

## 3

### Construção de Espaços de Busca

Neste capítulo, abordamos a construção de espaços de busca do ponto de vista de Teoria das Categorias. A definição de uma heurística pressupõe uma estratégia de construção de espaços de busca (um espaço de busca para cada problema). Cada estratégia possível é encarada como um objeto de uma categoria de estratégias, e esta categoria é um *topos*.

#### 3.1

##### Espaços de Busca

**3.1.1 Grafos de estados.** Tradicionalmente, espaços de busca são definidos como grafos de estados: grafos direcionados cujos arcos são rotulados por operadores ou ações, e cujos nós são descritos em algum formalismo lógico, de forma que um nó corresponde a um certo “estado das coisas”. Esta visão é comum na modelagem de heurísticas construtivas (incrementais), onde uma resposta é montada passo-a-passo. Cada estado representa um estágio na montagem da resposta, e os arcos representam as possíveis escolhas no processo de montagem.

**3.1.2 Heurísticas “sem estados”.** Em algumas estratégias heurísticas (e.g. busca local, *heuristic repair*), parece não existir uma noção explícita de “estado”, pelo menos não no sentido do parágrafo anterior; a cada momento durante a execução da busca, apenas uma resposta ou uma população de respostas é considerada. Assim, um “grafo de estados” para uma estratégia deste tipo poderia consistir de

- nós que correspondem a (conjuntos de) respostas, e
- arcos que representam as possíveis alterações que a resposta (ou população) pode sofrer.

**3.1.3 Funções heurísticas.** Heurísticas costumam associar um valor numérico a cada nó do grafo de busca, representando a qualidade do estado representado pelo nó (em relação à instância sendo resolvida). Esta associação é feita por uma função heurística, que mapeia pares (estado, instância) em valores numéricos. Sem perda de generalidade, como nosso universo é um conjunto enumerável, podemos considerar que estes valores são números naturais e que valores menores significam respostas de maior qualidade.

## 3.2

### Florestas de Respostas

**3.2.1 Estados como conjuntos de respostas.** Os primeiros artigos sobre modelos formais para algoritmos *branch-and-bound* para problemas de otimização ([17], por exemplo) fornecem uma indicação de como as duas visões acima podem ser conciliadas. Como discutido em [1], o processo de montar uma resposta passo-a-passo é análogo ao processo de “podar” um conjunto de respostas viáveis.

Considere uma instância do problema do Caixeiro Viajante Construtivo (CVC, ver 2.1.6) com as cidades  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Uma heurística construtiva poderia seguir os seguintes passos:

1. Iniciar com a turnê vazia;
2. Escolher a cidade  $B$  como a primeira da turnê;
3. Escolher a cidade  $D$  como a segunda da turnê.

Neste ponto, temos a “resposta” parcial  $\rightarrow B \rightarrow D$ , que corresponde a um estado no grafo de busca.

O processo análogo, envolvendo “poda” de conjuntos de respostas, consiste em

1. Iniciar com o conjunto de todas as turnês possíveis;
2. Descartar todas as turnês que *não* têm  $B$  como a primeira cidade;
3. Descartar, do conjunto resultante do passo anterior, todas as turnês que *não* têm  $D$  como a segunda cidade;

Neste ponto, temos um conjunto de respostas que consiste em todas as turnês cuja primeira cidade é  $B$  e cuja segunda cidade é  $D$ .

Dito de maneira simples, temos uma *representação* de respostas parciais em termos de conjuntos de respostas. Neste caso específico, uma turnê parcial é representada pelo conjunto de todas as suas extensões.

Desta forma, grafos de busca, tanto de heurísticas construtivas quanto de meta-heurísticas, podem ser considerados como grafos consistindo de nós que estão associados a conjuntos de respostas.

**3.2.2 Florestas em vez de grafos.** Todo grafo com um nó inicial designado pode ser representado por sua árvore de sincronização (ver 1.2.4). Quando o grafo não possui nó inicial, obtemos uma “floresta de sincronização” em vez de uma árvore. Cada árvore da floresta corresponde à escolha de um nó do grafo como inicial.

