

8 Referências Bibliográficas

- [1] A.M. Duarte Jr., “A Comparative Study of Downside Risk and Volatility in Asset Allocation”, *Investigación Operativa*, Vol. 4, Nº 3, 1994, pp.213-228.
- [2] H.M. Markowitz, “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, Vol. 7, Nº 1, 1952, pp.77-91.
- [3] G. Mitra, T. Kyriakis, C. Lucas, M. Pirbhai, “A Review of Portfolio Planning: Models and Systems”, invited chapter in: *Advances in Portfolio Construction and Implementation*, S E Satchell, A E Scowcroft (Eds.), Butterworth & Heinemann, Oxford, 2003.
- [4] N.J. Jobst, M.D. Horniman, C.A. Lucas, G. Mitra, “Computational Aspects of Alternative Portfolio Selection Models in the Presence of Discrete Asset Choice Constraints”, *Quantitative Finance*, Vol. 1, 2001, pp.1-13.
- [5] R. Mansini, W. Ogryczak, M.G. Speranza, “LP Solvable Models for Portfolio Optimization: A Survey and Comparison – Part I”, 28th Workshop EURO Working Group on Financial Modeling, Vilnius, Lithuania, May, 2001.
- [6] W.F. Sharpe, “A Linear Programming Approximation for the General Portfolio Analysis Problem”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 6, Nº 5, 1971, pp.1263-1275.
- [7] H.M. Markowitz, “Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments”, John Wiley & Sons, New York, NY, 1959.
- [8] H. Konno, H. Yamazaki, “Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market”, *Management Science*, Vol. 37, Nº 5, 1991, pp.519-531.

- [9] M.G. Speranza, "A Heuristic Algorithm for a Portfolio Optimization Model Applied to the Milan Stock Market", *Computers and Operation Research*, Vol. 23, N° 5, 1996, pp.433-441.
- [10] M.R. Young, "A MiniMax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution", *Management Science*, Vol. 44, N° 5, 1998, pp.673-683.
- [11] S.M. Lee, "Goal Programming for Decision Analysis", Philadelphia, PA, 1972.
- [12] JP Morgan, "Risk Metrics", Technical Document, 4^a edition, New York, NY, 1996.
- [13] P. Jorion, "Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk", McGraw-Hill Companies Inc, 1997.
- [14] H. Mausser, D. Rosen, "Beyond VaR: From Measuring Risk to Managing Risk", *ALGO Research Quarterly*, Vol. 1, N° 2, 1998, pp.5-20.
- [15] A.A. Gaivoronski, G. Pflug, "Finding Optimal Portfolios with Constraints on Value at Risk", *Proceedings of III Stockolm Seminar on Risk Behavior and Risk Management*, Stockolm, 1999.
- [16] N. Larsen, H. Mausser, S. Uryasev, "Algorithms for Optimization of Value-at-Risk", in P. Pardalos and V.K. Tsitsiringos, (Eds.) *Financial Engineering, e-Commerce and Supply Chain*, Kluwer Academic Publishers, 2002, pp.129-157.
- [17] R.T. Rockafellar, S. Uryasev, "Optimization of Conditional Value-at-Risk", *The Journal of Risk*, Vol. 2, N° 3, 2000, pp.21-41.
- [18] P. Krokmal, J. Palmquist, S. Uryasev, "Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints", *The Journal of Risk*, Vol. 4, N° 2, 2002.
- [19] W.K. Hanaveld, M.H. Vlerk, "Integrated Chance Constraints: Reduced Forms and an Algorithm", *Stochastic Programming E-Print Series* (www.speps.info), 2002.

- [20] E. Domar, R.A. Musgrave, "Proportional Income Taxation and Risk-Taking", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 58, N° 3, 1944, pp.388-422.
- [21] A.D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", *Econometrica*, Vol. 20, N° 3, 1952, pp.431-449.
- [22] R. Schultz, "Stochastic Programming with Integer Variables", *Math. Program., Ser B* 97, 2003, pp. 285-309.
- [23] D.G. Luenberger, "Investment Science", Oxford University Press, 1998.
- [24] L.L. Gomes, "Avaliação de Termelétricas no Brasil Estudando o Melhor Momento de Investimento por Modelos de Opções Reais", Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2002.
- [25] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber, D. Heath, "Coherent Measures of Risk", *Math. Finance*, Vol. 9, N° 3, 1999, pp.203-228.
- [26] R.T. Rockafellar, S. Uryasev, M. Zabarankin, "Portfolio Analysis with General Deviation Measures", Research Report 2003-8, ISE Department, University of Florida, June, 2003.
- [27] R.T. Rockafellar, S. Uryasev, "Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions", *Journal of Banking and Finance*, N° 26, 2002, pp.1443-1471.
- [28] M. Marmiroli, Y. Tsukamoto, R. Yokoyama, "Innovative Generation Scheduling Algorithm for Multi Bilateral Electricity Market", *International Conference on Power System Technology*, Vol. 3, October, 2002.
- [29] R. Bjorgan, C.C. Liu, J. Lawarrée, "Financial Risk Management in a Competitive Electricity Market", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 14, N° 4, 1999, pp.1285-1291.
- [30] E.G. Domingues, H. Arango, J.P.G. Abreu, C.B. Campinho, G. Paulillo, "Applying Modern Portfolio Theory to Investment Projects in Electric Energy Markets", *IEEE Porto Power Tech Conference*, Porto, Portugal, September, 2001.

