mathbf{ECFR}_F$ é um *topos*.

Prova. $\mathbf{ECFR}_F$ é a categoria *slice* $(\mathbf{Floresta}^{F(\mathbf{Prob})^{op}}) \downarrow L$. O Teorema Fundamental de *Topoi* ([9], e.g.) diz que toda categoria *slice* de um *topos* também é um *topos*. Para mostrar que $\mathbf{Floresta}^{F(\mathbf{Prob})^{op}}$ é um topos, observe-se que **Floresta** é isomorfa à categoria funtorial $\mathbf{Set}^{\omega^{op}}$, com ω^{op} a seguinte ordem linear infinita, vista como categoria

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow \cdots$$

Para ver este isomorfismo, dado um funtor $T : \omega^{op} \to \mathbf{Set}$ objeto de $\mathbf{Set}^{\omega^{op}}$, a floresta determinada por T tem $T(i)$ como o conjunto de nós do i-ésimo nível, e tem a imagem de cada morfismo $i+1 \to i$ de ω^{op} como a função $\text{pai}_i : T(i+1) \to T(i)$ que define o pai de cada nó do nível $i+1$. Com isto, cada transformação natural morfismo de $\mathbf{Set}^{\omega^{op}}$ determina um homomorfismo de florestas.

Assim, $\mathbf{Floresta}^{F(\mathbf{Prob})^{op}} \cong (\mathbf{Set}^{\omega^{op}})^{F(\mathbf{Prob})^{op}}$. Usando o fato de que **CAT**, a quasi-categoria de todas as categorias (ver [10]), é cartesiana fechada, temos que $(\mathbf{Set}^{\omega^{op}})^{F(\mathbf{Prob})^{op}} \cong \mathbf{Set}^{\omega^{op} \times F(\mathbf{Prob})^{op}}$. Esta última categoria é a categoria de todos os funtores da categoria pequena $\omega^{op} \times F(\mathbf{Prob})^{op}$ para **Set**, sendo, portanto, um *topos*. $\square$

Capítulo 5

5.4.6 Proposição: toda corda H de um objeto G de **ECF** é sub-objeto de G. Mais especificamente, o sub-objeto H é um funtor que associa a cada problema P uma *árvore* linear e finita HP, de tal forma que, para algum P, a árvore HP é não-vazia.

Prova. Existe uma bijeção entre o conjunto de nós de uma floresta GP e o conjunto de sub-árvores lineares finitas com raízes no nível 0 de GP. Assim, na definição 5.2.5, a escolha de (no máximo) um nó $H(P)$ de GP para cada problema P corresponde à escolha de uma árvore linear finita HP para cada problema P. Como a função parcial H é definida para pelo menos um problema, alguma árvore HP é não-vazia.

As demais condições da definição 5.2.5 garantem que H é um funtor, e que existe uma transformação natural $h : H \dot{\to} G$ cujas componentes são monomorfismos. $\square$

5.4.8 Proposição: seja G um funtor não-colapsante, objeto de **ECF**; seja H um sub-objeto de G tal que, para todo problema P, ocorre que HP é uma árvore linear finita e tal que, para algum problema P, ocorre que HP é não-vazia; então, $H \overset{h}{\rightarrowtail} G$ é uma corda se e somente se, para todo problema P, ocorrer que $GP \xrightarrow{\chi_{HP}} \Omega(P)$ é um homomorfismo de florestas cuja imagem em $\Omega(P)$ inclui apenas nós representados (usando a notação de 4.2.9) por tuplas da forma

$$(n, n, \cdots)$$

ou

$$(-, -, \cdots)$$

com todas as componentes iguais.

Prova.

