2
Estado da Arte em Otimização de Portfólio

2.1.
Introdução

O desenvolvimento de modelos de otimização de portfólio tem origem na área econômico-financeira. Tais modelos são utilizados para auxiliar na determinação da carteira de ativos financeiros que apresente a melhor relação risco *versus* retorno sob o ponto de vista de um investidor. A principal motivação para o desenvolvimento destes modelos está relacionada à redução do risco a que o investidor está exposto, através da diversificação ou balanceamento da carteira. A diversificação é uma forma poderosa de redução do risco, pois os retornos oferecidos por diferentes ativos não se movem em conjunto. Por exemplo, as ações de uma determinada empresa podem se valorizar enquanto que as de uma outra se desvalorizam e vice-versa. Com isto, a exposição ao risco de um investidor que tenha investido nas ações das duas empresas será menor do que a exposição ao risco de um investidor que tenha investido exclusivamente nas ações de apenas uma das empresas.

O processo de reestruturação da indústria de eletricidade que tem ocorrido a nível mundial, no qual as empresas geradoras e comercializadoras passaram a ter que comercializar energia por sua conta e risco, propiciou a aplicação de modelos de otimização de portfólio na área de comercialização de energia. Neste contexto, as empresas geradoras e comercializadoras têm que decidir os volumes de energia a serem alocados em diferentes mercados (mercado a vista, contratos de curto prazo e de longo prazo de diferentes tipos etc.), de tal forma que a empresa minimize sua exposição ao risco, dado um nível de retorno por ela aceitável, ou maximize seu retorno, dado um nível aceitável de risco. Vale ressaltar que a aplicação dos modelos desenvolvidos para a área econômico-financeira à área de comercialização de energia não é direta, e sim deve haver uma adaptação seguindo as especificidades de cada mercado de energia elétrica.

Neste capítulo é feito um levantamento dos principais modelos de otimização de portfólio propostos tanto na área econômico-financeira (item 2.2) quanto na área de comercialização de energia (item 2.3).

2.2. Otimização de Portfólio na Área Econômico-Financeira

A teoria do portfólio estabelece que decisões relacionadas à seleção de investimentos devem ser tomadas com base na relação risco-retorno [1]. Para auxiliar neste processo, modelos de otimização de portfólio têm sido desenvolvidos. De modo a serem efetivos, tais modelos devem ser capazes de quantificar os níveis de risco e retorno dos investimentos. De grande importância nesta quantificação, está a escolha de métricas para representação do risco e do retorno. De forma geral, existe um consenso quanto ao uso do valor esperado da distribuição dos retornos para representar o retorno de um investimento. Entretanto, existem várias métricas sugeridas para a representação do risco, como por exemplo, a variância da distribuição, a semivariância, o desvio absoluto médio, o mínimo da distribuição, o VaR e o CVaR.

A seguir são apresentados os principais modelos de otimização de portfólio propostos na literatura para aplicação à área econômico-financeira.

2.2.1. O Modelo Média-Variância de Markowitz

O trabalho pioneiro na área de otimização de portfólio foi a proposição do modelo média-variância por Harry Markowitz[1] [2]. Tal proposição parte do princípio que para o investidor, o retorno esperado e a volatilidade dos prováveis retornos são aspectos cruciais na definição do portfólio ótimo. Utiliza as medidas estatísticas de valor esperado e variância da distribuição dos retornos para descrever, respectivamente, o retorno e o risco do investimento. O problema é formulado de modo a se minimizar o risco do portfólio para um dado nível de retorno requerido pelo investidor, ou maximizar o nível de retorno esperado do portfólio associado a um dado nível de risco.

[1] Harry Markowitz foi um dos ganhadores do prêmio Nobel de Economia do ano de 1990 pela grande contribuição a teoria do portfólio.

A formulação matemática do modelo média-variância de Markowitz é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned}
&\underset{x}{\text{Minimizar}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i \, x_j \, \sigma_{ij} \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i \, \mu_i = \rho \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
&\qquad x_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1, \ldots, N
\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde:

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

σ_{ij} - covariância entre os retornos dos ativos i e j (σ_{ii} é a variância dos retornos do ativo i)

μ_i - valor esperado dos retornos do ativo i

ρ - valor esperado dos retornos do portfólio (valor requerido pelo investidor)

A função objetivo de (2.1) modela o risco do portfólio, o qual o investidor deseja minimizar. A primeira restrição representa o valor esperado do retorno do portfólio. A variável ρ é o valor desejado pelo investidor (dado de entrada para o modelo). A penúltima restrição garante que todo o capital disponível seja investido, e a última restrição assegura a não existência de investimento negativo.

Resolvendo-se o problema (2.1) diversas vezes, com ρ (nível de retorno desejado pelo investidor) assumindo um valor diferente em cada problema, obtém-se, associado a cada um dos níveis de retorno, a composição do portfólio de menor risco. Pode-se então traçar uma curva com a relação risco *versus* retorno, denominada fronteira eficiente (vide Figura 2.1).