- [31] F. Azevedo, Z.A. Vale, A.A. Vale, “Decision-Support Tool for the Establishment of Contracts in the Electricity Market”, IEEE Bologna Power Tech Conference, Bologna, Italy, June, 2003.
- [32] S.I. Palamarchuk, “Forward Contracts for Electricity and Their Correlation with Spot Markets”, IEEE Bologna Power Tech Conference, Bologna, Italy, June, 2003.
- [33] B. Mo, A. Gjelsvik, A. Grundt, “Integrated Risk Management of Hydro Power Scheduling and Contract Management”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 16, N° 2, 2001, pp.216-221.
- [34] T. Kristiansen, “Testing of Large Scale Systems with a New Tool for Integrated Risk Management”, 14th Power System Computation Conference, Seville, Spain, June, 2002.
- [35] A. Grundt, O.B. Eliassen, B. Mo, A. Gjelsvik, “Risk Management by Simultaneous Optimization of Hydro Resources and Financial Instruments”, 38° CIGRE Session, Paris, France, 2000.
- [36] T. Bjørkvoll, S.E. Fleten, M.P. Nowak, A. Tomasgard, S.W. Wallace, “Power Generation Planning and Risk Management in a Liberalised Market”, IEEE Porto Power Tech Conference, Porto, Portugal, September, 2001.
- [37] S. Sen, L. Yu, T. Genc, “Decision Aids for Scheduling and Hedging (DASH) in Deregulated Electricity Markets: A Stochastic Programming Approach to Power Portfolio Optimization”, Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference, San Diego, USA, December, 2002.
- [38] S.W. Illerhaus, J.F. Verstege, “Short-Term Energy Trading Considering Long-Term Contract Constraints”, IEEE Porto Power Tech Conference, Porto, Portugal, September, 2001.
- [39] B. Mo, A. Gjelsvik, “Simultaneous Optimisation of Withdrawal from a Flexible Contract and Financial Hedging”, 14th Power System Computation Conference, Seville, Spain, June, 2002.
- [40] S. Sen, J.L. Higle, “An Introductory Tutorial on Stochastic Linear Programming Models”, Interfaces, Vol. 29, 1999, pp.33-61.

- [41] J.R. Birge, F. Louveaux, “Introduction to Stochastic Programming”, New York Springer Series in Operations Research, 1997.
- [42] M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, “Multi-stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning”, *Mathematical Programming*, N° 52, 1991, pp.359-375.
- [43] J.F. Benders, “Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems”, *Numerische Mathematik*, N° 4, 1962, pp.238-252.
- [44] A. Ruszczyński, “Decomposition Methods in Stochastic Programming”, *Mathematical Programming*, N° 79, 1997, pp.333-353.
- [45] E.L. da Silva, “Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica”, Editora Sagra Luzzato, 2001.
- [46] A. Berizzi, C. Bovo, M. Delfanti, E. Fumagalli, M. Merlo, “Simulation of a Bid-Based Dispatch Subject to Inter-Zonal Transmission Constraints”, *IEEE Bologna Power Tech Conference*, Bologna, Italy, June, 2003.
- [47] X.V. Filho, B.G. Gorenstin, J.A. Medeiros, A.M. Oliveira, “Energy Trading – The South American Experience”, *VII SEPOPE*, Curitiba, Brazil, Maio, 2000.
- [48] F. Li, M. Gabb, C. Aldridge, C. Cheung, R. Walker, G. Williams, M. Bradley, “An Optimal Constraint Management Program for New Electricity Trading Arrangements in the UK”, *14th PSCC*, Sevilla, Spain, June, 2002.
- [49] L.A.M. Fortunato, T.A.A. Neto, J.C.R. Albuquerque, M.V.F. Pereira, “Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Produção de Energia Elétrica”, *EDUFF*, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 1990.
- [50] M.V.F. Pereira, N. Campodónico, R. Kelman, “Long-term Hydro Scheduling based on Stochastic Models”, *EPSON'98*, Zurich, 1998.
- [51] M.E.P. Maceira, L.A. Terry, J.M. Damazio, F.S. Costa, A.C.G. Melo, “Chain of Optimization Models for Setting the Energy Dispatch and Spot Price in the Brazilian System”, *14° PSCC*, Sevilla, Espanha, 2002.

