Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Fernando Silva Braga

Existência, Unicidade e Estabilidade de Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Boyan Slavchev Sirakov

Rio de Janeiro
Janeiro de 2021

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Fernando Silva Braga

Existência, Unicidade e Estabilidade de Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Boyan Slavchev Sirakov
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Marcos Craizer
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Carlos Hugo Jiménez Gómez
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Edgard Almeida Pimentel
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Simon Griffiths
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 07 de Janeiro de 2021

Fernando Silva Braga

Graduado em Engenharia Civil na enfase de Métodos Numéricos do Departamento de Estruturas da Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ (2000), empresário de tecnologia da informação há 20 anos, com mais de 30 anos de experiência no desenvolvimento de softwares, tendo projetado, desenvolvido e implantado o primeiro sistema de emissão de notas fiscais eletrônicas do país.

Ficha Catalográfica

Silva Braga, Fernando

Existência, Unicidade e Estabilidade de Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias / Fernando Silva Braga; orientador: Boyan Slavchev Sirakov. – 2021.

85 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2021.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Análise e Equações Diferenciais – Teses. 3. EDO. 4. Equações Diferenciais Ordinárias. 5. Existência e Unicidade de Soluções. 6. Sistemas Gerais Parametrizados de EDO. 7. Sistemas Lineares de EDO. 8. Estabilidade de Soluções. I. Sirakov, Boyan. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Aos meus professores do Ensino Médio, in memoriam, Eduardo e Cláudio.
Às minhas filhas Marina e Juliana, fontes de inspiração, motivação e orgulho.

Agradecimentos

Aos meus pais, meus professores da vida, que sempre me apoiaram e ensinaram a valorizar a educação e os estudos.

Ao Eduardo Barbosa e Cláudio Veloso, meus professores de Matemática e Física no ensino médio pelos inestimáveis ensinamentos e incentivos.

Aos meus professores da Engenharia Civil da UFRJ Nelson Galgoul, Silvio Lima e Gilberto Ellwanger por elaborarem as cartas de recomendações necessárias para minha inscrição neste Mestrado.

Ao professor Marcos Craizer que me recebeu na PUC-RIO com toda simpatia e franqueza para uma conversa que foi decisiva para eu me inscrever no mestrado, me motivando e fornecendo valiosos conselhos desde então.

Ao meu orientador e professor Boyan Sirakov, não só por ter aceito o desafio de me orientar, mas principalmente por todo apoio e estímulo que recebi sempre que precisei. Tive a oportunidade de ser seu aluno no curso de Análise Real cuja abordagem tem a preocupação em aplicar os resultados em problemas de cálculo avançado. Fui também seu aluno no excelente curso de Equações Diferenciais Ordinárias, cujas notas de aulas e ensinamentos foram fundamentais para elaboração desta dissertação.

Ao professor Carlos Hugo Jimenez pela sua paciência e didática no curso de Introdução em Análise, que foram fundamentais para eu começar a ganhar ritmo, após tanto tempo em que estive afastado dos estudos.

À professora Alessia Mandini não só por suas aulas de Álgebra Linear, mas por me lembrar de uma importante lição: "Não se aprende matemática sem fazer exercícios. Faça o máximo que puder!". Assim foi feito.

Ao professor Alessandro Alla que me mostrou nas disciplinas computacionais uma abordagem muito interessante da matemática aplicada, ampliando meus conhecimentos em Álgebra Linear.

Ao professor Edgard Pimentel por sua empolgação contagiante e pelos conhecimentos que recebi no curso de Análise em $\mathbb{R}^n$

À secretária Creuza, sempre muito solícita e disposta a ajudar.

Ao meu sócio Gustavo e a todos meus colegas de trabalho que compreenderam meu afastamento do dia-a-dia na empresa.

À minha esposa e filhas por todo apoio e compreensão, entendendo que, em alguns momentos, não pude dar a merecida atenção.

À PUC-RIO pela isenção das taxas escolares.

À CAPES pelo auxílio concedido.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Silva Braga, Fernando; Sirakov, Boyan. **Existência, Unicidade e Estabilidade de Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro, 2021. 85p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esta dissertação tem o objetivo de aplicar os conceitos e ferramentas da Análise Real e Álgebra Linear num estudo sobre a teoria de existência, unicidade e estabilidade de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias, considerando sistemas gerais parametrizados, lineares e não-lineares.

Palavras-chave

EDO; Equações Diferenciais Ordinárias; Existência e Unicidade de Soluções; Sistemas Gerais Parametrizados de EDO; Sistemas Lineares de EDO; Estabilidade de Soluções.

Abstract

Silva Braga, Fernando; Sirakov, Boyan (Advisor). **Existence, Uniquiness and Stability of Solutions of Ordinary Differential Equations Systems**. Rio de Janeiro, 2021. 85p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This dissertation aims to apply the concepts and tools of Real Analysis and Linear Algebra to the theory of existence, uniquiness and stability of solutions of ordinary differential equations systems, considering general parametric, linear and non-linear systems.

Keywords

ODE; Ordinary Differential Equations; Existence and Uniqueness of Solutions; Parametric General Systems of ODE; Linear Systems of ODE; Stability of Solutions.

Sumário

1 Introdução

Esta dissertação tem o objetivo de aprofundar os conhecimentos de Análise Real aplicando os conceitos e ferramentas da Álgebra Linear num estudo com demonstrações detalhadas de assuntos relacionados a teoria geral dos sistemas de equações diferenciais ordinárias - EDO.

No Capítulo 2 é apresentada a teoria geral dos sistemas de EDO parametrizados $x' = f(t, x, u)$ ($u \in \mathbb{R}^m$ parâmetro) contemplando um estudo sobre a existência e unicidade da solução, a análise de sua continuidade e diferenciabilidade com respeito aos parâmetros, seu domínio maximal de existência e a propriedade de saída do compacto.

No Capítulo 3 tratamos dos sistemas lineares com coeficientes variáveis $x' = A(t)x + b(t)$ e o caso particular em que a matriz $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma constante. Neste capítulo, analisamos o domínio de existência e unicidade da solução, definimos a matriz fundamental de soluções e a exponencial matricial, demonstrando suas principais propriedades e aplicando os resultados para encontrar a solução destes sistemas.

No Capítulo 4, é analisada a estabilidade das soluções de sistemas lineares e não-lineares ($x' = Ax + f(t, x)$) contemplando as condições para estabilidade assintótica e instabilidade das soluções.

Após as considerações finais são incluídas, como apêndices, as principais definições, teoremas e demonstrações de resultados provenientes da Análise Real e Álgebra Linear cujo conhecimento colabora para um melhor entendimento deste estudo.

2
Sistemas Gerais Parametrizados de EDO

Considere os conjuntos abertos e conexos [2] $I \subseteq \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $U \subseteq \mathbb{R}^m$ em que n e $m \in \mathbb{N}$. Seja Γ um conjunto de funções contínuas definidas em $I \times X \to \mathbb{R}^n$. Fixe $t_0 \in I$ e suponha que para todo $u \in U$ existem $g_u \in \mathbb{R}^n$ e $f_u \in \Gamma$ tais que podemos definir o sistema de EDO:

$$\begin{cases} x_u'(t) = f_u(t, x_u(t)) \\ x_u(t_0) = g_u \end{cases} . \tag{2-1}$$

Sejam $G := I \times X \times U$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ e $g : U \to \mathbb{R}^n$ tais que para todo $u \in U$ temos

$$f(t, x(t, u), u) := f_u(t, x_u(t)) \quad \text{e} \quad g(u) := g_u. \tag{2-2}$$

Suponha f e g contínuas e considere agora o seguinte sistema parametrizado por u:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t}(t, u) = f(t, x(t, u), u) \\ x(t_0, u) = g(u) \end{cases} . \tag{2-3}$$

Resolver o sistema (2-3) é equivalente a buscar, para todo $u \in U$, uma solução $x(t, u) = x_u(t)$ definida para algum intervalo $I_u \subseteq I$ em que $x_u(t)$ é solução do sistema (2-1) neste intervalo.

Neste capítulo, consideraremos fixos $u_0 \in U$ e $x_0 = g(u_0)$, suporemos f localmente Lipschitz com respeito a x em G (Definição B.29) e buscaremos um compacto $U_0 \subset U$ em que $u_0 \in U_0$ e para todo $u \in U_0$ existe única solução x para este sistema definida para algum intervalo fechado $I_0 \subset I$.

Veremos que a função $x(t, u)$ é contínua no compacto $\Omega := I_0 \times U_0$ e que, adicionando as hipóteses de que $f \in C^1(G)$ e g é diferenciável em U, temos também que a função $x(t, u) \in C^1(\Omega)$. Definiremos também o intervalo maximal de existência de uma solução e veremos a propriedade de saída de um compacto.

2.1 Existência e Unicidade da Solução

Nesta seção, demonstraremos um teorema fundamental das equações diferenciais ordinárias que estabelece condições para garantir a existência e unicidade de soluções para o sistema (2-3).

Inicialmente, notemos que, seja um conjunto compacto $\Pi \subset G$ então, pela Proposição A.1, como f é localmente Lipschitz com respeito a x em G temos que f é Lipschitz com respeito a x em Π. Além disto, como Π é um compacto e f é contínua, pelo Teorema B.28, podemos definir $M := \max_{\Pi} \|f(t,x,u)\|$.

Observemos também que, seja $b > 0$ então pela continuidade de g em u_0 existe $c > 0$ tal que se $\|u - u_0\| \leq c$ temos $\|g(u) - g(u_0)\| = \|g(u) - x_0\| < \frac{b}{2}$.

Teorema 2.1 *Considere o sistema (2-3) e suponha f localmente Lipschitz com respeito a x em G. Seja $\Pi \subset G$ definido como*

$$\Pi := \{(t,x,u) : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b, \|u - u_0\| \leq c\}$$

com $a, b, c > 0$ tais que se $\|u - u_0\| \leq c$ temos $\|g(u) - x_0\| < \frac{b}{2}$.
Considere L a constante de Lipschitz de f com respeito a x em Π e sejam

$$M := \max_{\Pi} \|f(t,x,u)\| \text{ e } h := \min\left\{a, \frac{b}{2M}, \frac{1}{2L}\right\}.$$

Então, para todo $u \in U$ tal que $\|u - u_0\| \leq c$, existe uma <u>única</u> solução x deste sistema definida para todo $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Mais ainda, a função $x(t,u)$ é contínua em Ω definido como

$$\Omega := I_0 \times U_0 := \{(t,u) : |t - t_0| \leq h, \|u - u_0\| \leq c\}.$$

Demonstração.
Considere a sequência de funções $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em que definimos $x_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ conforme a seguir:

$$\begin{aligned}
x_0(t,u) &:= x_0 \\
x_1(t,u) &:= g(u) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s,u), u) ds \\
x_2(t,u) &:= g(u) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s,u), u) ds \\
&\cdots\cdots \\
x_k(t,u) &:= g(u) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s,u), u) ds.
\end{aligned} \tag{2-4}$$

Mostraremos que x_k está bem definida sendo contínua para todo $k \in \mathbb{N}$, bem como x_k converge uniformemente para uma função x contínua em Ω e veremos que, para todo $u \in U_0$, $x(t,u)$ é a única solução definida para todo $t \in I_0$.

Afirmação (I): *x_k está bem definida e é contínua em Ω para todo $k \in \mathbb{N}$.*
Seja $(t,u) \in \Omega$ então $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, logo $|t - t_0| \leq a$; $\|u - u_0\| \leq c$. Assim, mostraremos por indução em k que x_k é contínua e $\|x_k(t,u) - x_0\| \leq b$, ou seja, que $(t, x_k(t,u), u) \in \Pi$ e portanto $(t, x_k(t,u), u)$ pertence ao domínio de definição da função f e logo a função x_k está bem definida para todo $k \in \mathbb{N}$.
Base da Indução: Se $k = 1$ temos

$$\begin{aligned} \|x_1(t,u) - x_0\| &= \left\| g(u) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0, u) ds - x_0 \right\| \\ &\leq \|g(u) - x_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0, u)\| \, ds \right| \leq \frac{b}{2} + \left| \int_{t_0}^{t} M ds \right| \\ &\leq \frac{b}{2} + M|t - t_0| \leq \frac{b}{2} + Mh \leq \frac{b}{2} + M\frac{b}{2M} = b. \end{aligned} \tag{2-5}$$

Como g e f são contínuas então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo B.40, x_1 é a soma de funções contínuas e, pelo Teorema B.30, x_1 é contínua em Ω.
Passo Indutivo: Suponha válido para $(k-1)$ que $\|x_{k-1}(t,u) - x_0\| \leq b$ e que x_{k-1} é contínua. Com isto, temos

$$\begin{aligned} \|x_k(t,u) - x_0\| &\leq \|g(u) - x_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_{k-1}(s,u), u)\| \, ds \right| \\ &\leq \frac{b}{2} + M|t - t_0| \leq \frac{b}{2} + M\frac{b}{2M} = b. \end{aligned} \tag{2-6}$$

Assim, $(t, x_k(t,u), u) \in \Pi \subset G$ e portanto x_k está bem definida. Como x_{k-1} e f são contínuas então, pelo Teorema B.30, a função composta $f(t, x_k(t,u), u)$ é contínua e logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo B.40, sua integral existe e é contínua. Como g é contínua então x_k é a soma de funções contínuas e portanto x_k é contínua para todo $k \in \mathbb{N}$.

Afirmação (II): *x_k converge uniformemente em Ω para uma função x que é contínua em Ω.*
Mostraremos que existe uma série convergente $\sum a_k$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se $\|x_{k+1}(t,u) - x_k(t,u)\| \leq a_k$.
Vimos em (2-5) que $\|x_1(t,u) - x_0\| \leq b =: a_1$. Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} \|x_2(t,u) - x_1(t,u)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, x_1(s,u), u) - f(s, x_0, u)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_1(s,u), u) - f(s, x_0, u)\| \, ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \, \|x_1(s,u) - x_0\| \, ds \right| \\ &\leq L \, \|x_1(t,u) - x_0\| \, |t - t_0| \\ &\leq Lb|t - t_0| =: a_2. \end{aligned} \tag{2-7}$$

$$\begin{aligned}
\|x_3(t,u)-x_2(t,u)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t}(f(s,x_2(s,u),u)-f(s,x_1(s,u),u))ds\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\,\|x_2(s,u)-x_1(s,u)\|\,ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L^2 b|s-t_0|ds\right| \leq L^2 b\frac{|t-t_0|^2}{2} =: a_3. \qquad (2\text{-}8)\\
\|x_4(t,u)-x_3(t,u)\| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\,\|x_3(s,u)-x_2(s,u)\|\,ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \frac{L^3 b}{2}|s-t_0|^2 ds\right| \leq L^3 b\frac{|t-t_0|^3}{3.2} =: a_4.
\end{aligned}$$

Procedendo assim para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\|x_{k+1}(t,u)-x_k(t,u)\| \leq \frac{L^k b}{k!}|t-t_0|^k \leq b\frac{(Lh)^k}{k!} =: a_k. \qquad (2\text{-}9)$$

Seja a sequência de funções z_k tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$z_k := x_k - x_0 = x_k - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2} + x_{k-2} + \cdots - x_1 + x_1 - x_0. \qquad (2\text{-}10)$$

Logo

$$z_k = \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1}). \qquad (2\text{-}11)$$

Mas, pela Definição B.21, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge para $b(e^{Lh}-1)$ e logo, pelo Teorema de Weierstrass A.4, z_k converge uniformemente em Ω e portanto x_k converge uniformemente em Ω. Assim podemos definir para todo $(t,u) \in \Omega$

$$x(t,u) := \lim_{k\to\infty} x_k(t,u). \qquad (2\text{-}12)$$

Como x_k é contínua em Ω para todo $k \in \mathbb{N}$ então, pelo Teorema B.45, x é contínua em Ω.

Afirmação (III): $\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s,x_k(s,u),u)ds = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s,u),u)ds.$

Como f é Lipschitz com respeito a x em Π, pela Definição B.29

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{t_0}^{t}(f(s,x_k(s,u),u)-f(s,x(s,u),u))ds\right\| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\,\|x_k(s,u)-x(s,u)\|\,ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L \sup_{(s,u)\in\Omega}\|x_k(s,u)-x(s,u)\|\,ds\right| \\
&\leq L \sup_{(s,u)\in\Omega}\|x_k(s,u)-x(s,u)\|\,|t-t_0| \\
&\leq Lh \sup_{(s,u)\in\Omega}\|x_k(s,u)-x(s,u)\|.
\end{aligned} \qquad (2\text{-}13)$$

Já que x_k converge uniformemente para x em Ω, pela Definição B.27, quando $k \to \infty$ temos

$$\sup_{(s,u)\in\Omega} \|x_k(s,u) - x(s,u)\| \to 0 \tag{2-14}$$

e logo

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s,u), u)ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, x(s,u), u)ds. \tag{2-15}$$

Note que, pode-se perceber mais diretamente esta convergência pois, conforme Proposição A.6, quando $k \to \infty$ temos que $f(t, x_k(t,u), u) \to f(t, x(t,u), u)$ uniformemente com respeito a t em Ω, mesmo nos casos em que f é apenas contínua (não necessariamente Lipschitz). Com isto, podemos usar diretamente o resultado do Teorema B.49 e obter $\int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s,u), u)ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, x(s,u), u)ds$.

Afirmação (IV): *Para todo $u \in U_0$ temos que $x(t,u)$ é solução de (2-3) definida para todo $t \in I_0$.*

Fixemos $u \in U_0$ arbitrário. De (2-4)

$$x_k(t,u) = g(u) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s,u), u)ds \qquad \forall t \in I_0.$$

De (II) e (III), quando $k \to \infty$ temos

$$x(t,u) = g(u) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s,u), u)ds \qquad \forall t \in I_0. \tag{2-16}$$

Assim, $x(t_0,u) = g(u)$ e portanto

$$x(t,u) = x(t_0,u) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s,u), u)ds \quad \forall t \in I_0. \tag{2-17}$$

Já que x e f são contínuas então, pelo Teorema B.30, sua composta $f(t, x(t,u), u)$ também é contínua e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo B.40, $x(t,u)$ é tal que

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,u) = f(t, x(t,u), u). \tag{2-18}$$

Como $x(t_0,u) = g(u)$ e u é arbitrário então para todo $u \in U_0$ temos que $x(t,u)$ é solução de (2-3) definida para todo $t \in I_0$.

Afirmação (V): *Para todo $u \in U_0$ temos que $x(t,u)$ é a única solução de (2-3) definida para todo $t \in I_0$.*

Fixemos $u \in U_0$ arbitrário. De (IV), temos que $x(t,u)$ é solução definida para todo $t \in I_0$.

Suponha por absurdo existir outra solução y definida para todo $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ para algum $\delta > 0$. Sejam $h_1 = \min\{\delta, h\}$ e $I_1 := [t_0 - h_1, t_0 + h_1]$.

Como $I_1 \subseteq I_0$ então x e y são soluções para todo $t \in I_1$, logo

$$\begin{aligned} x(t,u) &= g(u) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s,u), u)ds \\ y(t,u) &= g(u) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s,u), u)ds. \end{aligned} \tag{2-19}$$

Como x e y são contínuas em um compacto então a função $(x-y)$ também é contínua num compacto e, pelo Teorema B.28, existe $t_1 \in I_1$ tal que

$$M_1 := \|x(t_1,u) - y(t_1,u)\| := \max_{s\in I_1} \|x(s,u) - y(s,u)\|. \tag{2-20}$$

Como f é Lipschitz com respeito a x em Π

$$\begin{aligned} \|x(t,u) - y(t,u)\| \leq& \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s,u), u) - f(s, y(s,u), u))ds \right\| \\ \leq& \left| \int_{t_0}^{t} L \|x(s,u) - y(s,u)\| ds \right| \\ \leq& L \left| \int_{t_0}^{t} M_1 ds \right| \leq LM_1|t-t_0| \leq LM_1h_1. \end{aligned} \tag{2-21}$$

Assim $\|x(t,u) - y(t,u)\| \leq LM_1h_1$ para todo $t \in I_1$ e como $t_1 \in I_1$ temos

$$M_1 = \|x(t_1,u) - y(t_1,u)\| \leq LM_1h_1 \Rightarrow h_1 \geq \frac{1}{L}. \tag{2-22}$$

Absurdo, já que $h_1 = \min\{\delta, h\} \leq h \leq \frac{1}{2L} < \frac{1}{L}$.

Como u é arbitrário, para todo $u \in U_0$ existe única solução x do sistema (2-3) definida para todo $t \in I_0$. ∎

A seguir, mostraremos que se existirem duas soluções de (2-3) definidas em intervalos abertos distintos então estas duas soluções são iguais na interseção destes intervalos.

Teorema 2.2 *Considere o sistema (2-3) e fixe $u \in U$. Suponha f localmente Lipschitz com respeito a x em G. Se existirem duas soluções x_1 e x_2 definidas, respectivamente, em intervalos abertos I_1 e I_2 então $x_1(t,u) = x_2(t,u)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.*

Demonstração.
Seja $(c,d) := I_1 \cap I_2$. Como x_1 e x_2 são soluções em (c,d) então $t_0 \in (c,d)$.
Suponha, inicialmente, $d \in \mathbb{R}$ (finito).
Sejam:

$$P := \{t \in [t_0, d) : x_1(t', u) = x_2(t', u) \ \forall t' \in [t_0, t)\} \text{ e } T := \sup P. \tag{2-23}$$

Pelo Teorema 2.1 (considerando $u_0 = u$), existe $h > 0$ tal que $x_1(t,u) = x_2(t,u)$ para todo $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ e logo $T > t_0$.

