4
Estrutura Lógica do *Topos*

Neste capítulo, justificamos a adoção de um *topos* específico como universo de discurso para a definição de heurísticas e examinamos a estrutura lógica do *topos* adotado, com ênfase no classificador de sub-objetos e nos objetos de números naturais e de números racionais.

4.1
Escolha do *Topos* para a Especificação de Heurísticas

4.1.1 Adotando um *topos* como universo de discurso. No capítulo 3 e nas provas do apêndice A, dois *topoi* diferentes são encontrados (embora um deles não seja explicitamente nomeado). A seguir, descrevemos ambos e discutimos sobre qual deles deve ser adotado como o universo onde as heurísticas serão especificadas. Basicamente, a diferença consiste no modo como é especificado o rotulamento dos nós da floresta de respostas de um problema: em um dos *topos*, a especificação do rotulamento não faz parte do objeto, devendo ser dada por morfismos; no outro, os objetos incluem informação sobre o rotulamento dos nós.

4.1.2 ECF – o *topos* de estratégias de construção de florestas. Os objetos de $\mathbf{ECF}$ são funtores contravariantes[1] $G : \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{Floresta}$ que associam, a cada problema P da categoria $\mathbf{Prob}_0$, uma floresta GP sem qualquer tipo de rótulo, e que associam, a cada redução $P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$, um homomorfismo de florestas $GP' \longrightarrow GP$.

[1] Como exposto no capítulo 3, para cada subcategoria rarefeita e esquelética $\mathbf{Prob}_0$ de $\mathbf{Prob}$ tal que o problema P_1 definido em 3.3.5 é o objeto inicial de $\mathbf{Prob}_0$, existem um *topos* $\mathbf{ECF}_{\mathbf{Prob}_0}$ e um *topos* $\mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0}$. Neste capítulo, porém, omitiremos o subscrito $\mathbf{Prob}_0$ sempre que a categoria $\mathbf{Prob}_0$ for arbitrária ou estiver definida pelo contexto.

Os morfismos de **ECF**, como de praxe em categorias funtoriais, são transformações naturais entre estes funtores.

4.1.3 ECFR – o *topos* de estratégias de construção de florestas de respostas. Os objetos de **ECFR** são funtores contravariantes

$$S : \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{RFloresta}$$

que associam, a cada problema $P = \langle\ D, R, p\ \rangle$ da categoria $\mathbf{Prob}_0$, uma floresta SP cujos nós são rotulados por conjuntos de respostas contidos em R, e que associam, a cada redução $P \overset{(\tau,\sigma)}{\longrightarrow} P'$, um homomorfismo de florestas $SP' \longrightarrow SP$ que concorda com $\sigma : R' \to R$, como descrito em 3.3.7.

Os morfismos de **ECFR** são transformações naturais entre estes funtores.

4.1.4 Florestas não-rotuladas × florestas rotuladas. No capítulo 3, em 3.4.6, e no apêndice A, vemos que o *topos* **ECFR** é isomorfo à categoria *slice* $\mathbf{ECF} \downarrow L$, onde L é o funtor definido em 3.4.4. Em outras palavras, cada funtor $S : \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{RFloresta}$ objeto de **ECFR** corresponde a um par $\langle\ G, \lambda\ \rangle$, com G um objeto de **ECF** e λ um morfismo $G \overset{\lambda}{\longrightarrow} L$ em **ECF**. Neste par, G associa florestas não-rotuladas aos problemas (isomorfas às florestas escolhidas por S), e λ cuida do rotulamento dos nós das florestas de forma natural.

Destas considerações, segue-se que todo objeto de **ECFR** pode ser referenciado na linguagem interna de **ECF** como um par $\langle\ G, \lambda\ \rangle$, e todo morfismo $S \overset{\alpha}{\longrightarrow} S'$ de **ECFR** pode ser referenciado na linguagem interna de **ECF** como um termo $\beta : G \to G'$ satisfazendo certas condições relativas a λ e λ'. Isto será feito mais adiante, na seção 5.4.

Além disso, a descrição de objetos especiais de **ECF** (terminal, classificador de sub-objetos, etc.) é, de certa forma, mais simples do que a descrição dos objetos correspondentes de **ECFR**, uma vez que, nesta última, os objetos contêm informação adicional sobre o rotulamento das florestas. Estes fatores nos fazem optar por usar a lógica interna de **ECF** para especificar heurísticas, ainda que, nas especificações (ver 5.4), seja preciso incluir condições adicionais referentes aos morfismos responsáveis pelo rotulamento das florestas.

4.2
Estrutura Lógica do *Topos* ECF

4.2.1 ECF como um *topos* do tipo $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$.

Uma classe de *topoi* bastante estudada é a composta por categorias funtoriais da forma $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$, com $\mathbf{C}$ uma categoria pequena[2]. Uma subclasse especial é formada por categorias funtoriais do tipo $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$, onde $\mathbf{P}$ é um conjunto parcialmente ordenado visto como uma categoria. [9] descreve em detalhes a estrutura lógica dos *topoi* desta classe.

No nosso caso, $\mathbf{ECF}$ é isomorfo a um *topos* da forma $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$, com $\mathbf{P}$ um conjunto parcialmente ordenado. Para ver isto, lembre-se que

$$\mathbf{ECF} \cong \mathbf{Floresta}^{\mathbf{Prob}_0^{op}}$$

A categoria **Floresta**, por sua vez, é isomorfa ao *topos*

$$\mathbf{Set}^{\omega^{op}}$$

onde ω^{op} é a ordem total $0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow \cdots$. Isto faz com que

$$\mathbf{ECF} \cong (\mathbf{Set}^{\omega^{op}})^{\mathbf{Prob}_0^{op}}$$

Como toda categoria da forma $(\mathbf{A}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{C}}$ é isomorfa a $\mathbf{A}^{(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}$, temos que

$$\mathbf{ECF} \cong \mathbf{Set}^{(\omega^{op}\times\mathbf{Prob}_0^{op})}$$

Como o produto de dois conjuntos parcialmente ordenados é um conjunto parcialmente ordenado, o *topos* acima é da forma $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$, com $\mathbf{P}$ um conjunto parcialmente ordenado visto como categoria.

Esta visão de $\mathbf{ECF}$ considera cada objeto G do *topos* como um funtor

$$G : \omega^{op} \times \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{Set}$$

que mapeia um par (k, P), com $k \in \mathbb{N}$ e P um problema, em um conjunto $G(k, P)$. Este conjunto é composto pelos nós do k-ésimo nível da floresta do problema P.

Um morfismo $(k, P) \to (k', P')$ no conjunto parcialmente ordenado $\omega^{op} \times$

[2]Uma categoria pequena é aquela cuja coleção de objetos forma um conjunto. A categoria **Set** de todos os conjuntos, por exemplo, *não é* uma categoria pequena.

$\mathbf{Prob}_0^{op}$ visto como categoria significa que

$$k \geq k'$$

e que existe uma redução

$$P' \stackrel{(\tau,\sigma)}{\longrightarrow} P$$

em $\mathbf{Prob}_0$. (Note que o morfismo $P \longrightarrow P'$ em $\mathbf{Prob}_0^{op}$ corresponde a um morfismo no sentido oposto em $\mathbf{Prob}_0$.)