– (Se) Seja v' um nó de GP'; seja uma redução $P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$; basta mostrar que

$$(v' \text{ é um nó de } HP')$$
$$\Updownarrow$$
$$(G(\tau,\sigma)(v') \text{ é um nó de } HP)$$

Mas, como a imagem de v' através de $\chi_{HP'}$ tem todas as componentes iguais, isto significa que o ancestral mais profundo de v' que está em HP' (se existir) está no mesmo nível que o ancestral mais profundo de $G(\tau,\sigma)(v')$ que está em HP (se existir). Como, aqui, estamos considerando que um nó é ancestral de si mesmo, a equivalência se segue;

– (Somente se) Seja v'_k um nó do nível k de GP'. Suponha que a imagem de v'_k através de $\chi_{HP'}$ não tenha todas as componentes iguais. Mais precisamente, suponha que a i-ésima componente seja igual a m, e que a j-ésima componente seja igual a n, com $i \neq j$, e $m < n \leq k$. Mostraremos que H não é uma corda.

  A suposição significa que existem dois problemas P_m e P_n, ambos redutíveis a P', e P_i redutível a todos, de tal forma que a seguinte situação se verifica entre as florestas associadas por G aos problemas:

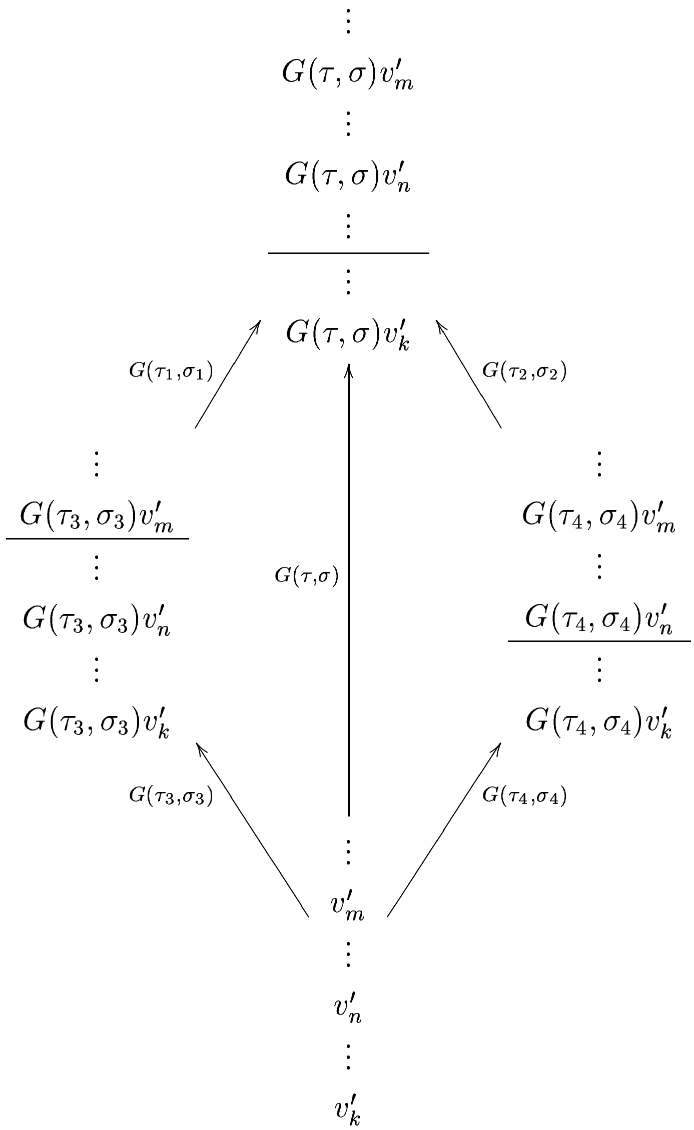
$$\begin{tikzcd}
 & GP_i & \\
GP_m \arrow[ur, "G(\tau_1,\sigma_1)"] & & GP_n \arrow[ul, "G(\tau_2,\sigma_2)"'] \\
 & GP' \arrow[ul, "G(\tau_3,\sigma_3)"] \arrow[ur, "G(\tau_4,\sigma_4)"'] \arrow[uu, "G(\tau,\sigma)"] &
\end{tikzcd}$$