Afirmação (I): $x_1(t,u) = x_2(t,u)$ *para todo* $t \in [t_0, T)$.
Seja $t \in [t_0, T)$ arbitrário. Pela definição de supremo, existe $t_1 \in P$ tal que $t < t_1 < T$. Como $t_1 \in P$ então $x_1(t', u) = x_2(t', u)$ para todo $t' \in [t_0, t_1)$. Escolhendo $t' = t$ temos $x_1(t,u) = x_2(t,u)$. Como t é arbitrário então $x_1(t,u) = x_2(t,u)$ para todo $t \in [t_0, T)$.

Afirmação (II): $T = d$.
Suponha por absurdo que $T < d$. Seja a sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_n = T - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $t_n \to T$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in (t_0, T)$ para todo $n > N$. Assim, por (I) temos que $x_1(t_n, u) = x_2(t_n, u)$ para todo $n > N$. Logo, quando $n \to \infty$ temos $x_1(T,u) = x_2(T,u)$.
Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t}(t,u) = f(t, x(t,u), u) \\ x(T,u) = x_1(T,u) \end{cases} . \tag{2-24}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade 2.1 (considerando $(t_0, u_0) = (T, u)$), existe uma *única* solução para este sistema em $(T - H, T + H)$ para algum $H > 0$. Escolhemos $\delta < H$ suficientemente pequeno tal que $(T - \delta, T + \delta) \subset (c,d)$. Como x_1 e x_2 são soluções deste sistema em $(T - \delta, T + \delta)$ então $x_1(t,u) = x_2(t,u)$ para todo $t \in (t_0, T + \delta)$. Absurdo, pois $T = \sup P \geq T + \delta$. Logo $T = d$.

Se d não for finito, consideramos a sequência de intervalos $\alpha_n := (t_0, n)$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ e usamos o resultado anterior para cada um dos intervalos limitados α_n e temos que $x_1(t,u) = x_2(t,u)$ em (t_0, n) para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $x_1(t,u) = x_2(t,u)$ para todo $t \in (t_0, \infty)$.

Por fim, procedemos analogamente para c, porém definindo:

$$P_1 := \{t \in (c, t_0] : x_1(t', u) = x_2(t', u)\ \forall t' \in (t, t_0])\}\ \text{e}\ T_1 := \inf P_1 \tag{2-25}$$

e concluímos que $T_1 = c$ obtendo o resultado procurado. ■

2.2 Domínio Maximal de Existência da Solução

Considerando agora o sistema (2-3), mostraremos que se f for localmente Lipschitz com respeito a x em G então existe um intervalo I além do qual a solução φ deste sistema não pode ser prolongada. Denominamos φ solução não-prolongável do sistema e I intervalo (ou domínio) maximal de existência da solução.

Teorema 2.3 *Considere o sistema (2-3) e fixe $u \in U$. Se f é localmente Lipschitz com respeito a x em G então existe um intervalo de comprimento maximal $(m_1, m_2) \subseteq \mathbb{R}$ no qual é definida uma solução φ não-prolongável e única.*

Demonstração.
Pelo Teorema 2.1, existe única solução do sistema em um intervalo (t_0-h, t_0+h) para algum $h > 0$. Assim, podemos definir:
$m_1 := \inf\{\alpha < t_0$ tal que existe solução do sistema no intervalo $(\alpha, t_0 + h)\}$
$m_2 := \sup\{\beta > t_0$ tal que existe solução do sistema no intervalo $(t_0 - h, \beta)\}$
em que m_1 e/ou m_2 podem ou não ser finitos.

Seja $t \in (m_1, m_2)$ fixo e arbitrário. Como $t > m_1$, pela definição de ínfimo, existe $\alpha < t$ tal que existe solução ψ_1 em algum intervalo $(\alpha, t_0 + h)$ que contém t. Analogamente, como $t < m_2$, pela definição de supremo, existe $\beta > t$ tal que existe solução ψ_2 em algum intervalo $(t_0 - h, \beta)$ que contém t.

Assim, definimos uma função φ_1 para todo $t \in I_1 := (\alpha, \beta) \subseteq (m_1, m_2)$ tal que

$$\varphi_1(t, u) := \begin{cases} \psi_1(t, u) & \text{se } t \in (\alpha, t_0] \\ \psi_2(t, u) & \text{se } t \in (t_0, \beta) \end{cases} . \tag{2-26}$$

Pelo Teorema 2.1, $\psi_1(t, u) = \psi_2(t, u)$ para todo $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ e logo φ_1 é uma função bem definida e contínua, sendo uma solução para todo $t \in (\alpha, \beta)$. Seja φ_2 uma outra solução definida num intervalo I_2 qualquer que contenha t então, pelo Teorema 2.2, $\varphi_1(t, u) = \varphi_2(t, u)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

Como t é arbitrário, podemos definir $\varphi(t,u) := \varphi_1(t,u)$ para todo $t \in (m_1, m_2)$. Derivando em t

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,u) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,u) = f(t, \varphi_1(t,u), u) = f(t, \varphi(t,u), u). \tag{2-27}$$

Assim, temos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t,u) = f(t, \varphi(t,u), u) \\ \varphi(t_0, u) = \varphi_1(t_0, u) = g(u) \end{cases}. \tag{2-28}$$

Portanto, φ é solução não-prolongável do sistema com intervalo maximal de existência (m_1, m_2). ■

2.3 Diferenciabilidade da Solução com respeito aos parâmetros

Mostraremos agora que podemos também estabelecer condições para que a solução x do sistema (2-3), vista no Teorema 2.1, seja não só diferenciável com respeito a t mas também com relação ao próprio parâmetro u. Veremos que se $f \in C^1(G)$ e g for diferenciável em U então $x \in C^1(\Omega)$.

Teorema 2.4 *Considere o sistema (2-3) e a função $x(t,u)$ contínua em Ω cuja existência é garantida pelo Teorema 2.1. Se $f \in C^1(G)$ e g for diferenciável em U então $x \in C^1(\Omega)$.*

Demonstração.

Notamos que, como $f \in C^1(G)$ então suas derivadas $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ são contínuas para todo $i, j \leq n$ e, pelo Corolário A.3, f é localmente Lipschitz com respeito a x em G.

Fixemos $(t,u) \in \Omega$ (arbitrário) e sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 \neq |\alpha| \leq c$, $k = 1 \ldots m$ e o vetor canônico $e_k \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$\Delta_\alpha x(t,u) := x(t, u + \alpha e_k) - x(t,u). \tag{2-29}$$

Como x é solução em Ω então

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, u + \alpha e_k) = f(t, x(t, u + \alpha e_k), u + \alpha e_k). \tag{2-30}$$

Derivando (2-29) em t

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta_\alpha x) =& \frac{\partial x}{\partial t}(t, u + \alpha e_k) - \frac{\partial x}{\partial t}(t,u) \\ =& f(t, x(t, u + \alpha e_k), u + \alpha e_k) - f(t, x(t,u), u). \end{aligned} \tag{2-31}$$

Sejam $y := (x(t, u + \alpha e_k), u + \alpha e_k) \in \mathbb{R}^{n+m}$ e $z := (x(t, u), u) \in \mathbb{R}^{n+m}$ então, pelo Lema de Hadamard A.7, existem $\psi_{i,j}(t, y, z)$ funções contínuas para todo $i \leq (n + m)$ e $j \leq n$ tais que

$$f_j(t, y) - f_j(t, z) = \sum_{i=1}^{n+m} (y_i - z_i)\psi_{i,j}(t, y, z). \tag{2-32}$$

Logo

$$\begin{aligned} f_j(t, y) - f_j(t, z) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i(t, u + \alpha e_k) - x_i(t, u))\psi_{i,j}(t, y, z)\right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{m}[(u + \alpha e_k)_i - u_i]\psi_{(i+n),j}(t, y, z)\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_\alpha x_i \psi_{i,j}(t, y, z)\right) + \alpha\psi_{(k+n),j}(t, y, z). \end{aligned} \tag{2-33}$$

Seja $\Psi_j := \psi_{(k+n),j}$, de (2-31) e (2-33) temos para todo $j = 1 \ldots n$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_\alpha x)_j = f_j(t, y) - f_j(t, z) = \alpha\Psi_j(t, y, z) + \sum_{i=1}^{n} \Delta_\alpha x_i \psi_{i,j}(t, y, z). \tag{2-34}$$

Como y e z dependem de u e α, definimos $\beta := (u, \alpha)$ e

$$\begin{aligned} &A(t, \beta) := (\psi_{ij}(t, y, z))_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{(matrix n} \times \text{n) e} \\ &B(t, \beta) := (\Psi_j(t, y, z))_{j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n}. \end{aligned} \tag{2-35}$$

Como ψ_{ij} e Ψ_j são contínuas para todo $i, j = 1 \ldots n$ então A e B também são funções contínuas.

De (2-34) e (2-35)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_\alpha x(t, u)) = A(t, \beta).\Delta_\alpha x + \alpha B(t, \beta). \tag{2-36}$$

Seja $w(t, \beta) := \dfrac{\Delta_\alpha x(t, u)}{\alpha}$. Definimos o seguinte sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}(t, \beta) = A(t, \beta)w(t, \beta) + B(t, \beta) =: F(t, w, \beta) \\ \\ w(t_0, \beta) = \dfrac{\Delta_\alpha x(t_0, u)}{\alpha} = \dfrac{g(u + \alpha e_k) - g(u)}{\alpha} =: G(\beta) \end{cases} . \tag{2-37}$$

Assim (2-37) é um sistema de EDO parametrizado por β na variável w.

Como $\dfrac{\partial F}{\partial w} = A$ é contínua então, pelo Corolário A.3, F é localmente Lipschitz com respeito a w.

Uma vez que g é diferenciável em u, quando $\alpha \to 0$ temos que $G(u,\alpha) \to \dfrac{\partial g}{\partial u_k}(u)$. Logo G pode ser prolongada por continuidade em $(u,0)$. Assim, definimos $w(t_0,u,0) := G(u,0) := \dfrac{\partial g}{\partial u_k}(u)$ e temos que G é contínua.

Pelo Teorema de Existência e Unicidade 2.1, existe uma única função w contínua que é solução de (2-37) em alguma vizinhança de $(t_0,u,0)$.

Como $w(t,\beta) = w(t,u,\alpha) = \dfrac{\Delta_\alpha x(t,u)}{\alpha}$ e w é contínua temos:

$$w(t,u,0) = \lim_{\alpha\to 0} w(t,u,\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{x(t,u+\alpha e_k) - x(t,u)}{\alpha} = \frac{\partial x}{\partial u_k}(t,u). \quad (2\text{-}38)$$

Com isto, temos que existe a derivada $\dfrac{\partial x}{\partial u_k}(t,u) = w(t,u,0)$ e, uma vez que w é contínua, $\dfrac{\partial x}{\partial u_k}$ também é contínua em (t,u).

Como (t,u) e k são arbitrários então $\dfrac{\partial x}{\partial u_k}$ é contínua em Ω para todo $k = 1\ldots m$.

Ainda, temos também $\dfrac{\partial x}{\partial t} = f$ que é contínua em G.

Desta forma, como todas as derivadas de x são contínuas em Ω temos que $x \in C^1(\Omega)$. ■

2.4 Propriedade de Saída do Compacto

No próximo teorema, demonstraremos uma importante propriedade da solução φ não-prolongável definida no teorema anterior, onde garantiremos que se K for um conjunto compacto contido em G e $(t_0,x_0,u_0) \in K$, então a partir de determinado instante T_2 (no domínio de φ), o ponto $(t,\varphi(t,u_0),u_0)$ não pertence mais ao compacto K para todo $t > T_2$.

Analogamente, também existe um instante T_1 (no domínio de φ) tal que o ponto $(t,\varphi(t,u_0),u_0)$ não pertence mais ao compacto K para todo $t < T_1$.

Teorema 2.5 *Se* $(t_0, x_0, u_0) \in K \subset G$ *(K compacto) e* φ *é a solução não-prolongável do Teorema 2.3 então existem* $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ *em que* $m_1 < T_1 < T_2 < m_2$ *tais que se* $t \in (m_1, T_1) \cup (T_2, m_2)$ *temos que* $(t, \varphi(t, u_0), u_0) \notin K$.

Demonstração.
Se $m_2 = +\infty$, como K é compacto então K é limitado e existe B_R (bola de raio R) tal que $K \subset B_R$.
Escolhemos $T_2 := R$ e se $t > T_2$ então

$$\|(t, \varphi(t, u_0), u_0)\| \geq \sqrt{t^2 + \varphi(t, u_0)^2 + u_0^2} \geq t > T_2. \tag{2-39}$$

Logo $(t, \varphi(t, u_0), u_0) \notin K$.

Suponha então $m_2 \in \mathbb{R}$ (finito) e seja $d_0 := dist\{K, \partial G\}$. Como K é compacto, ∂G é fechado e $\partial G \cap K = \emptyset$ (pois G aberto implica que $\partial G \cap G = \emptyset$ e como $K \subset G$ então $\partial G \cap K = \emptyset$) temos, pela Proposição A.8, que $d_0 > 0$.

Seja $K' = \left\{ y \in G : \mathrm{dist}(y, K) \leq \dfrac{d_0}{2} \right\}$ onde $\mathrm{dist}(y, K) := \inf\limits_{w \in K} \|w - y\|$.
Pela Proposição A.9, $K \subset K' \subset G$ e K' é compacto.

Sejam $y_1 := (t_1, x_1, u_0) \in K$ (y_1 arbitrário) e $a_1 := b_1 := \frac{d_0}{4}$, definimos:

$$\Pi_1 := \{(t, x, u_0) : |t - t_1| \leq a_1, \|x - x_1\| \leq b_1\}. \tag{2-40}$$

Seja $y \in \Pi_1$ (arbitrário) então

$$\|y - y_1\| \leq |t - t_1| + \|x - x_1\| \leq \frac{d_0}{4} + \frac{d_0}{4} \leq \frac{d_0}{2}. \tag{2-41}$$

Como $y_1 \in K$

$$\mathrm{dist}(y, K) = \inf_{w \in k} \|w - y\| \leq \|y_1 - y\| \leq \frac{d_0}{2}. \tag{2-42}$$

Logo, pela definição de K', $y \in K'$ e portanto $\Pi_1 \subset K'$.
Uma vez que y_1 é arbitrário, temos que para todo $y_1 \in K$ existe $\Pi_1 \subset K'$.

Pela Proposição A.1, existem L_1 e L constantes de Lipschitz de f com respeito a x em Π_1 e K' (respectivamente). Como $\Pi_1 \subset K'$ então $L_1 \leq L$. Já que Π_1 e K' são compactos e f contínua, pelo Teorema B.28, podemos proceder como na demonstração do Teorema 2.1 e definir:

$$M_1 := \max_{y \in \Pi_1} \|f(y)\| \leq \max_{y \in K'} \|f(y)\| =: M \quad \text{e} \tag{2-43}$$

$$h_1 := \min\left\{a_1, \frac{b_1}{2M_1}, \frac{1}{2L_1}\right\} \geq \min\left\{a_1, \frac{b_1}{2M}, \frac{1}{2L}\right\} =: h. \tag{2-44}$$

Escolhendo $T_2 := m_2 - h$ então T_2 não depende do ponto y_1 escolhido.

Suponha por absurdo que exista $t_1 \in (T_2, m_2)$ tal que $(t_1, \varphi(t_1, u_0), u_0) \in K$. Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t}(t, u_0) = f(t, x(t, u_0), u_0) \\ x(t_1, u_0) = \varphi(t_1, u_0) \end{cases} . \tag{2-45}$$

Como f é localmente Lipschitz com respeito a x em G, pelo Teorema de Existência e Unicidade 2.1, existe uma única solução $\varphi(t, u_0)$ para todo $t \in (t_1 - h_1, t_1 + h_1) \supset (t_1 - h, t_1 + h)$.

Como $t_1 \in (T_2, m_2) = (m_2 - h, m_2)$ então $m_2 - h < t_1$. Logo $m_2 < t_1 + h$. Absurdo, pois (m_1, m_2) é o intervalo maximal e $\varphi(t, u_0)$ não poderia ser prolongada em t até $(t_1 + h)$. Assim, para todo $t \in (T_2, m_2)$ temos

$$(t, \varphi(t, u_0), u_0) \notin K. \tag{2-46}$$

Procedendo analogamente escolhendo $T_1 := m_1 + h$, também temos que para todo $t \in (m_1, T_1)$

$$(t, \varphi(t, u_0), u_0) \notin K. \tag{2-47}$$

■

3
Sistemas Lineares de EDO

Neste capítulo estudaremos os sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias (EDO).

Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ (intervalo aberto), $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ função contínua e $A := (a_{ij})_{i,j=1}^n$ matriz $(n \times n)$ contendo funções $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ contínuas. Definimos o sistema linear de EDO a seguir:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \forall t \in I. \tag{3-1}$$

3.1
Domínio de Existência e Unicidade da Solução

Veremos a seguir que o sistema (3-1) possui uma única solução definida para todo $t \in I$, ou seja, o intervalo maximal da solução não-prolongável é I.

Teorema 3.1 *Existe uma única solução de (3-1) definida para todo $t \in I$.*

Demonstração.
Seja $f(t,x) := A(t)x(t) + b(t)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A(t) \tag{3-2}$$

que é contínua (pois $a_{ij}(t)$ são contínuas para $i, j = 1 \ldots n$) e, pelo Corolário A.3, f é localmente Lipschitz com respeito a x.

Assim, pelo Teorema 2.3, existe única solução não-prolongável em algum intervalo (m_1, m_2). Suponha por absurdo que $I =: (a,b) \neq (m_1, m_2)$, ou seja, $a \neq m_1$ e/ou $b \neq m_2$.

Como I é o domínio em que estão definidas as funções A e b então $(m_1, m_2) \subset I$. Logo $a < m_1$ e/ou $b > m_2$. Inicialmente, suponha $b > m_2$. Então, podemos escolher $\beta \in (m_2, b)$ tal que $[t_0, m_2) \subset [t_0, \beta] \subset I$.

Como $a_{ij}(t)$ são funções contínuas para $i, j = 1 \dots n$ e $[t_0, \beta]$ é um compacto então, pelo Teorema B.28, podemos definir:

$$\begin{aligned} M &:= \max_{s \in [t_0,\beta]} \|A(s)x_0\| \text{ (norma em } \mathbb{R}^n\text{) e} \\ L &:= \max_{s \in [t_0,\beta]} \|A(s)\| \text{ (norma matricial definida na Definição B.10).} \end{aligned} \tag{3-3}$$

Seja a sequência de funções $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em que $x_k : [t_0, \beta] \to \mathbb{R}^n$ é definida para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x_0 + b(s))ds \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x_1 + b(s))ds \\ &\dots\dots \\ x_k(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x_{k-1} + b(s))ds. \end{aligned} \tag{3-4}$$

Seja $t \in [t_0, \beta]$ arbitrário então

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_0 &= \int_{t_0}^{t} A(s)x_0 ds \\ \|x_1(t) - x_0\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)x_0\| \, ds \right| \leq M\,|t - t_0| \\ \|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)(x_1(s) - x_0(s))\| \, ds \right| \end{aligned} \tag{3-5}$$

Pela Definição B.10 temos

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, \|(x_1(s) - x_0(s))\| \, ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\ M\,|s - t_0| \, ds \right| \leq LM\frac{|t - t_0|^2}{2} \\ \dots \quad &\quad \dots \\ \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| &\leq ML^{k-1}\frac{|t - t_0|^k}{k!} = \frac{M}{L}\frac{(L(t - t_0))^k}{k!} \\ &\leq \frac{M}{L}\frac{(L(\beta - t_0))^k}{k!} =: \delta_k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3-6}$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$ definimos $y_k(t) := x_k(t) - x_{k-1}(t)$ e temos $\|y_k(t)\| \leq \delta_k$. Como t é arbitrário e δ_k independe de t então $\|y_k(t)\| \leq \delta_k$ para todo $t \in [t_0, \beta]$. Mas, pela Definição B.21:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = \frac{M}{L}(e^{L(\beta - t_0)} - 1) \tag{3-7}$$

logo, pelo Teorema de Weierstrass A.4, $\sum y_k$ converge uniformemente em $[t_0, \beta]$.

Como

$$x_k(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{k}(x_i(t) - x_{i-1}(t)) = x_0 + \sum_{i=1}^{k} y_i \tag{3-8}$$

então x_k também converge uniformemente em $[t_0, \beta]$ para uma função $x(t)$.