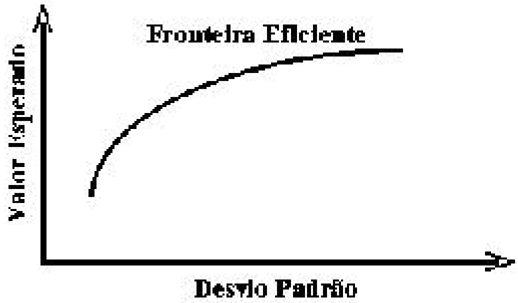

Figura 2.1 – Fronteira Eficiente do Portfólio

A proposição do modelo média-variância por Markowitz permitiu que investidores, pela primeira vez, utilizassem os conceitos de risco e retorno de forma combinada na avaliação de investimentos. Apesar da progressiva aceitação e disseminação do modelo média-variância de Markowitz, este tem sofrido algumas críticas:

- a aplicação do modelo requer três entradas: retornos esperados dos ativos candidatos, correlação entre os retornos destes ativos e respectivas variâncias. Tais entradas são geralmente estimadas a partir dos dados históricos. Entretanto, têm-se verificado que os portfólios ótimos obtidos via modelo média-variância são muito instáveis, isto é, pequenas variações nos dados de entrada podem resultar em portfólios completamente diferentes [3];

- em situações reais, geralmente outros aspectos devem ser considerados na formulação do problema, como por exemplo, limitação do número de ativos a compor o portfólio, ou eliminação da possibilidade de pequena alocação de capital em alguns ativos. Tais aspectos resultam na adição de variáveis inteiras na formulação do problema, o que faz com que o modelo média-variância requeira a solução de problemas de programação quadrática inteira, cuja solução é bastante complexa [3,4];

- a variância pode não ser adequada para medir o risco do portfólio, pois ela penaliza tanto desvios positivos quanto desvios negativos em relação à média. Variabilidade dos retornos, quando positivos, não devem ser penalizados, pois investidores se preocupam com baixos rendimentos do portfólio, e não com os altos [5].

As críticas ao modelo média-variância levaram a proposição de modelos alternativos. Por exemplo, de modo a se reduzir o esforço computacional necessário à solução do problema quadrático de Markowitz, Sharpe [6] propôs um modelo que utiliza uma aproximação linear por partes da função objetivo quadrática de Markowitz.

Vale ressaltar que o próprio Markowitz reconheceu que o uso da semivariância como medida de risco é mais adequada que o uso da variância, pois a primeira se concentra em reduzir perdas (desvios negativos em relação à média) e a segunda procura eliminar tanto os desvios negativos quanto os positivos [7]. Entretanto, ele justifica a adoção da variância devido ao menor custo computacional requerido para sua minimização.

2.2.2. O Modelo Desvio Absoluto Médio (MAD)

Em 1991, Konno e Yamazaki [8] propuseram um modelo de otimização de portfólio que utiliza como medida de risco o desvio absoluto médio. Tal formulação considera que as incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio são representadas de forma discreta através de cenários.

Sejam então S cenários equiprováveis. Seja r_{is} o valor do retorno do i-ésimo ativo candidato no cenário s. Seja μ_i o valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato, isto é, $\mu_i = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} r_{is}$.

O desvio absoluto médio dos retornos de um portfólio $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, $W(x)$, é dado por:

$$W(x) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left|\sum_{i=1}^{N}(r_{is} - \mu_i)\, x_i\right| \qquad (2.2)$$

Matematicamente, a formulação do problema de otimização de portfólio proposto por Konno e Yamazaki é:

$$\underset{x,y}{\text{Minimizar}} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} y_s$$

s.a.

$$y_s \geq -\sum_{i=1}^{N} (r_{is} - \mu_i)\, x_i \qquad s = 1,\ldots,S$$

$$y_s \geq \sum_{i=1}^{N} (r_{is} - \mu_i)\, x_i \qquad s = 1,\ldots,S \qquad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i\, \mu_i = \rho$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,N$$

onde:

S - número de cenários utilizados para representar as incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

y_s - variável auxiliar utilizada na modelagem do desvio absoluto médio

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

r_{is} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário s

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

ρ - valor esperado dos retornos do portfólio (valor requerido pelo investidor)

A função objetivo de (2.3), em conjunto com os dois primeiros conjuntos de restrições, modelam o desvio absoluto médio dos retornos do portfólio, que deve ser minimizado. A terceira restrição representa o valor esperado do retorno do portfólio. A variável ρ é o valor desejado pelo investidor (dado de entrada para o modelo). A penúltima restrição garante que todo o capital disponível seja investido, e a última restrição assegura a não existência de investimento negativo.

Konno e Yamazaki destacam como vantagem da formulação MAD, quando comparada com o modelo média-variância de Markowitz, os seguintes pontos:

- o modelo MAD não requer a estimação da matriz de covariâncias;

- o modelo MAD é linear, o que faz com que sua solução seja mais rápida e eficiente do que a solução do modelo quadrático de Markowitz;

- o modelo MAD automaticamente limita o número de ativos no portfólio em 2S + 2 (número de restrições do problema)[1], mesmo se o número de ativos candidatos for muito maior. Tal fato pode implicar em um menor custo de transação quando da revisão do portfólio.

Além disso, Konno e Yamazaki demonstram que se os retornos dos ativos seguirem uma distribuição normal multivariada, a minimização do desvio absoluto médio é equivalente à minimização da variância.

Uma medida de risco alternativa, porém equivalente ao desvio absoluto médio, é a empregada por Speranza [9], que trabalhou apenas com valores absolutos dos desvios negativos em relação à média (semidesvio absoluto médio). A equivalência de tais métricas está no fato de o desvio absoluto médio ser simétrico em relação à média. Logo, o semidesvio absoluto médio é a metade do desvio absoluto médio[2].

2.2.3. O Modelo MiniMax

Em 1998, Young [10] propôs um modelo de otimização de portfólio onde as incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos são representadas de forma discreta através de cenários, e que utiliza como medida de risco o resultado do cenário de pior retorno (abordagem MiniMax)[3].

Sua formulação resulta em um problema de programação linear, cujo objetivo é maximizar o retorno associado ao pior cenário, sujeito ao atendimento a um dado nível de retorno esperado.