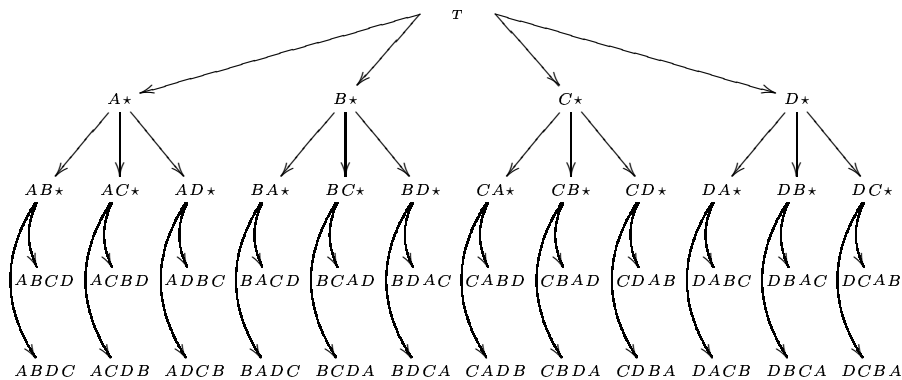
Por causa do relacionamento especial que existe entre uma floresta de sincronização e o grafo que lhe deu origem, efetuar uma busca na floresta corresponde a efetuar uma busca no grafo. Assim, concentrar-nos-emos em buscas em florestas, apenas.

**3.2.3 Definição: Florestas de Respostas.** Dado um problema  $\langle D, R, p \rangle$ , uma floresta de respostas para  $P$  é uma floresta  $T$  cujos nós são rotulados por uma função  $\lambda : N \rightarrow \wp(R) \times \mathbb{N}$ , onde  $N$  é o conjunto de nós da floresta  $T$ , e  $\wp(R)$  é o conjunto das partes de  $R$ .

**3.2.4 Nós semelhantes com qualidades diferentes.** A definição é bem abrangente. Nós diferentes  $n$  e  $n'$  podem possuir rótulos  $\lambda(n) = (A, k)$  e  $\lambda(n') = (A', k')$ , com  $A = A'$  mas  $k \neq k'$ . Isto é conveniente para modelar funções heurísticas dinâmicas, que retornam valores diferentes para o mesmo estado em momentos diferentes durante a execução da busca; um exemplo é o algoritmo  $A^*$ , onde a avaliação de um nó  $n$  do grafo de estados varia segundo o custo do menor caminho (encontrado até então) do estado inicial até  $n$ .

**3.2.5 Exemplo.** Um fragmento (uma árvore) de uma possível floresta de respostas para o problema CVC discutido acima, considerando um conjunto de cidades  $\{A, B, C, D\}$ , é mostrado a seguir.

Os nós estão rotulados de acordo com uma notação onde “ $AB^*$ ”, por exemplo, denota o conjunto de todas as turnês cujas duas primeiras cidades são  $A$  e  $B$ , nesta ordem (i.e., o conjunto  $\{ABCD, ABDC\}$ ). Por razões de espaço, os valores representando a qualidade dos nós foram omitidos. O nó raiz, representado por  $T$ , está associado ao conjunto de todas as turnês formadas pelas cidades  $A, B, C$  e  $D$ .



### 3.3

#### Estratégias de Construção de Florestas de Respostas

**3.3.1 Associando florestas de respostas a problemas.** Uma estratégia de construção de florestas de respostas deve associar uma floresta de respostas a cada problema através de um funtor. Para tanto, precisamos definir a ação do funtor sobre os morfismos de **Prob** (reduções entre problemas).

Um homomorfismo  $T_1 \xrightarrow{f} T_2$  entre florestas é uma função  $f : N_1 \rightarrow N_2$  entre os conjuntos de nós tal que

- Se  $n$  é uma raiz de  $T_1$ , então  $f(n)$  é uma raiz de  $T_2$ ;
- Se  $n'$  é filho de  $n$ , então  $f(n')$  é filho de  $f(n)$ .