Já que x_k é contínua para todo $k \in \mathbb{N}$ e a convergência é uniforme, então, pelo Teorema B.45, x também é contínua. De (3-4) temos

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1}(t) = x_0 + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} (A(s)x_k(s) + b(s))ds. \tag{3-9}$$

Assim, podemos usar diretamente o Teorema B.49 e temos que quando $k \to \infty$ então $\int_{t_0}^{t} A(s)x_k(s)ds \to \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds$. Alternativamente, podemos notar que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)(x_k(s) - x(s))ds \right\| &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|x_k(s) - x(s)\| \, ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} \max_{s\in[t_0,\beta]} \|x_k(s) - x(s)\| \, ds \right| \\ &\leq L(\beta - t_0) \max_{s\in[t_0,\beta]} \|x_k(s) - x(s)\| \end{aligned} \tag{3-10}$$

e como x_k converge uniformemente em $[t_0, \beta]$ então, pela Definição B.41, quando $k \to \infty$

$$\max_{s\in[t_0,\beta]} \|x_k(s) - x(s)\| \to 0. \tag{3-11}$$

Assim, temos

$$\left\| \int_{t_0}^{t} A(s)(x_k(s) - x(s))ds \right\| \to 0 \tag{3-12}$$

e portanto

$$\int_{t_0}^{t} A(s)x_k(s) \to \int_{t_0}^{t} A(s)x(s). \tag{3-13}$$

De (3-9) e (3-13)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + b(s))ds. \tag{3-14}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo B.40, $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ e como $x(t_0) = x_0$ então $x(t)$ é solução de (3-1) para todo $t \in [t_0, \beta] \supset [t_0, m_2)$. Absurdo, pois (m_1, m_2) é o intervalo maximal de existência, logo não poderia existir solução definida para $t > m_2$.

Por outro lado, se $a < m_1$ procede-se analogamente escolhendo $\alpha \in (a, m_1)$ e conclui-se que existe uma solução definida para $t < m_1$. Absurdo.

Assim, $I = (m_1, m_2)$ e logo existe única solução definida para todo $t \in I$. ■

3.2 A Matriz Fundamental e suas propriedades

Nesta seção consideraremos um sistema linear qualquer

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

em que A e b são funções contínuas em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e definimos:

Definição 3.2 (Sistemas Homogêneos e Não-Homogêneos)
Se para todo $t \in I$ temos $b(t) = 0 \in \mathbb{R}^n$ então o sistema é denominado homogêneo (H). Caso contrário, o sistema é denominado não-homogêneo (NH).

Definição 3.3 (Solução Geral e Particular)
O conjunto de todas as soluções de um sistema é denominado a solução geral do sistema e dizemos que x_P é uma solução particular deste sistema, se x_P é uma solução qualquer conhecida do sistema.

Proposição 3.4 (Espaço Vetorial de Soluções de H)
Seja E o conjunto das soluções de um sistema homogêneo (H) então E é um espaço vetorial de dimensão n.

Demonstração.
Sabemos que o conjunto F das funções contínuas em I é um espaço vetorial (pela Definição B.2). Como $E \subset F$ mostraremos que E é um subespaço vetorial. Vejamos.

1. Sejam x e $y \in E$ então $x'(t) = A(t)x(t)$ e $y'(t) = A(t)y(t)$ para todo $t \in I$ (pelo Teorema 3.1) e logo $(x + y) \in E$ pois
$$(x+y)'(t) = x'(t)+y'(t) = A(t)x(t)+A(t)y(t) = A(t)(x+y)(t). \quad (3\text{-}15)$$
2. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ então $(\alpha x)(t) \in E$ pois
$$(\alpha x)'(t) = \alpha x'(t) = \alpha A(t)x(t) = A(t)(\alpha x)(t). \quad (3\text{-}16)$$

Pela Definição B.3, E é um subespaço de F, logo E é um espaço vetorial.

A seguir, definiremos uma aplicação $L : E \to \mathbb{R}^n$ e veremos que L é um isomorfismo linear, ou seja, L é uma aplicação linear bijetiva (injetiva e sobrejetiva).

Sejam $t_0 \in I$ (fixo) e $L : E \to \mathbb{R}^n$ tais que $L(x) = x(t_0)$ então $\underline{L \text{ é uma aplicação linear}}$ pois pela Definição B.55 temos

1. Se x e $y \in E \Rightarrow L(x+y) = (x+y)(t_0) = x(t_0) + y(t_0) = L(x) + L(y)$.

2. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in E \Rightarrow L(\alpha x) = \alpha x(t_0) = \alpha L(x_0)$.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, consideremos a solução φ_1 do sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{3-17}$$

Como $\varphi_1 \in E$ então $L(\varphi_1) = x_0$. Assim, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $\varphi_1 \in E$ tal que $L(\varphi_1) = x_0$, logo $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^n$ e $\underline{L \text{ é sobrejetiva}}$ (pela Proposição B.58).
Seja $\varphi_2 \in E$ tal que $L(\varphi_2) = 0$ então φ_2 é solução de

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} . \tag{3-18}$$

Como $\varphi(t) = 0$ é solução trivial deste sistema então, pelo Teorema de Existência e Unicidade 3.1, $\varphi_2 = \varphi = 0$ (caso contrário existiria mais de uma solução). Com isto, $\operatorname{Ker} L = \{0\}$ e, pelo Teorema B.57, $\underline{L \text{ é injetiva}}$.

Como L é injetiva e sobrejetiva então $\underline{L \text{ é uma aplicação linear bijetiva}}$ de E em $\mathbb{R}^n$ e pelo Teorema B.59:

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = 0 + \dim \mathbb{R}^n = n. \tag{3-19}$$

■

A seguir, faremos algumas definições relevantes relacionadas aos vetores de soluções do espaço vetorial E (definido na Proposição 3.4).

Definição 3.5 *Sejam $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$, n vetores quaisquer do espaço vetorial E. Como cada um destes vetores são funções de $I \to \mathbb{R}^n$, definimos uma matriz $n \times n$ como $\varphi := [\varphi^1 \;\; \varphi^2 \; \ldots \; \varphi^n]$ a qual denominamos de matriz de soluções.*

Definição 3.6 (SFS e Matriz Fundamental)
Se os vetores $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ (Definição 3.5) formam uma base do espaço E, denominamos estes vetores Sistema Fundamental de Soluções <u>(SFS)</u> e sua respectiva matriz φ <u>matriz fundamental</u> do sistema.

Definição 3.7 (Wronskiano)
Seja uma matriz de soluções φ qualquer, denominamos de <u>*Wronskiano*</u> *de φ a função $W_\varphi : I \to \mathbb{R}$ tal que $W_\varphi(t) := \det(\varphi(t))$ para todo $t \in I$. Por simplicidade de notação, sempre que φ é conhecida, denotaremos o Wronskiano de φ como simplesmente $W := W_\varphi$.*

Note que, pelo Teorema B.51, a função determinante é uma função contínua e como φ também é contínua então W_φ é uma composição de funções contínuas. Logo, pelo Teorema B.30, W_φ é uma função contínua.

Proposição 3.8 (Solução Geral de um Sistema Homogêneo)
A matriz φ é uma matriz fundamental, se e somente se, a solução geral do respectivo sistema homogêneo é dada por

$$E = \{\varphi c \ : \ c \in \mathbb{R}^n\}.$$

ou simplesmente, representamos as soluções do sistema homogêneo por

$$x_H(t) = \varphi(t)c \quad , \quad c \in \mathbb{R}^n$$

em que c percorre todo conjunto $\mathbb{R}^n$.

Demonstração.
$\Rightarrow$) Se φ é *matriz fundamental* então $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ é um *SFS*, ou seja, formam uma base de E. Logo, pelo Teorema B.5, a *solução geral* é dada por

$$x_H(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i(t) = \varphi(t)c \quad , \quad c \in \mathbb{R}^n. \tag{3-20}$$

$\Leftarrow$) Se E é o espaço vetorial gerado pelos n vetores $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ então, pela Proposição 3.4, $\dim E = n$. Assim, pelo Teorema B.5, temos que estes n vetores formam uma base de E e logo, pela Definição 3.6, φ é *matriz fundamental.*

■

Proposição 3.9 (Solução Geral de um Sistema Não-Homogêneo)
Sejam os sistemas lineares:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \ (NH) \quad e \quad z'(t) = A(t)z(t) \ (H).$$

Se x_p é uma solução particular de (NH) então a solução geral x_{NH} de (NH) é $x_{NH} = x_H + x_P$ em que x_H é a solução geral de (H) dada pela Proposição 3.8.

Demonstração.
Considere um *SFS* $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ conforme Definição 3.6.

Seja x solução qualquer de (NH), definimos $z(t) := x(t) - x_P(t)$ e temos

$$z'(t) = x'(t) - x'_P(t) = (A(t)x(t) + b(t)) - (A(t)x_p(t) + b(t)). \tag{3-21}$$

Logo

$$z'(t) = A(t)(x(t) - x_P(t)) = A(t)z(t). \tag{3-22}$$

Assim, z é solução de (H) e então $z \in E$. Com isto, existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i(t) \tag{3-23}$$

e portanto

$$x(t) = x_P(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i(t). \tag{3-24}$$

Reciprocamente, seja $c \in \mathbb{R}^n$ e $x(t) = x_P(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i(t)$ então

$$\begin{aligned} x'(t) &= x'_P(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i (\varphi^i)'(t) \\ &= (A(t)x_P(t) + b(t)) + \sum_{i=1}^{n} c_i A(t) \varphi^i(t) \\ &= b(t) + A(t)\left(x_P(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i(t)\right) \\ &= b(t) + A(t)x(t). \end{aligned} \tag{3-25}$$

Assim, temos que x é solução de (NH).

De (3-24) e (3-25) temos que a *solução geral* de (NH) é dada por

$$x_{NH}(t) = x_P(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i(t) \quad , \quad c \in \mathbb{R}^n. \tag{3-26}$$

Portanto

$$x_{NH}(t) = x_P(t) + x_H(t). \tag{3-27}$$

■

Mostraremos a seguir algumas relações entre o *Wronskiano* e a *matriz fundamental*, obtendo o importante resultado de que se existir um instante t_0 tal que $W(t_0) \neq 0$ então $W(t) \neq 0$ para todo t e temos que $W(t)$ é o determinante de uma *matriz fundamental*.

Ainda, vale a recíproca, ou seja, se $W(t)$ for o determinante de uma *matriz fundamental*, então temos que $W(t) \neq 0$ para todo t.

Teorema 3.10 *Considere $W(t)$ o Wronskiano (Definição 3.7). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *existe $t_0 \in I$ tal que $W(t_0) \neq 0$;*

2. *$W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$;*

3. *$\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ é uma base do espaço vetorial E, ou seja, é um SFS e φ é uma matriz fundamental do sistema.*

Demonstração.
Considere a aplicação linear bijetiva L definida na demonstração da Proposição 3.4. Pelo Teorema B.56, <u>L é um isomorfismo</u> e existe aplicação linear inversa e bijetiva L^{-1} tal que, pela Definição B.55:

$$L^{-1}(L(\varphi^i)) = \varphi^i. \tag{3-28}$$

Afirmação: $(1 \Rightarrow 3)$
Pelo Teorema B.53, como $W(t_0) = Det[\varphi^1(t_0) \ldots \varphi^n(t_0)] \neq 0$ então $\{\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^n(t_0)\}$ são linearmente independentes. Por (3-28), aplicando L^{-1} em $L(\varphi^i) = \varphi^i(t_0)$ para $i = 1 \ldots n$ temos

$$\varphi^i = L^{-1}(L(\varphi^i)) = L^{-1}(\varphi^i(t_0)). \tag{3-29}$$

Como L^{-1} é bijetiva e os n vetores $\{\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^n(t_0)\}$ são linearmente independentes então os n vetores $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ também são linearmente independentes. Assim, pelo Teorema B.5, $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ formam uma base de E.

Afirmação: $(3 \Rightarrow 2)$
Pelo Teorema B.5, $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ são linearmente independentes.
Logo, pela Definição B.4:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i = 0 \in E \text{ (função identicamente nula)} \Rightarrow c_i = 0 \quad i = 1 \ldots n. \tag{3-30}$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow c_i = 0 \qquad i = 1 \ldots n. \tag{3-31}$$

Assim, pela Definição B.4, $\{\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\}$ são linearmente independentes para todo $t \in I$. Pelo Teorema B.53, $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Afirmação: $(2 \Rightarrow 1)$
Se $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ então, trivialmente, existe $t_0 \in I$ tal que $W(t_0) \neq 0$. ■

A seguir, mostraremos a relação entre o *Wronskiano*, sua derivada e o traço da matriz $A(t)$, bem como veremos que podemos calculá-lo usando uma integral.

Teorema 3.11 (Fórmula de Liouville)
Seja W(t) o Wronskiano (Definição 3.7) então

$$W'(t) = tr(A(t))W(t).$$

Demonstração.
Sejam

$$\omega_j := \begin{bmatrix} \varphi_1^1 & \dots & \varphi_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{j-1}^1 & \dots & \varphi_{j-1}^n \\ (\varphi_j^1)' & \dots & (\varphi_j^n)' \\ \varphi_{j+1}^1 & \dots & \varphi_{j+1}^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n^1 & \dots & \varphi_n^n \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_{j-1} \\ (\varphi_j)' \\ \varphi_j^{j+1} \\ \dots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \quad j = 1 \dots n. \tag{3-32}$$

Assim, pelo Teorema A.10 (Derivada de Determinantes) temos

$$W'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det(\omega_j(t)) = \sum_{j=1}^{n} |\omega_j(t)|. \tag{3-33}$$

Como

$$(\varphi^i)'(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t}(t) = A(t)\varphi^i(t) \Rightarrow (\varphi_j^i)'(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi_j^i}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\varphi_k^i(t) \tag{3-34}$$

então

$$\begin{aligned} (\varphi_j^1)' &= a_{j1}\varphi_1^1 + \dots + a_{jn}\varphi_n^1 \\ &\dots\dots \\ (\varphi_j^j)' &= a_{j1}\varphi_1^j + \dots + a_{jn}\varphi_n^j \\ &\dots\dots \\ (\varphi_j^n)' &= a_{j1}\varphi_1^j + \dots + a_{jn}\varphi_n^n \end{aligned} \tag{3-35}$$

Rescrevendo 3-35 temos

$$\begin{bmatrix} (\varphi_j^1)' \\ \dots \\ (\varphi_j^j)' \\ \dots \\ (\varphi_j^n)' \end{bmatrix}^t = a_{j1} \begin{bmatrix} \varphi_1^1 \\ \dots \\ \varphi_1^j \\ \dots \\ \varphi_1^n \end{bmatrix}^t + \dots + a_{jj} \begin{bmatrix} \varphi_j^1 \\ \dots \\ \varphi_j^j \\ \dots \\ \varphi_j^n \end{bmatrix}^t + \dots + a_{jn} \begin{bmatrix} \varphi_n^1 \\ \dots \\ \varphi_n^j \\ \dots \\ \varphi_n^n \end{bmatrix}^t \tag{3-36}$$

$$\Rightarrow (\varphi_j)' = a_{j1}\varphi_1 + \dots + a_{jj}\varphi_j + \dots + a_{jn}\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\varphi_k.$$

Seja D a função determinante (definida no Teorema B.51) então

$$
\begin{aligned}
|\omega_j| &= D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \quad (\varphi_j)' \quad , \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n) \\
&= D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\varphi_k \quad , \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n).
\end{aligned} \tag{3-37}
$$

Pela multilinearidade (Definição B.50) da função determinante temos

$$
|\omega_j| = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_k, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n). \tag{3-38}
$$

Como para todo $k \neq j$ a linha φ_k se repete para algum φ_j então

$$
D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_k, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n) = 0 \quad \forall k \neq j. \tag{3-39}
$$

Assim, temos

$$
|\omega_j| = a_{jj} D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_j, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n) = a_{jj} D(\varphi) = a_{jj} W. \tag{3-40}
$$

De (3-33) e (3-40)

$$
W'(t) = \sum_{j=1}^{n} |\omega_j(t)| = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t) W(t) = tr(A(t)) W(t). \tag{3-41}
$$

■

Corolário 3.12 *Para todo $t \in I$ temos*

$$
W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s)) ds}.
$$

Demonstração.
Se existir $t_0 \in I$ tal que $W(t_0) = 0$ temos, pelo Teorema 3.10, que $W(t) = 0$ para todo $t \in I$ e logo a expressão é trivialmente válida.
Se $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ então

$$
\frac{W'(t)}{W(t)} = tr(A(t)). \tag{3-42}
$$

Integrando de t_0 a t temos

$$
\int_{t_0}^{t} \frac{W'(s)}{W(s)} ds = \ln \left| \frac{W(t)}{W(t_0)} \right| = \int_{t_0}^{t} tr(A(s)) ds. \tag{3-43}
$$

Logo

$$
|W(t)| = |W(t_0)| e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s)) ds}. \tag{3-44}
$$

Como $W(t)$ é uma função contínua e $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ então $W(t)$ não muda de sinal, ou seja, $W(t) > 0$ para todo $t \in I$ ou $W(t) < 0$ para todo $t \in I$. Portanto

$$
W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s)) ds}. \tag{3-45}
$$

■

3.3 Solução de Sistemas Lineares com coeficientes variáveis

O teorema a seguir nos fornece a solução do sistema (3-1) como função de uma *matriz fundamental*.

Teorema 3.13 *Seja o sistema (3-1) e $\varphi(t)$ a respectiva matriz fundamental, então a solução é dada por*

$$x(t) = \varphi(t)\left(\varphi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi^{-1}(s)b(s)ds\right)$$

em que $\varphi^{-1}(t)$ é a matriz inversa de $\varphi(t)$ definida para todo $t \in I$.

Demonstração.
Como $\varphi(t)$ é uma *matriz fundamental* então pelo Teorema 3.10

$$\det(\varphi(t)) = |\varphi(t)| \neq 0 \text{ para todo } t \in I. \tag{3-46}$$

Assim, pelo Teorema B.53, a matriz $\varphi(t)$ é inversível para todo $t \in I$ e logo existe matriz inversa $\varphi^{-1}(t)$ definida para todo $t \in I$.

Seja $d : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(t)d'(t) = b(t)$ então pela definição de matriz inversa (Teorema B.53)

$$\varphi^{-1}(t)b(t) = \varphi^{-1}(t)\varphi(t)d'(t) \Rightarrow \varphi^{-1}(t)b(t) = d'(t). \tag{3-47}$$

Como φ é contínua temos, pela Proposição A.11, que φ^{-1} também é contínua. Já que b e φ^{-1} são contínuas então pelo Teorema Fundamental do Cálculo B.40

$$d(t) = d(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi^{-1}(s)b(s)ds. \tag{3-48}$$

Logo, d está bem definida para todo $t \in I$. Como $\varphi(t).d'(t) = b(t)$ então

$$\begin{bmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_1^n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n^1(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1'(t) \\ \dots \\ d_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \varphi_1^i(t)d_i'(t) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} \varphi_n^i(t)d_i'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1'(t) \\ \dots \\ b_n'(t) \end{bmatrix} \tag{3-49}$$

$$\Rightarrow b_j(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_j^i(t)d_i'(t) \quad j = 1\dots n \Rightarrow b(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(t)d_i'(t). \tag{3-50}$$

Pela definição de *matriz fundamental* (Definição 3.6) temos que φ^i é uma solução do sistema *homogêneo* $x'(t) = A(t)x(t)$ para $i = 1\dots n$, logo

$$(\varphi^i)'(t) = A(t)\varphi^i(t) \qquad i = 1\dots n. \tag{3-51}$$

Multiplicando (3-51) por $d_i(t)$ para $i = 1 \dots n$

$$\begin{aligned} (\varphi^i)'(t)d_i(t) &= A(t)\varphi^i(t)d_i(t) \\ \sum_{i=1}^{n}(\varphi^i)'(t)d_i(t) &= A(t)\sum_{i=1}^{n}\varphi^i(t)d_i(t). \end{aligned} \tag{3-52}$$

Seja $y(t) := \varphi(t)d(t) = \sum_{i=1}^{n}\varphi^i(t)d_i(t)$ então, aplicando a regra da soma e produto das derivadas (Teorema B.39)

$$y'(t) = \sum_{i=1}^{n}(\varphi^i)'(t)d_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\varphi^i(t)d_i'(t). \tag{3-53}$$

De (3-52) e (3-50)

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t). \tag{3-54}$$

Pela Definição 3.3, $x_P(t) := y(t) = \varphi(t).d(t)$ é *solução particular* do sistema *não-homogêneo* e, pela Proposição 3.9, a *solução geral* deste sistema é

$$\begin{aligned} x &= x_H + x_P \\ x(t) &= \varphi(t)(c + d(t)) \qquad , \quad c \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3-55}$$

De (3-48)

$$x(t) = \varphi(t)\left(c + d(t_0) + \int_{t_0}^{t}\varphi^{-1}(s)b(s)ds\right) \quad , \quad c \in \mathbb{R}^n \tag{3-56}$$

Considerando a condição inicial $x(t_0) = x_0$ temos que

$$x_0 = x(t_0) = \varphi(t_0)(c + d(t_0)) \Rightarrow c + d(t_0) = \varphi^{-1}(t_0)x_0. \tag{3-57}$$

De (3-56) e (3-57) temos que a solução do sistema (3-1) é dada por

$$x(t) = \varphi(t)\left(\varphi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}\varphi^{-1}(s)b(s)ds\right). \tag{3-58}$$

■

3.4 A Exponencial Matricial

Nesta seção, definiremos a exponencial de uma matriz e apresentaremos suas principais propriedades, relevantes ao presente estudo.