Para ver como a imagem deste morfismo via G corresponde a um homomorfismo de florestas, note que o morfismo $(k, P) \to (k', P')$ é mapeado por G em uma função

$$f : G(k, P) \to G(k', P')$$

tal que f mapeia cada nó v do k-ésimo nível da floresta de P no ancestral do nível k' do nó imagem de v na floresta de P'.

No caso especial de um morfismo $(k, P) \to (k', P)$, com P fixo, f é a função "ancestral do nível k'"; no caso especial de um morfismo $(k, P) \to (k, P')$, com k fixo, f é a restrição ao k-ésimo nível do homomorfismo da floresta de P para o k-ésimo nível da floresta de P'.

O fato de que **ECF** é um *topos* da forma $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$ facilita a construção de limites, colimites e objetos especiais, conforme descrito em [9]. Basicamente, limites e colimites são construídos "fibra a fibra". Por exemplo, dados dois objetos G e H, o objeto do produto $G \times H$ é o funtor que mapeia (k, P) no conjunto $G(k, P) \times H(k, P)$ e que mapeia um morfismo no par composto pelas funções imagens do morfismo via G e via H.

A seguir, para estudar a estrutura lógica de **ECF**, descrevemos de forma sucinta seu objeto terminal e seu classificador de sub-objetos.

Na descrição que se segue, consideramos que um objeto G de **ECF** é um funtor

$$G : \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{Floresta}$$

que mapeia um problema P em uma floresta GP, e não um funtor

$$G : \omega^{op} \times \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{Set}$$

que mapeia um par (k, P) no conjunto de nós do nível k da floresta associada a P.

Como visto acima, estas duas visões correspondem às categorias isomorfas

$$(\mathbf{Set}^{\omega^{op}})^{\mathbf{Prob}_0^{op}}$$

e

$$\mathbf{Set}^{(\omega^{op}\times\mathbf{Prob}_0^{op})}$$

Por um lado, existem maneiras canônicas de obter as construções importantes de um *topos* da forma $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$; por outro lado, parece-nos mais intuitivo pensar em funtores que associam florestas a problemas do que em funtores que associam conjuntos a pares compostos de um natural e um problema. O isomorfismo acima nos garante que as duas visões podem ser usadas alternadamente, conforme a conveniência.

4.2.2 Objeto terminal. Em qualquer categoria, um objeto 1 é dito terminal se, dado qualquer objeto A da categoria, existe um único morfismo $A \xrightarrow{!_A} 1$.

O funtor $1 : \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{Floresta}$ que mapeia cada problema P na floresta composta por uma única árvore linear infinita A

$$\begin{array}{c}\bullet\\ |\\ \bullet\\ |\\ \bullet\\ |\\ \vdots\end{array}$$

(e, forçosamente, cada redução $P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$ no homomorfismo identidade id_A) é o objeto terminal de $\mathbf{ECF}$.

4.2.3 Sub-objetos e morfismos característicos. Em teoria dos conjuntos, dado um universo $\mathcal{U}$ de elementos, temos que um conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$ pode ser definido através da função característica $\chi_A : \mathcal{U} \to \{V, F\}$ definida como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} V & \text{se } x \in A \\ F & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

onde $\{V, F\}$ é o conjunto de valores-verdade.

Em qualquer *topos*, algo análogo pode ser feito. A noção de conjunto em um universo é substituída pela noção de sub-objeto de um objeto, o conjunto de valores-verdade é substituído pelo objeto Ω de valores-verdade, e o papel da função característica é desempenhado pelo morfismo característico descrito na seguinte definição:

4.2.4 Definição: classificador de sub-objetos. O classificador de sub-objetos de um *topos* é o par $(\Omega, \top)$, com Ω o objeto de valores-verdade e $1 \xrightarrow{\top} \Omega$ o morfismo *true*, satisfazendo a propriedade:

Dado um sub-objeto $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$, existe um único morfismo $B \xrightarrow{\chi_A} \Omega$ tal que o diagrama abaixo é um *pullback*:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & B \arrow[d, "\chi_A"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Reciprocamente, dado um morfismo $B \xrightarrow{g} \Omega$, existe um sub-objeto (único a menos de isomorfismo) $C \overset{\bar{g}}{\rightarrowtail} B$ tal que o diagrama abaixo é um *pullback*:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "\bar{g}"] \arrow[d, "!"'] & B \arrow[d, "g"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Isto corresponde à situação em teoria dos conjuntos, em que a definição de um conjunto equivale à definição de sua função característica.

O sub-objeto $C \overset{\bar{g}}{\rightarrowtail} B$ é chamado o *núcleo* (*kernel*) de g.

4.2.5 Sub-objetos em ECF. Um sub-objeto de um objeto G é um monomorfismo $H \overset{h}{\rightarrowtail} G$; i.e., h é uma transformação natural onde todas as componentes $HP \xrightarrow{h_P} GP$ são imersões de florestas.[3]

[3] A rigor, um sub-objeto é uma classe de equivalência de tais monomorfismos, mas, para simplificar, cometeremos esta pequena imprecisão aqui. Ver [9, p. 75].

4.2.6 Definindo o classificador de sub-objetos de ECF.

A seguir, apresentamos as definições e a notação necessária para descrever o classificador de sub-objetos de **ECF**.

4.2.7 Conjuntos hereditários de problemas.

Um conjunto S de problemas de $\mathbf{Prob}_0$ é dito hereditário se e somente se para cada problema $P \in S$, todos os problemas de $\mathbf{Prob}_0$ redutíveis a P também estão em S. Em símbolos:

$$\begin{array}{l} \forall P \in S : \forall P' \in \mathrm{obj}(\mathbf{Prob}_0) : (\\ \quad (\exists (\tau, \sigma) \in \hom(\mathbf{Prob}_0) : P' \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P) \ \Rightarrow \ P' \in S \\ ) \end{array}$$

4.2.8 Conjuntos hereditários em ω^{op}.

Analogamente, um conjunto S de naturais (objetos de ω^{op}) é dito hereditário se e somente se para cada natural $k \in S$, todos os naturais k' com $k' \leq k$ também estão em S.

4.2.9 Notação.

A descrição do classificador de sub-objetos requer notação especial. A exemplo de [9], escreveremos $[P)$ para o conjunto de todos os problemas de $\mathbf{Prob}_0$ redutíveis a P. Também escreveremos $[P)^+$ para o conjunto de todos os subconjuntos hereditários de $[P)$. Em símbolos:

$$\begin{array}{rcl} [P) & = & \{P' \mid P' \longrightarrow P \text{ em } \mathbf{Prob}_0\} \\ {[P)^+} & = & \{S \subseteq [P) \mid S \text{ hereditário }\} \end{array}$$

Dado um problema P, definiremos uma notação concisa envolvendo os elementos de $[P)^+$ e os níveis da floresta associada a P pelo classificador de sub-objetos:

Considere a cardinalidade κ do conjunto de problemas $[P)$. Se κ for um cardinal finito, igual a um natural n, escolha uma função

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to [P)$$

Se κ for infinito, tome um conjunto totalmente ordenado C de mesma cardinalidade que $[P)$ e escolha uma função

$$f : C \to [P)$$

O efeito da escolha de f é que agora podemos ordenar totalmente qualquer conjunto de problemas em $[P)$, herdando a ordem de $\{1, 2, \ldots, n\}$ no primeiro caso, ou de C no segundo caso.