  A suposição também implica que existem dois ancestrais de v'_k em GP', um no nível n, chamado v'_n e um no nível m, chamado v'_m, tais que $G(\tau_3,\sigma_3)(v'_m)$ (e nenhum de seus descendentes) está em HP_m e $G(\tau_4,\sigma_4)(v'_n)$ (e nenhum de seus descendentes) está em HP_n. Mas, como H é um sub-objeto, tanto $G(\tau,\sigma)(v'_m)$ quanto $G(\tau,\sigma)(v'_n)$ estão em HP_i. Neste caso, o nó $G(\tau,\sigma)(v'_n)$, que é o mesmo nó que

$$G(\tau_1,\sigma_1)G(\tau_3,\sigma_3)(v'_n)$$

  é ancestral do nó escolhido pela corda H em GP_i, mas sua pré-imagem $G(\tau_3,\sigma_3)(v'_n)$ não é escolhido pela corda H em GP', violando a última condição da definição de corda em 5.2.5. Observe que, como G é não-colapsante, $G(\tau_3,\sigma_3)(v'_n)$ é a única pré-imagem de $G(\tau,\sigma)(v'_n)$.

  Esta situação é retratada na seguinte figura, onde as linhas horizontais são colocadas imediatamente abaixo das folhas de HP_i, HP_m e HP_n:



$\square$

5.4.13 Proposição: G é não-colapsante se e somente se

$$\textbf{isNonCollapsing}(G)$$

é uma fórmula válida em **ECF**.

Prova.

– (Se.) Suponha que G é colapsante. Mostraremos que a fórmula **isNonCollapsing**(G) não é válida. Em especial, mostraremos que existe um sub-objeto H de G, finito, não-vazio, linear, maximal em relação a "$\subseteq$" tal que $image(\chi_H) \not\subseteq \Omega_C$.

De fato, como G é colapsante, existe alguma redução $P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$ tal que dois nós diferentes v'_1 e v'_2 de GP' são mapeados no mesmo nó v de GP. Existe um sub-objeto H de G, finito, não-vazio, linear, maximal em relação a "$\subseteq$" que inclui v e v'_1 mas não v'_2. Para este H, a imagem $\chi_{H_{P'}}(v'_2)$ será um nó que não pertence a Ω_C. Mais precisamente, se v'_2 estiver no nível k, a componente de $\chi_{H_{P'}}(v'_2)$ relativa a P será igual a k (pois v, do nível k, está incluído em HP), mas a componente relativa ao próprio P' será menor que k (pois v'_2, do nível k, não está incluído em HP').

– (Somente se.) Suponha que G é não-colapsante. Suponha que H é um sub-objeto de G, finito, não-vazio, linear tal que $image(\chi_H) \not\subseteq \Omega_C$. Mostraremos que H não pode ser maximal em relação a "$\subseteq$".

De fato, como na prova de 5.4.8, existem problemas P, P', P_m e P_n, e nós v'_k, v'_m e v'_n na situação retratada na figura da prova de 5.4.8. Então, o sub-objeto H' que escolhe o nó $G(\tau_3, \sigma_3)(v'_n)$ em vez do nó $G(\tau_3, \sigma_3)(v'_m)$ é tal que $H \subset H'$. Logo, H não é maximal.

□

Capítulo 6

6.2.11 Proposição: $\mathbf{SC}$ e $\mathbf{ProbOt}^{op}$ são isomorfas. É um isomorfismo o funtor $I : \mathbf{SC} \to \mathbf{ProbOt}^{op}$ tal que

$$I(S, \mathcal{F}, w) = < \{\overline{w}\}, \wp(S), p >$$

onde, para todo $A \in \wp(S)$,

$$\overline{w}(A) = \begin{cases} w(A) & \text{se } A \in \mathcal{F} \\ \uparrow & \text{senão} \end{cases}$$

e

$$I((S, \mathcal{F}, w) \xrightarrow{f} (S', \mathcal{F}', w')) =$$
$$< \{\overline{w}\}, \wp(S), p > \xrightarrow{(\tau,\sigma)^{op}} < \{\overline{w'}\}, \wp(S'), p' >$$