Dada uma redução  $P \xrightarrow{(\tau, \sigma)} P'$  e duas florestas de respostas  $T$  e  $T'$  associadas a  $P$  e  $P'$ , respectivamente, é razoável pensar que visitar um nó da floresta  $T'$  rotulado por  $(A', k)$  equivale a visitar um nó de  $T$  rotulado por  $(\sigma(A'), k)$ , onde  $\sigma(A') = \bigcup_{r' \in A'} \sigma(r')$ . Em outras palavras, nossas ações na floresta  $T'$  são mapeadas

pela função  $\sigma$  em ações na floresta  $T$ . Isto nos faz concluir que uma redução  $P \xrightarrow{(\tau, \sigma)} P'$  deve ser mapeada em um homomorfismo de florestas  $T' \xrightarrow{m} T$ , e este homomorfismo  $m$  deve “concordar” com  $\sigma$  em relação aos rótulos dos nós.

Assim, uma redução  $P \longrightarrow P'$  é mapeada em um homomorfismo  $T' \longrightarrow T$ , no sentido inverso da redução, resultando em um funtor contravariante. Isto nos leva a uma primeira definição de estratégia de construção de florestas de respostas:

**3.3.2 Definição (provisória): Estratégia de Construção de Florestas de Respostas.** Seja a categoria **RFloresta**, que tem como objetos todas as florestas  $T$  com nós rotulados, e como morfismos  $m : T \rightarrow T'$  todos os homomorfismos de florestas. Definimos uma Estratégia de Construção de Florestas de Respostas (ECFR) como um funtor  $S : \mathbf{Prob}^{op} \rightarrow \mathbf{RFloresta}$  tal que para cada problema  $\langle D, R, p \rangle$ , a floresta rotulada  $SP$  é uma floresta de respostas para  $P$  conforme descrito em 3.2.3.<sup>1</sup>

A ação de  $S$  sobre uma redução

$$P \xrightarrow{(\tau, \sigma)} P'$$

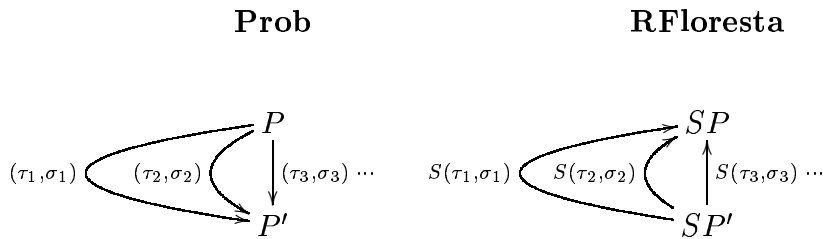
é mapear tal redução em um homomorfismo de florestas

$$SP' \xrightarrow{S(\tau, \sigma)} SP$$

que “concorda” com  $\sigma$ , no sentido de que cada nó de  $SP'$  rotulado por um par  $(A', k)$  deve ser mapeado em um nó de  $SP$  rotulado pelo par  $(\sigma(A'), k)$ , com  $\sigma(A') = \bigcup_{r' \in A'} \sigma(r')$ .

**3.3.3 Um problema: a quantidade de reduções entre dois problemas.** Entre dois problemas  $P$  e  $P'$ , podem existir diversas (possivelmente infinitas) reduções. Este fato, de certa forma, exige demais do nosso funtor  $S$  definido acima:  $SP$  e  $SP'$  são florestas fixas, que precisam comportar tantos homomorfismos  $SP' \longrightarrow SP$  diferentes quanto forem as diferentes funções  $\sigma$  das reduções  $P \longrightarrow P'$ , conforme ilustrado na figura abaixo.

<sup>1</sup>Aqui,  $\mathbf{Prob}^{op}$  é a categoria oposta de  $\mathbf{Prob}$ ; i.e., consistindo dos mesmos objetos que  $\mathbf{Prob}$ , mas com cada morfismo no sentido contrário do morfismo correspondente em  $\mathbf{Prob}$ . Dizer que  $S$  é um funtor  $S : \mathbf{Prob}^{op} \rightarrow \mathbf{RFloresta}$  é dizer que  $S$  é um funtor contravariante, que mapeia um morfismo  $P \rightarrow P'$  de  $\mathbf{Prob}$  em um morfismo  $SP \leftarrow SP'$  de  $\mathbf{RFloresta}$ .