Para simplificar, vamos supor que a quantidade de problemas em $[P)$ seja enumerável.[4] Assim, qualquer subconjunto de $[P)$ pode ser representado por uma tupla (possivelmente infinita)

$$(t_1, t_2, \ldots)$$

onde cada componente t_i é "$-$" ou "$+$". O símbolo "$-$" na i-ésima posição da tupla significa que o problema $f(i) = P_i$ não está presente no subconjunto. O símbolo "$+$" na i-ésima posição da tupla significa que o problema $f(i) = P_i$ está presente no subconjunto.

Um elemento de $[P)^+$ (i.e., um subconjunto hereditário de $[P)$) pode, então, ser representado por uma tupla (possivelmente infinita) satisfazendo a seguinte condição para todo t_i, t_j:

$$P_i \longrightarrow P_j \text{ em } \mathbf{Prob}_0 \;\Rightarrow\; (t_j = \text{“}+\text{”} \;\Rightarrow\; t_i = \text{“}+\text{”})$$

Como será visto abaixo, cada nó do nível k da floresta $\Omega(P)$ associada a P pelo classificador de sub-objetos corresponde a um conjunto S de pares da forma (k', P'), com $k' \leq k$, com $P' \longrightarrow P$ em $\mathbf{Prob}_0$, com a propriedade

$$\begin{aligned} &(k', P') \in S \;\Rightarrow \\ &\quad \forall n \leq k' : \forall Q \text{ com } Q \longrightarrow P' \text{ em } \mathbf{Prob}_0 : \\ &\quad\quad (n, Q) \in S \end{aligned}$$

i.e., trata-se de um conjunto hereditário nas duas componentes dos pares.

Um conjunto S deste tipo (e o nó v do nível k de $\Omega(P)$ que S representa) também será denotado por uma tupla (possivelmente infinita)

$$(t_1, t_2, \ldots)$$

mas, desta vez, cada componente t_i é ou o símbolo "$-$" ou um natural k' menor ou igual a k. O símbolo "$-$" na posição t_i significa que não existe, em S, nenhum par com segunda componente P_i. O valor k' na posição t_i significa que S contém todos os pares (n, P_i) com $n \leq k'$. A condição adicional para que a tupla represente um

[4] Caso $[P)$ não seja enumerável, ainda assim será possível aplicar a notação descrita aqui, embora os índices das componentes t_i não possam mais ser números naturais.

Que todo conjunto C pode ser bem ordenado é o que afirma o lema de Zorn, um enunciado que é equivalente ao axioma da escolha na teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

conjunto hereditário nas duas componentes é: para todo t_i, t_j

$$P_i \longrightarrow P_j \text{ em } \mathbf{Prob}_0 \;\Rightarrow\; (t_j \leq t_i)$$

Agora estamos prontos para descrever o classificador de sub-objetos.

4.2.10 Classificador de sub-objetos. O objeto de valores-verdade é um funtor $\Omega : \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{Floresta}$ que mapeia cada problema P na seguinte floresta $\Omega(P)$:

- O nível 0 da floresta $\Omega(P)$ é $[P)^+$. I.e., existe uma árvore em $\Omega(P)$ para cada conjunto hereditário de problemas redutíveis a P em $\mathbf{Prob}_0$.
- Dado um nó v no nível k da floresta $\Omega(P)$, representamos v, segundo a notação descrita acima, pela tupla
$$v = (t_1, t_2, \ldots)$$
com $t_i =$ " $-$ " ou t_i um natural menor ou igual a k, para cada i.

  Então, cada filho de v na floresta $\Omega(P)$ será da forma
$$v' = (t'_1, t'_2, \ldots)$$
onde, para cada i,
$$t'_i \begin{cases} = t_i & \text{se } t_i < k \text{ ou } t_i = \text{“} - \text{”} \\ \in \{k, k+1\} & \text{se } t_i = k \end{cases}$$

Dado um morfismo $P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$ em $\mathbf{Prob}_0$, sabe-se que $[P) \subseteq [P')$. A imagem de (τ, σ) via Ω é o homomorfismo de florestas $\Omega(\tau, \sigma)$ tal que cada nó

$$v' = (t'_1, t'_2, \ldots)$$

da floresta $\Omega(P')$ é mapeado por $\Omega(\tau, \sigma)$ no nó de $\Omega(P)$ representado pela projeção de v' sobre as componentes t'_i que correspondem a problemas $P_i \in [P)$. Ou seja,

$$\Omega(\tau, \sigma)(v') = (t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, \ldots)$$

com

$$\{P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, \ldots\} = [P) \cap [P')$$

respeitando a mesma ordenação de $[P')$.

O morfismo $\top : 1 \to \Omega$ é a transformação natural cuja componente relativa a cada problema P é o homomorfismo que mapeia a floresta (linear) $1P$ no ramo infinito

$$\begin{array}{c}(0,0,0,\ldots)\\ |\\ (1,1,1,\ldots)\\ |\\ (2,2,2,\ldots)\\ |\\ \vdots\end{array}$$

da floresta $\Omega(P)$.

Para todo problema P, a componente correspondente da transformação natural $\perp : 1 \to \Omega$ leva $1P$ no ramo infinito

$$\begin{array}{c}(-,-,-,\ldots)\\ |\\ (-,-,-,\ldots)\\ |\\ (-,-,-,\ldots)\\ |\\ \vdots\end{array}$$

da floresta $\Omega(P)$. Este é o valor-verdade “falso” de Ω.

Constata-se também que o *topos* **ECF** possui outros valores-verdade além de $\top$ e $\perp$. Cada um destes outros valores-verdade é uma transformação natural $\omega : 1 \dot{\to} \Omega$ que escolhe um ramo infinito da floresta $\Omega(P)$ de cada problema P. Como cada floresta $\Omega(P)$ possui uma quantidade infinita de ramos infinitos, existe uma quantidade infinita destas transformações naturais. Logo, a lógica interna de **ECF** possui infinitos valores-verdade.

4.3 Exemplo

4.3.1 Fixando $\mathbf{Prob}_0$. Para simplificar o exemplo do funcionamento do classificador de sub-objetos descrito acima, tomaremos $\mathbf{Prob}_0$ como sendo a seguinte categoria finita de problemas:

$$\begin{tikzcd}
 & & P_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & P_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & P_4 \arrow[dl] & \\
P_3 & & P_5 & &
\end{tikzcd}$$

Esta categoria $\mathbf{Prob}_0$ é um conjunto parcialmente ordenado visto como categoria, e possui um objeto inicial P_1.[5]

4.3.2 O classificador de sub-objetos. Construiremos agora o classificador de sub-objetos de $\mathbf{ECF}_{\mathbf{Prob}_0}$ para a $\mathbf{Prob}_0$ acima. Os conjuntos da forma $[P)$, com os elementos enumerados em ordem, são:

$$\begin{aligned}
[P_1) &= \{P_1\} \\
[P_2) &= \{P_1, P_2\} \\
[P_3) &= \{P_1, P_2, P_3\} \\
[P_4) &= \{P_1, P_4\} \\
[P_5) &= \{P_1, P_2, P_4, P_5\}
\end{aligned}$$