- [52] M.E.P. Maceira, A.P.C. Costa, A.L.M. Marcato, “NEWAVE – Especificação Funcional”, Relatório Técnico CEPEL nº DPP/PEL – 349/99.
- [53] J.P. Costa, S. Prado, S. Binato, “Modelo DECOMP - Manual de Metodologia”, Relatório Técnico CEPEL nº DPP/PEL– 639/99.
- [54] A. Belloni, A.L.D.S. Lima, M.E.P. Maceira, C. Sagastizábal, “Bundle Relaxation and Primal Recovery in Unit Commitment Problems. The Brazilian Case”, Annals of Operations Research, Vol. 120, 2003, pp.21-44.
- [55] A. Diniz, L.C.F. Souza, M.E.P. Maceira, F.S. Costa, L.A. Terry, “Manual do Usuário Modelo DESSEM v 5.0”, Relatório Técnico CEPEL nº DPP/PEN– 117/2000.
- [56] A.C.G. Melo, “Competitive Generation Arrangements in Latin America Systems with Significant Hydro Generation - The Brazilian Case”, IEEE Power Engineering Review, Vol. 19, Number 9, September, 1999, pp.12-14.
- [57] D. Bertsimas, J.N. Tsitsiklis, “Introduction to Linear Optimization”, Athena Scientific, 1997.
- [58] CIGRÉ Task Force 38-05-09, “Contracts and Financial Instruments: New Tools for Risk Management in Competitive Power Systems”, 38th CIGRE Session, Paris, France, 2000.
- [59] X.V. Filho, B.G. Gorenstin, A.C.G. Melo, E.N. Mesquita, J.C.O. Mello, M.V.F. Pereira, “Future Trends on Financial Risk Strategies in the Power Sector Market”, 38th CIGRE Session, Paris, France, 2000.
- [60] L.G.B. Marzano, A.C.G. Melo, R.C. Souza, “Uma Abordagem para Otimização de Portfólio de Contratos de Energia no Setor Elétrico Brasileiro”, XXXIV SBPO, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [61] L.G.B. Marzano, A.C.G. Melo, R.C. Souza, “Uma Abordagem para Otimização de Portfólio de Contratos de Energia no Setor Elétrico Brasileiro”, XVII SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Uberlândia, Brasil, 2003.

- [62] L.G.B. Marzano, A.C.G. Melo, R.C. Souza, “An Approach for Portfolio Optimization of Energy Contracts in the Brazilian Electric Sector”, IEEE Bologna Power Tech 2003 Conference, Bologna, Italy, 2003.

- [63] A. Shapiro, Y. Wardi, “Nondifferentiability of the Steady-State Function in Discrete Event Dynamic Systems”, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 39, N° 8, 1994, pp.1707-1711.

9 Bibliografia

H. M. Markowitz, “Foundations of Portfolio Theory”, *Journal of Finance*, Vol. 46, Issue 2, 1991, pp.469-477.

G. Hanoch, H. Levy, “The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk”, *The Review of Economic Studies*, Vol. 36, N° 3, 1969, pp.335-346.

P. C. Fishburn, “Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns”, *The American Economic Review*, Vol. 67, N° 2, 1977, pp.116-126.

R. Dembo, D. Rosen, “The Practice of Portfolio Replication: A Practical Overview of Forward and Inverse Problems”, *Annals of Operations Research*, N° 85, 1999, pp.267-284.

F. Andersson, H. Mausser, D. Rosen, S. Uryasev, “Credit Risk Optimization with Conditional Value-at-Risk Criterion”, *Math. Program., Ser. B* 89, 2001, pp.273-291.

A.M. Oliveira, “Estratégia Ótima de Oferta de Preços no Mercado de Curto Prazo em Sistemas com Predominância Hidrelétrica”, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio, 2003.

A.C.G. Melo, M.E.P. Maceira, L.L. Gomes, D.L. Jardim, A. Pinhel, R.P. Caldas, A.M. Oliveira, “Financial Evaluation of Generation Projects Considering Hydrologic Risk”, VII SEPOPE - Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning, Curitiba, Brasil, 2000.

R.C.G. Teive, F.S.V. Silveira, M. Morozowski Filho, “A Strategic Decision Support System for Electric Utility Companies – An Analysis Tool for Projects Portfolio Management”, VII SEPOPE - Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning, Curitiba, Brasil, 2000.

X. Vieira Filho, B.G. Gorenstin, R.N. Sacramento, A.C.G. Melo, M.E.P. Maceira, “Comercialização de Energia no Mercado Spot – Risco e Vantagens em um Sistema Hidrotérmico – Mecanismos de Proteção”, VII SEPOPE - Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning, Curitiba, Brasil, 2000.

R. Green, “Competition in Generation: The Economic Foundations”, Proceedings of the IEEE, Vol. 88, N° 2, 2000, pp.128-139.

R. Dahlgren, C.C. Liu, J. Lawarrée, “Risk Assessment in Energy Trading”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 18, N° 2, 2003, pp.503-511.

S.E. Fleten, S.W. Wallace, “Power Scheduling with Forward Contracts”, Proceedings of the Nordic MPS, Norway, 1998.

B. Krasenbrink, B. Pribcevic, H.J. Haubrich, “Integrated Planning of Power Generation and Trading in a Competitive Market”, IEEE Power Engineering Society Summer Meeting, Vol. 3, 2002, pp.1271-1277.

E. Tanlapco, J. Lawarée, C.C. Liu, “Hedging with Futures Contracts in a Deregulated Electricity Industry”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 17, N° 3, 2002, pp.577-582.