Dependendo dos problemas  $P$  e  $P'$ , se a quantidade de reduções diferentes de  $P$  para  $P'$  em **Prob** for grande o suficiente, pode ocorrer que a floresta  $SP$  precise conter um nó rotulado com  $A$  para cada conjunto de respostas  $A$  de  $P$ . Para evitar essa situação extrema – i.e., para não exigir que a floresta  $SP$  dê conta de todas as reduções de  $P$  para  $P'$  –, estipulamos uma restrição:

*Ao associarmos uma floresta de respostas  $SP$  a cada problema  $P$ , devemos considerar apenas uma redução entre cada par de problemas  $P, P'$ .*

Isto corresponde à intuição de que, quando usamos a solução de um problema  $P'$  para obter uma solução de um problema  $P$  redutível a  $P'$ , costumamos pensar em uma única redução específica de  $P$  para  $P'$ , e não em todas tais reduções.

Esta restrição será operacionalizada no restante desta seção.

### 3.3.4 Trabalhando com um conjunto parcialmente ordenado de problemas.

A idéia é trabalhar com uma categoria de problemas onde exista no máximo uma única redução entre dois problemas quaisquer. Ou seja, queremos tomar um *poset* (um conjunto parcialmente ordenado) de problemas. Assim, tomaremos uma subcategoria **Prob**<sub>0</sub> de **Prob** tal que, para cada par de problemas  $P, P'$  em **Prob**<sub>0</sub>, existe no máximo uma redução envolvendo  $P$  e  $P'$  em **Prob**<sub>0</sub>; i.e., uma redução  $P \rightarrow P'$  ou uma redução  $P' \rightarrow P$ , mas não ambas.

### 3.3.5 Escolhendo instâncias. O problema

$$P_1 = \langle \{\star\}, \{\star\}, \{(\star, \star)\} \rangle$$

é redutível a todos os outros problemas  $P$  de **Prob**. Mais ainda, uma redução  $P_1 \xrightarrow{(\tau, \sigma)} P$  determina uma instância específica de  $P$ : a instância  $d = \tau(\star)$ .

Na escolha da subcategoria **Prob**<sub>0</sub> de **Prob**, decidiremos proceder sempre de

forma que o problema  $P_1$  acima seja um objeto de  $\mathbf{Prob}_0$ , e sempre de forma que exista exatamente um morfismo em  $\mathbf{Prob}_0$  de  $P_1$  para cada problema  $P$  em  $\mathbf{Prob}_0$ . Em outras palavras,  $P_1$  é o objeto inicial de  $\mathbf{Prob}_0$ .

**3.3.6 Uma nova definição de Estratégia de Construção de Florestas de Respostas.** Uma categoria  $\mathbf{C}$  é dita *rarefeita* se, para todo par de objetos  $A, B$  de  $\mathbf{C}$ , existe no máximo um morfismo  $A \rightarrow B$  em  $\mathbf{C}$ . Uma categoria  $\mathbf{C}$  é dita *esquelética* se todo objeto de  $\mathbf{C}$  é isomorfo apenas a si mesmo. Uma categoria rarefeita e esquelética corresponde a um conjunto parcialmente ordenado visto como uma categoria, e vice-versa.

Agora, nossa definição de ECFR tornou-se parametrizada pela subcategoria  $\mathbf{Prob}_0$  de  $\mathbf{Prob}$  (compare com a definição anterior em 3.3.2):

**3.3.7 Definição (revista): Estratégia de Construção de Florestas de Respostas.** Seja  $\mathbf{Prob}_0$  uma subcategoria rarefeita e esquelética de  $\mathbf{Prob}$  tal que o problema  $P_1$  definido em 3.3.5 acima é o objeto inicial de  $\mathbf{Prob}_0$ . Uma Estratégia de Construção de Florestas de Respostas (ECFR) sobre  $\mathbf{Prob}_0$  é um functor  $S : \mathbf{Prob}_0^{op} \rightarrow \mathbf{RFloresta}$  tal que, para cada problema  $P = \langle D, R, p \rangle$ , a floresta  $SP$  é uma floresta de respostas para  $P$  segundo a definição 3.2.3.