com

$$\tau(\overline{w'}) = \overline{w}$$

e, para todo $A \in \wp(S)$,

$$\sigma(A) = f(A)$$

O funtor inverso de I é $I^{-1} : \mathbf{ProbOt}^{op} \to \mathbf{SC}$ tal que

$$I^{-1}(< \{w\}, \wp(S), p >) = (S, \{A \mid w(A)\downarrow\}, \underline{w})$$

onde

$$\underline{w}(A) = w(A)$$

e

$$I^{-1}(< \{w\}, \wp(S), p > \xrightarrow{(\tau,\sigma)^{op}} < \{w'\}, \wp(S'), p' >) =$$
$$(S, \{A \mid w(A)\downarrow\}, \underline{w}) \xrightarrow{f} (S', \{A' \mid w'(A')\downarrow\}, \underline{w'})$$

com

$$f(A) = \sigma(A)$$

para todo $A \in \{A \mid w(A)\downarrow\}$.

Prova. De fato, temos que

$$\begin{aligned} I^{-1}(I(S,\mathcal{F},w)) &= I^{-1}(<\{\overline{w}\},\wp(S),p>) \\ &= (S,\{A \mid \overline{w}(A)\downarrow\},\underline{\overline{w}}) \\ &= (S,\mathcal{F},w) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I^{-1}(I(f)) &= I^{-1}(\tau,\sigma)^{op} \\ &= f \end{aligned}$$

Reciprocamente,

$$\begin{aligned} I(I^{-1}(<\{w\},\wp(S),p>)) &= I((S,\{A \mid w(A)\downarrow\},\underline{w})) \\ &= <\{\underline{\overline{w}}\},\wp(S),p> \\ &= <\{w\},\wp(S),p> \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I(I^{-1}(\tau,\sigma)^{op}) &= I(f) \\ &= (\tau,\sigma)^{op} \end{aligned}$$

□

B

Lista de Categorias

$\mathbf{AFD}_\Sigma$ Autômatos finitos determinísticos sobre um alfabeto Σ e simulações (p. 14)

$\mathbf{AFD}_\Sigma^E$ Autômatos finitos determinísticos sobre um alfabeto Σ com todos os estados alcançáveis e simulações (p. 14)

$\mathbf{AFD}_\Sigma^M$ Autômatos finitos determinísticos mínimos sobre um alfabeto Σ e simulações (p. 15)

ECF Estratégias de construção de florestas (p. 52)

$\mathbf{ECFR}^0$ Estratégias de construção de florestas de respostas (primeira definição) (p. 46)

ECFR Estratégias de construção de florestas de respostas (definição revista) (p. 47)

Floresta Florestas e homomorfismos de florestas (p. 47)

Matr Matróides com função-objetivo (p. 118)

$\mathbf{Prob}_0$ Uma subcategoria rarefeita esquelética de **Prob** (p. 44)

$\mathbf{Prob}_1$ Problemas e reduções unárias (p. 31)

$\mathbf{Prob}_2$ Problemas e reduções binárias (p. 32)

$\mathbf{Prob}_1^S$ Problemas totalmente solúveis e reduções unárias (p. 34)

$\mathbf{Prob}_2^S$ Problemas totalmente solúveis e reduções binárias (p. 33)

Prob Problemas totalmente solúveis e reduções unárias ($= \mathbf{Prob}_1^S$) (p. 37)

ProbOt Problemas de otimização com uma instância (p. 116)

RFloresta Florestas rotuladas e homomorfismos de florestas (p. 43)

SC Sistemas de conjuntos com função-objetivo (p. 116)

Set Conjuntos e funções (p. 16)

$\mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$ Funtores de **C** para **Set** e transformações naturais (p. 17)

$\mathbf{Set}^{\omega^{op}}$ Funtores de ω^{op} para **Set** (= **Floresta**) (p. 144)

SubProb Subcategorias rarefeitas esqueléticas de **Prob** e inclusões (p. 50)

ω Ordem linear infinita $0 \to 1 \to 2 \to \cdots$ (p. 144)