B. Mo, A. Gjelsvik, A. Grundt, K. Karesen, ”Optimisation of Hydropower Operation in a Liberalised Market with Focus on Price Modelling”, IEEE Porto Power Tech Conference, Porto, Portugal, September, 2001.

M. Denton, A. Palmer, R. Masiello, P. Skantze, “Managing Market Risk in Energy”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 18, N° 2, 2003, pp.494-502.

A. Ramos, M. Ventosa, M. Rivier, A. Santamaria, ”An Iterative Algorithm for Profit Maximization by Market Equilibrium Constraints”, 14th Power System Computation Conference, Sevilla, Spain, June, 2002.

J. Bujko, J. Malko, A. Weron, R. Weron, “Electricity Market and Tools for Financial Risk Management in Poland – A Case Study”, 38° CIGRE Session, Paris, France, 2000.

A.C.C. Pinhel, A.C.G. Melo, L.L. Gomes, R. Torres, A.M. Oliveira, D. Jardim, M.E.P. Maceira, R.P. Caldas, “Análise de Viabilidade de Termelétrica no Sistema Interligado Considerando Flexibilidade Operativa e Estratégias de Contratação de Energia”, XVI SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Campinas, Brasil, 2001.

D.S. Ramos, E.A.F.A. Fadigas, W.S. Lima, “Gestão de Riscos Financeiros para Expansão Termelétrica”, XVI SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Campinas, Brasil, 2001.

A.C.G. Melo, A.C.C. Pinhel, L.L. Gomes, R. Torres, A.M. Oliveira, R.P. Caldas, D. Jardim, M.E.P. Maceira, “Estratégias de Hedge contra o Risco de Falhas em Termelétricas”, XVI SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Campinas, Brasil, 2001.

A.L.M. Marcato, “Representação Híbrida de Sistemas Equivalentes e Individualizados para o Planejamento da Operação de Médio Prazo de Sistemas de Potência de Grande Porte”, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio, 2002.

A.S. Kligerman, M.V.F. Pereira, ”Operação Ótima de Subsistemas Hidrotérmicos Equivalentes Utilizando Programação Dinâmica Estocástica Dual”, XII SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Recife, Brasil, 1993.

N. Flatabø, A. Haugstad, B. Mo, O.B. Fosso, “Short-Term and Medium-Term Generation Scheduling in the Norwegian Hydro System under a Competitive Power Market Structure”, VIII SEPOPE - Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning, Brasília, Brasil, 2002.

Apêndice A

Relação entre o Semidesvio Absoluto Médio e o Desvio Absoluto Médio

Foi dito no capítulo 2 que a minimização do semidesvio absoluto médio é equivalente a minimização do desvio absoluto médio. Tal equivalência está no fato de o desvio absoluto médio ser simétrico em relação à média, o que faz com que o semidesvio absoluto médio seja a metade do desvio absoluto médio. Tal propriedade é demonstrada neste apêndice, assumindo-se que distribuição da variável aleatória envolvida é discreta e que as realizações são equiprováveis.

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_M, x_{M+1}, \dots, x_N$ as realizações de uma variável aleatória, ordenadas em ordem crescente, e seja \bar{x} o valor médio de tais realizações. Suponha que o valor de \bar{x} esteja situado entre x_M e x_{M+1} . O valor médio \bar{x} é dado por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^M x_i + \sum_{i=M+1}^N x_i}{N} \quad (\text{A.1})$$

O semidesvio absoluto médio positivo (SD^+) e o semidesvio absoluto médio negativo (SD^-) são dados por:

$$SD^+ = \frac{\sum_{i=M+1}^N (x_i - \bar{x})}{N} = \frac{\left(\sum_{i=M+1}^N x_i \right) - (N - M) \bar{x}}{N} \quad (\text{A.2})$$

$$SD^- = \frac{\sum_{i=1}^M (\bar{x} - x_i)}{N} = \frac{M \bar{x} - \sum_{i=1}^M x_i}{N} \quad (\text{A.3})$$

De (A.1), pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^M x_i = N \bar{x} - \sum_{i=M+1}^N x_i \quad (\text{A.4})$$

Substituindo (A.4) em (A.3), obtém-se:

$$SD^- = \frac{M \bar{x} - N \bar{x} + \sum_{i=M+1}^N x_i}{N} = \frac{(M - N) \bar{x} + \sum_{i=M+1}^N x_i}{N} = \frac{\left(\sum_{i=M+1}^N x_i \right) - (N - M) \bar{x}}{N} = SD^+$$

Logo, o semidesvio absoluto médio positivo é igual ao semidesvio absoluto médio negativo.

O desvio absoluto médio de $x_1, x_2, \dots, x_M, x_{M+1}, \dots, x_N$ é dado por:

$$DA = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{\sum_{i=1}^M (\bar{x} - x_i) + \sum_{i=M+1}^N (x_i - \bar{x})}{N} = SD^- + SD^+$$

Como o desvio absoluto médio é dado pela soma do semidesvio absoluto médio positivo com o semidesvio absoluto médio negativo, e estes últimos são iguais, pode-se concluir que o semidesvio absoluto médio é a metade do desvio absoluto médio. Logo, a minimização de ambos é equivalente.