A ação de  $S$  sobre uma redução

$$P \xrightarrow{(\tau, \sigma)} P'$$

é mapear tal redução em um homomorfismo de florestas

$$SP' \xrightarrow{S(\tau, \sigma)} SP$$

que “concorda” com  $\sigma$ , no sentido de que cada nó de  $SP'$  rotulado por um par  $(A', k)$  deve ser mapeado em um nó de  $SP$  rotulado pelo par  $(\sigma(A'), k)$ , com  $\sigma(A') = \bigcup_{r' \in A'} \sigma(r')$ .

### 3.4

## Categorias de Estratégias de Construção de Florestas

**3.4.1 Relacionando estratégias.** Como uma de nossas metas é estudar ECFRs e os relacionamentos entre elas, gostaríamos de definir uma categoria  $\mathbf{ECFR}^0$  de Estratégias de Construção de Florestas de Respostas. O sobrescrito “0” significa que esta será uma definição preliminar, a ser refinada mais adiante. Neste tipo de categoria, os objetos são funtores, e os morfismos são transformações naturais entre funtores.

**3.4.2 Definição: a categoria  $\mathbf{ECFR}^0$ .** Seja  $\mathbf{Prob}_0$  uma subcategoria rarefeita e esquelética de  $\mathbf{Prob}$  tal que o problema  $P_1$  definido em 3.3.5 é o objeto inicial de  $\mathbf{Prob}_0$ . A categoria  $\mathbf{ECFR}^0$  possui, como objetos, ECFRs sobre  $\mathbf{Prob}_0$  (funtores  $S$  de  $\mathbf{Prob}_0^{op}$  para  $\mathbf{RFloresta}$  que satisfazem a definição 3.3.7). Um morfismo de uma ECFR  $S$  para uma ECFR  $S'$  é uma transformação natural de  $S$  para  $S'$ , i.e., uma coleção de homomorfismos de florestas

$$\{h_P \mid P \in \mathbf{Prob}_0\}$$

em  $\mathbf{RFloresta}$  tais que, para cada par de problemas  $P$  e  $P'$ , o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Prob}_0 & & \mathbf{RFloresta} \\
 \begin{array}{c} P \\ \downarrow (\tau, \sigma) \\ P' \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \downarrow h \\ \xrightarrow{S'} \end{array} & \begin{array}{ccc} SP & \xrightarrow{h_P} & S'P \\ \uparrow S(\tau, \sigma) & & \uparrow S'(\tau, \sigma) \\ SP' & \xrightarrow{h_{P'}} & S'P' \end{array}
 \end{array}$$

**3.4.3 Caracterizando ECFRs.** Pelas definições acima, nem todo funtor de  $\mathbf{Prob}_0^{op}$  para  $\mathbf{RFloresta}$  é uma ECFR, mas apenas aqueles que mapeiam cada problema  $P$  de  $\mathbf{Prob}_0$  em uma floresta de respostas (def. 3.2.3) para  $P$ . Isto significa que  $\mathbf{ECFR}^0$  é uma subcategoria própria da categoria funtorial  $\mathbf{RFloresta}^{\mathbf{Prob}_0^{op}}$ .



Acontece que podemos caracterizar ECFRs como objetos de outra categoria, mais conveniente. Esta nova categoria, **ECFR**, será isomorfa a  $\mathbf{ECFR}^0$  como definida acima. Na nova categoria, o codomínio dos funtores  $S$  será a categoria **Floresta** das florestas *sem rótulos*, e o rotulamento dos nós será feito através de um funtor especial e uma transformação natural.

O mais interessante é que a nova categoria **ECFR** se revelará um *topos* (significando, obviamente, que  $\mathbf{ECFR}^0$  também é um *topos*). As seguintes definições conduzem à caracterização desejada.

**3.4.4 Definição: o funtor  $L$ .** Seja **Floresta** a categoria de florestas (sem rótulos) e homomorfismos de florestas. Seja  $\mathbf{Prob}_0$  uma subcategoria rarefeita e esquelética de **Prob**, com objeto inicial  $P_1$  como definido em 3.3.5.