---

[1] Da teoria de programação linear, o número de variáveis básicas é dado pelo número de restrições do problema.

[2] Vide prova no Apêndice A.

[3] Tal problema maximiza o mínimo retorno, ou de forma equivalente, minimiza a máxima perda, daí seu nome.

Considerando que as incertezas sejam representadas através de S cenários, e que r_{is} represente o retorno do i-ésimo ativo candidato no cenário s, a formulação do problema proposto por Young é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
& \underset{x,y}{\text{Maximizar}}\ y \\
& \text{s.a.} \\
& \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i\, r_{is} \geq y \qquad s = 1,\dots,S \\
& \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i\, \mu_i = \rho \\
& \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
& \qquad x_i \geq 0 \qquad i = 1,\dots,N
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

onde:

y - variável auxiliar utilizada na modelagem do retorno associado ao pior cenário

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

r_{is} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário s

S - número de cenários utilizados para representar as incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

ρ - valor esperado dos retornos do portfólio (valor requerido pelo investidor)

A função objetivo de (2.4), em conjunto com o primeiro conjunto de restrições, modelam o resultado do cenário de pior retorno, que deve ser maximizado. A segunda restrição representa o valor esperado do retorno do portfólio. A variável ρ é o valor desejado pelo investidor (dado de entrada para o modelo). A penúltima restrição garante que todo o capital disponível seja investido, e a última restrição assegura a não existência de investimento negativo.

Uma formulação equivalente, também sugerida por Young, consiste na maximização do retorno esperado do portfólio sujeito ao atendimento a um dado retorno mínimo em todos os cenários. Matematicamente:

$$
\begin{aligned}
&\underset{x}{\text{Maximizar}} \ \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i \, r_{is} \geq \rho_{min} \qquad s = 1,\dots,S \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
&\qquad x_i \geq 0 \qquad\qquad\quad i = 1,\dots,N
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

onde:

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

r_{is} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário s

ρ_{min} - retorno mínimo em cada cenário (valor requerido pelo investidor)

S - número de cenários utilizados para representar as incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

A função objetivo de (2.5) representa o valor esperado dos retornos do portfólio, que o investidor deseja maximizar. O primeiro conjunto de restrições garante que o retorno associado a cada cenário seja no mínimo ρ_{min}. A penúltima restrição garante que todo o capital disponível seja investido, e a última restrição assegura a não existência de investimento negativo.

Em seu artigo, Young argumenta que quando a distribuição dos retornos é assimétrica, as formulações (2.4) e (2.5) são mais apropriadas que a minimização da variância de Markowitz. Entretanto, uma crítica muitas vezes associada aos modelos MiniMax é que estes são extremamente conservadores, caracterizados por uma forte aversão aos piores resultados, o que faz com que sua solução possa ser afetada pela presença de valores espúrios no conjunto de dados.

2.2.4. O Modelo de Programação Objetiva

A Programação Objetiva [11] é um ramo da tomada de decisão multi-objetivo, e se baseia no conceito de se encontrar pontos viáveis mais próximos possíveis de determinadas metas.

Um conjunto de metas é definido pelo tomador de decisão. Desvios não requeridos em relação a estas metas são penalizados de modo a se encontrar uma solução satisfatória.

O peso atribuído a cada uma das metas é definido de acordo com sua importância relativa, isto é, metas mais importantes recebem pesos maiores. Minimiza-se então a soma destes pesos multiplicados pelos afastamentos das metas. Pesos nulos são atribuídos a desvios que não devem ser penalizados (por exemplo, desvios positivos em relação ao retorno esperado do portfólio).

Uma versão simplificada da Programação Objetiva é apresentada a seguir. O objetivo do modelo é definir a composição de um portfólio de modo que o retorno esperado do investidor seja no mínimo ρ e o risco máximo por ele aceitável seja $Risk_p$. Riscos maiores e retornos esperados menores que os valores requeridos pelo investidor são penalizados. Desvios negativos de risco e positivos de valor esperado não são penalizados. Nenhuma medida particular de risco é especificada, assume-se apenas que o risco do portfólio é uma combinação linear dos riscos dos ativos que o compõe.

$$
\begin{aligned}
&\underset{x,n,p}{\text{Minimizar}}\ w_1 n_1 + w_2 p_2 \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i + n_1 - p_1 = \rho \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} Risk_i\, x_i + n_2 - p_2 = Risk_p \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
&\qquad n_1, n_2, p_1, p_2 \geq 0 \\
&\qquad x_i \geq 0 \qquad i = 1,\dots,N
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

onde:

w_1 - penalização atribuída a desvios negativos em relação ao valor esperado requerido pelo investidor

n_1 - desvio negativo em relação ao valor esperado requerido pelo investidor

w_2 - penalização atribuída a desvios positivos em relação ao risco requerido pelo investidor

p_2 - desvio positivo em relação ao risco requerido pelo investidor

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

p_1 - desvio positivo em relação ao valor esperado requerido pelo investidor

ρ - valor esperado dos retornos do portfólio (valor requerido pelo investidor)

$Risk_i$ - risco do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

n_2 - desvio negativo em relação ao risco requerido pelo investidor

$Risk_p$ - risco do portfólio (valor requerido pelo investidor)

Em (2.6), a primeira restrição está associada ao valor esperado do retorno do portfólio. O investidor deseja obter um valor esperado igual a ρ. Caso o valor esperado seja menor que ρ, a variável n_1 assume valor não nulo, havendo então uma penalização na função objetivo. Se o valor esperado é maior que ρ, a variável p_1 assume valor não nulo (neste caso não há penalização na função objetivo). A segunda restrição está associada ao risco do portfólio. O investidor requer um nível de risco dado por $Risk_p$. Se o risco for maior que o requerido, a variável p_2 assume valor não nulo, ativando a penalização na função objetivo. Já se o risco for menor que o valor requerido, a variável n_2 assume valor não nulo, não havendo entretanto, penalização na função objetivo. A terceira restrição garante que todo o capital disponível seja investido. As demais restrições asseguram a não negatividade das variáveis n_1, n_2, p_1 e p_2, e a não existência de investimento negativo.