Apêndice B

Características do VaR

Foi dito no capítulo 2 que o VaR, quando se trabalha com distribuições discretas, é uma função não convexa, não diferenciável em alguns pontos, e que apresenta múltiplos extremos locais. Neste apêndice é apresentada a demonstração, reproduzida de [14], de que o VaR possui tais características.

Seja z_j a perda do portfólio associada ao j -ésimo cenário:

$$z_j(x) = -\sum_{i=1}^N x_i r_{ij}$$

Explicitando a parcela devido ao ativo k na expressão acima, obtém-se:

$$z_j(x) = -x_k r_{kj} + K_{kj} \quad \text{onde} \quad K_{kj} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N x_i r_{ij}$$

Plotando-se a perda do portfólio *versus* a posição investida no ativo k , obtém-se, para cada cenário j , uma reta $z_j(x_k)$ cuja inclinação é dada por $-r_{kj}$ e intercepto em K_{kj}/r_{kj} . Supondo-se que o VaR seja dado pela segunda maior perda, é apresentada na Figura B.1 o VaR do portfólio em função da posição investida no ativo k (assume-se, por simplicidade, que para todo x_k os quatro cenários de maior perda estejam sempre entre os cenários 1, 2, 3, e 4).

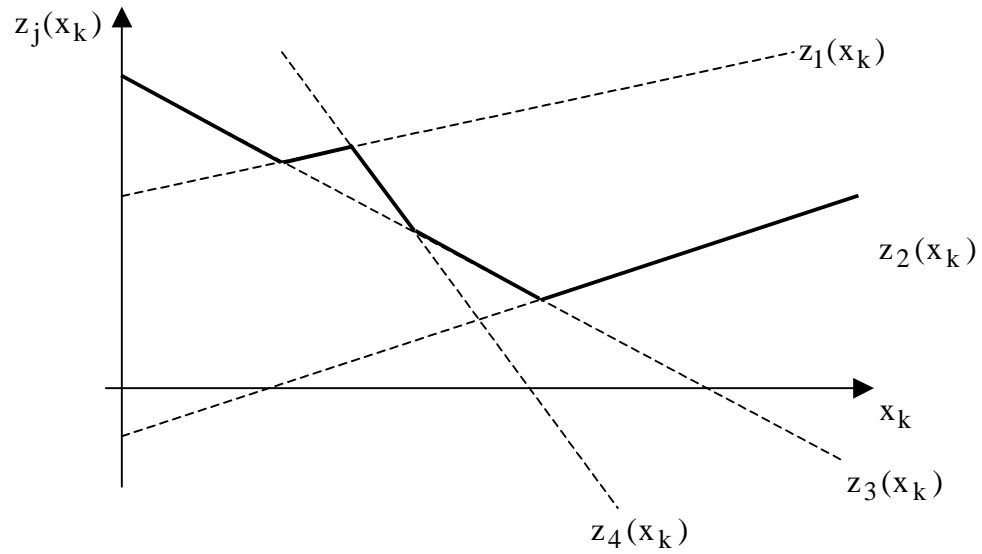


Figura B.1 – Perda do Portfólio *versus* Posição Investida no Ativo k

Da Figura B.1, verifica-se a não convexidade do VaR, assim como sua não contínua diferenciabilidade, e a presença de múltiplos mínimos locais.

Apêndice C

Prova de que a Minimização de $F_\beta(x, \alpha)$ em α Resulta no CVaR do Portfólio

No capítulo 2 foi mencionado que a minimização em α da função $F_\beta(x, \alpha)$ proposta em [17] por Rockafellar e Uryasev resulta no CVaR a nível de confiança $\beta\%$ do portfólio. A prova de tal propriedade é apresentada neste apêndice.

Seja $F_\beta(x, \alpha)$ a função a seguir:

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} [z - \alpha]^+ p(\omega) d\omega \quad (\text{C.1})$$

O mínimo de $F_\beta(x, \alpha)$ em relação à variável α é obtido igualando-se a derivada parcial em relação a α de tal função a zero.

$$\frac{\partial F_\beta(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [z - \alpha]^+ p(\omega) d\omega \right] \quad (\text{C.2})$$

A integral na expressão acima representa o valor esperado da função $[z - \alpha]^+$.

Conforme demonstrado¹ por Shapiro e Wardi em [63], se uma função $f(\theta)$ é convexa², então:

$$\frac{\partial E[f(\theta)]}{\partial \theta} = E \left[\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right] \quad (\text{C.3})$$

¹ Tal demonstração utiliza teoremas avançados da teoria da medida e integração, e não será aqui apresentada.

² Como é a nossa função $[z - \alpha]^+$.