Definição 3.14 *Seja A uma matriz (real ou complexa) $(n \times n)$, definimos a exponencial de A como:*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \qquad \text{em que } A^0 := I \text{ (matriz identidade).}$$

Usando a norma matricial induzida (Definição B.10) e suas propriedades:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\| A^k \right\|}{k!} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} \in \mathbb{R}. \tag{3-59}$$

Pelo Teorema B.20 temos que a série é absolutamente convergente, logo convergente e portanto e^A está bem definido. Note que, no caso de matrizes complexas, usamos este teorema considerando a bijeção entre as matrizes complexas $\mathbb{C}^{n\times n}$ e os vetores reais $\mathbb{R}^{2n^2}$.

No teorema a seguir, usaremos o conceito de derivada de uma função matricial (Definição B.32).

Teorema 3.15 (Diferenciabilidade)
Seja A matriz real e $\varphi(t) = e^{tA}$ então $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $\varphi^{(k)} = A^k e^{tA}$ em que $\varphi^{(k)}$ é a derivada de ordem k de φ.

Demonstração.
Mostraremos primeiramente que $\underline{\varphi \text{ é contínua em } \mathbb{R}}$.

Seja a sequência de funções matriciais f_k definida para todo $k \in \mathbb{N}$

$$f_k(t) = \frac{t^k A^k}{k!} \Rightarrow e^{tA} = I + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t). \tag{3-60}$$

Seja $t_1 \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ (fixos e arbitrários), usando a norma matricial (Definição B.10) e suas propriedades, temos para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\|f_k(t) - f_k(t_1)\| = \left\| \frac{A^k}{k}(t^k - t_1^k) \right\| \le \frac{\left\|A^k\right\|}{k!} |t^k - t_1^k|. \tag{3-61}$$

Como $\dfrac{\left\|A^k\right\|}{k!} \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{t\to t_1} |t^k - t_1^k| = 0$ então pelo Teorema B.25

$$\lim_{t\to t_1} \|f_k(t) - f_k(t_1)\| = 0 \Rightarrow \lim_{t\to t_1} f_k(t) = f_k(t_1). \tag{3-62}$$

Assim, temos que f_k é contínua em $t_1 \in \mathbb{R}$. Como t_1 e k são arbitrários então f_k é contínua em $\mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja $M > 0$ (arbitrário) e $t \in [-M, M]$, fixamos $t_1 = 0$ em (3-61)

$$\|f_k(t)\| \le M^k \frac{\left\|A^k\right\|}{k!} \le \frac{\|MA\|^k}{k!} =: \alpha_k \in \mathbb{R}. \tag{3-63}$$

Pela Definição B.21, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = (e^{\|MA\|} - 1)$ e logo, pelo Teorema de Weierstrass A.4, a série $\sum f_k$ converge uniformemente em $[-M, M]$.

Como f_k é contínua em t para todo $k \in \mathbb{N}$ então, pelo Teorema B.46, $\sum f_k$ também é contínua em $t \in [-M, M]$. Mas t e M são arbitrários, logo $f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$.

De (3-60) temos que $e^{tA} = I + f(t)$, logo e^{tA} também é contínua em $\mathbb{R}$.

A seguir, mostraremos que φ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Procedendo analogamente, seja $M > 0$ (arbitrário) e $t \in [-M, M]$ temos

$$f_k(t) = \frac{t^k A^k}{k!} \Rightarrow f_k'(t) = \frac{t^{k-1} A^k}{k!} k = A \frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{3-64}$$

Usando a norma matricial (Definição B.10) e suas propriedades temos

$$\|f_k'(t)\| = \left\| A \frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!} \right\| \leq \|A\| \frac{\|tA\|^{k-1}}{(k-1)!} \leq \|A\| \frac{\|MA\|^{k-1}}{(k-1)!} =: \beta_k \in \mathbb{R}. \tag{3-65}$$

Novamente, como a série $\sum \beta_k$ é convergente, temos que a série $\sum f_k'$ converge uniformemente em $[-M, M]$. Ainda, para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que $f_k(0) = 0$ e logo $\sum f_k(0) = 0$.

Assim, pelo Teorema B.48, temos que a série $\sum f_k$ converge uniformemente em $[-M, M]$ para uma função f diferenciável tal que

$$(e^{tA})' = (I + f(t))' = f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t). \tag{3-66}$$

De (3-64)

$$\varphi'(t) = (e^{tA})' = \sum_{k=1}^{\infty} A \frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = Ae^{tA} = A\varphi(t). \tag{3-67}$$

Como φ' é o produto de funções contínuas φ e A (constante) então, pelo Teorema B.30, φ' é contínua em $[-M, M]$. Mas M é arbitrário, logo $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Por indução em k, mostraremos que $\varphi \in C^k(\mathbb{R})$ e $\varphi^{(k)}(t) = A^k e^{tA}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Vimos que é válido para $k = 1$. Suponha válido para $k \in \mathbb{N}$.

$$\varphi^{(k+1)}(t) = (\varphi^{(k)}(t))' = (A^k e^{tA})' = A^k (e^{tA})' = A^k (Ae^{tA}) = A^{k+1} e^{tA}. \tag{3-68}$$

Como A^{k+1} é constante e e^{tA} é contínua, temos que $\varphi^{(k+1)}$ é contínua, logo $\varphi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$. Assim, $\varphi^{(k)}(t) = A^k e^{tA}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. ■

Proposição 3.16 (Comutatividade)
Sejam A e B matrizes (reais ou complexas) tais que $AB = BA$ então

$$Be^{tA} = e^{tA}B.$$

Demonstração.
Se A e B comutam então, indutivamente, temos

$$BA^k = BAA^{k-1} = ABA^{k-1} = ABAA^{k-2} = A^2BA^{k-2} = \cdots = A^kB. \quad (3\text{-}69)$$

Logo, pela Definição 3.14, $Be^{tA} = e^{tA}B$. ■

Proposição 3.17 (Produto de Exponenciais Matriciais)
Sejam A e B matrizes (reais ou complexas) tais que $AB = BA$ então

$$e^{(A+B)} = e^Ae^B.$$

Demonstração.
Inicialmente, suponha A e B matrizes reais. Pelo Teorema 3.15 temos

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} \quad e \quad (e^{tB})' = Be^{tB}. \quad (3\text{-}70)$$

Como A e B comutam temos pela Proposição 3.16

$$e^{tA}B = Be^{tA}. \quad (3\text{-}71)$$

Consideremos o sistema linear de EDO definido para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = (A+B)x(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}. \quad (3\text{-}72)$$

Seja $y(t) = e^{tA}e^{tB}x_0$ e $z(t) = e^{t(A+B)}x_0$. Derivando y e z em t temos, pela regra do produto das derivadas (Teorema B.39), de (3-70) e (3-71) temos

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ae^{tA}e^{tB}x_0 + e^{tA}Be^{tB}x_0 = Ae^{tA}e^{tB}x_0 + Be^{tA}e^{tB}x_0 \\ &= (A+B)e^{tA}e^{tB}x_0 = (A+B)y(t) \\ z'(t) &= (A+B)e^{t(A+B)}x_0 = (A+B)z(t). \end{aligned} \quad (3\text{-}73)$$

Assim y e z são soluções de (3-72). Pelo Teorema de Existência e Unicidade 3.1 temos que $x := y = z$ é a única solução definida para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$x(t) = e^{tA}e^{tB}x_0 = e^{t(A+B)}x_0. \quad (3\text{-}74)$$

Escolhendo $t = 1$ e como x_0 é arbitrário temos

$$e^Ae^Bx_0 = e^{(A+B)}x_0 \Rightarrow e^Ae^B = e^{(A+B)}. \quad (3\text{-}75)$$

Se A e B forem complexas então, pela Proposição B.54, existem matrizes reais equivalentes $A_{\mathbb{R}}$ e $B_{\mathbb{R}}$ e usamos o resultado anterior obtendo

$$e^{A_{\mathbb{R}}}e^{B_{\mathbb{R}}} = e^{(A_{\mathbb{R}}+B_{\mathbb{R}})} = e^{(A+B)_{\mathbb{R}}}. \tag{3-76}$$

Pela equivalência entre as matrizes complexas A e B e suas respectivas representações reais $A_{\mathbb{R}}$ e $B_{\mathbb{R}}$ dadas pela Proposição B.54 temos

$$e^{A}e^{B} = e^{A+B}. \tag{3-77}$$

■

Proposição 3.18 (Inversa da Exponencial Matricial)
A matriz e^A é inversível para qualquer matriz (real ou complexa) A $(n \times n)$ e sua inversa é dada por

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Demonstração.
Pela Definição 3.14, temos que $e^0 = I$ (onde 0 é a matriz nula $n \times n$).
Como A e $-A$ comutam, ou seja, $A(-A) = (-A)A$ então pela Proposição 3.17

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^{A}e^{-A} \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}. \tag{3-78}$$

■

Proposição 3.19 *Sejam S, A e B matrizes (reais ou complexas) tal que S é inversível e $A = S^{-1}BS$ então*

$$e^{tA} = S^{-1}e^{tB}S.$$

Demonstração.
Por indução em k mostraremos que

$$A^k = S^{-1}B^kS \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3-79}$$

Se $k = 1$ então $A^1 = A = S^{-1}BS$, validando a base de indução. Supondo válido para $(k-1)$ que $A^{k-1} = S^{-1}B^{k-1}S$ e considerando que $SS^{-1} = I$

$$A^k = A^{k-1}A = (S^{-1}B^{k-1}S)(S^{-1}BS) = S^{-1}B^kS. \tag{3-80}$$

Logo $A^k = S^{-1}B^kS$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e portanto é válido para todo $k \in \mathbb{N}$ que

$$I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^kA^k}{k!} = S^{-1}(I + tB + \frac{t^2B^2}{2!} + \cdots + \frac{t^kB^k}{k!})S. \tag{3-81}$$

Pela Definição 3.14, quando $k \to \infty$ temos

$$e^{tA} = S^{-1}e^{tB}S. \tag{3-82}$$

■

A seguir, mostraremos como podemos calcular a exponencial de uma matriz qualquer. Iniciaremos com o caso de uma matriz diagonal, depois usamos o resultado para tratar o caso de um bloco de Jordan que por sua vez nos permite calcular a exponencial de uma matriz de Jordan. Por fim, usamos este último resultado e o Teorema de Jordan B.63 para calcular a exponencial de uma matriz qualquer.

Proposição 3.20 (Exponencial de Matrizes Diagonais)
Se A é uma Matriz diagonal $(n \times n)$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \textit{então} \quad e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$A^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3-83}$$

Pela Definição 3.14

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots \tag{3-84}$$

De (3-83) e (3-84)

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_1^3 t^3}{3!} + \dots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \lambda_n t + \frac{\lambda_n^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_n^3 t^3}{3!} + \dots \end{bmatrix}. \tag{3-85}$$

Logo

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \tag{3-86}$$

■

Proposição 3.21 (Exponencial de Blocos de Jordan)
Se A é um bloco de Jordan J $(n \times n)$, ou seja

$$A = J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \textit{então} \quad e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \ddots & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} =: \lambda I + N. \tag{3-87}$$

A cada multiplicação $N.N$, a diagonal com 1 se desloca um nível para cima e temos $N^n = 0$. Assim, temos que

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tN)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(tN)^k}{k!} = I + tN + \frac{t^2 N^2}{2!} + \frac{t^3 N^3}{3!} + \dots + \frac{t^{n-1} N^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{3-88}$$

Com isto, temos

$$e^{tN} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \ddots & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{3-89}$$

Como $(\lambda I t)$ e (Nt) comutam então pela Proposição 3.17

$$e^{tA} = e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} e^{Nt}. \tag{3-90}$$

Como $e^{\lambda I t}$ é uma matriz diagonal temos pela Proposição 3.20

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda t} \end{bmatrix} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN}. \tag{3-91}$$

■

Proposição 3.22 (Exponencial de Matrizes de Jordan)
Se A é uma Matriz de Jordan $(n \times n)$ (definida no Teorema B.63) com k blocos de Jordan $J_1, \dots, J_k$ (definidos na Proposição 3.21), ou seja, $i = 1 \dots k$:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix} \quad \textit{então} \quad e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_k} \end{bmatrix}$$

(cada um dos blocos J_i tem dimensão $n_i \times n_i$ tal que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$).

Demonstração. Seja A_i a Matriz contendo apenas o bloco J_i, ou seja:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ & & 0 & & \\ \vdots & 0 & J_i & 0 & \vdots \\ & & 0 & & \\ 0 & & \dots & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_i^2 = \begin{bmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ & & 0 & & \\ \vdots & 0 & J_i^2 & 0 & \vdots \\ & & 0 & & \\ 0 & & \dots & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_i^j = \begin{bmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ & & 0 & & \\ \vdots & 0 & J_i^j & 0 & \vdots \\ & & 0 & & \\ 0 & & \dots & & 0 \end{bmatrix}. \tag{3-92}$$

Pela Definição 3.14 temos que para $i = 1 \dots k$

$$e^{tA_i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tA_i)^j}{j!} = I + tA_i + \frac{t^2 A_i^2}{2!} + \frac{t^3 A_i^3}{3!} + \dots \tag{3-93}$$

De (3-92) e (3-93), usando o resultado da Proposição 3.21 temos

$$e^{tA_i} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_i} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \tag{3-94}$$

Como A_i e A_l comutam para todo $i \neq l$ então pela Proposição 3.17

$$e^{tA} = e^{\left(\sum_{i=1}^{k} tA_i\right)} = e^{tA_1} e^{tA_2} \dots e^{tA_k} \tag{3-95}$$

$$e^{tA_1} e^{tA_2} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{3-96}$$

$$(e^{tA_1} e^{tA_2}) e^{tA_3} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{tJ_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{tJ_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \tag{3-97}$$

Procedendo assim, indutivamente, temos o resultado procurado. ■

Proposição 3.23 (Cálculo da Exponencial Matricial)
Pelo Teorema de Jordan B.63, seja S a matriz inversível que transforma uma matriz A na forma normal de Jordan B tal que $B = S^{-1}AS$ então

$$e^{tA} = Se^{tB}S^{-1} \textit{ em que}$$

$$e^{tB} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_k} \end{bmatrix} \quad e \quad e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \ddots & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstração.
Como $A = SBS^{-1}$ então o resultado vem diretamente da aplicação das Proposições 3.22 e 3.19 sendo, portanto, uma forma de calcular e^{tA} para qualquer matriz A. ■

3.5
Solução de Sistemas Lineares com Matriz constante

Considere o sistema (3-1) em que $A(t) = A$ (matriz real constante) para todo $t \in I$:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \forall t \in I. \tag{3-98}$$

Teorema 3.24 *Se $\varphi(t) = e^{tA}$ então φ é matriz fundamental de $x' = Ax$.*

Demonstração.
Pelo Teorema 3.15, $\varphi'(t) = A\varphi(t)$ tal que $A = (a_i^j)_{i,j=1}^n$ e para toda coluna $j \leq n$ temos

$$(\varphi_i^j(t))' = \sum_{k=1}^{n} a_i^k \varphi_k^j(t) \Rightarrow (\varphi^j(t))' = A\varphi^j(t). \tag{3-99}$$

Assim, φ^j é solução do sistema $x' = Ax$ para $j = 1 \dots n$.

Calculando o *Wronskiano* (Definição 3.7) para o ponto $t_0 = 0$ temos

$$W(0) = \det(\varphi(0)) = |\varphi(0)| = |e^0| = |I| = 1 \neq 0. \tag{3-100}$$

Como existe t_0 tal que $W(t_0) \neq 0$ então, pelo Teorema 3.10, φ é *matriz fundamental.* ■

Teorema 3.25 *A solução do sistema (3-98) é dada por*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Demonstração.
Pelo Teorema 3.24 temos que $\varphi(t) = e^{tA}$ é *matriz fundamental* do sistema.

Pela Proposição 3.18 temos $\varphi^{-1}(t) = e^{-tA}$.

Usando o Teorema 3.13 considerando $A(t) = A$ (constante) temos

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t)\left(\varphi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi^{-1}(s)b(s)ds\right) \\ x(t) &= e^{tA}\left(e^{-t_0A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA}b(s)ds\right). \end{aligned} \tag{3-101}$$

Como (tA), $(-t_0A)$ e $(-sA)$ comutam entre si, temos pela Proposição 3.17

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds. \tag{3-102}$$

■

4
Estabilidade de Soluções de Sistemas de EDO

Seja uma função $F : D \subset \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ e o sistema de equações diferenciais ordinárias, definido para $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$

$$x' = F(t, x). \tag{4-1}$$

Definição 4.1 (Estabilidade de Soluções) *[9]*
Uma solução ψ de (4-1) é dita estável se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que para toda solução φ do sistema em que $\|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta$ tivermos $\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$. Caso contrário, dizemos que ψ é instável.

Nas seções a seguir, consideraremos $t_0 = 0$ e $F(t, 0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ para todo $t \geq 0$ e decomporemos F na soma de uma função não-linear $f : D \to \mathbb{R}^n$ com uma função linear Ax em que A é uma matriz real $(n \times n)$ constante, ou seja, consideraremos o seguinte sistema não-linear de EDO, definido para todo $t \geq 0$

$$x' = Ax + f(t, x). \tag{4-2}$$

Na seção 4.3, veremos um exemplo de como podemos fazer esta decomposição da função F.

Definição 4.2 (Solução Estacionária)
As soluções constantes de um sistema de equações diferenciais ordinárias são denominadas soluções estacionárias do sistema.

Notemos que, como $F(t, 0) = f(t, 0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ para todo $t \geq 0$ então a função identicamente nula é uma *solução estacionária* destes sistemas. Analisaremos neste capítulo a estabilidade desta solução.

Iniciaremos demonstrando um importante resultado que nos permite limitar o valor da norma de uma função exponencial matricial por uma função exponencial real. Este resultado será utilizado ao longo deste capítulo.

Proposição 4.3 *Seja A uma matriz $(n \times n)$ tal que as partes reais de seus autovalores sejam menores do que $\beta \in \mathbb{R}$ então existe $\alpha \geq 1$ tal que*

$$\left\| e^{tA} \right\| \leq \alpha e^{\beta t} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Demonstração.
Vimos na Proposição 3.23 que existem matrizes S e B $(n \times n)$ tais que

$$e^{tA} = S e^{tB} S^{-1} \tag{4-3}$$

em que

$$e^{tB} := \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e^{tJ_l} = e^{\lambda_l t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{n_l-1}}{(n_l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \ddots & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4-4}$$

tal que

$$\sum_{l=1}^{k} n_l = n \Rightarrow n_l \leq n \qquad l = 1 \ldots k. \tag{4-5}$$

Seja

$$(c_{ij}(t))_{i,j=1}^{n} := e^{tB}. \tag{4-6}$$

Usando as propriedades da norma matricial induzida (Definição B.10) temos

$$\left\| e^{tA} \right\| \leq \|S\| \left\| e^{tB} \right\| \left\| S^{-1} \right\| =: \alpha_1 \left\| e^{tB} \right\| \tag{4-7}$$

em que

$$\alpha_1 := \|S\| \left\| S^{-1} \right\| \geq \left\| S S^{-1} \right\| = \|I\| \Rightarrow \alpha_1 \geq 1. \tag{4-8}$$

Seja $\lambda = \max\{Re\lambda_1, \ldots, Re\lambda_k\}$ então $\lambda < \beta$ e para todo $l \leq k$ e $t \geq 0$

$$\lambda_l =: a_l + i b_l \Rightarrow |e^{\lambda_l}| \leq |e^{a_l}||e^{i b_l}| \leq e^{\lambda}.1 = e^{\lambda} \Rightarrow |e^{\lambda_l t}| \leq e^{\lambda t}. \tag{4-9}$$

Então, para todo $i, j \leq n$ existe n_{ij} tal que $1 \leq n_{ij} \leq n$

$$|c_{ij}(t)| \leq \frac{t^{n_{ij}-1} e^{\lambda t}}{(n_{ij}-1)!}. \tag{4-10}$$

Assim, se

$$\begin{aligned} &0 \leq t \leq 1 \Rightarrow |c_{ij}(t)| \leq e^{\lambda t} \leq e^{\beta t} \\ &t \geq 1 \Rightarrow |c_{ij}(t)| \leq t^{n_{ij}-1} e^{\lambda t} \leq t^{n-1} e^{\lambda t} = \frac{t^{n-1}}{e^{(\beta-\lambda)t}} e^{\beta t} \leq \frac{n!}{(\beta-\lambda)^n} e^{\beta t} \end{aligned} \tag{4-11}$$

sendo a última desigualdade decorrente de que se $t \geq 1$ e $\delta := (\beta - \lambda) > 0$

$$\frac{\delta^n t^{n-1}}{n!} = \frac{(\delta t)^n}{t.n!} \leq \frac{(\delta t)^n}{n!} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\delta t)^m}{m!} = e^{\delta t} \tag{4-12}$$

De (4-11), escolhendo $\alpha_2 := \max\left\{1, \frac{n!}{(\beta-\lambda)^n}\right\}$ temos

$$\left\|e^{tB}\right\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}(t)| \leq n\alpha_2 e^{\beta t} \quad \forall t \geq 0. \tag{4-13}$$

De (4-7) e (4-13), definindo $\alpha := n\alpha_1\alpha_2 > 0$ temos

$$\left\|e^{tA}\right\|_1 \leq \alpha_1 \left\|e^{tB}\right\|_1 \leq \alpha_1(n\alpha_2 e^{\beta t}) = \alpha e^{\beta t} \quad \forall t \geq 0. \tag{4-14}$$

Pela equivalência entre as normas matriciais, temos o resultado procurado. ■

4.1
Estabilidade Assintótica de Soluções

Definição 4.4 *[9]*
Sejam ψ e φ soluções conforme Definição 4.1, dizemos que a solução ψ é <u>*assintoticamente estável*</u> *se, além de ser estável, tivermos também*

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0.$$

Visando fixar os conceitos de estabilidade, analisaremos a seguir o caso particular do sistema (4-2) em que $f \equiv 0 \in \mathbb{R}^n$, ou seja, um sistema linear homogêneo $x' = Ax$.