$\Omega(P_1)$ é a floresta abaixo, composta por 2 árvores. Cada nó do nível k é representado por um valor menor ou igual a k, ou pelo símbolo "$-$":

$$\begin{tikzcd}
- \arrow[d, dash] & 0 \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\
- \arrow[d, dash] & 0 \arrow[d, dash] & 1 \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
- \arrow[d, dash] & 0 \arrow[d, dash] & 1 \arrow[d, dash] & 2 \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

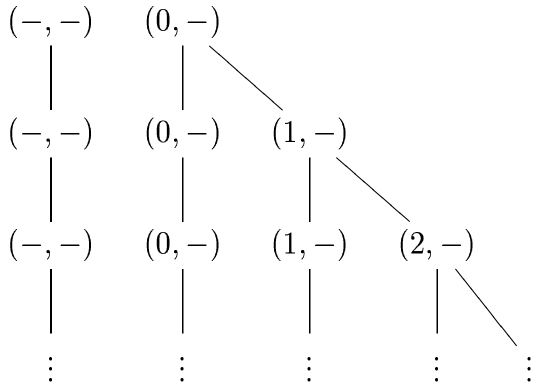
Uma observação curiosa: como apenas P_1 é redutível a P_1, a floresta $\Omega(P_1)$

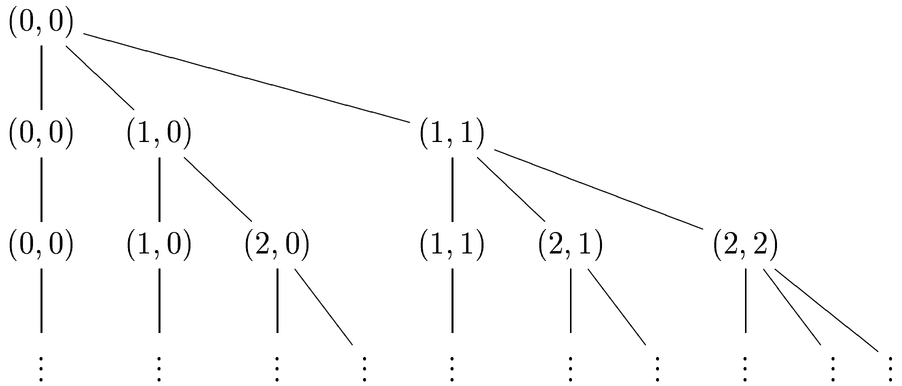
[5]Lembre-se (de 3.3.5) que o objeto inicial de $\mathbf{Prob}_0$ é

$$P_1 = \langle\ \{\star\}, \{\star\}, \{(\star, \star)\}\ \rangle$$

não contém informação sobre qualquer outro problema. Por isso, a floresta $\Omega(P_1)$ é isomorfa ao objeto de valores-verdade do *topos* **Floresta**.

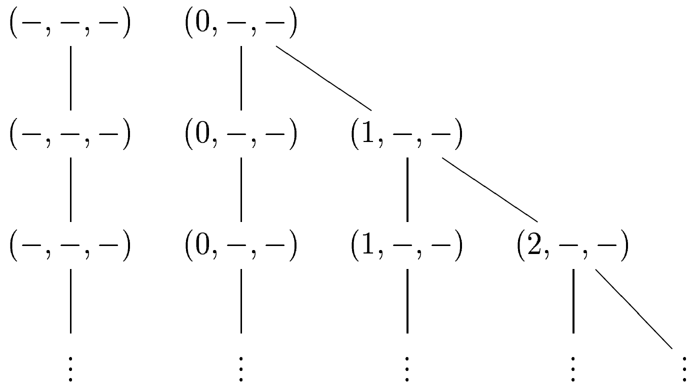
$\Omega(P_2)$ é a floresta abaixo, composta por 3 árvores. Cada nó do nível k é representado por um par onde cada componente é um valor menor ou igual a k, ou o símbolo "$-$". A primeira componente refere-se a P_1, a segunda a P_2.

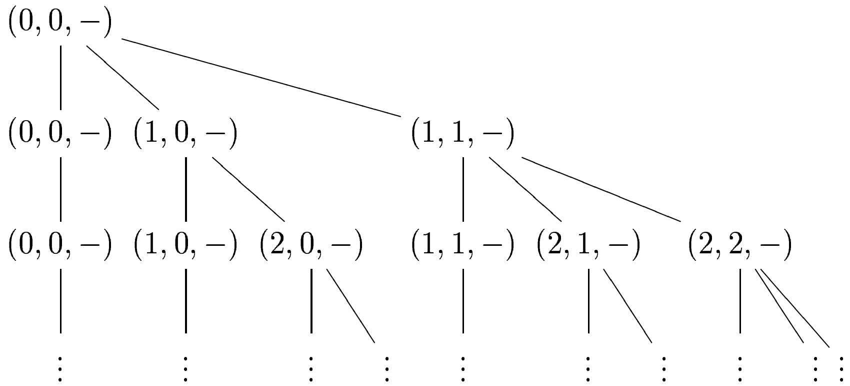


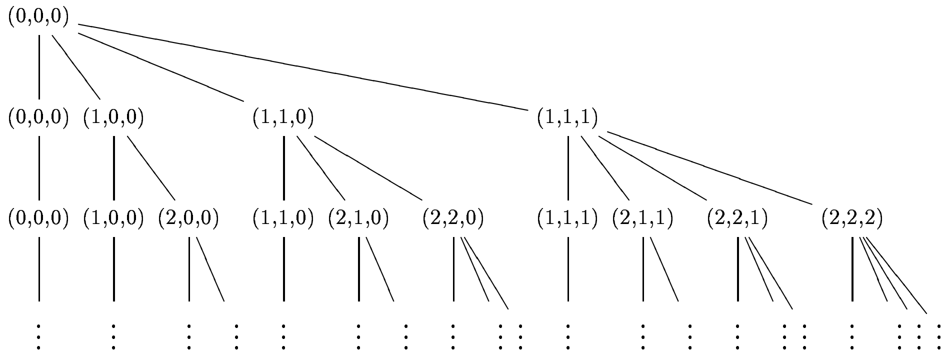


Ω mapeia a redução $P_1 \longrightarrow P_2$ de $\mathbf{Prob}_0$ no homomorfismo que leva um nó (t_1, t_2) de $\Omega(P_2)$ no nó t_1 do mesmo nível em $\Omega(P_1)$.

$\Omega(P_3)$ é a floresta abaixo, composta por 4 árvores. Cada nó do nível k é representado por uma tripla onde cada componente é um valor menor ou igual a k, ou o símbolo "$-$". A primeira componente refere-se a P_1, a segunda a P_2, a terceira a P_3.