Vale ressaltar que mesmo que exista solução viável com risco menor e valor esperado maior que os valores requeridos pelo investidor, a formulação (2.6) não garante que uma delas será a ótima. Isto porque para qualquer portfólio com o risco menor ou igual a Risk_p e retorno maior ou igual a ρ, a função objetivo de (2.6) assume valor nulo.

2.2.5.
O Value-at-Risk (VaR)

Uma medida de risco largamente aceita e utilizada pelas instituições financeiras no gerenciamento do risco de mercado é o Value-at-Risk (VaR) [12,13]. Ele é uma estimativa da máxima perda potencial, a um dado nível de confiança, que uma instituição financeira estaria exposta durante um período padronizado (dia, semana, ano etc.). Em outras palavras, com uma certa probabilidade, as perdas não excederão o VaR.

Seja $z = f(x, \omega)$ a perda[1] de um portfólio, cujo valor é função de um vetor de decisão x (que representa a posição investida nos ativos que compõem o portfólio) e um vetor aleatório ω (que representa o retorno unitário dos ativos). Para um determinado vetor x, a perda do portfólio $z = f(x, \omega)$ é uma variável aleatória com distribuição em $\Re$ induzida pela distribuição de ω, $p(\omega)$. Seja $1-\beta$ a probabilidade de a perda do portfólio exceder um dado α, isto é:

$$\Pr ob(z \geq \alpha) = \int_{z\geq\alpha} p(\omega)\, d\omega = 1-\beta \tag{2.7}$$

ou de maneira análoga, a probabilidade de a perda ser menor que α seja dada por β:

$$\Pr ob(z \leq \alpha) = \int_{z\leq\alpha} p(\omega)\, d\omega = \beta \tag{2.8}$$

O valor α representa o VaR do portfólio a nível de confiança β%. Ele representa um nível de perda que só é superado por $(1-\beta)$% dos casos. Por exemplo, o VaR a nível de confiança 95% está associado a um nível de perda α cuja probabilidade de esta perda ser excedida é igual a 5%.

---

[1] Define-se como perda de um portfólio o negativo de seu retorno.

No caso de as incertezas serem representadas de forma discreta através de cenários, seja $z_j = f(x, \omega_j)$ a perda associada ao j-ésimo cenário. O VaR do portfólio a nível de confiança $\beta\%$ é dado pelo maior z_j, tal que a probabilidade de ocorrência de cenários com perdas maiores que z_j seja no mínimo $(1-\beta)\%$.

O VaR, quando se trabalha com distribuições discretas, é uma função não convexa, não diferenciável em alguns pontos, e que apresenta múltiplos extremos locais. Tais características, demonstradas em [14][1], fazem com que o VaR seja uma função extremamente difícil de ser otimizada.

Matematicamente, o problema de otimização de portfólio cuja função objetivo seja a minimização do VaR a um dado nível de confiança $\beta\%$, sujeito ao atendimento a um dado valor esperado mínimo, pode ser formulado da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&\underset{x,\alpha,y}{\text{Minimizar}}\ \alpha \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad -\sum_{i=1}^{N} x_i\, r_{is} - M\, y_s \le \alpha && s = 1,\dots,S \\
&\qquad \sum_{s=1}^{S} y_s = \lceil (1-\beta\%) S \rceil \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i = \rho \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
&\qquad x_i \ge 0 && i = 1,\dots,N \\
&\qquad y_s \in \{0,1\} && s = 1,\dots,S
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

onde:

α - variável que representa o VaR ao nível de confiança $\beta\%$

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

r_{is} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário s

[1] Vide reprodução da demonstração no Apêndice B.

M - número muito grande ($M \rightarrow +\infty$)

y_s - variável auxiliar para o cálculo do VaR

S - número de cenários utilizados para representar as incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

$\beta\%$ - nível de confiança para o cálculo do VaR

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

ρ - valor esperado dos retornos do portfólio (valor requerido pelo investidor)

A função objetivo de (2.9), em conjunto com o primeiro e segundo conjunto de restrições, modelam o VaR ao nível de confiança β%, que deve ser minimizado. O VaR ao nível de confiança β% está associado a um nível de perda que só é superado por $(1-\beta)\%$ dos cenários. O termo $(-\sum_{i=1}^{N} x_i\, r_{is})$ no primeiro conjunto de restrições representa a perda do portfólio no s-ésimo cenário. Logo, deve ser menor ou igual a α, exceto em $(1-\beta)\%$ dos cenários. Isto é modelado introduzindo-se uma variável binária y_s associada a cada cenário. Nos cenários onde a perda excede o VaR, a variável binária y_s associada assume valor um, garantindo o atendimento do primeiro conjunto de restrições (neste caso, devido ao $M \rightarrow +\infty$, o lado esquerdo da restrição tende a menos infinito). Nos cenários onde a perda não excede o VaR, a variável y_s correspondente assume valor nulo. O número de cenários em que as perdas podem ultrapassar o VaR é dado por $(1-\beta)\%\ S$, o que é garantido pela segunda restrição do problema. A terceira restrição garante o atendimento ao valor esperado do retorno do portfólio requerido pelo investidor. A quarta restrição garante que todo o capital disponível seja investido. A quinta restrição assegura a não existência de investimento negativo, e a última assegura que as variáveis y_s só possam receber valor 0 ou 1.