Proposição 4.5 *Seja o sistema (4-2) com $f \equiv 0 \in \mathbb{R}^n$. Se todos os autovalores de A possuírem partes reais negativas então a solução identicamente nula do sistema $x' = Ax$ é assintoticamente estável.*

Demonstração.
Seja φ uma solução qualquer do sistema então pelo Teorema 3.25 temos que

$$\varphi(t) = e^{tA}\varphi(0). \tag{4-15}$$

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os autovalores de A, definimos $\lambda = \max_{i\leq k} Re\lambda_i$ e como $\lambda < 0$ temos que existe $\beta = \frac{\lambda}{2} < 0$ tal que para todo $i \leq k$ temos $\lambda_i \leq \lambda < \beta < 0$ e logo, pela Proposição 4.3, existe $\alpha \geq 1$ tal que

$$\left\|e^{tA}\right\| \leq \alpha e^{\beta t} \quad \forall t \geq 0. \tag{4-16}$$

De (4-15) e (4-16) temos

$$\|\varphi(t)\| \leq \alpha e^{\beta t} \|\varphi(0)\| \quad \forall t \geq 0. \tag{4-17}$$

Como $\beta < 0$ temos que $e^{\beta t} \leq 1$ e logo

$$\|\varphi(t)\| \leq \alpha \|\varphi(0)\| \quad \forall t \geq 0. \tag{4-18}$$

Seja $\varepsilon > 0$ escolhendo $\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha} > 0$ temos que

$$\|\varphi(0)\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t)\| \leq \alpha \|\varphi(0)\| < \alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \tag{4-19}$$

Assim, seja ψ a solução identicamente nula ($\psi(t) = 0$ para todo $t \geq 0$), temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\varphi(0) - \psi(0)\| < \delta$ implica que $\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$, logo ψ é estável pela Definição 4.1.

De (4-17), como $\beta < 0$ temos

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t) - \psi(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|\varphi(t)\| = 0. \tag{4-20}$$

Desta forma, pela Definição 4.4, a solução ψ (identicamente nula) é assintoticamente estável. ■

A seguir, analisaremos o comportamento da solução identicamente nula de um sistema não linear que se aproxima de um sistema linear para um x muito próximo a origem. Mais formalmente, veremos o caso em que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0 \text{ uniformemente em } t \text{ para } t \geq 0,$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ para todo $t \geq 0$ e $\|x\| < \delta$.

Teorema 4.6 *Seja o sistema (4-2) em que todos os autovalores de A possuem partes reais negativas. Suponha existir* $\delta_0 > 0$ *em que* f *é contínua para todo* $t \geq 0$ *e* $\|x\| < \delta_0$*. Se para todo* $\varepsilon > 0$ *existir* $\delta_1 > 0$ *tal que* $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ *para todo* $t \geq 0$ *e* $\|x\| < \delta_1$ *então a solução identicamente nula é assintoticamente estável.*

Demonstração.
Conforme vimos na Proposição 4.5, existem $\beta < 0$ e $\alpha \geq 1$ tais que

$$\left\|e^{tA}\right\| \leq \alpha e^{\beta t} \text{ para todo } t \geq 0. \tag{4-21}$$

Logo, para todo $0 \leq s \leq t$ temos também que

$$\left\|e^{(t-s)A}\right\| \leq \alpha e^{\beta(t-s)}. \tag{4-22}$$

Seja φ uma solução qualquer do sistema, considerando $b(t) := f(t, \varphi(t))$ então, se $\|\varphi(s)\| < \delta_0$ para todo $s \in [0, t]$, $b(t)$ é contínua e logo podemos usar o Teorema 3.25 e temos

$$\varphi(t) = e^{tA}\varphi(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s, \varphi(s)) ds. \tag{4-23}$$

Usando as desigualdades das normas matriciais e vetoriais, de (4-21) e (4-22) temos que se $\|\varphi(s)\| < \delta_0$ para todo $s \in [0, t]$ então

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\| &\leq \left\|e^{tA}\right\| \|\varphi(0)\| + \int_0^t \left\|e^{(t-s)A}\right\| \|f(s, \varphi(s))\| \, ds \\ \|\varphi(t)\| &\leq \alpha e^{\beta t} \|\varphi(0)\| + \int_0^t \alpha e^{\beta(t-s)} \|f(s, \varphi(s))\| \, ds. \end{aligned} \tag{4-24}$$

Seja $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$ então, pela Definição de Limite B.24, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $\|x\| < \delta_1$

$$\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} < \frac{\varepsilon}{\alpha} \Rightarrow \|f(t,x)\| < \frac{\varepsilon}{\alpha}\|x\| \quad \forall t \geq 0. \tag{4-25}$$

Assim, de (4-24) e (4-25), se $\|\varphi(s)\| < \delta_2 := \min\{\delta_1, \delta_0\}$ para todo $s \in [0, t]$

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\| &\leq \alpha e^{\beta t} \|\varphi(0)\| + \int_0^t \alpha e^{\beta(t-s)} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\|\varphi(s)\|\right) ds \\ e^{-\beta t} \|\varphi(t)\| &\leq \alpha \|\varphi(0)\| + \int_0^t \varepsilon e^{-\beta s} \|\varphi(s)\| \, ds. \end{aligned} \tag{4-26}$$

Pela Proposição A.12 considerando

$$w(t) := e^{-\beta t} \|\varphi(t)\| \quad , \quad y(t) := \alpha \|\varphi(0)\| \quad \text{e} \quad z(t) := \varepsilon \tag{4-27}$$

temos de (4-26)

$$\begin{aligned} e^{-\beta t} \|\varphi(t)\| &\leq \alpha \|\varphi(0)\| + \int_0^t \varepsilon\alpha \|\varphi(0)\| \left(e^{\int_s^t \varepsilon \, du}\right) ds \\ &\leq \alpha \|\varphi(0)\| \left(1 + \varepsilon \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)} ds\right) \\ &= \alpha \|\varphi(0)\| \left(1 - e^{\varepsilon(t-s)}\big|_0^t\right) \\ &= \alpha \|\varphi(0)\| e^{\varepsilon t}. \end{aligned} \tag{4-28}$$

Logo

$$\|\varphi(t)\| \leq \alpha \|\varphi(0)\| e^{(\beta+\varepsilon)t}. \tag{4-29}$$

Se $\varepsilon < -\beta$ então $\eta := \beta + \varepsilon < 0$ e temos que se $\|\varphi(s)\| < \delta_2$ para todo $s \in [0, t]$

$$\|\varphi(t)\| \leq \alpha \|\varphi(0)\| e^{\eta t} \quad \forall t \geq 0. \tag{4-30}$$

Afirmação: *Se* $\|\varphi(0)\| < \dfrac{\delta_2}{\alpha} \leq \delta_2$ *então* $\|\varphi(t)\| < \delta_2$ *para todo* $t \geq 0$.

Pela continuidade de φ em 0, seja $\varepsilon' = \delta_2 - \|\varphi(0)\| > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que se $|s| < t_0$ então $\|\varphi(s) - \varphi(0)\| < \varepsilon'$ e logo $\|\varphi(s)\| < \delta_2$ para todo $s \in (0, t_0)$.

Sejam

$$P := \{t > 0 : \|\varphi(s)\| < \delta_2 \ \forall s \in (0,t)\} \quad e \quad T := \sup P \tag{4-31}$$

então $T \geq t_0 > 0$. Suponha por absurdo que $T < \infty$, ou seja, $T \in \mathbb{R}$.

Como $\|\varphi(s)\| < \delta_2$ para todo $s \in (0, T)$ então, de (4-30)

$$\|\varphi(T)\| \leq \alpha \|\varphi(0)\| e^{\eta T} \leq \alpha \|\varphi(0)\| < \delta_2. \tag{4-32}$$

Mas, pela continuidade de φ em T, existe $t_1 > 0$ tal que $\|\varphi(t)\| < \delta_2$ para todo $t \in (T, T + t_1)$. Absurdo, pois $T = \sup P \geq T + t_1 > T$.

Assim, escolhendo $\delta := \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{\alpha}, \dfrac{\delta_2}{\alpha}\right\}$ temos $\|\varphi(0)\| < \delta$ e $\|\varphi(t)\| < \delta_2$ para todo $t \geq 0$ e, portanto, podemos usar (4-30)

$$\|\varphi(t)\| \leq \alpha \|\varphi(0)\| e^{\eta t} \leq \alpha \|\varphi(0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \tag{4-33}$$

Se $\varepsilon \geq -\beta$, escolhemos qualquer δ obtido para algum ε_0 (fixo) tal que $\varepsilon_0 < -\beta$ e temos por (4-33) que se $\|\varphi(0)\| < \delta$ e $\eta := \beta + \varepsilon_0 < 0$ então

$$\|\varphi(t)\| \leq \alpha \|\varphi(0)\| e^{\eta t} \leq \alpha \|\varphi(0)\| < \varepsilon_0 < \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \tag{4-34}$$

De (4-33) e (4-34), para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|\varphi(0)\| < \delta$ então

$$\|\varphi(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, pela Definição 4.1, temos que a solução identicamente nula é estável. Ainda, como $\eta < 0$ temos $\lim_{t\to\infty} e^{\eta t} = 0$ e portanto

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t)\| = 0. \tag{4-35}$$

Desta forma, pela Definição 4.4, temos que a solução identicamente nula é assintoticamente estável. ∎

Em seguida, enfraqueceremos um pouco as hipóteses do teorema anterior e analisaremos um sistema não linear que se aproxima de um sistema linear próximo a origem a partir de um instante t suficientemente grande.

Teorema 4.7 *Seja o sistema (4-2) em que todos autovalores de A possuem partes reais negativas. Suponha existirem $\delta_0 > 0$ e $K > 0$ tais que para todo $t \geq 0$ e $\|x\| < \delta_0$ tem-se que f é contínua e $\|f(t,x)\| \leq K\|x\|$.*
Se para todo $\varepsilon > 0$ existirem $\delta_1 > 0$ e $T \geq 0$ tais que $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ para todo $t \geq T$ e $\|x\| < \delta_1$ então a solução identicamente nula é assintoticamente estável.

Demonstração.
Seja φ uma solução (não identicamente nula) então

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) + f(t,\varphi(t)). \tag{4-36}$$

Se $\|\varphi(t)\| < \delta_0$ então $b(t) := f(t,\varphi(t))$ é contínua e, pelo Teorema de Existência e Unicidade 3.1, temos que $\varphi(t) \neq 0$ para todo $t \geq 0$ (caso contrário φ teria que ser a solução identicamente nula).

Como $\|\varphi(t)\| \neq 0$, pela regra da cadeia (Teorema B.38) e do produto (Teorema B.39) das derivadas temos, respectivamente

$$(\|\varphi\|^2)' = 2\|\varphi\|\,\|\varphi\|' \quad e \quad (\|\varphi\|^2)' = (\varphi.\varphi)' = 2\varphi.\varphi'. \tag{4-37}$$

Logo

$$\|\varphi\|' = \frac{\varphi}{\|\varphi\|}.\varphi' \leq \left\|\frac{\varphi}{\|\varphi\|}\right\| \|\varphi'\| = 1.\,\|\varphi'\| \tag{4-38}$$

e com isto

$$\|\varphi\|' \leq \|\varphi'\|. \tag{4-39}$$

Assim, se $\|\varphi(t)\| < \delta_0$, usando as desigualdades das normas vetoriais e matriciais induzidas (Definição B.10) temos

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\|' \leq \|\varphi'(t)\| &\leq \|A\|\,\|\varphi(t)\| + \|f(t,\varphi(t))\| \\ &\leq \|\varphi(t)\|\,(\|A\| + K).\end{aligned} \tag{4-40}$$

Seja $\alpha := (\|A\| + K) > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) então

$$\frac{\|\varphi(t)\|'}{\|\varphi(t)\|} \leq \alpha \Rightarrow \int_0^t \frac{\|\varphi(t)\|'}{\|\varphi(t)\|} ds \leq \int_0^t \alpha\, ds. \tag{4-41}$$

Assim, temos

$$\ln\left(\frac{\|\varphi(t)\|}{\|\varphi(0)\|}\right) \leq \alpha t \Rightarrow \|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\|\, e^{\alpha t}. \tag{4-42}$$

Seja $\varepsilon > 0$ então existem $\delta_1 > 0$ e $T \geq 0$ tais que $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ para todo $t \geq T$ e $\|x\| < \delta_1$.

Definimos:

$$s := t - T \quad , \quad g(s,x) := f(s+T,x) \quad e \quad \phi(s) := \varphi(s+T) \tag{4-43}$$

e temos para todo $s \geq 0$ e $\|x\| < \delta_1$

$$\|g(s,x)\| = \|f(s+T,x)\| < \varepsilon \|x\| . \tag{4-44}$$

Logo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|g(s,x)\|}{\|x\|} = 0. \tag{4-45}$$

Pelo Teorema 4.6, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $\|\phi(0)\| < \delta_2$ temos

$$\|\phi(s)\| < \varepsilon \quad \forall s \geq 0 \Rightarrow \|\varphi(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq T \tag{4-46}$$

o que pela definição de limite nos fornece

$$\lim_{s \to \infty} \|\phi(s)\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|\varphi(t)\| = 0. \tag{4-47}$$

Escolhendo $\delta := \dfrac{\min\{\delta_2, \delta_1, \varepsilon\}}{e^{\alpha T}}$, de (4-42) temos que se $\|\varphi(0)\| < \delta$

$$\|\phi(0)\| = \|\varphi(T)\| \leq \|\varphi(0)\| e^{\alpha T} < \delta_2 \tag{4-48}$$

e para todo $t \leq T$ temos ainda

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\| e^{\alpha t} \leq \|\varphi(0)\| e^{\alpha T} < \varepsilon. \tag{4-49}$$

De (4-48), como $\|\phi(0)\| < \delta_2$ então são válidas as equações (4-46) e (4-47).

Assim, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\varphi(0)\| < \delta$ implica que

$$\|\varphi(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to \infty} \|\varphi(t)\| = 0. \tag{4-50}$$

Pela Definição 4.4, temos que a solução identicamente nula é assintoticamente estável. ■

4.2 Instabilidade de Soluções

Nesta seção, veremos o caso em que a matriz A possui ao menos um autovalor com parte real positiva e concluiremos que a solução identicamente nula é instável, alterando apenas esta hipótese no teorema anterior.

Teorema 4.8 *Seja o sistema (4-2) em que ao menos um autovalor de A possui parte real positiva. Suponha existirem $\delta_0 > 0$ e $K > 0$ tais que para todo $t \geq 0$ e $\|x\| < \delta_0$ tem-se que f é contínua e $\|f(t,x)\| \leq K\|x\|$.*
Se para todo $\varepsilon > 0$ existirem $\delta_1 > 0$ e $T \geq 0$ tais que $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ para todo $t \geq T$ e $\|x\| < \delta_1$ então a solução identicamente nula é instável.

Demonstração.
Pelo Teorema de Jordan B.63, existe matriz inversível S e matriz na forma normal de Jordan B tais que

$$A = SBS^{-1} \tag{4-51}$$

em que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os elementos da diagonal de B, ou seja, são os autovalores de A. Sem perda de generalidade, suponha $Re(\lambda_1) \geq Re(\lambda_2) \geq \ldots Re(\lambda_n)$.

Sejam as matrizes B^+ e B^- tais que

$$B =: \begin{bmatrix} B^+ & 0 \\ 0 & B^- \end{bmatrix} \tag{4-52}$$

em que B^+ é um bloco $(k \times k)$ que contem na diagonal os autovalores com parte real positiva e B^- um bloco $(n-k \times n-k)$ contendo os demais autovalores com parte real não positiva.

Assim, existe $\beta > 0$ tal que para todo elemento λ_i da diagonal de B^+ temos $Re\lambda_i > \beta$.

Seja $\alpha = \frac{\beta}{4}$, escolhendo adequadamente S podemos obter uma matriz B cuja diagonal contém os autovalores de A (ordenados pela parte real de seus autovalores) e acima dela elementos $\alpha_i \in \{0, \alpha\}$ para todo $i = 1 \ldots (n-1)$, com todos demais elementos nulos.

De (4-51)

$$\begin{aligned} x' = Ax + f(t,x) \Rightarrow x' &= SBS^{-1}x + f(t,x) \\ S^{-1}x' &= S^{-1}SBS^{-1}x + S^{-1}f(t,x) \\ S^{-1}x' &= BS^{-1}x + S^{-1}f(t,x). \end{aligned} \tag{4-53}$$

Seja a mudança de variável $y = S^{-1}x$ e $g(t,y) = S^{-1}f(t,x) = S^{-1}f(t,Sy)$. Temos que o sistema de EDO em y é dado por

$$y' = By + g(t,y). \tag{4-54}$$

Note que o sistema está bem definido pois como S é inversível e $y = S^{-1}x$ é uma aplicação linear bijetora então, mesmo que y seja complexo, $x = Sy$ será real pois $SBS^{-1} = A$ é uma matriz real e logo x é solução de um sistema real. Assim, temos que ψ é solução do sistema de (4-2), se e somente se, $\varphi := S^{-1}\psi$ é solução de (4-54).

Desta forma, seja φ uma solução de (4-54), definimos:

$$\begin{bmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} B^+ & 0 \\ 0 & B^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g^+ \\ g^- \end{bmatrix} \quad \text{em que} \tag{4-55}$$

$$\varphi^+ = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \quad e \quad \varphi^- = (\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n)$$
$$g^+ = (g_1, \ldots, g_k) \quad e \quad g^- = (g_{k+1}, \ldots, g_n).$$

em que para todo $i = 1 \ldots n$, φ_i e g_i são as funções coordenadas de φ e g.

Seja $0 < \varepsilon < \frac{\beta}{2}$ então existem $\delta_1 > 0$ e $T \geq 0$ tais que se $\|y\| < \delta_1$

$$\|g(t, y)\| \leq \varepsilon \|y\| \qquad \forall t \geq T. \tag{4-56}$$

Suponha por absurdo que a solução identicamente nula de $(4 - 54)$ é estável. Com isto, pela Definição 4.1, para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se:

$$\|\varphi(T)\|^2 = \left\|\varphi^+(T)\right\|^2 + \left\|\varphi^-(T)\right\|^2 < \delta^2 \tag{4-57}$$

então

$$\|\varphi(t)\|^2 = \left\|\varphi^+(t)\right\|^2 + \left\|\varphi^-(t)\right\|^2 < \varepsilon_1^2 := \delta_1^2 \quad \forall t \geq T. \tag{4-58}$$

Escolhemos φ tal que $\|\varphi(T)\| < \delta$ e

$$\left\|\varphi^+(T)\right\| = 2\left\|\varphi^-(T)\right\|. \tag{4-59}$$

Como

$$\left(\left\|\varphi^+\right\|^2\right)' = 2\left\|\varphi^+\right\|\left\|\varphi^+\right\|' = \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi_i|^2\right)' = \left(\sum_{i=1}^{k} \varphi_i\overline{\varphi_i}\right)' = \sum_{i=1}^{k} \left(\varphi_i'\overline{\varphi_i} + \varphi_i\overline{\varphi_i}'\right). \tag{4-60}$$

De (4-55)

$$2\left\|\varphi^+\right\|\left\|\varphi^+\right\|' = \sum_{i=1}^{k} \left((B_i^+\varphi^+ + g_i)\overline{\varphi_i} + \overline{(B_i^+\varphi^+ + g_i)}\varphi_i\right) \tag{4-61}$$

em que B_i^+ é a i-ésima linha de B^+, ou seja, $B_i^+ = (0, \ldots, \lambda_i, \alpha_i, 0, \ldots, 0)$ em que λ_i está na i-ésima coluna e $\alpha_i \in \{0, \alpha\}$.