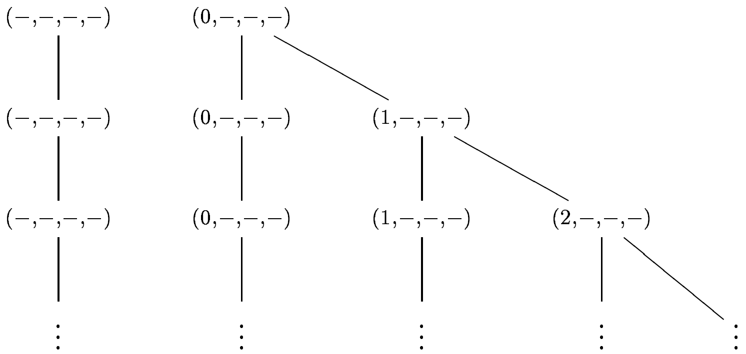


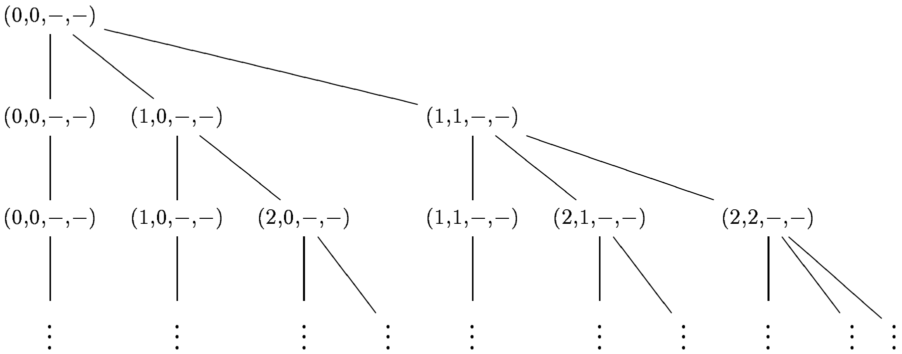


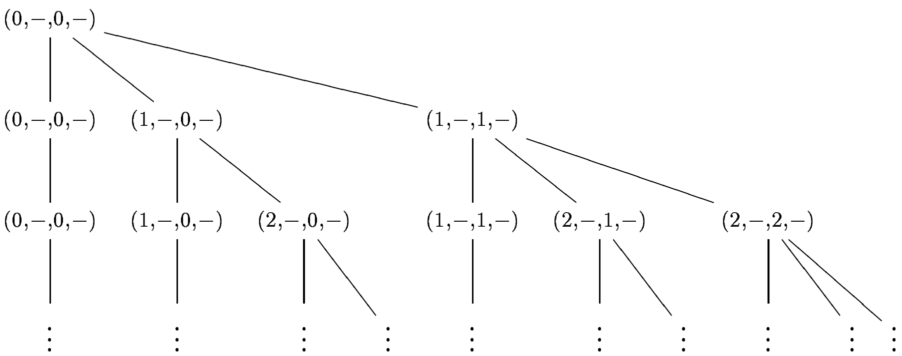
Ω mapeia a redução $P_2 \longrightarrow P_3$ de $\mathbf{Prob}_0$ no homomorfismo que leva um nó (t_1, t_2, t_3) de $\Omega(P_3)$ no nó (t_1, t_2) do mesmo nível em $\Omega(P_2)$.

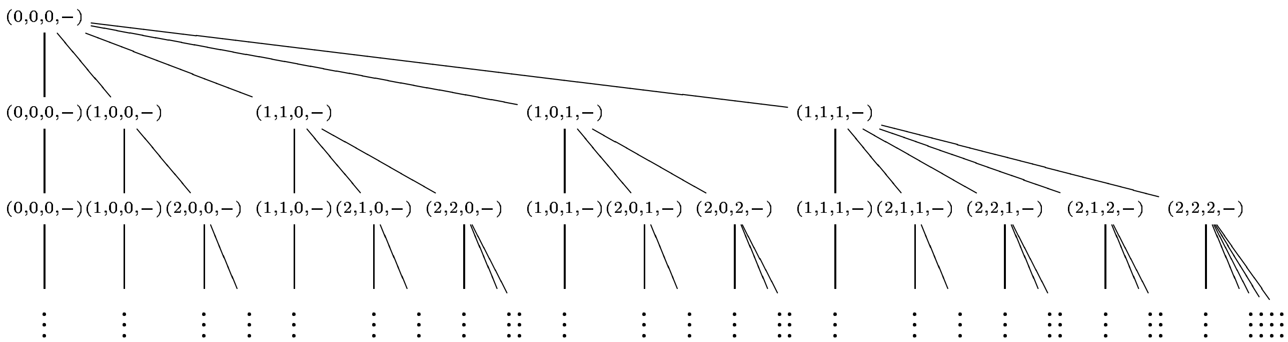
$\Omega(P_4)$ é uma floresta isomorfa a $\Omega(P_2)$, com a diferença de que a segunda componente dos pares se refere a P_4, e não a P_2.

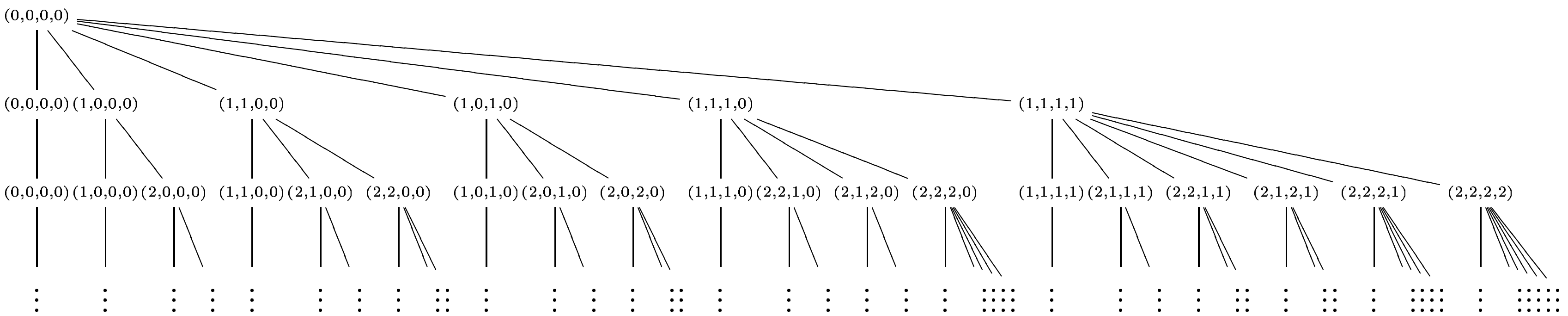
$\Omega(P_5)$ é a floresta abaixo, composta por 5 árvores. Cada nó do nível k é representado por uma quádrupla onde cada componente é um valor menor ou igual a k, ou o símbolo "$-$". A primeira componente refere-se a P_1, a segunda a P_2, a terceira a P_4, a quarta a P_5.


(−,−,−,−)
(0,−,−,−)
(−,−,−,−)
(0,−,−,−)
(1,−,−,−)
(−,−,−,−)
(0,−,−,−)
(1,−,−,−)
(2,−,−,−)


(0,0,−,−)
(0,0,−,−)
(1,0,−,−)
(1,1,−,−)
(0,0,−,−)
(1,0,−,−)
(2,0,−,−)
(1,1,−,−)
(2,1,−,−)
(2,2,−,−)


(0,−,0,−)
(0,−,0,−)
(1,−,0,−)
(1,−,1,−)
(0,−,0,−)
(1,−,0,−)
(2,−,0,−)
(1,−,1,−)
(2,−,1,−)
(2,−,2,−)


(0,0,0,−)
(0,0,0,−)
(1,0,0,−)
(1,1,0,−)
(1,0,1,−)
(1,1,1,−)
(0,0,0,−)
(1,0,0,−)
(2,0,0,−)
(1,1,0,−)
(2,1,0,−)
(2,2,0,−)
(1,0,1,−)
(2,0,1,−)
(2,0,2,−)
(1,1,1,−)
(2,1,1,−)
(2,2,1,−)
(2,1,2,−)
(2,2,2,−)