Utilizando tal propriedade temos,

$$\frac{\partial F_{\beta}(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} [z - \alpha]^+ p(\omega) d\omega \quad (\text{C.4})$$

Mas:

$$[z - \alpha]^+ = \begin{cases} z - \alpha & \text{se } z \geq \alpha \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [z - \alpha]^+ = \begin{cases} -1 & \text{se } z \geq \alpha \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Com isso:

$$\frac{\partial F_{\beta}(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 1 - \frac{1}{1-\beta} \int_{z \geq \alpha} p(\omega) d\omega \quad (\text{C.7})$$

Igualando-se a derivada a zero, obtém-se:

$$\int_{z \geq \alpha} p(\omega) d\omega = 1 - \beta \quad (\text{C.8})$$

Pela própria definição de VaR^1 , verifica-se que o mínimo ocorre em $\alpha = \alpha_{\beta}(x)$. Com isso:

¹ Vide expressão 2.7, capítulo 2.

$$\text{Min}_{\alpha} F_{\beta}(x, \alpha) = F_{\beta}(x, \alpha_{\beta}(x)) = \alpha_{\beta}(x) + \frac{1}{1-\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} [z - \alpha_{\beta}(x)]^+ p(\omega) d\omega \quad (\text{C.9})$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [z - \alpha_{\beta}(x)]^+ p(\omega) d\omega &= \int_{z \geq \alpha_{\beta}(x)} [z - \alpha_{\beta}(x)] p(\omega) d\omega \\ &= \int_{z \geq \alpha_{\beta}(x)} z p(\omega) d\omega - \alpha_{\beta}(x) \int_{z \geq \alpha_{\beta}(x)} p(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

A primeira integral de (C.10) é igual a $(1-\beta) \phi_{\beta}(x)^1$, e a segunda integral é igual a $(1-\beta)$.²

Com isso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [z - \alpha_{\beta}(x)]^+ p(\omega) d\omega = (1-\beta)[\phi_{\beta}(x) - \alpha_{\beta}(x)] \quad (\text{C.11})$$

Finalmente, substituindo-se (C.11) em (C.9), obtém-se:

$$\text{Min}_{\alpha} F_{\beta}(x, \alpha) = \alpha_{\beta}(x) + \frac{1}{1-\beta} [(1-\beta) (\phi_{\beta}(x) - \alpha_{\beta}(x))] = \phi_{\beta}(x)$$

¹ Vide expressão (2.11), capítulo 2.

² Vide expressão (2.7), capítulo 2.

Apêndice D

Consistência do Par $D(X_1) = E[X_1] - \inf[X_1]$ e $R(X_1) = -\inf[X_1]$

No capítulo 2 foram apresentados os conceitos de medidas consistentes de risco e de desvio. Neste apêndice é demonstrado que o par formado pela medida de desvio $D(X_1) = E[X_1] - \inf[X_1]$ e pela medida de risco $R(X_1) = -\inf[X_1]$ é consistente, isto é, que a primeira medida satisfaz os axiomas B1, B2, B3 e B4 e a segunda medida satisfaz os axiomas A1, A2, A3 e A4.

Axioma B1:

$$D(X_1 + C) = E[X_1 + C] - \inf[X_1 + C] = E[X_1] + C - \inf[X_1] - C$$

$$D(X_1 + C) = E[X_1] - \inf[X_1] = D(X_1)$$

Logo, $D(X_1) = E[X_1] - \inf[X_1]$ satisfaz o axioma B1.

Axioma B2:

$$D(X_1 + X_2) = E[X_1 + X_2] - \inf[X_1 + X_2]$$

$$D(X_1 + X_2) = E[X_1] + E[X_2] - \inf[X_1 + X_2] \leq E[X_1] + E[X_2] - \inf[X_1] - \inf[X_2]$$

$$D(X_1 + X_2) \leq E[X_1] - \inf[X_1] + E[X_2] - \inf[X_2] = D(X_1) + D(X_2)$$

Logo, $D(X_1) = E[X_1] - \inf[X_1]$ satisfaz o axioma B2.

Axioma B3:

$$D(\lambda X_1) = E[\lambda X_1] - \inf[\lambda X_1] = \lambda E[X_1] - \lambda \inf[X_1] = \lambda D[X_1]$$

Logo, $D(X_1) = E[X_1] - \inf[X_1]$ satisfaz o axioma B3.

Axioma B4:

Se X_1 não é constante:

$$D(X_1) = E[X_1] - \inf [X_1] > 0$$

Se X_1 é constante:

$$D(X_1) = E[X_1] - \inf [X_1] = 0$$

Logo, $D(X_1) = E[X_1] - \inf [X_1]$ satisfaz o axioma B4.

Axioma A1:

$$R(X_1 + C) = -\inf [X_1 + C] = -\inf [X_1] - C = R(X_1) - C$$

Logo, $R(X_1) = -\inf [X_1]$ satisfaz o axioma A1.

Axioma A2:

$$R(X_1 + X_2) = -\inf [X_1 + X_2] \leq -\inf [X_1] - \inf [X_2] = R(X_1) + R(X_2)$$

Logo, $R(X_1) = -\inf [X_1]$ satisfaz o axioma A2.

Axioma A3:

$$R(\lambda X_1) = -\inf [\lambda X_1] = -\lambda \inf [X_1] = \lambda R[X_1]$$

Logo, $R(X_1) = -\inf [X_1]$ satisfaz o axioma A3.