Como
$$B_i^+\varphi^+\overline{\varphi_i} = (\lambda_i\varphi_i + \alpha_i\varphi_{i+1})\overline{\varphi_i} \tag{4-62}$$
então
$$\begin{aligned} B_i^+\varphi^+\overline{\varphi_i} + \overline{B_i^+\varphi^+}\varphi_i &= (\lambda_i + \overline{\lambda_i})\varphi_i\overline{\varphi_i} + \alpha_i(\varphi_{i+1}\overline{\varphi_i} + \overline{\varphi_{i+1}}\varphi_i) \\ &= 2Re(\lambda_i)|\varphi_i|^2 + \alpha_i(\varphi_{i+1}\overline{\varphi_i} + \overline{\varphi_{i+1}}\varphi_i). \end{aligned} \tag{4-63}$$

Sejam $v := (\varphi_2, \ldots, \varphi_k)$ e $w := (\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1})$, temos
$$\left|\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\overline{\varphi_{i+1}}\varphi_i\right| < \alpha\left|\sum_{i=1}^{k-1} \overline{\varphi_{i+1}}\varphi_i\right| = \alpha\,|v.w| < \alpha\,\|v\|\,\|w\| < \alpha\left\|\varphi^+\right\|\left\|\varphi^+\right\| = \alpha\left\|\varphi^+\right\|^2 \tag{4-64}$$

De (4-63), usando (4-64) e considerando que $Re(\lambda_i) > \beta$ temos
$$\sum_{i=1}^{k}(B_i^+\varphi^+\overline{\varphi_i} + \overline{B_i^+\varphi^+}\varphi_i) \geq 2(\beta - \alpha)\left\|\varphi^+\right\|^2. \tag{4-65}$$

Ainda,
$$\sum_{i=1}^{k} g_i\overline{\varphi_i} + \overline{g_i}\varphi_i = g^+\overline{\varphi^+} + \overline{g^+}\varphi^+ \leq 2\left\|g^+\right\|\left\|\varphi^+\right\| \leq 2\,\|g\|\left\|\varphi^+\right\|. \tag{4-66}$$
De (4-61), (4-65) e (4-66)
$$\left\|\varphi^+\right\|' \geq (\beta - \alpha)\left\|\varphi^+\right\| - \left\|g^+\right\|. \tag{4-67}$$

De (4-56)
$$\left\|\varphi^+\right\|' \geq (\beta - \alpha)\left\|\varphi^+\right\| - \varepsilon\,\|\varphi\|. \tag{4-68}$$

Como $\varepsilon < \frac{\beta}{2}$ e $\alpha = \frac{\beta}{4}$
$$\left\|\varphi^+\right\|' \geq \frac{3\beta}{4}\left\|\varphi^+\right\| - \varepsilon\left(\left\|\varphi^+\right\| + \left\|\varphi^-\right\|\right) \geq \frac{\beta}{4}\left\|\varphi^+\right\| - \varepsilon\left\|\varphi^-\right\|. \tag{4-69}$$

Procedendo analogamente para φ^- temos
$$\begin{aligned} B_i^-\varphi^-\overline{\varphi_i} + \overline{B_i^-\varphi^-}\varphi_i &= (\lambda_i + \overline{\lambda_i})\varphi_i\overline{\varphi_i} + \alpha_i(\overline{\varphi_{i+1}}\varphi_i + \varphi_{i+1}\overline{\varphi_i}) \\ &\leq 0 + \alpha(\overline{\varphi_{i+1}}\varphi_i + \varphi_{i+1}\overline{\varphi_i}). \end{aligned} \tag{4-70}$$

Com isto, temos:
$$\sum_{i=k+1}^{n}(B_i^-\varphi^-\overline{\varphi_i} + \overline{B_i^-\varphi^-}\varphi_i) \leq 2\alpha\left\|\varphi^-\right\|^2 \tag{4-71}$$

e logo
$$\left\|\varphi^-\right\|' \leq \alpha\left\|\varphi^-\right\| + \varepsilon\,\|\varphi\| \leq \frac{\beta}{4}\left\|\varphi^-\right\| + \varepsilon\left(\left\|\varphi^-\right\| + \left\|\varphi^+\right\|\right). \tag{4-72}$$

De (4-69) e (4-72)

$$\left(\left\|\varphi^{+}\right\|-\left\|\varphi^{-}\right\|\right)' \geq \frac{\beta}{4}\left(\left\|\varphi^{+}\right\|-\left\|\varphi^{-}\right\|\right)-\varepsilon\left(\left\|\varphi^{+}\right\|+2\left\|\varphi^{-}\right\|\right). \tag{4-73}$$

Como ε é arbitrário, quando $\varepsilon \to 0$ temos

$$\left(\left\|\varphi^{+}(t)\right\|-\left\|\varphi^{-}(t)\right\|\right)' \geq \frac{\beta}{4}\left(\left\|\varphi^{+}(t)\right\|-\left\|\varphi^{-}(t)\right\|\right). \tag{4-74}$$

Integrando de T a t temos

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\|\varphi(t)^{+}\|-\|\varphi^{-}(t)\|}{\|\varphi^{+}(T)\|-\|\varphi^{-}(T)\|}\right) &\geq \frac{\beta}{4}(t-T) \\ \left\|\varphi(t)^{+}\right\|-\left\|\varphi^{-}(t)\right\| &\geq \left(\left\|\varphi^{+}(T)\right\|-\left\|\varphi^{-}(T)\right\|\right) e^{\frac{\beta}{4}(t-T)}. \end{aligned} \tag{4-75}$$

De (4-59), temos que para todo $t \geq T$

$$\begin{aligned} \left\|\varphi(t)^{+}\right\|-\left\|\varphi^{-}(t)\right\| &\geq \left\|\varphi^{-}(T)\right\| e^{\frac{\beta}{4}(t-T)} \\ \left\|\varphi(t)^{+}\right\|^{2}+\left\|\varphi^{-}(t)\right\|^{2} &\geq \left\|\varphi^{-}(T)\right\|^{2} e^{\frac{\beta}{2}(t-T)}. \end{aligned} \tag{4-76}$$

Absurdo, pois de (4-58) temos que

$$\left\|\varphi(t)^{+}\right\|^{2}+\left\|\varphi^{-}(t)\right\|^{2} < \delta_1 \in \mathbb{R} \text{ para todo } t \geq T. \tag{4-77}$$

Mas

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left\|\varphi(t)^{+}\right\|^{2}+\left\|\varphi^{-}(t)\right\|^{2}\right)=\infty. \tag{4-78}$$

Desta forma, φ não é estável e logo, pela Definição 4.1, φ é instável. ■

Por fim, cabe destacar que, se o maior valor das partes reais dos autovalores de A for igual a zero, nada podemos afirmar sobre a estabilidade do sistema, podendo este ser instável, estável ou até mesmo assintoticamente estável.

4.3 Estabilidade em Sistemas Autônomos

Nesta seção, analisaremos um caso particular do sistema (4-1) em que a função F independe do instante t, ou seja, consideraremos o caso particular do seguinte sistema autônomo:

$$x' = F(x) \tag{4-79}$$

em que $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável na origem.

Suporemos também que $F(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ e logo a função identicamente nula é uma solução estacionária deste sistema.

Mostraremos como podemos escolher uma matriz real A $(n \times n)$ e uma função $f : D \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(x) = Ax + f(x) \quad \forall x \in D \tag{4-80}$$

e que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0. \tag{4-81}$$

Como F é diferenciável na origem, pela Definição B.34, seja $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\| \leq \delta$ então

$$\|F(0 + x) - F(0) - DF(0).x\| \leq \varepsilon \|x\| \tag{4-82}$$

em que $DF(0)$ é a derivada de F no ponto 0.

Pelo Teorema B.35, $DF(0)$ é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ que está associada a uma matriz real $(n \times n)$ que denominaremos de A.

Definindo $f(x) := F(x) - Ax$ para todo $x \in D$ e considerando que $F(0) = 0$ temos que se $\|x\| \leq \delta$

$$\|f(x)\| = \|F(x) - Ax\| \leq \varepsilon \|x\|. \tag{4-83}$$

Logo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0. \tag{4-84}$$

Assim, o sistema

$$x' = Ax + f(x) \tag{4-85}$$

é equivalente ao sistema (4-79) e podemos utilizar os teoremas mostrados neste capítulo para analisar a estabilidade da solução identicamente nula deste sistema.

5
Considerações Finais

Iniciamos considerando algumas condições gerais para a existência e unicidade de soluções de quaisquer sistemas parametrizados $x' = f(t, x, u)$, sejam eles lineares ou não.

Em seguida, estudamos os sistemas lineares $\underline{x' = A(t)x + b(t)}$ e suas propriedades e usamos os resultados num estudo sobre a estabilidade de soluções de sistemas não lineares, onde vimos o caso $\underline{x' = Ax + f(t, x)}$ em que fixamos condições específicas para o comportamento de f próximo a origem. Com isto, qualquer φ que seja solução do sistema não-linear nos permite definir $b(t) = f(t, \varphi(t))$ e, como $\varphi'(t) = A\varphi(t)+b(t)$, obtemos a equação de um sistema linear sendo possível utilizar o conhecimento que se tem sobre os sistemas lineares na análise dos sistemas não lineares.

Por fim, com a elaboração desta dissertação, foi possível aprofundar o conhecimento da Análise Real e aplicar os principais conceitos e resultados da Álgebra Linear.

Referências bibliográficas

[1] ABBOTT, STEPHEN. **Understanding Analysis**. Springer, New York, 2nd edition, 2016.

[2] BARTLE, ROBERT. **The Elements of Real Analysis**. John Wiley and Sons, USA, 2nd edition, 1976.

[3] LIMA, ELON LAGES. **Análise Real - Vol.1**. IMPA, Rio de Janeiro, 12th edition, 2017.

[4] LIMA, ELON LAGES. **Análise Real - Vol.2**. IMPA, Rio de Janeiro, 6th edition, 2016.

[5] LIMA, ELON LAGES. **Curso de Análise - Vol.2**. IMPA, Rio de Janeiro, 11th edition, 2015.

[6] LANG, SERGE. **Linear Algebra**. Springer, New York, 3rd edition, 1987.

[7] QUARTERONI, ALFIO; SACCO, RICCARDO; SALERI, FAUSTO. **Numerical Mathematics**. Springer, New York, 2nd edition, 2007.

[8] DOERING, CLAUS I.; LOPES, ARTUR O.. **Equações Diferenciais Ordinárias**. IMPA, Rio de Janeiro, 6th edition, 2016.

[9] CODDINGTON, EARL A.; LEVISON, NORMAN. **Theory of Ordinary Differential Equations**. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, tmh edition, 1972.

A
Apêndice - Demonstração de Resultados Utilizados

Neste apêndice são demonstrados alguns resultados provenientes da Análise Real e Álgebra Linear utilizados neste estudo.

Proposição A.1 *Sejam* $\Pi \subset G \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $f : G \to \mathbb{R}^m$*. Se* Π *for compacto e* f *for localmente Lipschitz em* G *então* f *é Lipschitz em* Π*.*

Demonstração.
Pela Definição A.2, f é Lipschitz em Π se

$$\exists L > 0 \quad \forall x, y \in \Pi \; ; \; \|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| . \tag{A-1}$$

Suponha por absurdo que f não seja Lipschitz em Π. Então, negando (A-1)

$$\forall L > 0 \quad \exists x, y \in \Pi \; ; \; \|f(x) - f(y)\| > L \|x - y\| . \tag{A-2}$$

Note que, $x \neq y$ (caso contrário $\|f(x) - f(y)\| = 0 < L \|x - y\| = 0$).
Assim, podemos construir as seguintes sequências $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\frac{\|f(x_k) - f(y_k)\|}{\|x_k - y_k\|} > k \text{ em que } x_k, y_k \in \Pi \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{A-3}$$

Como x_k e $y_k \in \Pi$ e Π é compacto, pelo Teorema B.22, existe uma subsequência $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{k_i} \to x \in \Pi$ quando $i \to \infty$. Mas, pelo Teorema B.28, f é limitada em Π e logo, quando $i \to \infty$

$$\frac{\|f(x_{k_i}) - f(y_{k_i})\|}{\|x_{k_i} - y_{k_i}\|} \to \infty \Rightarrow \|x_{k_i} - y_{k_i}\| \to 0 \Rightarrow y_{k_i} \to x. \tag{A-4}$$

Mas f é localmente Lipschitz em G, logo existe $L_x > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{se } z, w \in B_\varepsilon(x) \text{ então } \|f(z) - f(w)\| \leq L_x \|z - w\| . \tag{A-5}$$

Como $x_{k_i} \to x$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_i} \in B_\varepsilon(x)$ para todo $i > N_1$.
Como $y_{k_i} \to x$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{k_i} \in B_\varepsilon(x)$ para todo $i > N_2$.
Absurdo, pois seja $N = \max\{N_1, N_2, L_x\}$, de (A-3) e (A-5), para todo $i > N$

$$L_x \leq N < i \leq k_i < \frac{\|f(x_{k_i}) - f(y_{k_i})\|}{\|x_{k_i} - y_{k_i}\|} < L_x \Rightarrow L_x < L_x. \tag{A-6}$$

■ [1]

[1]Também podemos demonstrar esta proposição utilizando as definições de compacto e coberturas[2] e concluir que existe um número finito de vizinhanças que cobrem Π e, assim, definimos L como o máximo entre as constantes de Lipschitz de cada uma destas vizinhanças.

Proposição A.2 *Seja $G \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ aberto e $f : G \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em G tal que $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)\right| \leq M$ para todo $(t,x) \in G$, $i \leq m$ e $j \leq n$ então f é Lipschitz com respeito a x em G.*

Demonstração.
Sejam $G_1 \times G_2 := G$ e $t \in G_1$ (fixo), x e $y \in G_2$ (arbitrários), definimos $g_i : G_2 \to \mathbb{R}$ em que $g_i(x) := f_i(t,x) \Rightarrow \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq M$ para todo i e j.
Pelo Teorema do Valor Médio B.37, existe um ponto $\alpha_i \in G_2$ localizado no segmento de reta que liga o ponto x ao ponto y tal que para todo $i \leq n$ temos:

$$\begin{aligned} g_i(x) - g_i(y) =& \nabla g_i(\alpha_i).(x-y) \\ |g_i(x) - g_i(y)| \leq& \left|\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\alpha_i)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\alpha_i)\right|. \end{aligned} \tag{A-7}$$

Logo

$$\begin{aligned} |f_i(t,x) - f_i(t,y)| \leq& M\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| = M\,\|x-y\|_1 \\ \|f(t,x) - f(t,y)\|_1 \leq& M\sum_{i=1}^{m} \|x-y\|_1 = Mm\,\|x-y\|_1 . \end{aligned} \tag{A-8}$$

Como x e y são arbitrários, existe $L_1 := Mm > 0$ para todo x,$y \in G_2$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_1 \leq L_1\,\|x-y\|_1 . \tag{A-9}$$

Pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^n$ (Teorema B.9) e pela Definição B.29 temos que f é Lipschitz com respeito a x em G. ■

Corolário A.3 *Sejam $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)$ contínuas em G para todo $i \leq m$ e $j \leq n$ então f é <u>localmente</u> Lipschitz com respeito a x em G.*

Demonstração.
Seja $(t,x) \in G$ arbitrário então, como G é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal $K := \overline{B}_\varepsilon(t,x) \subset G$, ou seja, existe uma bola fechada de raio ε centrada em (t,x) que está contida em G. Pelo Teorema B.14, K é compacto.
Como as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são contínuas em K compacto para todo i e j então, por B.28, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são limitadas e podemos aplicar o Teorema A.2 em K.

Mas (t,x) é arbitrário então para todo $(t,x) \in G$ existe uma vizinhança em K na qual f é Lipschitz com respeito a x nesta vizinhança. Pela Definição B.29, temos que f é localmente Lipschitz com respeito a x em G. ■

Teorema A.4 (Teorema de Weierstrass para Convergência Uniforme) *Seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_k : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\|f_k(x)\| \le M_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x \in G$.*
Se $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge então $\sum f_k$ converge uniformemente em G.

Demonstração.
Como $\sum M_k$ converge, pelo critério de Cauchy (Teorema B.18), seja $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \ge j \ge N$ temos $\displaystyle\sum_{k=j}^{i} M_k < \frac{\varepsilon}{2}$.

Assim, seja $x \in G$ temos

$$\frac{\varepsilon}{2} > \sum_{k=j}^{i} M_k \ge \sum_{k=j}^{i} \|f_k(x)\| \ge \left\| \sum_{k=j}^{i} f_k(x) \right\|. \tag{A-10}$$

Como x é arbitrário temos que $\displaystyle\sup_{x\in G} \left\| \sum_{k=j}^{i} f_k(x) \right\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Pelo critério de convergência uniforme de Cauchy (Teorema B.44) temos que a série $\sum f_k$ converge uniformemente em G. ■

Corolário A.5 *Este teorema também é aplicável a funções matriciais, utilizando normas matriciais.*

Proposição A.6 (Convergência Uniforme de Funções Compostas) *Sejam $G \subseteq \mathbb{R}^n$ e $D \subseteq \mathbb{R}^p$ compactos, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sequências de funções contínuas $f_k : G \to \mathbb{R}^m$ e $x_k : D \to G$ tal que $f_k \to f$ uniformemente em G e $x_k \to x$ uniformemente em D então a sequência composta $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, dada por $g_k : D \to \mathbb{R}^m$ com $g_k = f_k(x_k)$, converge uniformemente em D para $g = f(x)$.*

Demonstração.
Pelas definições de convergência uniforme (Definição B.41) e continuidade uniforme (Definição B.27) temos

1. $x_k \to x$ uniformemente em D então

$$\forall\delta > 0\ \exists N_1\ \forall k > N_1\ \forall t \in D\ \ \|x_k(t) - x(t)\| < \delta. \tag{A-11}$$

2. $f_k \to f$ uniformemente em G então

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall k > N_2\ \forall y \in G\ \ \|f_k(y) - f(y)\| < \varepsilon. \tag{A-12}$$

3. f_k contínua em G compacto então, pelo Teorema B.30, f_k é uniformemente contínua em G

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, y \in G\ \ \|y - x\| < \delta \Rightarrow \|f_k(y) - f_k(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A-13}$$

Assim, seja $\varepsilon > 0$ de (A-13) temos que existe $\delta > 0$ e por (A-11) existe N_1 tal que para todo $k > N_1$ se $\|x_k(t) - x(t)\| < \delta$ então

$$\|f_k(x_k(t)) - f_k(x(t))\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A-14}$$

De (A-12), existe N_2 tal que para todo $k > N_2$ e $t \in D$

$$\|f_k(x_k(t)) - f(x_k(t))\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A-15}$$

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$ então para todo $k > N$ e $t \in D$

$$\begin{aligned}\|g_k(t) - g(t)\| &= \|f_k(x_k(t)) - f(x(t))\| \\ &= \|f_k(x_k(t)) - f_k(x(t)) + f_k(x(t)) - f(x(t))\| \\ &\leq \|f_k(x_k(t)) - f_k(x(t))\| + \|f_k(x(t)) - f(x(t))\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{(por (A-14) e (A-15)).}\end{aligned} \tag{A-16}$$

Assim, g_k converge para g uniformemente em D. ∎

Proposição A.7 (Lema de Hadamard) *Seja $g : D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ em que $g \in C^1(D)$ então existem funções contínuas $\psi_i(x, y, z)$ tal que para todo (x, y) e $(x, z) \in D$ temos:*

$$g(x, y) - g(x, z) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)\psi_i(x, y, z).$$

Demonstração.
Sejam $w(t) := z + t(y - z)$ e $\alpha := g(x, w(t))$ então pelo Teorema Fundamental do Cálculo B.40

$$\begin{aligned}g(x, y) - g(x, z) &= \alpha(1) - \alpha(0) = \int_0^1 \alpha'(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left[\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial w_i}(x, w(t))dt\right](z_i - y_i) \\ &=: \sum_{i=1}^{m} (z_i - y_i)\psi_i(x, y, z) \\ \text{em que } \psi_i(x, y, z) &:= \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial w_i}(x, w(t))dt \quad (i = 1 \dots m).\end{aligned} \tag{A-17}$$

Como $g \in C^1(D)$ então $\dfrac{\partial g}{\partial w_i}$ é contínua para todo $i = 1 \dots m$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo B.40, ψ_i também são contínuas. ∎

Proposição A.8 *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado tal que $K \cap F = \emptyset$ então existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tal que*

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{\substack{x \in K \\ y \in F}} \|x - y\| =: \operatorname{dist}(K, F) > 0.$$

Demonstração.
Seja $d := \inf_{\substack{x \in K \\ y \in F}} \|x - y\|$ então pela definição de ínfimo

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in K \ \exists y \in F \quad d \leq \|x - y\| < d + \varepsilon.$$

Assim, seja $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a sequência em que $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$ então existem $x_k \in K$ e $y_k \in F$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$d \leq \|x_k - y_k\| < d + \varepsilon_k = d + \frac{1}{k}. \tag{A-18}$$

Como $x_k \in K$ e K é compacto então, pelo Teorema B.22, existe uma subsequência $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{k_i} \to x_0$ para algum $x_0 \in K$. Pela definição de limite, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k_i > k_{i_0}$ temos $\|x_{k_i}\| < \|x_0\| + 1$.