Defina  $L : \mathbf{Prob}_0^{op} \rightarrow \mathbf{Floresta}$  como sendo o funtor que mapeia cada problema  $P = \langle D, R, p \rangle$  na floresta  $LP$  tal que o conjunto de nós do nível 0 (as raízes) é

$$C = \wp(R) \times \mathbb{N} = \{(A, k) \mid A \subseteq R, k \in \mathbb{N}\}$$

Em geral, o conjunto de nós do nível  $i$  é

$$C^{i+1} = \underbrace{C \times C \times \cdots \times C}_{i+1}$$

e cada nó da forma

$$((A_1, k_1), \cdots, (A_i, k_i), (A_{i+1}, k_{i+1}))$$

é filho do nó

$$((A_1, k_1), \cdots, (A_i, k_i))$$

Quanto a morfismos,  $L$  mapeia uma redução

$$P \xrightarrow{(\tau, \sigma)} P'$$

no homomorfismo de florestas

$$LP' \xrightarrow{L(\tau, \sigma)} LP$$

que mapeia cada nó do nível  $i$  de  $LP'$  da forma

$$((A'_1, k'_1), \cdots, (A'_i, k'_i))$$

no nó do nível  $i$  de  $LP$

$$((\sigma(A'_1), k'_1), \dots, (\sigma(A'_i), k'_i))$$

**3.4.5 O significado do functor  $L$ .** O functor  $L$  é especialmente útil para rotular os nós de outras florestas. Dada uma floresta  $T$  em **Floresta**, qualquer homomorfismo de  $T$  para  $LP$  determina um rotulamento de cada nó de  $T$  por um par  $(A, k)$  de tal forma que a floresta rotulada resultante é uma floresta de respostas para  $P$  segundo a definição 3.2.3.

(Para ver como tal rotulamento se dá, basta considerar que cada nó de  $T$  cuja imagem é um nó da forma

$$((A_1, k_1), \dots, (A_i, k_i))$$

está sendo rotulado com o par  $(A_i, k_i)$ . Os outros componentes da tupla servem apenas para armazenar o caminho da raiz até o nó.)

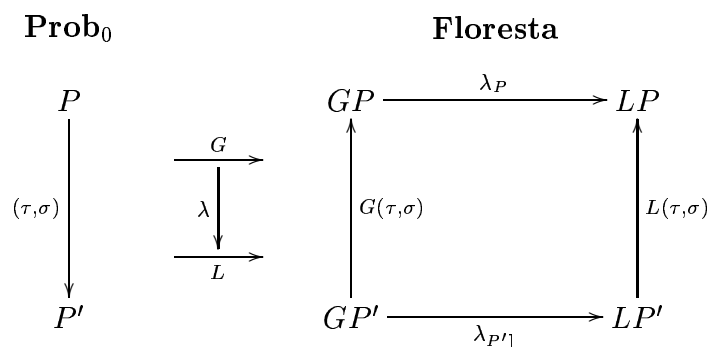
Assim, dada uma ECFR  $S$  e um problema  $P$ , a floresta de respostas (rotulada)  $SP$  corresponde ao par  $\langle GP, \lambda_P \rangle$ , onde  $GP$  é uma floresta isomorfa a  $SP$  (mas sem os rótulos), e  $\lambda_P$  é o homomorfismo de  $GP$  para  $LP$  que determina os rótulos.

Quanto às reduções, lembremos (def. 3.3.7) que dada uma redução

$$P \xrightarrow{(\tau, \sigma)} P'$$

$S(\tau, \sigma)$  deve “concordar” com  $\sigma$ . Isto significa que  $\lambda_P$  é componente de uma transformação natural do functor  $G$  (que mapeia cada problema na versão sem rótulos da floresta  $SP$  e que mapeia cada redução no mesmo homomorfismo que  $S$ ) para o functor  $L$ .

Estas idéias estão ilustradas no diagrama abaixo, sendo formalizadas nas definições e resultados a seguir.