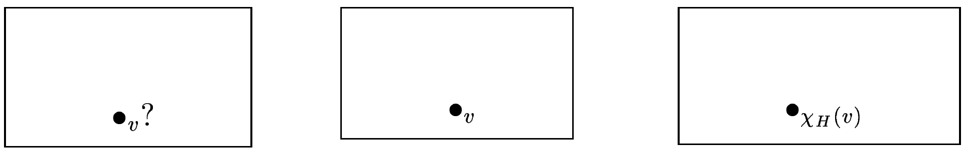

(0,0,0,0)
(0,0,0,0) (1,0,0,0) (1,1,0,0) (1,0,1,0) (1,1,1,0) (1,1,1,1)
(0,0,0,0) (1,0,0,0) (2,0,0,0) (1,1,0,0) (2,1,0,0) (2,2,0,0) (1,0,1,0) (2,0,1,0) (2,0,2,0) (1,1,1,0) (2,2,1,0) (2,1,2,0) (2,2,2,0) (1,1,1,1) (2,1,1,1) (2,2,1,1) (2,1,2,1) (2,2,2,1) (2,2,2,2)

Ω mapeia a redução $P_2 \longrightarrow P_5$ de $\mathbf{Prob}_0$ no homomorfismo que leva um nó (t_1, t_2, t_4, t_5) de $\Omega(P_5)$ no nó (t_1, t_2) do mesmo nível em $\Omega(P_2)$.

Ω mapeia a redução $P_4 \longrightarrow P_5$ de $\mathbf{Prob}_0$ no homomorfismo que leva um nó (t_1, t_2, t_4, t_5) de $\Omega(P_5)$ no nó (t_1, t_4) do mesmo nível em $\Omega(P_4)$.

4.4
Classificando Sub-objetos

4.4.1 O significado dos nós da floresta $\Omega(P)$. Dado um sub-objeto H de um objeto G de **ECF** e um problema P, cada nó v do nível k da floresta GP (independentemente de v estar ou não presente em HP) será mapeado por χ_H em um nó $\chi_H(v)$ do nível k da floresta $\Omega(P)$, como mostra a figura



$$HP \rightarrowtail GP \xrightarrow{\chi_H} \Omega(P)$$

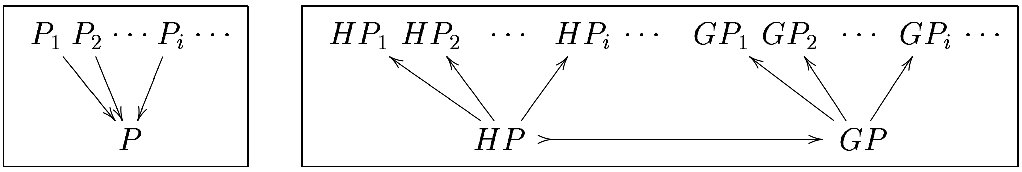
Este nó $\chi_H(v)$ pode ser escrito como

$$\chi_H(v) = (t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots)$$

onde, conforme descrito na seção anterior, existe uma componente t_i para cada problema P_i redutível a P em $\mathbf{Prob}_0$. Cada componente t_i é ou o símbolo "$-$" ou um natural menor ou igual a k.

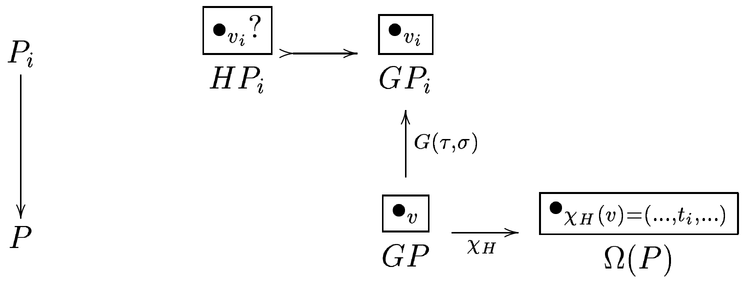
Lembre-se que, para todo P_i redutível a P, G define um homomorfismo da floresta GP para a floresta GP_i, como mostra a figura[6]

[6]Em especial, para algum j, P_j é o próprio P, o que faz com que a componente t_j traga informação sobre o próprio nó v.



Prob$_0$ **Floresta**

Seja um problema P_i redutível a P. A componente t_i de $\chi_H(v)$ traz informação sobre a imagem v_i do nó v na floresta GP_i, como ilustrado abaixo:



Prob$_0$ **Floresta**

Mais precisamente, t_i nos diz qual a situação da imagem v_i de v em GP_i em relação à subfloresta HP_i, conforme descrito na tabela:

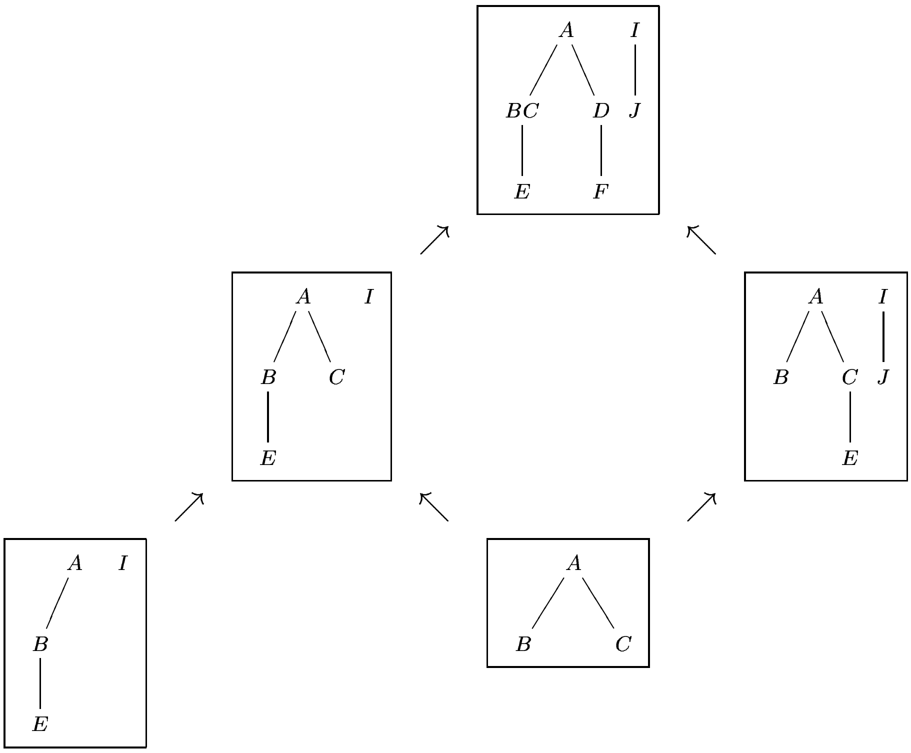
t_i	Situação de v_i
"–"	Nem v_i nem qualquer um de seus ancestrais está presente na floresta HP_i
n	O ancestral mais próximo de v_i que está presente na floresta HP_i está no nível n (em particular, se $n = k$, este nó é o próprio v_i)

4.4.2 Exemplo. Neste exemplo, trabalharemos com a mesma categoria finita **Prob**$_0$ de 4.3. Repetimos abaixo o diagrama de **Prob**$_0$:

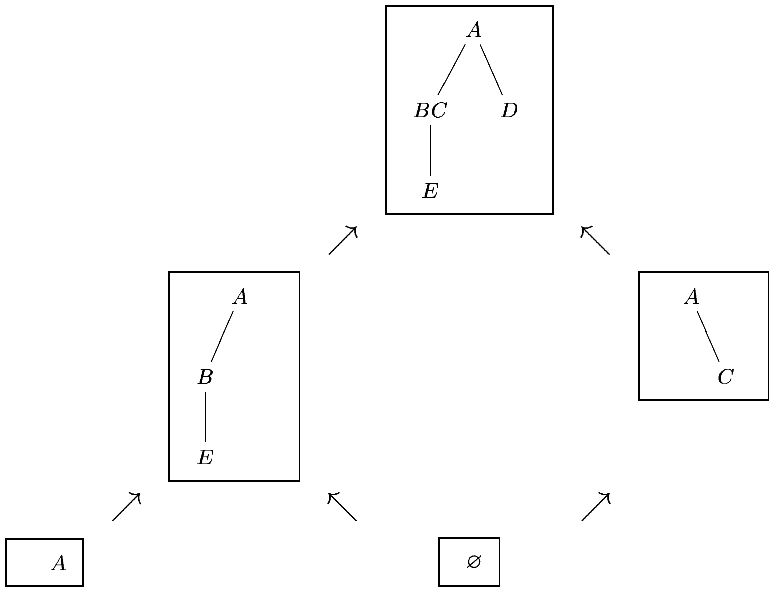
$$\begin{tikzcd}
 & & P_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & P_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & P_4 \arrow[dl] \\
P_3 & & P_5 &
\end{tikzcd}$$

Suponha que o objeto G de **ECF** associe as seguintes florestas aos problemas de $\mathbf{Prob}_0$:

(Aqui, as florestas são mostradas nas mesmas posições relativas dos problemas na figura acima. As letras que representam os nós servem para indicar os homomorfismos nos quais G mapeia as reduções. Por exemplo, o nó A de GP_1 é imagem do nó A de GP_2, e assim por diante. Quando dois nós de uma floresta são mapeados no mesmo nó de outra floresta, o nó imagem é representado pelas duas letras que representam os nós da pré-imagem. Assim, o nó BC de GP_1 é imagem dos nós B e C de GP_2.)



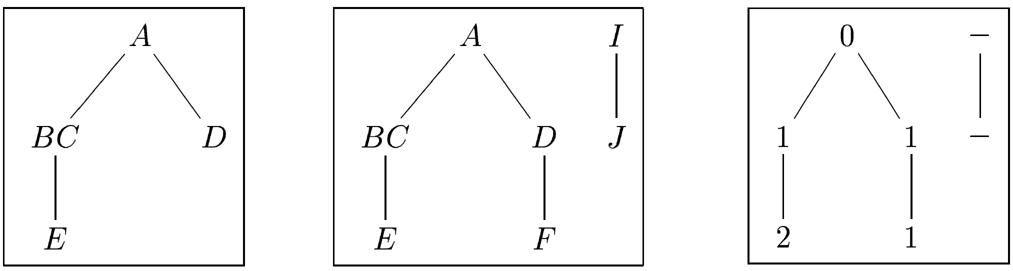
Considere, agora, o sub-objeto H de G que associa as seguintes florestas aos problemas de $\mathbf{Prob}_0$:



(Note que HP_3 é uma floresta composta por um único nó, e que HP_5 é a floresta vazia.)

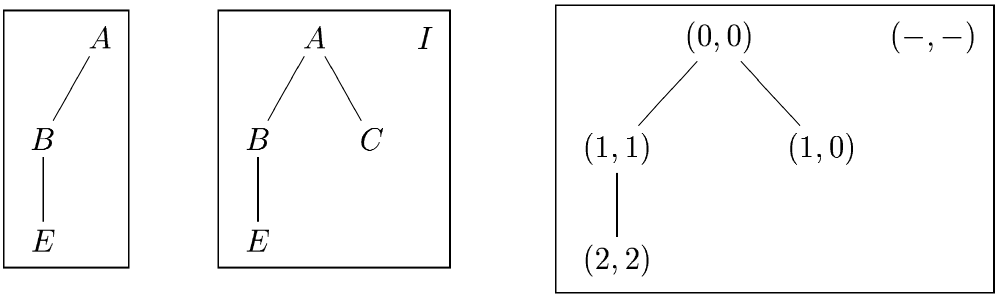
Examinaremos como χ_H mapeia os nós de cada uma das florestas GP_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4.4.3 P_1. Como P_1 é objeto inicial de $\mathbf{Prob}_0$, a imagem de GP_1 via χ_H depende apenas do próprio P_1.



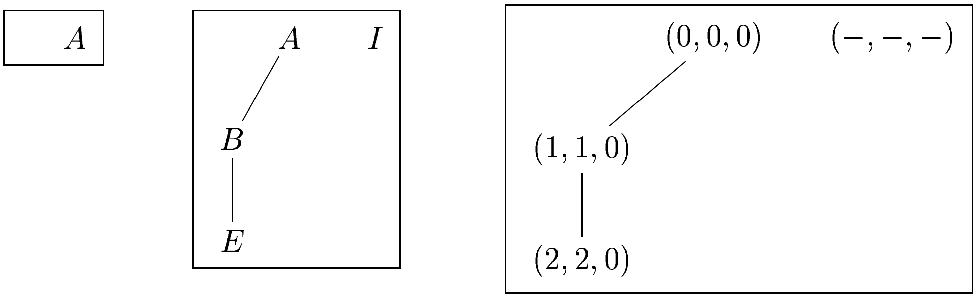
$$HP_1 \qquad \rightarrowtail \qquad GP_1 \qquad \xrightarrow{\chi_H} \qquad \chi_H(GP_1)$$

4.4.4 P_2. Para P_2, a ação de χ_H é como ilustrado abaixo:



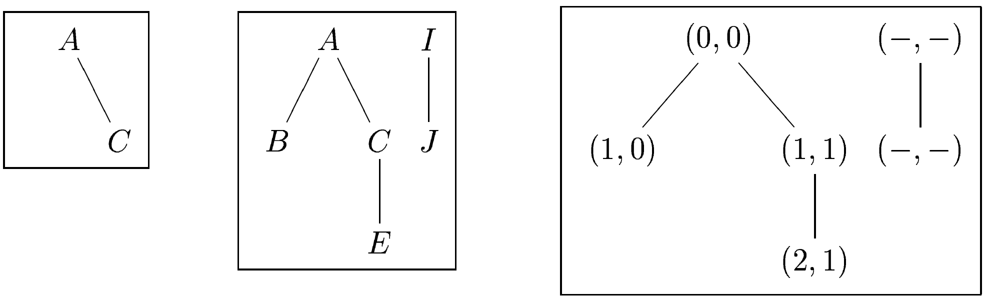
$$HP_2 \rightarrowtail GP_2 \xrightarrow{\chi_H} \chi_H(GP_2)$$