De (A-18) temos para todo $k_i > k_{i_0}$

$$\|y_{k_i}\| < d + \frac{1}{k_i} + \|x_{k_i}\| < d + \frac{1}{k_{i_0}} + \|x_{k_i}\| < d + \frac{1}{k_{i_0}} + \|x_0\| + 1 =: M \in \mathbb{R}. \tag{A-19}$$

Assim $(y_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada e, pelo Teorema B.22, existe uma subsequência convergente $(y_{k_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $y_{k_{i_j}} \to y_0$ quando $j \to \infty$. Como F é fechado temos que $y_0 \in F$.

Mas $K \cap F = \emptyset$ então $x_0 \neq y_0$ e, por (A-18) e pelo Teorema B.23

$$d = \lim_{k \to \infty} \|x_k - y_k\| = \lim_{j \to \infty} \left\| x_{k_{i_j}} - y_{k_{i_j}} \right\| = \|x_0 - y_0\| > 0. \tag{A-20}$$

■

Proposição A.9 *Sejam* $K \subset G \subseteq \mathbb{R}^n$*;* G *aberto;* K *compacto;* $d_0 := \mathrm{dist}(K, \partial G)$ *e* $K' := \left\{ y \in \mathbb{R}^n; \mathrm{dist}(y, K) := \inf\limits_{x \in K} \|y - x\| \leq \dfrac{d_0}{2} \right\}$ *então* K' *é compacto e* $K \subset K' \subset G$*.*

Demonstração.
Inicialmente, note que, pela Proposição A.8 temos $d_0 > 0$ e logo $K' \neq \emptyset$.

Afirmação (I): K' *é limitado.*
Por absurdo, suponha que não. Como K é compacto então, pelo Teorema de Heine-Borel B.14, K é limitado e logo existe $M{>}0$ tal que $\|y\| \leq M$ para todo $y \in K$. Já que K' é ilimitado, existe $x \in K'$ tal que $\|x\| > M + d_0$.
Seja $y \in K \Rightarrow \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| > M + d_0 - M = d_0$.
Como y é arbitrário: $\inf\limits_{y \in K} \|x - y\| \geq d_0 > \dfrac{d_0}{2} \Rightarrow x \notin K'$. Absurdo.

Afirmação (II): K' *é fechado.*
Seja $x_0 \in \partial K'$ então pela Definição de Fronteira B.12:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in K' \ \ \|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \ \exists x_k \in K' \ \ \|x_k - x_0\| < \frac{1}{k} \tag{A-21}$$

$$x_k \in K' \Rightarrow \mathrm{dist}(x_k, K) \leq \frac{d_0}{2}. \tag{A-22}$$

Quando $k \to \infty$ temos $x_k \to x_0$ então pela continuidade da função dist (Proposição B.15) e pelo Teorema B.23

$$\mathrm{dist}(x_0, K) = \lim_{k \to \infty} \mathrm{dist}(x_k, K) \leq \frac{d_0}{2} \tag{A-23}$$

Logo $x_0 \in K'$ e como x_0 é arbitrário então $\partial K' \subset K'$ e portanto K' é fechado e como também é limitado então, pelo Teorema B.14, K' é compacto.

Afirmação (III): $K \subset K'$*.*
Seja $x \in K$ (arbitrário) então

$$\mathrm{dist}(x, K) = 0 \leq \frac{d_0}{2}. \tag{A-24}$$

Logo $x \in K'$ e portanto $K \subset K'$.

Afirmação (IV): $K' \subset G$*.*
Por absurdo, suponha que não. Assim, existe $x \in K'$ tal que $x \notin G$ e logo $\mathrm{dist}(x, K) \geq d_0$. Absurdo, pois $x \in K'$ logo $\mathrm{dist}(x, K) \leq \frac{d_0}{2}$. Desta forma, $x \in G$ e com isto $K' \subset G$. ■

Teorema A.10 (Derivada de Determinantes)

Seja $A(t) := \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$ *em que para todo* $i, j = 1 \dots n$

$a_{ij}(t)$ *são funções diferenciáveis de* $I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *então:*

$$|A(t)|' = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Demonstração.

Sejam $h \neq 0$, $A_i := A_i(t)$ a i-ésima linha da matriz $A(t)$ para todo $i \leq n$ e a matriz $A^h := A(t+h)$ em que $A_i^h := A_i(t+h)$ para todo $i \leq n$.

Como a função determinante D é multilinear (pelo Teorema B.51) então

$$\begin{aligned} \det(A^h) = |A^h| &= D(A_1^h, A_2^h, \dots, A_n^h) \\ &= D(A_1^h - A_1 + A_1, A_2^h, \dots, A_n^h) \\ &= D(A_1^h - A_1, A_2^h, \dots, A_n^h) + D(A_1, A_2^h, \dots, A_n^h) \ (*) \\ &= D_1 + D(A_1, A_2^h, \dots, A_n^h) \end{aligned} \tag{A-25}$$

em que $D_1 := D(A_1^h - A_1, A_2^h, \dots, A_n^h)$ e a igualdade (*) é dada pela multilinearidade de D. Analogamente, definimos D_2 a seguir:

$$\begin{aligned} D(A_1, A_2^h, \dots, A_n^h) &= D(A_1, A_2^h - A_2 + A_2, \dots, A_n^h) \\ &= D(A_1, A_2^h - A_2, \dots, A_n^h) + D(A_1, A_2, A_3^h \dots, A_n^h) \\ &=: D_2 + D(A_1, A_2, A_3^h \dots, A_n^h). \end{aligned} \tag{A-26}$$

Procedemos desta forma até definir D_n

$$\begin{aligned} D(A_1, \dots, A_{n-1}, A_n^h) &= D(A_1, \dots, A_{n-1}, A_n^h - A_n) + D(A_1, \dots, A_n) \\ &=: D_n + D(A_1, \dots, A_n). \end{aligned} \tag{A-27}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} |A^h| = |A(t+h)| &= D_1 + \dots + D_n + D(A_1, \dots, A_n) \\ &= D_1 + \dots + D_n + |A(t)| \\ \frac{|A(t+h)| - |A(t)|}{h} &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} D_i. \end{aligned} \tag{A-28}$$

Pela multilinearidade de D, sejam B matriz $(n \times n)$ qualquer e $\alpha \in \mathbb{R}$ então para todo $i \leq n$ temos

$$\alpha D(B_1, \ldots, B - n) = D(B_1, \ldots, B_{i-1}, \alpha B_i, B_{i+1}, \ldots, B_n). \tag{A-29}$$

Assim, tomando $\alpha = \dfrac{1}{h}$ em (A-29) então por (A-29) temos

$$\frac{|A(t+h)| - |A(t)|}{h} = \sum_{i=1}^{n} D\left(A_1, \ldots, A_{i-1}, \frac{A_i^h - A_i}{h}, A_{i+1}^h, \ldots, A_n^h\right). \tag{A-30}$$

Quando $h \to 0$ como A_j é contínua então $A_j^h = A_j(t+h) \to A_j(t) = A_j$ para todo $i < j \leq n$ e como D também é contínua temos

$$\begin{aligned}
|A(t)|' &= \lim_{h \to 0} \frac{|A(t+h)| - |A(t)|}{h} \\
&= \sum_{i=1}^{n} D\left(A_1, \ldots, A_{i-1}, \lim_{h\to 0} \frac{A_i^h - A_i}{h}, \lim_{h \to 0} A_{i+1}^h, \ldots, \lim_{h \to 0} A_n^h\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D\left(A_1(t), \ldots, A_{i-1}(t), \lim_{h \to 0} \frac{A_i(t+h) - A_i(t)}{h}, A_{i+1}(t), \ldots, A_n(t)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D(A_1(t), \ldots, A_{i-1}(t), A_i'(t), A_{i+1}(t), \ldots, A_n(t)).
\end{aligned} \tag{A-31}$$

■

Proposição A.11 (Continuidade da Matriz Inversa)
Seja $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j}^n$ em que $a_{ij} : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e $|A(x)| \neq 0$ para todo $x \in X$ então existe função A^{-1} contínua tal que $A^{-1}(x)A(x) = I$ para todo $x \in X$.

Demonstração.
Como $\det(A(x)) \neq 0$ para todo $x \in X$ então, pelo Teorema B.53, para todo $x \in X$ existe uma matriz inversa $A^{-1}(x) = (b_{ij}(x))_{i,j}^n$ tal que $A^{-1}(x)A(x) = I$.

Do Teorema B.52, temos para todo $x \in X$

$$b_{ij}(x) = \frac{D(A_1(x), \ldots, e_j, \ldots, A_n(x))}{D(A(x))}$$

em que $A_i(x) = (a_{i1}(x), \ldots, a_{in}(x))$ para todo $i \leq n$.

Como a função determinante D é contínua (pelo Teorema B.51) e A_i são contínuas para todo $i \leq n$ então b_{ij} são composições de funções contínuas para todo $i, j \leq n$ e logo, pelo Teorema B.30, b_{ij} são contínuas e, portanto, $A^{-1} = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ também é contínua. ■

Proposição A.12 *Sejam w, y e z funções reais contínuas em $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ tais que para todo $t \in I$ tivermos $z(t) \geq 0$ e*

$$w(t) \leq y(t) + \int_a^t z(s)w(s)ds$$

então para todo $t \in I$ temos

$$w(t) \leq y(t) + \int_a^t z(s)y(s)e^{\int_s^t z(p)dp}ds\ .$$

Demonstração.

Seja a função real R contínua em I definida a seguir para todo $t \in I$

$$R(t) := \int_a^t z(s)w(s)ds \Rightarrow w(t) \leq y(t) + R(t). \tag{A-32}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo B.40 temos que para todo $s \in I$

$$R'(s) := z(s)w(s). \tag{A-33}$$

De (A-32) e (A-33)

$$\begin{aligned} R'(s) - z(s)R(s) =& z(s)w(s) - z(s)R(s) \\ \leq& z(s)(y(s) + R(s)) - z(s)R(s) = z(s)y(s). \end{aligned} \tag{A-34}$$

Seja $t \in I$ (fixo), multiplicando (A-34) por $e^{\int_s^t z(p)dp} > 0$ temos para todo $s \in I$

$$(R'(s) - z(s)R(s))e^{\int_s^t z(p)dp} \leq z(s)y(s)^{\int_s^t z(p)dp}. \tag{A-35}$$

Integrando de a a t temos

$$\int_a^t R'(s)e^{\int_s^t z(p)dp}ds - \int_a^t z(s)R(s)e^{\int_s^t z(p)dp}ds \leq \int_a^t z(s)y(s)^{\int_s^t z(p)dp}ds. \tag{A-36}$$

Integrando por partes $\int_a^t R'(s)e^{\int_s^t z(p)dp}$ temos

$$u' = R' \Rightarrow u = R \qquad v = e^{-\int_t^s z(p)dp} \Rightarrow v' = ze^{-\int_t^s z(p)dp}$$

$$\int_a^t R'(s)e^{\int_s^t z(p)dp}ds = R(t)e^0 - R(a)e^{-\int_t^a z(p)dp} + \int_a^t z(s)R(s)e^{-\int_t^s z(p)dp}ds. \tag{A-37}$$

Mas $R(a) = 0$ e logo

$$\int_a^t R'(s)e^{\int_s^t z(p)dp}ds = R(t) + \int_a^t z(s)R(s)e^{\int_s^t z(p)dp}ds. \tag{A-38}$$

De (A-36)

$$R(t) \leq \int_a^t z(s)y(s)e^{\int_s^t z(p)dp}ds. \tag{A-39}$$

Por fim, de (A-32) temos

$$w(t) \leq y(t) + R(t) \leq y(t) + \int_a^t z(s)y(s)e^{\int_s^t z(p)dp}ds. \tag{A-40}$$

■

B
Apêndice - Análise Real e Álgebra Linear

A seguir são enunciadas as principais definições, proposições e teoremas de Análise Real e Álgebra Linear relacionados com assuntos utilizados neste estudo, cujas demonstrações podem ser obtidas nas respectivas citações bibliográficas.

B.1
Espaço Vetorial

Definição B.1 (Campo) *[6]*

Dizemos que $K \subseteq \mathbb{C}$ é um campo se satisfaz as seguintes condições:

1. *se $x, y \in K$ então $(x+y) \in K$ e $xy \in K$;*
2. *se $x \in K$ então $(-x) \in K$ e se $x \neq 0$ então $\frac{1}{x} \in K$ e;*
3. *os elementos 0 e 1 são elementos de K.*

Naturalmente, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de campos.

Definição B.2 (Espaço Vetorial) *[6]*

Dizemos que V é um espaço vetorial sobre o campo K se satisfaz as seguintes propriedades:

1. *dados $u, v, w \in V$ então $(u+v)+w = u+(v+w)$;*
2. *existe um elemento $0 \in V$ tal que $0+u = u+0 = u$;*
3. *dado $u \in V$, existe um elemento $-u \in V$ tal que $u+(-u) = 0$;*
4. *para todo $u, v \in V$ então $(u+v) = (v+u) \in V$;*
5. *se $c \in K$ e $u, v \in V$ então $c(u+v) = cu+cv \in V$;*
6. *se $a, b \in K$ e $v \in V$ então $(ab)v = a(bv)$ e;*
7. *para todo elemento $u \in V$ e $1 \in K$ tem-se $1.u = u$.*

São exemplos de espaços vetoriais:

- K^n *(onde K é um campo qualquer como, por exemplo, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$);*
- *o conjunto das matrizes $(m \times n)$ com elementos em K e;*
- *o conjunto das funções contínuas de $G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

Neste estudo consideraremos $K = \mathbb{R}$ e diremos simplesmente que V é um espaço vetorial.

Definição B.3 (Subespaço Vetorial) *[6]*
Seja V um espaço vetorial sobre o campo K e $W \subset V$, dizemos que W é um subespaço de V se satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Se $v, w \in W$ então $(u + v) \in W$ e;*
2. *Se $v \in W$ e $c \in K$ então $(cv) \in W$.*

Assim, pela definição B.2, todo subespaço vetorial é um espaço vetorial.

Definição B.4 (Vetores Linearmente Independentes) *[6]*
Sejam V um espaço vetorial sobre um campo K e $v_1, \ldots, v_n$ elementos de V, dizemos que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes em K, se existirem $a_1, \ldots, a_n$ elementos de K, nem todos nulos tais que $a_1 v_1 + \ldots a_n v_n = 0$.
Caso contrário, dizemos que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, ou seja:

$$a_1 v_1 + \ldots a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Teorema B.5 (Base de um Espaço Vetorial) *[6]*
Sejam $v_1, \ldots, v_n$ elementos linearmente independentes de um espaço vetorial V sobre um campo K, em que a dimensão de V é igual a n, então $v_1, \ldots, v_n$ formam uma base geradora deste espaço tal que para todo $v \in V$ existe um único $c \in K^n$, denominado de vetor de coordenadas de v nesta base, tal que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i. \qquad (I)$$

Reciprocamente, para todo $c \in K^n$ existe um único $v \in V$ dado por (I).

B.2
Normas

Definição B.6 (Norma) *[2, 4, 7]*
Seja V um espaço vetorial em K, então uma norma em V é uma função de V em $\mathbb{R}$ denotada por $\|.\|$ que satisfaz:

1. $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in V$ *e* $\|x\| = 0$ *se e somente se* $x = 0$;

2. $\|ax\| = |a| \, \|x\|$ *para todo* $a \in K$ *e* $x \in V$ *e;*

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Note que $|x|$ é uma norma em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. São exemplos de normas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$:

- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$;
- $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ *e;*
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

No caso do espaço vetorial das matrizes $(n \times n)$ (reais ou complexas) podemos definir como norma de uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \qquad \textit{(Norma Frobenius / Euclidiana em } \mathbb{C}^{n^2}\textit{)}.$$

Proposição B.7 (Desigualdades de Normas) *[2, 4, 6]*
Sejam V espaço vetorial e $x, y \in V$ então:

1. $|x.y| \leq \|x\| \, \|y\|$ *[Desigualdade de Schwarz para produtos internos] e;*

2. $| \; \|x\| - \|y\| \; | \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *[Desigualdade Triangular].*

Teorema B.8 (Continuidade da Norma) *[5, 7]*
Seja $\|.\|$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$ então $\|.\|$ é uniformemente contínua.

Teorema B.9 (Equivalência de Normas em $\mathbb{R}^n$) *[5, 7, 8]*
Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, ou seja, sejam $\|.\|_\alpha$ e $\|.\|_\beta$ normas quaisquer em $\mathbb{R}^n$ então existem $a, b > 0$ tais que:

$$a \, \|.\|_\alpha \leq \|.\|_\beta \leq b \, \|.\|_\alpha$$

e, como consequência, temos que todas as normas matriciais induzidas por uma norma vetorial qualquer em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Definição B.10 (Norma Matricial Induzida) *[5, 7, 8]*
Seja A uma matriz $n \times m$ com elementos em $K = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), definimos a seguinte norma matricial induzida por uma norma vetorial qualquer:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in K^m; \|x\| = 1\}$$

(note que deve-se utilizar a mesma norma vetorial escolhida em $\|x\|$ e $\|Ax\|$). Esta norma, possui as propriedades definidas em B.6 e B.7.2, bem como:

1. *Compatibilidade com a norma vetorial $\|x\|$:*
   $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$ *para todo* $x \in K^m$.

2. *Propriedade Sub-Multiplicativa:*
   $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ *para B matriz $(m \times k)$* $\Rightarrow \left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

3. $\|I\| = 1$.

Por exemplo, adotando as normas vetoriais $\|.\|_\infty$ ou $\|.\|_1$, podemos calcular facilmente a respectiva norma induzida em função dos elementos a_{ij} de A:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \qquad e \qquad \|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| \,.$$

Note que a norma Frobenius definida na Definição B.6 também goza das propriedades 1 e 2 acima, entretanto $\|I\| = \sqrt{n}$. Mais informações sobre normas matriciais podem ser obtidas em [7].

B.3
Topologia

Definição B.11 (Bolas em $\mathbb{R}^n$) *[2, 4]*
Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ então:

1. *O conjunto $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$ é denominado de Bola Aberta de raio r centrada em x.*

2. *O conjunto $\overline{B_r}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}$ é denominado de Bola Fechada de raio r centrada em x.*

Definição B.12 (Topologia em $\mathbb{R}^n$) *[2, 4]*
Seja $G \subseteq \mathbb{R}^n$ então definimos:

1. *G é aberto se para todo ponto $x \in G$ existir $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset G$.*

2. *G é fechado se $\mathbb{R}^n \setminus G$ for aberto.*

3. *G é uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$ se G for um aberto tal que $x \in G$.*

4. *$x \in \mathbb{R}^n$ é denominado um ponto de fronteira de G se toda vizinhança de x contém um ponto em G e outro em $\mathbb{R}^n \setminus G$.*

5. *O conjunto dos pontos de fronteira de G é denotado como ∂G.*

Teorema B.13 (Teoremas Gerais de Topologia no $\mathbb{R}^n$) *[2, 4]*

1. *$F \subset R^n$ é fechado se e somente se $\partial F \subseteq F$.*

2. *A interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

3. *A união de qualquer coleção de conjuntos abertos é um conjunto aberto*

4. *A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

5. *A interseção de qualquer coleção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Teorema B.14 (Teorema de Heine-Borel) *[2]*
$K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto [2], se e somente se, K é fechado e limitado.

Proposição B.15 (Distância de um ponto a um conjunto) *[5]*
Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) := \operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

então f é uniformemente contínua.

B.4
Sequências e Séries

Os conceitos e teoremas apresentados nesta seção sobre sequências e séries em $\mathbb{R}^n$ também se aplicam às sequências e séries de matrizes, utilizando normas matriciais[7, 8] ou considerando a bijeção entre as matrizes em $\mathbb{R}^{n\times n}$ e vetores em $\mathbb{R}^{n^2}$.

Definição B.16 (Limite de Sequências) *[4]*
Dizemos que $x \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x, quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que sempre que $k > N$ tivermos $\|x_k - x\| < \varepsilon$.
Se existir este limite, escreve-se:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad , \quad \lim x_k = x \quad \text{e} \quad x_k \to x \ .$$

Definição B.17 (Sequência de Cauchy) *[2]*
Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathbb{R}^n$, dizemos que (x_k) é uma sequência de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \geq N$ tivermos $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$.

Teorema B.18 (Critério de Cauchy para Séries) *[2]*
Uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ em que $a_k \in \mathbb{R}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ é convergente, se e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i > j \geq N$ tivermos $\left\|\sum_{k=j}^{i} a_k\right\| < \varepsilon$.

Definição B.19 (Séries Absolutamente Convergentes) *[2]*
Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathbb{R}^n$, dizemos que a série $\sum x_k$ é absolutamente convergente se a série $\sum \|x_k\|$ é convergente.

Teorema B.20 (Convergência Absoluta de Séries) *[2]*
Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathbb{R}^n$, se a série $\sum x_k$ é absolutamente convergente então $\sum x_k$ é convergente.