**3.4.6 Definição: a categoria ECFR.** Seja  $\mathbf{Prob}_0$  uma subcategoria rarefeita e esquelética de  $\mathbf{Prob}$  tal que o problema  $P_1$  definido em 3.3.5 é o objeto inicial de  $\mathbf{Prob}_0$ ; a categoria  $\mathbf{ECFR}$  possui como objetos todos os pares

$$\langle G, \lambda \rangle$$

com  $G : \mathbf{Prob}_0^{op} \rightarrow \mathbf{Floresta}$  um funtor e  $\lambda : G \rightarrow L$  uma transformação natural.

Um morfismo

$$\langle G, \lambda \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle G', \lambda' \rangle$$

é uma transformação natural  $\alpha : G \rightarrow G'$  tal que

$$\lambda = \lambda' \circ \alpha$$

como visto no seguinte diagrama, na categoria funtorial  $\mathbf{Floresta}^{\mathbf{Prob}_0^{op}}$ :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & G' \\ \lambda \searrow & & \swarrow \lambda' \\ & L & \end{array}$$

**3.4.7 Proposição:**  $\mathbf{ECFR}$  é isomorfa a  $\mathbf{ECFR}^0$ .

**3.4.8 Teorema:**  $\mathbf{ECFR}$  é um *topos*.

**3.4.9 Notação.** Na verdade, para cada subcategoria rarefeita e esquelética  $\mathbf{Prob}_0$  de  $\mathbf{Prob}$  tal que o problema  $P_1$  definido em 3.3.5 é o objeto inicial de  $\mathbf{Prob}_0$ , existe um funtor  $L : \mathbf{Prob}_0^{op} \rightarrow \mathbf{Floresta}$  e um *topos*  $\mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0}$ . Para não carregar a notação, omitiremos o subscrito “ $\mathbf{Prob}_0$ ”, como fizemos nesta seção, chamando o *topos* apenas de  $\mathbf{ECFR}$  quando não houver possibilidade de confusão. Na próxima seção, veremos como relacionar os diferentes *topoi* definidos por diferentes subcategorias  $\mathbf{Prob}_0$  de  $\mathbf{Prob}$ .

### 3.5

#### Uma Categoria Indexada

**3.5.1 Variando a subcategoria  $\mathbf{Prob}_0$ .** Os resultados acima mostram que, para cada subcategoria rarefeita e esquelética  $\mathbf{Prob}_0$  de  $\mathbf{Prob}$  tal que o problema  $P_1$  definido em 3.3.5 é o objeto inicial de  $\mathbf{Prob}_0$ , a categoria  $\mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0}$  é um *topos*. Perguntamo-nos, então: dada uma outra subcategoria rarefeita e esquelética  $\mathbf{Prob}'_0$  de  $\mathbf{Prob}$  tal que o problema  $P_1$  é o objeto inicial de  $\mathbf{Prob}'_0$ , qual o relacionamento entre  $\mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0}$  e  $\mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}'_0}$ ?

**3.5.2 Uma categoria de subcategorias de  $\mathbf{Prob}$ .** Vamos nos ater ao caso mais simples em que  $\mathbf{Prob}_0 \subseteq \mathbf{Prob}'_0 \subseteq \mathbf{Prob}$ . Isto equivale a definir uma categoria  $\mathbf{SubProb}$  cujos objetos são todas as subcategorias rarefeitas esqueléticas de  $\mathbf{Prob}$ , cada uma destas subcategorias tendo o problema  $P_1$  definido em 3.3.5 como objeto inicial. A existência de um morfismo  $\mathbf{Prob}_0 \rightarrow \mathbf{Prob}'_0$  em  $\mathbf{SubProb}$  equivale à inclusão de categorias  $\mathbf{Prob}_0 \subseteq \mathbf{Prob}'_0$ .