O problema (2.9) faz uso de muitas variáveis binárias, o que faz com que sua solução seja extremamente complexa. De fato, algoritmos eficientes para minimização do VaR para problemas de porte razoável (mais de 100 ativos candidatos e 1000 cenários) ainda não estão disponíveis.

Para resolver o problema de otimização de portfólio utilizando o VaR como medida de risco, alguns autores têm proposto o uso de algoritmos heurísticos[1]. Por exemplo, Gaivoronski e Pflug [15] propõem a solução de um problema cujo objetivo é maximizar o valor esperado dos retornos do portfólio sujeito ao atendimento a um dado VaR, através da solução de uma seqüência de problemas lineares de maximização do retorno esperado do portfólio sujeito ao atendimento a um dado retorno mínimo em um subconjunto de cenários. Os autores sugerem que em cada problema linear, a seleção do subconjunto de cenários que devem satisfazer o retorno mínimo seja feita através de heurísticas, tal como algoritmo genético, entre outras[2].

Já em [16], Larsen, Mausser e Uryasev propõem a minimização do VaR através da solução de inúmeros problemas de minimização do CVaR[3].

Embora o VaR seja uma medida de risco largamente aceita e utilizada, seu uso tem sofrido críticas por parte da comunidade acadêmica. Primeiro, ele é uma medida de risco que não fornece nenhuma informação a respeito das perdas que o excede, as quais podem ser significativamente grandes. Logo, sua minimização pode conduzir a um indesejável aumento destas perdas[4]. Segundo, o VaR não é considerado uma medida consistente de risco, pois ele não é subaditivo, isto é, a diversificação do portfólio pode resultar em um aumento do risco quando medido pelo VaR[5].

2.2.6. O Conditional Value-at-Risk (CVaR)

As críticas e limitações do uso do VaR em um problema de otimização de portfólio levaram à proposição por Rockafellar e Uryasev [17] de um modelo que utiliza o Conditional Value-at-Risk (CVaR) como medida de risco.

---

[1] Com tais heurísticas não se pode, a princípio, garantir a otimalidade da solução.

[2] O artigo é bastante conceitual, não apresenta detalhes sobre as heurísticas, sobre critério de convergência, nem apresenta resultados numéricos.

[3] O CVaR é uma medida de risco derivada do VaR. Ela será detalhada na próxima seção desta tese.

[4] Tal característica é mostrada através de resultados numéricos em [16].

[5] O conceito de medida consistente de risco será objeto de discussão no item 2.2.8.

O CVaR a nível de confiança β% é definido como o valor esperado condicional das perdas de um portfólio, dado que as perdas a serem contabilizadas são as maiores ou iguais ao VaR. Por exemplo, para β = 95%, o CVaR é dado pela média das 5% maiores perdas.

Seja $z = f(x,\omega)$ a perda de um portfólio, cujo valor é função de um vetor de decisão x (que representa a posição investida nos ativos que compõem o portfólio) e um vetor aleatório ω (que representa o retorno unitário dos ativos). Para um determinado vetor x, a perda do portfólio $z = f(x,\omega)$ é uma variável aleatória com distribuição em $\Re$ induzida pela distribuição de ω, $p(\omega)$. Seja $\alpha_\beta(x)$ o VaR de tal portfólio a nível de confiança β%. Matematicamente, o CVaR a nível de confiança β% é definido como:

$$\phi_\beta(x) = E[z / z \geq \alpha_\beta(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, p(\omega / z \geq \alpha_\beta(x))\, d\omega \qquad (2.10)$$

Entretanto:

$$p(\omega / z \geq \alpha_\beta(x)) = \begin{cases} \dfrac{p(\omega)}{p(z \geq \alpha_\beta(x))} & \text{se } z \geq \alpha_\beta(x) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e, da expressão (2.7), $p(z \geq \alpha_\beta(x)) = 1 - \beta$.

Com isso, o CVaR a nível de confiança β% é dado por:

$$\phi_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta} \int_{z \geq \alpha_\beta(x)} z\, p(\omega)\, d\omega \qquad (2.11)$$

A expressão acima é equivalente a:

$$\phi_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta} \int_{z \geq \alpha_\beta(x)} [\alpha_\beta(x) + z - \alpha_\beta(x)]\, p(\omega)\, d\omega$$

$$\phi_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta} \int_{z \geq \alpha_\beta(x)} \alpha_\beta(x)\, p(\omega)\, d\omega + \frac{1}{1-\beta} \int_{z \geq \alpha_\beta(x)} [z - \alpha_\beta(x)]\, p(\omega)\, d\omega$$

$$\phi_\beta(x) = \frac{\alpha_\beta(x)}{1-\beta} \int_{z \geq \alpha_\beta(x)} p(\omega)\, d\omega + \frac{1}{1-\beta} \int_{z \geq \alpha_\beta(x)} [z - \alpha_\beta(x)]\, p(\omega)\, d\omega \qquad (2.12)$$