Axioma A4:

$$\text{Se } X_1 \leq X_2, \text{ então } -\inf [X_1] \geq -\inf [X_2] \Rightarrow R(X_1) \geq R(X_2)$$

Logo, $R(X_1) = -\inf [X_1]$ satisfaz o axioma A4.

Conclusão:

A medida de desvio $D(X_1) = E[X_1] - \inf [X_1]$, que satisfaz os axiomas B1, B2, B3 e B4, é uma medida de desvio consistente, já que a medida de risco associada

$R(X_1) = -\inf [X_1]$ satisfaz os axiomas A1, A2, A3 e A4, ou seja, é uma medida de risco consistente.

Apêndice E

Consistência do CVaR

Foi dito no capítulo 2 que o CVaR é uma medida de risco consistente. Tal característica é demonstrada neste apêndice.

Seja X_1 uma variável aleatória que represente o retorno de um dado portfólio. Supondo-se que as incertezas sejam representadas através de S cenários equiprováveis, o CVaR da distribuição de X_1 é dado por¹:

$$\begin{aligned} \phi_\beta(X_1) = \text{Min}_{\alpha, u_s} \quad & \alpha + \frac{1}{(1-\beta)S} \sum_{s=1}^S u_s \\ \text{s.a.} \quad & \\ & u_s \geq -X_1^s - \alpha \quad s = 1, \dots, S \\ & u_s \geq 0 \quad s = 1, \dots, S \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

O problema acima pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \phi_\beta(X_1) = \text{Min}_{\alpha, U} \quad & \alpha + b^T U \\ \text{s.a.} \quad & \\ & A + IU \geq -X_1 \\ & U \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde:

$$b^T = \left[\frac{1}{(1-\beta)S}, \dots, \frac{1}{(1-\beta)S} \right]_{1 \times S} \quad U^T = [u_1, \dots, u_S]_{1 \times S}$$

$$A^T = [\alpha, \dots, \alpha]_{1 \times S} \quad I = \text{Identidade}_{S \times S}$$

¹ Lembre-se que a distribuição de perdas é dada pelo negativo da distribuição de retornos, por isso X_1 aparece com sinal negativo na restrição de (E.1).

$$X_1^T = [X_1^1, \dots, X_1^S]_{1 \times S}$$

$\phi_\beta(X_1)$ também pode ser representado pelo dual de (E.2):

$$\begin{aligned} \phi_\beta(X_1) = \text{Max}_{\eta} \quad & [-\eta^T X_1] \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \sum_{s=1}^S \eta_s = 1 \\ & 0 \leq \eta \leq b \end{aligned} \tag{E.3}$$

onde $\eta^T = [\eta_1, \dots, \eta_S]_{1 \times S}$ são as variáveis duais associadas às restrições de (E.2).

A formulação (E.3) será utilizada na prova de que o CVaR é uma medida consistente de risco.

Axioma A1: $R(X_1 + C) = R(X_1) - C$

Substituindo X_1 por $X_1 + C$ em (E.3), obtém-se:

$$\phi_\beta(X_1 + C) = \text{Max}_{\eta \in \mathfrak{K}} \left[-\eta^T X_1 - \eta^T C \right]$$

onde \mathfrak{K} é a região tal que $\sum_{s=1}^S \eta_s = 1$, $0 \leq \eta \leq b$, e $C^T = [c, \dots, c]_{1 \times S}$.

Como $\sum_{s=1}^S \eta_s = 1$, então $\eta^T C = c$. Com isso:

$$\phi_\beta(X_1 + C) = \text{Max}_{\eta \in \mathfrak{K}} \left[-\eta^T X_1 - c \right] = \phi_\beta(X_1) - C$$

Logo, o CVaR satisfaz o axioma A1.

Axioma A2: $R(X_1 + X_2) \leq R(X_1) + R(X_2)$

Substituindo X_1 por $X_1 + X_2$ em (E.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} \phi_\beta(X_1 + X_2) &= \text{Max}_{\eta \in \mathfrak{N}} \left[-\eta^T X_1 - \eta^T X_2 \right] \leq \text{Max}_{\eta \in \mathfrak{N}} \left[-\eta^T X_1 \right] + \text{Max}_{\eta \in \mathfrak{N}} \left[-\eta^T X_2 \right] \\ &= \phi_\beta(X_1) + \phi_\beta(X_2) \end{aligned}$$

Logo, o CVaR satisfaz o axioma A2.

Axioma A3: $R(\lambda X_1) = \lambda R[X_1]$

Substituindo X_1 por λX_1 em (E.3), obtém-se:

$$\phi_\beta(\lambda X_1) = \text{Max}_{\eta \in \mathfrak{N}} \left[-\lambda \eta^T X_1 \right] = \lambda \text{Max}_{\eta \in \mathfrak{N}} \left[-\eta^T X_1 \right] = \lambda \phi_\beta(X_1)$$

Logo, o CVaR satisfaz o axioma A3.

Axioma A4: $R(X_2) \leq R(X_1)$ se $X_1 \leq X_2$

Como $\eta \geq 0$, se $X_1 \leq X_2$ então $(-\eta^T X_1) \geq (-\eta^T X_2)$ em qualquer vértice de \mathfrak{N} .