Variando a subcategoria  $\mathbf{Prob}_0$ , obteremos naturalmente um funtor contravariante de  $\mathbf{SubProb}$  para  $\mathbf{CAT}$ , ou seja, uma categoria indexada onde cada componente é um *topos*. Este funtor é definido a seguir:

**3.5.3 Definição: o funtor  $A$ .** O funtor  $A : \mathbf{SubProb}^{op} \rightarrow \mathbf{CAT}$  é definido por

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Prob}_0 & \mapsto & \mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0} \\ \text{inc} \downarrow & & \uparrow A(\text{inc}) \\ \mathbf{Prob}'_0 & & \mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}'_0} \end{array}$$

onde  $A(\text{inc}) : \mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}'_0} \rightarrow \mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0}$  é o funtor cuja ação sobre objetos é

$$\langle G', \lambda' \rangle \mapsto \langle G' \downarrow \mathbf{Prob}_0, \lambda' \downarrow \mathbf{Prob}_0 \rangle$$

onde o funtor  $G' \downarrow \mathbf{Prob}_0$  é a restrição do funtor  $G'$  à subcategoria  $\mathbf{Prob}_0$  de  $\mathbf{Prob}'_0$ , e a transformação natural  $\lambda' \downarrow \mathbf{Prob}_0$  é a restrição da transformação natural  $\lambda'$  à subcategoria  $\mathbf{Prob}_0$  de  $\mathbf{Prob}'_0$ .

A ação de  $A(\text{inc})$  sobre um morfismo

$$\langle G'_1, \lambda'_1 \rangle \xrightarrow{m'} \langle G'_2, \lambda'_2 \rangle$$

(lembrando que  $m'$  também é uma transformação natural) é a de restringir  $m'$  a  $\mathbf{Prob}_0$ , dando

$$\langle G'_1 \downarrow \mathbf{Prob}_0, \lambda'_1 \downarrow \mathbf{Prob}_0 \rangle \xrightarrow{m' \downarrow \mathbf{Prob}_0} \langle G'_2 \downarrow \mathbf{Prob}_0, \lambda'_2 \downarrow \mathbf{Prob}_0 \rangle$$

### 3.6

#### Conclusões do Capítulo

**3.6.1 Resumo.** Os elementos envolvidos na definição de um espaço de busca para uma instância  $d$  de um problema  $\langle D, R, p \rangle$  são:

- Uma subcategoria rarefeita e esquelética  $\mathbf{Prob}_0$  de  $\mathbf{Prob}$  tal que o problema  $P_1$  definido em 3.3.5 é o objeto inicial de  $\mathbf{Prob}_0$ . O problema  $P$  em questão deve ser um objeto de  $\mathbf{Prob}_0$ , e a redução  $P_1 \xrightarrow{(\tau, \sigma)} P$  deve ser tal que  $\tau(\star) = d$ , com  $d$  a instância em questão;
- Um funtor  $S : \mathbf{Prob}_0 \rightarrow \mathbf{RFloresta}$ , satisfazendo as condições definidas em 3.3.7, que associa uma floresta de respostas  $SP$  à instância  $d$  de interesse.

Ao longo do capítulo, vimos que

- Fixada a subcategoria  $\mathbf{Prob}_0$ , a categoria de todos os funtores  $S : \mathbf{Prob}_0 \rightarrow \mathbf{RFloresta}$  é um *topos*, chamado de  $\mathbf{ECFR}^0$ ;
- Cada funtor  $S : \mathbf{Prob}_0 \rightarrow \mathbf{RFloresta}$  corresponde a um par  $\langle G, \lambda \rangle$ , com  $G : \mathbf{Prob}_0 \rightarrow \mathbf{Floresta}$  um funtor e  $\lambda : G \rightarrow L$  uma transformação natural, onde  $L$  é o funtor definido em 3.4.4. Reciprocamente, cada par  $\langle G, \lambda \rangle$  corresponde a um funtor  $S : \mathbf{Prob}_0 \rightarrow \mathbf{RFloresta}$ .
- O *topos*  $\mathbf{ECFR}^0$  é isomorfo à categoria de todos os pares  $\langle G, \lambda \rangle$ ; chamamos esta categoria de  $\mathbf{ECFR}$ .

No próximo capítulo, examinaremos estes dois *topoi* isomorfos,  $\mathbf{ECFR}^0$  e  $\mathbf{ECFR}$ , além do *topos*  $\mathbf{ECF} = \mathbf{Floresta}^{(\mathbf{Prob}_0^{op})}$ , intimamente relacionado aos dois primeiros.