Entretanto, pela definição de VaR (expressão (2.7)), tem-se:

$$\int_{z \geq \alpha_\beta(x)} p(\omega)\, d\omega = 1 - \beta \qquad (2.13)$$

Além disso, a segunda integral da expressão (2.12) só é válida para $z \geq \alpha_\beta(x)$, isto é, quando $z - \alpha_\beta(x)$ é maior ou igual a zero. Com isso:

$$\int_{z \geq \alpha_\beta(x)} [z - \alpha_\beta(x)]\, p(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [z - \alpha_\beta(x)]^+\, p(\omega)\, d\omega \qquad (2.14)$$

onde:

$$[z - \alpha_\beta(x)]^+ = \begin{cases} z - \alpha_\beta(x) & \text{se } z \geq \alpha_\beta(x) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Substituindo as expressões (2.13) e (2.14) em (2.12), obtém-se:

$$\phi_\beta(x) = \alpha_\beta(x) + \frac{1}{1-\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} [z - \alpha_\beta(x)]^+\, p(\omega)\, d\omega \qquad (2.15)$$

Uma dificuldade de se trabalhar com o CVaR em um problema de otimização utilizando as expressões (2.11) ou (2.15), é que elas dependem do valor do VaR ($\alpha_\beta(x)$), que, conforme já mencionado, não possui boas propriedades matemáticas. Em [17] é proposta a caracterização de $\phi_\beta(x)$ e $\alpha_\beta(x)$ em termos de uma função $F_\beta(x,\alpha)$, definida como:

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}[z-\alpha]^+\,p(\omega)\,d\omega \tag{2.16}$$

Em tal artigo é demonstrado que, dado um portfólio x, o CVaR a nível de confiança β% pode ser determinado da seguinte forma[1]:

$$\phi_\beta(x) = \underset{\alpha}{\text{Minimizar}} \quad F_\beta(x,\alpha) \tag{2.17}$$

O valor de α para o qual o mínimo é atingido representa o VaR a nível de confiança β%, isto é:

$$\alpha_\beta(x) \in \underset{\alpha}{\arg\min} \quad F_\beta(x,\alpha) \qquad \text{e} \qquad \phi_\beta(x) = F_\beta(x,\alpha_\beta(x))$$

Os autores argumentam que a grande vantagem de se trabalhar com $F_\beta(x,\alpha)$, é que neste caso o CVaR pode ser calculado sem o conhecimento prévio do VaR.

Em tal artigo também é demonstrado que a definição de um portfólio x que minimiza o CVaR a nível de confiança β% pode ser feita minimizando-se $F_\beta(x,\alpha)$ em x e α, ou seja[2]:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad \phi_\beta(x) = \underset{x,\alpha}{\text{Minimizar}} \quad F_\beta(x,\alpha) \tag{2.18}$$

Assim, a minimização de $F_\beta(x,\alpha)$ em x e α produz o par (x^*,α^*), não necessariamente único, tal que x^* minimiza o CVaR a nível de confiança β% e α^* fornece o VaR equivalente.

---

[1] Tal prova é reproduzida no Apêndice C.

[2] Sendo $F_\beta(x,\alpha)$ uma função convexa, sua minimização em x e α é equivalente a sua minimização em α, e a minimização da função valor resultante em x. Como a função valor resultante da minimização em α é $\phi_\beta(x)$, então a minimização de $F_\beta(x,\alpha)$ em x e α é equivalente a minimização de $\phi_\beta(x)$ em x.

Quando as incertezas são representadas de forma discreta através de S cenários equiprováveis, a expressão (2.16) torna-se:

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{(1-\beta)\,S} \sum_{s=1}^{S} [z_s - \alpha]^+ \qquad (2.19)$$

onde $z_s = f(x,\omega_s)$.

Neste caso, com o uso de variáveis auxiliares u_s, s = 1,…,S, a minimização de $F_\beta(x,\alpha)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} &\underset{x,\alpha,u}{\text{Minimizar}} \quad \alpha + \frac{1}{(1-\beta)S} \sum_{s=1}^{S} u_s \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad u_s \geq 0 \qquad\qquad s = 1,\ldots,S \\ &\qquad u_s \geq z_s - \alpha \qquad s = 1,\ldots,S \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Seja r_{is} o retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário s. A perda[1] do portfólio no cenário s é dada por:

$$z_s = -\sum_{i=1}^{N} x_i\, r_{is} \qquad (2.21)$$

onde N é o número de ativos candidatos a compor o portfólio.

O problema de otimização de portfólio cuja função objetivo seja a minimização do CVaR a um dado nível de confiança β%, sujeito ao atendimento a um dado valor esperado mínimo, pode ser escrito da seguinte forma:

[1] Lembre-se que a distribuição de perdas é dada pelo negativo da distribuição de retornos.

$$\underset{x,\alpha,u}{\text{Minimizar}} \quad \alpha + \frac{1}{(1-\beta)S}\sum_{s=1}^{S} u_s$$

s.a.

$$\begin{aligned} & u_s \geq 0 && s = 1,\dots,S \\ & u_s \geq -\sum_{i=1}^{N} x_i r_{is} - \alpha && s = 1,\dots,S \\ & \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i = \rho && \\ & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 && \\ & x_i \geq 0 && i = 1,\dots,N \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde:

α - variável que fornece o VaR do portfólio a nível de confiança β%

β - nível de confiança para o cálculo do VaR e do CVaR

S - número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

u_s - variável auxiliar para o cálculo do CVaR

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

r_{is} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário s

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

ρ - valor esperado dos retornos do portfólio (valor requerido pelo investidor)

A função objetivo e os dois primeiros conjuntos de restrições modelam o CVaR do portfólio a nível de confiança β%. A terceira restrição garante a obtenção do valor esperado requerido pelo investidor. A quarta restrição garante o investimento total. A quinta restrição garante que não haja investimento negativo.