Logo:

$$\phi_\beta(X_1) = \text{Max}_{\eta \in \mathfrak{N}} \left[-\eta^T X_1 \right] \geq \text{Max}_{\eta \in \mathfrak{N}} \left[-\eta^T X_2 \right] = \phi_\beta(X_2)$$

Logo, o CVaR satisfaz o axioma A4.

Conclusão:

Como o CVaR satisfaz os axiomas A1, A2, A3 e A4, é uma medida consistente de risco.

Apêndice F

Comportamento da Fronteira Eficiente de Contratação obtida com a Primeira Abordagem Proposta na Tese

Foi mencionado no capítulo 5 que a função que representa a fronteira eficiente de contratação de energia do modelo média-variância é bem comportada, isto é, pode-se garantir que a variância da distribuição dos valores presentes das remunerações líquidas da geradora aumenta ou se mantém constante com o aumento do valor esperado de tal distribuição requerido pelo investidor. A prova de tal propriedade é apresentada neste apêndice.

O modelo média-variância para otimização de portfólio de contratos de energia proposto nesta tese se caracteriza com um problema de programação quadrática. Seja então o seguinte problema de programação quadrática, escrito em sua forma geral:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{Minimizar}} \quad \frac{1}{2} x^T A x + b^T x \\ & \text{s.a.} \\ & \quad C x \leq \mu \end{aligned} \tag{F.1}$$

O Lagrangeano de (F.1) é dado por:

$$L(x, \eta) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + \eta^T (C x - \mu)$$

$$L(x, \eta) = \frac{1}{2} x^T A x + x^T b + \eta^T C x - \eta^T \mu$$

$$L(x, \eta) = \frac{1}{2} x^T A x + x^T b + x^T C^T \eta - \eta^T \mu$$

$$L(x, \eta) = \frac{1}{2} x^T A x + x^T (b + C^T \eta) - \eta^T \mu$$

O problema dual associado ao problema (F.1) é dado por:

$$\underset{\eta \geq 0}{\text{Maximizar}} \quad \underset{x}{\text{Minimizar}} \quad \frac{1}{2} x^T A x + x^T (b + C^T \eta) - \eta^T \mu \quad (\text{F.2})$$

Como em (F.2) o problema de minimização em x não possui restrições, uma condição necessária para sua otimalidade é:

$$\frac{\partial L(x, \eta)}{\partial x} = 0 \Rightarrow A x + b + C^T \eta = 0 \quad (\text{F.3})$$

Assumindo-se que a matriz A é inversível, de (F.3) obtém-se:

$$x = -A^{-1} (b + C^T \eta) \quad (\text{F.4})$$

Pré-multiplicando (F.3) por x^T , obtém-se:

$$x^T (b + C^T \eta) = -x^T A x \quad (\text{F.5})$$

Substituindo (F.5) em (F.2), obtém-se:

$$\underset{\eta \geq 0}{\text{Maximizar}} \left[-\frac{1}{2} x^T A x - \eta^T \mu \right] \quad (\text{F.6})$$

Utilizando (F.4), pode-se escrever:

$$-\frac{1}{2} x^T A x = \frac{1}{2} x^T (b + C^T \eta) = -\frac{1}{2} (b + C^T \eta)^T [A^{-1}]^T (b + C^T \eta) \quad (\text{F.7})$$

Substituindo (F.7) em (F.6), o dual fica:

$$\underset{\eta \geq 0}{\text{Maximizar}} \left[-\frac{1}{2} (b + C^T \eta)^T [A^{-1}]^T (b + C^T \eta) - \eta^T \mu \right]$$

que é equivalente a:

$$\text{Minimizar}_{\eta \geq 0} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{b} + \mathbf{C}^T \eta) [\mathbf{A}^{-1}]^T (\mathbf{b} + \mathbf{C}^T \eta) + \eta^T \mu \right] \quad (\text{F.8})$$

Assumindo que a matriz \mathbf{A} seja positiva definida e que a matriz \mathbf{C} tenha posto completo, garante-se que o valor ótimo de (F.1) seja igual ao valor ótimo de (F.8).

Seja então $g(\mu)$ a função obtida a partir da parametrização do problema (F.1) em termos de μ :

$$\begin{aligned} g(\mu) = \text{Minimizar}_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \mathbf{C} \mathbf{x} \leq \mu \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Se a matriz \mathbf{A} for positiva definida e a matriz \mathbf{C} tiver posto completo, a função $g(\mu)$ pode também ser representada pelo dual de (F.9):

$$g(\mu) = \text{Minimizar}_{\eta \geq 0} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{b} + \mathbf{C}^T \eta) [\mathbf{A}^{-1}]^T (\mathbf{b} + \mathbf{C}^T \eta) + \eta^T \mu \right] \quad (\text{F.10})$$

Como deve-se satisfazer $\eta \geq 0$ em (F.10), conclui-se que se $\mu_1 \geq \mu_2$ então $g(\mu_1) \geq g(\mu_2)$.