4.4.5 P_3. Para P_3, os nós de GP_3 são mapeados por χ_H do seguinte modo:



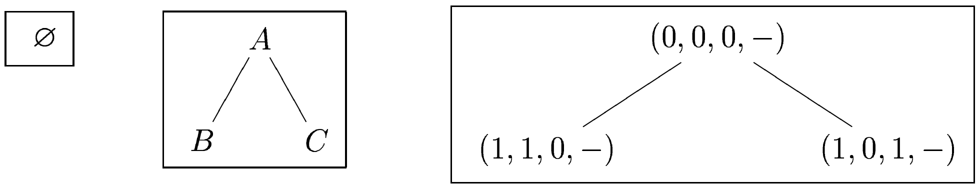
$$HP_3 \rightarrowtail GP_3 \xrightarrow{\chi_H} \chi_H(GP_3)$$

4.4.6 P_4. A ação de χ_H sobre os nós de GP_4 é a seguinte:



$$HP_4 \rightarrowtail GP_4 \xrightarrow{\chi_H} \chi_H(GP_4)$$

4.4.7 P_5. Finalmente, para P_5, temos a seguinte situação:



$$HP_5 \quad \rightarrowtail \quad GP_5 \quad \xrightarrow{\chi_H} \quad \chi_H(GP_5)$$

4.5
Números Naturais no *Topos*

4.5.1 Definição: objeto de números naturais. O NNO – objeto de números naturais de um *topos* é uma tripla $\langle\ N, s, 0\ \rangle$, com N um objeto, 0 um morfismo $1 \xrightarrow{0} N$, e s um morfismo $N \xrightarrow{s} N$, satisfazendo a seguinte propriedade universal:

Para todo objeto A com morfismos

$$1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} A$$

existe exatamente um morfismo $h : A \to N$ tal que

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "x"'] & & \\ & A \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

comuta. Isto equivale a dizer que h pode ser definida por recursão simples a partir de x e f, pois

$$\begin{cases} h \circ 0 = x \\ h \circ s = f \circ h \end{cases}$$

4.5.2 A ordem total "$\leq$" em um NNO. Em todo *topos* contendo um NNO N, é possível definir um predicado "$\leq$" sobre $N \times N$ correspondendo à relação "menor ou igual" entre os naturais. Para isto, precisamos do princípio da recursão primitiva, que é uma consequência da propriedade universal do NNO ([13, p. 222]):

Para todo objeto A com morfismos

$$1 \xrightarrow{x} A$$

e

$$A \times N \xrightarrow{f} A$$

existe exatamente um morfismo $h : N \to A$ tal que os dois diagramas

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "h"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "x"'] & \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\langle h, \mathrm{id}_N \rangle"'] & N \arrow[d, "h"] \\ A \times N \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

comutam. Isto equivale a dizer que h pode ser definida por recursão primitiva a partir de x e f, pois

$$\begin{cases} h \circ 0 = x \\ h \circ s = f \circ \langle\, h, \mathrm{id}_N \,\rangle \end{cases}$$

Agora, define-se a relação $<$ do seguinte modo ([13, p. 224]).

- O objeto A é PN;
- O morfismo $1 \xrightarrow{x} PN$ é o dado pelo termo $\{\langle\, \star, \varnothing \,\rangle\}$;
- O morfismo $PN \times N \xrightarrow{f} PN$ é dado pelo termo

$$\{\langle\, \langle\, u, n \,\rangle, u \cup \{n\} \,\rangle \;\mid\; \langle\, u, n \,\rangle \in PN \times N\}$$

- Pelo princípio da recursão primitiva, obtemos um único morfismo

$$N \xrightarrow{h} PN$$

tal que, dado $n \in N$

$$\begin{cases} h(0) = & \varnothing \\ h(sn) = & h(n) \cup \{n\} \end{cases}$$

- Então, definimos $m < n$ como abreviatura de $m \in h(n)$;
- Finalmente, definimos $m \leq n$ como abreviatura de $m \leq n \;\vee\; m = n$.

A definição do predicado "$\leq$" é útil, no nosso caso, para permitir a comparação entre as notas de diferentes nós de uma floresta, como veremos no próximo capítulo.

4.5.3 Operações sobre os naturais.

Além da ordem "$\leq$", definimos de maneira usual (ver [13]) as operações "$+$" e "$\cdot$" de adição e multiplicação entre os naturais.

4.5.4 O NNO de ECF.

Como todo *topos* da forma $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$, **ECF** tem um NNO $\langle N, s, 0 \rangle$. Em qualquer categoria da forma $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$, o NNO é dado pelo funtor

$$N : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

que mapeia cada objeto c de $\mathbf{C}$ no conjunto $\mathbb{N}$, e cada morfismo $c \longrightarrow c'$ de $\mathbf{C}$ na função identidade $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

O morfismo $0 : 1 \to N$ é a transformação natural cuja componente 0_c relativa ao objeto c de $\mathbf{C}$ é a função

$$\begin{array}{rcl} 0_c : \{\star\} & \to & \mathbb{N} \\ \star & \mapsto & 0 \end{array}$$

O morfismo $s : N \to N$ é a transformação natural cuja componente s_c relativa ao objeto c de $\mathbf{C}$ é a função

$$\begin{array}{rcl} s_c : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

No nosso *topos* específico, N é o funtor que associa a cada problema P uma floresta consistindo de uma quantidade infinita (enumerável) de árvores lineares infinitas. Ou seja, para cada P, a floresta NP tem a forma

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \\ | & | & | & \\ 0 & 1 & 2 & \cdots \\ | & | & | & \\ 0 & 1 & 2 & \cdots \\ | & | & | & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

O morfismo $1 \xrightarrow{0} N$ é a transformação natural que, para cada problema, escolhe a árvore linear

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

O morfismo $N \xrightarrow{s} N$ é a transformação natural que, para cada problema, mapeia cada árvore linear

$$n \text{ --- } n \text{ --- } n \text{ --- } \cdots$$

na árvore linear

$$n+1 \text{ --- } n+1 \text{ --- } n+1 \text{ --- } \cdots$$

4.6
Números Racionais no *Topos*

4.6.1 Construção dos inteiros. Em todo *topos* com objeto de números naturais, é possível definir o objeto Z dos números inteiros (negativos e positivos) da maneira usual, como em [33]. Z é definido no *topos* como o coproduto

$$N + \{n \in N \mid 0 < n\}$$

4.6.2 Construção dos racionais. Agora o objeto Q dos racionais pode ser definido, também da maneira usual ([33]), como um conjunto de classes de equivalência de pares (m, n) com $n \neq 0$. A ordem "$\leq$" e as operações "$+$" e "$\cdot$" também são definidas como de costume.

4.7
Conclusões do Capítulo

4.7.1 Resumo. Este capítulo apresentou a escolha do *topos* **ECF** para a especificação das heurísticas e examinou o objeto inicial, o classificador de sub-objetos e os objetos de números naturais e de números racionais de **ECF**.

O objeto de valores-verdade Ω desempenha papel fundamental na lógica interna do *topos*. No próximo capítulo, utilizaremos Ω, seus valores-verdade e seus sub-objetos para especificar diversas propriedades de interesse dos funtores G e seus sub-objetos $H \rightarrowtail G$.

O objeto de números naturais também será útil no próximo capítulo, na medida em que torna possível a definição, por recursão, de morfismos e objetos que participarão da especificação de heurísticas.

O objeto de números racionais nos permitirá trabalhar com estratégias de busca estocásticas, onde as probabilidades associadas aos estágios da busca são valores racionais entre 0 e 1.