Definição B.21 (Euler) *Um exemplo conhecido de série convergente é o número de Euler:*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Teorema B.22 (Teoremas de Sequências em $\mathbb{R}^n$) *[2, 4]*
Sejam $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequências em $\mathbb{R}^n$:

1. *Toda sequência possui no máximo um único limite. [Unicidade]*
2. *$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente, se e somente se, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy (B.17).*
3. *Se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada então existe uma subsequência $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente [Teorema de Bolzano-Weirstrass].*
4. *Se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente então $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada.*
5. *$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x, se e somente se, toda subsequência $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ também converge para x.*
6. *Se $x_k \to x$ e $y_k \to y$ então $(x_k \pm y_k) \to (x \pm y)$ e $(x_k.y_k) \to x.y$.*
7. *Seja $F \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado. Se $x_k \in F$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x_k \to x$ então $x \in F$.*
8. *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Se $x_k \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então existe uma subsequência $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto $x \in K$. [4]*

Teorema B.23 (Teoremas de Sequências em $\mathbb{R}$) *[1, 3]*
Além de serem válidos todos os itens do Teorema B.22 para $n = 1$, temos também que sejam $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequências em $\mathbb{R}$:

1. *Se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada então $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente.*
2. *Se $y_k \to y$, $x_k \to x$, $z_k \to z$ e $y_k \leq x_k \leq z_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então $y \leq x \leq z$.*
3. *Se $y_k \to x$, $z_k \to x$ e $y_k \leq x_k \leq z_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então $x_k \to x$. [Teorema do Sanduíche]*

B.5
Limites e Continuidade

Os conceitos e teoremas apresentados nesta seção também se aplicam às funções matriciais $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times m}$, utilizando normas matriciais ou considerando a bijeção entre matrizes $\mathbb{R}^{m\times m}$ e vetores em $\mathbb{R}^{m^2}$.[7, 8]

Definição B.24 (Limite de Funções) *[4]*
Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ dizemos que L é o limite de $f(x)$ quando x tende para x_0 e escrevemos $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $0 < \|x - x_0\| < \delta$ implicar que $\|f(x) - L\| < \varepsilon$.

Teorema B.25 (Operações com Limites de Funções) *[4]*
Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\alpha : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$.
Se existirem:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b \quad e \quad \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \alpha_0$$

então existem os limites e valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b \quad &, \quad \lim_{x\to x_0} \alpha(x) f(x) = \alpha_0 a \\ \lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = a.b \quad &e \quad \lim_{x\to x_0} \|f(x)\| = \|a\|. \end{aligned}$$

E, se $f(x) \leq g(x)$ (ou $f(x) \geq g(x)$) para todo $x \in D$ então $a \leq b$ (ou $a \geq b$). Ainda, se $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = 0$ então $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}^m$.

Definição B.26 (Continuidade de Funções) *[4]*
Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dizemos que f é contínua em $x_0 \in D$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $\|x - a\| < \delta$ implicar que $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ Se f for contínua para todo $x \in X \subseteq D$ dizemos que f é contínua em X e denotamos $f \in C(X)$.

Definição B.27 (Continuidade Uniforme de Funções) *[4]*
Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dizemos que f é uniformemente contínua em D se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in D$ $\|x - y\| < \delta$ então $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Teorema B.28 (Máximo, Mínimo e Preservação de Compactos) *[2]*
Seja o compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ e $f : K \to \mathbb{R}^m$ contínua em K então $f(K)$ (imagem de f) é compacto e existem pontos x e $y \in K$ tais que:

$$\|f(x)\| = \sup_{z\in K} \|f(z)\| = \max_{z\in K} \|f(z)\| \quad e \quad \|f(y)\| = \inf_{z\in K} \|f(z)\| = \min_{z\in K} \|f(z)\|.$$

Definição B.29 (Condição de Lipschitz) *[2]*
Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se existe $L > 0$ para todo x e $y \in D$ tal que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\,\|x - y\|$$

dizemos que f é Lipschitz em D. Se para todo $x \in D$ existir uma vizinhança de x em que f é Lipschitz nesta vizinhança então dizemos que f é localmente Lipschitz em D.

Sejam $D_1 \times D_2 = D$, $t \in D_1$ (fixo) e $f(t, x)$ em que $f : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}^m$.
Se existe $L > 0$ para todo x e $y \in D_2$ tal que:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\,\|x - y\|$$

dizemos que f é Lipschitz com respeito a x em D. Se para todo $(t, x) \in D$ existir uma vizinhança de (t, x) em que f é Lipschitz com respeito a x nesta vizinhança então dizemos que f é localmente Lipschitz com respeito a x em D.

Teorema B.30 (Continuidade de Funções) *[4]*
Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $X = f(D)$ (imagem de f) e $h : X \to \mathbb{R}^p$.

1. *Se f e g forem contínuas em $x_0 \in D$ então $(f \pm g)$ e $(f.g)$ são contínuas em x_0.*
2. *Se f é contínua em x_0 e h é contínua no ponto $f(x_0)$ então a função composta $h_o f$ é contínua em x_0.*
3. *f é contínua em x_0, se e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in D$ tal que $x_k \to x_0$ tem-se $\lim f(x_k) = f(x_0)$.*
4. *f é contínua em x_0, se e somente se, suas funções coordenadas $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$ forem contínuas em x_0.*
5. *Se D for compacto então f é uniformemente contínua em D.*
6. *Se f for Lipschitz então f é uniformemente contínua.*

B.6 Diferenciabilidade e Integração

Definição B.31 *[4] Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}^m$ então dizemos que f é diferenciável em $t_0 \in I$ se existir o limite:*

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

em que $f'(t_0)$ é a derivada de f no ponto t_0. Se f for diferenciável para todo $t_0 \in D \subseteq I$ então dizemos que f é diferenciável em D. Se f for diferenciável em D e f' for contínua em D então dizemos que $f \in C^1(D)$.

Definição B.32 *No caso das funções matriciais em que $I \subseteq \mathbb{R}$ e $A : I \to \mathbb{R}^{m \times m}$ dizemos que A é diferenciável em $t_0 \in I$ se existir o limite:*

$$A'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{A(t_0 + h) - A(t_0)}{h}$$

em que $A'(t_0)$ é a derivada de f no ponto t_0. Ainda, representando matrizes em $\mathbb{R}^{m \times m}$ como vetores em $\mathbb{R}^{m^2}$, podemos aplicar os teoremas apresentados nesta seção.

Definição B.33 *[2, 4] Sejam $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^m$ e $i = 1, \ldots, n$.*
Definimos a i-ésima derivada parcial de f no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se existir, como:

$$D_i f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0) \right) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

em que e_i é o vetor canônico de $\mathbb{R}^n$, ou seja, $e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ sua i-ésima coordenada é igual a 1 e as demais são iguais a 0(zero).
No caso particular em que $m = 1$ definimos o vetor gradiente de f como:

$$\nabla f := f' = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Definição B.34 *[2] Sejam $G \subseteq \mathbb{R}^n$ (aberto), $x_0 \in G$ e $f : G \to \mathbb{R}^m$.*
Dizemos que f é diferenciável em x_0 se existir uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $u \in \mathbb{R}^n$ e $\|u\| \leq \delta$ então:

$$\|f(x_0 + u) - f(x_0) - L.u\| \leq \varepsilon \|u\|.$$

Neste caso, denominamos L de derivada de f no ponto x_0 e denotamos $Df(x_0) := L$. Se f for diferenciável para todo $x_0 \in D \subseteq G$ então dizemos que f é diferenciável em D.

Teorema B.35 *[2] Sejam $G \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : G \to \mathbb{R}^m$.*
Se f for diferenciável em $x_0 \in G$ então existem todas as derivadas parciais de f em x_0 e temos que a derivada de f em x_0 está associada a seguinte matriz $(m \times n)$:

$$f'(x_0) := Df(x_0) := \begin{bmatrix} D_1 f_1(x_0) & \dots & D_n f_1(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_m(x_0) & \dots & D_n f_m(x_0) \end{bmatrix}.$$

Se f for diferenciável em $D \subseteq G$ então $f \in C^1(D)$, se e somente se, suas derivadas parciais existirem e forem contínuas em D.

Teorema B.36 (Continuidade) *[2, 4]*
Se $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x_0 \in G$ então f é contínua em x_0.

Teorema B.37 (Teorema do Valor Médio) *[2]*
Sejam $G \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f : G \to \mathbb{R}$, $a \in G, b \in G$ e f diferenciável no segmento de reta que liga os pontos a e b então existe um ponto c neste segmento tal que:

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c).(b - a).$$

Teorema B.38 (Regra da Cadeia) *[2, 4]*
Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ tais que f é diferenciável em $c \in \mathbb{R}^n$ e g é diferenciável em $b = f(c)$ então a composta $h := g_o f$ é diferenciável em c e sua derivada é o produto das matrizes $Dg(b)$ e $Df(c)$:

$$h'(c) = Dh(c) = Dg(b)Df(c) \qquad (h'(c) \in \mathbb{R}^{p \times n}).$$

A seguir, destacamos os seguintes casos particulares:

1. $p = 1$:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(c) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(c) \quad i = 1 \dots n \qquad (h'(c) \in \mathbb{R}^n).$$

2. $n = m = p = 1$:

$$h'(c) = g'(b)f'(c) \qquad (h'(c) \in \mathbb{R}).$$

Teorema B.39 (Composição de funções) *[2, 4]*
Sejam $f, g : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciáveis em $x_0 \in G$.

1. *Então $(f \pm g)$ é diferenciável em x_0 e $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.*

2. *Se $u \in \mathbb{R}^n$ então o produto escalar $h(x) := f(x).g(x)$ é diferenciável em x_0 e $h'(x_0).u = f'(x_0)u.g(x_0) + f(x_0).(g'(x_0)u)$.*
   No caso particular $n = 1$, temos $h'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$.

Teorema B.40 (Teorema Fundamental do Cálculo) *[3]*
Sejam $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em I e $F : I \to \mathbb{R}$ então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. *F é uma integral indefinida de f, ou seja, existe $x_0 \in I$ tal que $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ para todo $t \in I$.*

2. *F é uma primitiva de f, ou seja, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

B.7 Convergência Uniforme

Os conceitos e teoremas apresentados nesta seção também se aplicam às funções matriciais $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times m}$, utilizando normas matriciais ou considerando a bijeção entre matrizes $\mathbb{R}^{m\times m}$ e vetores em $\mathbb{R}^{m^2}$.[7, 8]

Definição B.41 (Convergência Uniforme de Funções) *[2]*
Uma sequência de funções $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em que $f_k : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ converge uniformemente em $D \subseteq G$ para uma função $f : D \to \mathbb{R}^m$ se para todo $\varepsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$ tivermos:

$$\sup_{x\in D} \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Teorema B.42 (Cauchy: Convergência Uniforme de Funções) *[2]*
Seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções limitadas $f_k : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Então existe uma função limitada $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em D, se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \geq N$ tivermos:

$$\sup_{x\in D} \|f_i(x) - f_j(x)\| < \varepsilon.$$

Definição B.43 (Convergência Uniforme de Séries) *[2]*
Uma série de funções $\sum f_k$ com $f_k : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ converge uniformemente em $D \subseteq G$ para uma função $f : D \to \mathbb{R}^m$ se a sequência de funções $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$ convergir uniformemente em D.

Proposição B.44 (Cauchy: Convergência Uniforme de Séries) *[2]*
Seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_k : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. A série $\sum f_k$ converge uniformemente em D, se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq j \geq N$ tivermos:

$$\sup_{x\in D} \left\| \sum_{k=j}^{i} f_k(x) \right\| < \varepsilon.$$

Teorema B.45 (Continuidade e Convergência Uniforme) *[2]*
Seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas $f_k : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que f_k converge uniformemente para f em D então f é contínua em D.

Corolário B.46 *O Teorema B.45 também se aplica as séries de funções* $\sum f_k$*, considerando a sequência de funções* s_k *tal que* $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

Teorema B.47 (Derivação e Convergência Uniforme) *[1, 2, 3]*
Sejam $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo limitado e* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções diferenciáveis em* I *em que* $f_k : I \to \mathbb{R}^m$.
Se existe algum $x_0 \in I$ *tal que a sequência* $(f(x_0)_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é convergente e a sequência de funções* $\{f'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para* g *em* I *então a sequência de funções* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para uma função* f *diferenciável em* I *tal que* $f' = g$*, ou seja:*

$$\lim_{k\to\infty} f'_k(x) = f'(x) = \left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right)' \quad \forall x \in I.$$

Corolário B.48 *[1, 2, 3] O Teorema B.47 também se aplica as séries de funções* $\sum f_k$*, considerando a sequência de funções* s_k *tal que* $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

Teorema B.49 (Integração e Convergência Uniforme) *[1, 2, 3]*
Sejam $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *e* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções integráveis em* I *em que* $f_k : I \to \mathbb{R}^m$ *tal que* f_k *converge uniformemente para* f *em* I *então* f *é integrável em* I *e:*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k = \int_a^b f.$$

B.8
Matrizes

Definição B.50 (Função Multilinear) *[6]*
Seja $D : K^n \times K^n \times \cdots \times K^n \to K$ uma função de n variáveis $A^1, \ldots A^n$, cada uma delas em K^n, onde K é um campo. Dizemos que D é multilinear se satisfizer as seguintes propriedades:

1. $D(A^1, \ldots, C+C', \ldots, A^n) = D(A^1, \ldots, C, \ldots, A^n) + D(A^1, \ldots, C', \ldots, A^n)$ *para todo C e $C' \in K^n$.*

2. $D(A^1, \ldots, \alpha C, \ldots, A^n) = \alpha D(A^1, \ldots, C, \ldots, A^n)$ *para todo $C \in K^n$ e $\alpha \in K$.*

Dizemos que D é alternante se, sempre que $A^j = A^{j+1}$ para algum j, tivermos:

$$D(A^1, \ldots, A^j, A^{j+1}, \ldots, A^n) = 0.$$

Teorema B.51 (Determinante) *[6]*
Existe uma única função multilinear alternante (Definição B.50) tal que $D(I) = 1$. Denominamos esta função de Determinante, definida como:

$$|A| := \det(A) = D(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

em que fixamos $i \leq n$ (ou $j \leq n$), (a_{ij}) é o ij-ésimo elemento da matriz A $(n \times n)$ e A_{ij} é a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida retirando-se a i-ésima linha e j-ésima coluna de A.
A função determinante satisfaz também as seguintes propriedades:

1. *Se duas colunas (ou linhas) forem trocadas então o determinante muda de sinal.*

2. *Se duas colunas (ou linhas) forem iguais então o determinante é nulo.*

3. *Se for adicionado um múltiplo de uma coluna (ou linha) em uma outra coluna (ou linha), o valor do determinante permanece inalterado.*

4. *Sejam A e B matrizes $(n \times n)$ então $D(AB) = D(A).D(B)$.*

5. *D é uma função contínua.*

Teorema B.52 (Inversa de uma Matriz) *[6]*
Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma matriz $(n \times n)$ tal que $D(A) \neq 0$ em que D é a função determinante (definida no Teorema B.51) então A é inversível e sua inversa $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ é dada por:

$$b_{ij} = \frac{D(A_1, \ldots, e_j, \ldots, A_n)}{D(A)}$$

em que e_j ocorre na i-ésima coordenada da função D sendo o vetor canônico em $\mathbb{R}^n$ para todo $j \leq n$ e A_i são as i-ésimas linhas (ou colunas) de A.

Teorema B.53 (Matriz Não-Singular) *[6]*
Seja A uma matriz $(n \times n)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. *A é inversível, ou seja, existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ em que I é a matriz identidade. Denominamos a matriz A como Não-Singular.*

2. *As colunas (e linhas) de A são linearmente independentes.*

3. *$D(A) \neq 0$, em que D é a função determinante definida no Teorema B.51.*

Proposição B.54 (Equivalência entre Matrizes Complexas e Reais)
Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 := a_0 + b_0 i$ com $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ então z_0 pode ser representado por um vetor $\vec{z_0} := (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ ou por uma matriz $Z_0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por:

$$Z_0 := \begin{bmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Assim, seja $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida como $Z := (z_{kj})_{k,j=1}^n$ tal que para todo $k, j \leq n$ temos $z_{kj} = a_{kj} + ib_{kj}$ com $a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{R}$ então podemos representar Z como uma matriz $Z_\mathbb{R} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ tal que:

$$Z_\mathbb{R} := \begin{bmatrix} Z_{11} & \ldots & Z_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & \ldots & Z_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{em que} \quad Z_{kj} := \begin{bmatrix} a_{kj} & -b_{kj} \\ b_{kj} & a_{kj} \end{bmatrix}.$$

Seja R_n o conjunto de todas as matrizes reais $Z_\mathbb{R}$ (na forma acima), então R_n é um subespaço vetorial real de dimensão $2n^2$ e temos que existe bijeção entre o espaço vetorial das matrizes complexas $\mathbb{C}^{n\times n}$ e R_n, ou seja:
- para toda matriz complexa $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existe uma única matriz real $Z_\mathbb{R} \in R_n$.
- para toda matriz real $Z_\mathbb{R} \in R_n$ existe uma única matriz complexa $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
Assim, dizemos que Z e $Z_\mathbb{R}$ são equivalentes.
Como consequência destas definições e das propriedades multiplicativas e aditivas das matrizes, temos que sejam A e $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ então $(\alpha A^k + \beta B^m)$ é equivalente a $(\alpha A_\mathbb{R}^k + \beta B_\mathbb{R}^m)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $k, m \in \mathbb{N}$. Logo, a exponencial matricial e^Z (Definição 3.14) também é equivalente a $e^{Z_\mathbb{R}}$.

B.9 Aplicações Lineares

Definição B.55 (Aplicação Linear) *[6]*

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um campo K, denominamos de Aplicação Linear $F : V \to W$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *$F(u + v) = F(u) + F(v)$ para todo elemento $u, v \in V$ e;*
2. *$F(\alpha v) = \alpha F(v)$ para todo $\alpha \in K$ e $v \in V$.*

Dizemos que F é:

- *injetiva, se para todo $u, v \in V$ tais que $u \neq v$ tivermos $F(u) \neq F(v)$.*
- *sobrejetiva, se para todo $w \in W$ existir $v \in V$ tal que $F(v) = w$.*
- *bijetiva, se for injetiva e sobrejetiva.*
- *inversível, se existir uma aplicação linear $F^{-1} : W \to V$ tal que:*

$$F^{-1}(F(v)) = v \text{ e } F(F^{-1}(w)) = w \text{ para todo } v \in V \text{ e } w \in W.$$

Teorema B.56 (Isomorfismo) *[6]*

Seja F aplicação linear tal que F é bijetiva então F é inversível e sua inversa também é uma aplicação linear bijetiva. Neste caso, dizemos que F é um isomorfismo linear.

Proposição B.57 (Núcleo e Aplicações Injetivas) *[6]*

Seja F aplicação linear, denominamos de Núcleo de F o conjunto dos elementos $v \in V$ tal que $F(v) = 0$, denotamos este conjunto como $\operatorname{Ker} F$ e temos:

$$\operatorname{Ker} F = \{0\}, \text{ se e somente se, } F \text{ for injetiva.}$$

Proposição B.58 (Imagem e Aplicações Sobrejetivas) *[6]*

Seja F aplicação linear, denominamos de Imagem de F o conjunto dos elementos $w \in W$ em que existe $v \in V$ tal que $F(v) = w$, denotamos este conjunto como $\operatorname{Im} F$ e temos que $\operatorname{Im} F$ é subespaço de W. Temos também:

$$\operatorname{Im} F = W, \text{ se e somente se, } F \text{ é sobrejetiva.}$$

Teorema B.59 (Dimensões do Núcleo e Imagem) *[6]*

Seja F aplicação linear então:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F.$$

B.10
Autovalores e a Forma Normal de Jordan

Consideremos A uma matriz (real ou complexa) $(n \times n)$.

Definição B.60 (Autovalor e Autovetor) *[7, 8]*
Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^n$ tais que Av=λv então denominamos λ de autovalor de A e v seu respectivo autovetor.

Definição B.61 (Polinômio Característico) *[7, 8]*
Denominamos de polinômio característico de A:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_l)^{m_p}$$

em que $\lambda_1 \dots \lambda_p$ são as raízes deste polinômio e $m_1 \dots m_p$ suas respectivas multiplicidades algébricas tal que $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$ é o grau deste polinômio.

Teorema B.62 *[7, 8] λ é um autovalor de A, se e somente se, λ for uma raiz do polinômio característico de A, ou seja:*

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0.$$

Teorema B.63 (Forma Normal de Jordan) *[7, 8]*
Existe uma matriz S inversível que transforma uma matriz A $(n \times n)$ em uma matriz J $(n \times n)$ tal que $J = S^{-1}AS$ em que

$$J := \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix} (n \times n) \qquad J_j := \begin{bmatrix} \lambda_{i(j)} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{i(j)} & 1 \\ 0 & & & \lambda_{i(j)} \end{bmatrix} (n_j \times n_j)$$

Com $j = 1 \dots k$, $i(j) = 1 \dots p$ e $\lambda_{i(j)}$ são as raízes do polinômio característico (Definição B.61), ou seja, são os autovalores de A (por B.62).

Denominamos cada bloco J_j de bloco de Jordan de A e a matriz J de Forma Normal de Jordan de A. Note que, um mesmo autovalor λ_i pode pertencer a mais de um bloco de Jordan.

Assim temos que $J = \Lambda + N$ em que Λ é a matriz diagonal contendo os autovalores de A e N é a matriz dada por:

$$N := \begin{bmatrix} 0 & \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{n-1} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \text{ em que } \delta_i \in \{0, 1\} \text{ para todo } i = 1 \dots (n-1).$$