Verifica-se então que o CVaR pode ser eficientemente minimizado via técnicas de programação linear, o que permite o tratamento de portfólios com grande número de instrumentos, assim como incertezas representadas por um grande número de cenários.

Em [18], Krokhmal, Palmquist e Uryasev estendem a abordagem apresentada em [17] para problemas de otimização de portfólio cuja função objetivo é a maximização do retorno esperado, com restrição no CVaR. Seguindo tal abordagem, a formulação matemática do problema de otimização de portfólio fica:

$$
\begin{aligned}
&\underset{x,\alpha,u}{\text{Maximizar}} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad \alpha + \frac{1}{(1-\beta)S} \sum_{s=1}^{S} u_s \le K \\
&\qquad u_s \ge 0 \qquad\qquad\qquad s = 1,\ldots,S \qquad\qquad (2.23) \\
&\qquad u_s \ge -\sum_{i=1}^{N} x_i r_{is} - \alpha \qquad s = 1,\ldots,S \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
&\qquad x_i \ge 0 \qquad\qquad\qquad i = 1,\ldots,N
\end{aligned}
$$

onde:

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

α - variável que fornece o VaR do portfólio a nível de confiança $\beta\%$

β - nível de confiança para o cálculo do VaR e do CVaR

S - número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

u_s - variável auxiliar para o cálculo do CVaR

K - limite no CVaR do portfólio (valor requerido pelo investidor)

r_{is} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário s

Vale ressaltar que restringir o CVaR de um portfólio se caracteriza como uma estratégia de gerenciamento de riscos mais conservadora do que restringir o VaR. Isto porque o CVaR é definido como o valor médio das perdas maiores ou iguais ao VaR, ou seja, o CVaR de um portfólio a um dado nível de confiança $\beta\%$ nunca será menor que o respectivo VaR.

Existem algumas razões que fazem com que o CVaR seja uma medida de risco mais consistente e preferível ao VaR:

- o CVaR é subaditivo[1], o VaR não;

- o CVaR quantifica os resultados piores que o VaR;

- o CVaR é mais conservador que o VaR;

- o CVaR pode ser otimizado via técnicas de programação linear, o que permite o tratamento de portfólios com inúmeros instrumentos e cenários;

- O CVaR tem a propriedade de unicidade, pois é um valor ótimo. O VaR, por ser um minimizador, não apresenta tal propriedade;

- o CVaR é uma medida de risco altamente flexível. Quando $\beta \to 1$, o CVaR tende ao mínimo da distribuição (critério MiniMax, extremamente conservador). Quando $\beta \to 0$, o CVaR tende ao valor esperado da distribuição (neutralidade ao risco).

Embora as formulações apresentadas em [17] e [18] sejam baseadas na distribuição de perdas, estas podem ser adaptadas para o caso onde se trabalha com distribuição de retornos. Seja g a variável aleatória que represente o retorno do portfólio. Neste caso, o CVaR a nível de confiança $\beta\%$ é dado pelo valor esperado condicional dos retornos menores ou iguais ao VaR. Matematicamente:

$$\phi_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta} \int_{g \le \alpha_\beta(x)} g\, p(\omega)\, d\omega = \alpha_\beta(x) + \frac{1}{1-\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} [g - \alpha_\beta(x)]^- \, p(\omega)\, d\omega \qquad (2.24)$$

onde:

$$[g - \alpha_\beta(x)]^- = \begin{cases} g - \alpha_\beta(x) & \text{se } g \le \alpha_\beta(x) \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

---

[1] A diversificação do portfólio reduz o risco.

Neste caso, a expressão de $F_\beta(x,\alpha)$ para o caso onde as incertezas são representadas de forma discreta através de cenários, fica:

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{(1-\beta)\,S}\sum_{s=1}^{S}[g_s - \alpha]^- \tag{2.25}$$

Com isso, a formulação matemática do problema de otimização de portfólio cuja função objetivo seja a maximização do retorno esperado, sujeito ao atendimento a um dado limite no CVaR fica:

$$\begin{aligned}
&\underset{x,\alpha,u}{\text{Maximizar}} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i\,\mu_i \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad \alpha + \frac{1}{(1-\beta)S}\sum_{s=1}^{S} u_s \geq K \\
&\qquad u_s \leq 0 \qquad\qquad s = 1,\ldots,S \\
&\qquad u_s \leq g_s - \alpha \qquad s = 1,\ldots,S \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
&\qquad x_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1,\ldots,N
\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde:

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

α - variável que fornece o VaR do portfólio a nível de confiança β%

β - nível de confiança para o cálculo do VaR e do CVaR

S - número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

u_s - variável auxiliar para o cálculo do CVaR

K - limite no CVaR do portfólio (valor requerido pelo investidor)

g_s - retorno do portfólio no cenário s

Note que neste caso, por se estar trabalhando com a distribuição de retornos do portfólio, quanto maior for a média dos $(1-\beta)$ % piores retornos (CVaR), menor é o risco. Por este motivo é que a primeira restrição aparece com sinal de maior ou igual.

Vale ressaltar que medidas similares ao CVaR têm sido utilizadas em otimização estocástica, embora não necessariamente aplicada à área econômico-financeira, como por exemplo, as restrições probabilísticas integradas (*Integrated Chance Constraints*) [19].

2.2.7. Outras Formas de Mensurar o Risco

Em [20], Domar e Musgrave analisam o efeito da tributação sobre o retorno e o risco de um investimento. Nesta análise, eles utilizam como medida de risco o valor esperado (em módulo) dos retornos não positivos. Sejam $r_1, r_2, ..., r_n$ os prováveis retornos, ordenados de modo que $r_i < r_{i+1}$. Seja p_i a probabilidade de ocorrência do retorno r_i e seja $r_k = 0$. Matematicamente, a medida de risco por eles adotada é:

$$\text{Risco} = -\sum_{i=1}^{k} p_i \, r_i \tag{2.27}$$

Em [21], Roy trata do problema de como alocar um determinado volume de recursos entre n diferentes ativos. O critério por ele adotado é o denominado "*Safety First*". Tal critério estabelece que a alocação de recursos deve ser feita de tal maneira que a probabilidade de o resultado ser um desastre é minimizada. O autor define como desastre o retorno final do investimento ser menor que um dado valor d. Matematicamente, a medida de risco é dada pela probabilidade de o retorno ser menor que d. O problema consiste na minimização do risco:

$$\underset{x \in X}{\text{Minimizar}} \quad P(r(x) \leq d) \tag{2.28}$$

onde:

x - vetor de decisão cujo i-ésimo componente fornece o volume de recursos a ser alocado ao ativo i

$r(x)$ - retorno do investimento em função da alocação de recursos x

d - retorno abaixo do qual se caracteriza o desastre para o investidor

X - conjunto de condições que o vetor x deve satisfazer (por exemplo, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$)

Em tal artigo, Roy faz uma análise bastante qualitativa do problema. Entretanto, ele considera que a informação disponível sobre a distribuição de probabilidade dos retornos é restrita a sua média e desvio padrão. Entretanto, como pode ser visto em [22][1], quando se trabalha com distribuições de probabilidade discretas, tal medida de risco introduz variáveis inteiras na formulação do problema, o que pode tornar bastante complexa a sua solução.

Uma outra forma de tratar a aversão ao risco do investidor é através do uso de uma função utilidade [23]. O principal propósito de uma função utilidade é fornecer uma maneira sistemática que capture o comportamento do investidor frente ao risco, para ordenar alternativas de investimentos. Conhecida a função utilidade do investidor, as alternativas são ordenadas através da avaliação dos respectivos valores de utilidade esperada. Especificamente, para se comparar duas alternativas x e y, deve-se comparar $E[U(x)]$ com $E[U(y)]$. A alternativa que apresentar maior utilidade esperada é preferível.

A especificação[2] de uma função utilidade depende do perfil do investidor, isto é, se ele é avesso ao risco, neutro ao risco ou propenso ao risco. Um investidor avesso ao risco está associado a uma função utilidade côncava. Para tal investidor, em termos de utilidade a perda de receita pesa mais do que um ganho de igual valor. Matematicamente, uma função utilidade côncava é caracterizada por possuir $\partial U(x)/\partial x > 0$ e $\partial^2 U(x)/\partial^2 x \leq 0$. Já um investidor propenso ao risco possui uma função utilidade convexa. Em termos de utilidade, tal investidor dá um maior peso a um ganho de receita do que a perda de igual valor. Matematicamente, uma função utilidade convexa possui $\partial U(x)/\partial x > 0$ e $\partial^2 U(x)/\partial^2 x \geq 0$. Por fim, um investidor neutro ao risco é indiferente a ganhar ou perder o mesmo valor. É caracterizado por uma função utilidade linear, isto é, $U(x) = x$. Um investidor que adota tal função utilidade ordena os investimentos segundo seus valores esperados.

[1] Neste artigo tal medida de risco aparece com o nome de *"Excess Probability"*.

[2] Uma condição geral associada a uma função utilidade é que ela seja uma função contínua crescente. Isto é, se x e y são valores reais tais que x > y, então U(x) > U(y).

As funções utilidade mais comumente utilizadas são as que caracterizam investidores avessos ao risco. Entre elas pode-se citar $U(x) = -e^{-a\,x}$ com a > 0 (exponencial), $U(x) = \ln(x)$ (logarítmica) e $U(x) = x - b\,x^2$ com b > 0 (quadrática). Entretanto, é possível combinar as diferentes classes de função utilidade, como por exemplo $U(x) = -e^{-a\,x} + b\,x$ adotada em [24]. Tal função utilidade apresenta uma componente côncava que confere a característica de aversão ao risco, combinada a uma componente linear que se sobressai cada vez mais a medida que x aumenta. Isoladamente, a componente linear indica neutralidade ao risco, no entanto, seu efeito combinado confere a propriedade de aversão ao risco decrescente com o aumento de x.

Uma crítica relacionada à adoção de uma função utilidade para modelar o perfil de risco do investidor está na grande dificuldade e subjetividade de sua especificação. De fato, as funções utilidade exponencial, logarítmica e quadrática apresentadas acima caracterizam um investidor avesso ao risco, porém dificilmente um dado investidor avesso ao risco saberá com total certeza qual delas melhor se adequa a seu perfil[1].

2.2.8.
O Conceito de Medidas Consistentes de Risco e de Desvio

A proposição de medidas de risco, muitas vezes sem a avaliação de suas conseqüências quando utilizadas na regulação ou gerenciamento de riscos, fez com que Artzner, Delbaen, Eber e Heath [25] formalizassem, através de quatro axiomas, o conceito de medida consistente de risco.

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias que representem o retorno de dois portfólios distintos. Seja C o retorno de um investimento livre de risco. Seja $R(.)$ uma função que possa ser utilizada para medir o risco de investimentos. Segundo Artzner, Delbaen, Eber e Heath, $R(.)$ é uma medida consistente de risco se os quatro axiomas a seguir forem satisfeitos:

---

[1] Note que tal questão não se resume na escolha entre três opções, e sim entre uma infinidade de opções, pois os parâmetros a e b das funções exponencial e quadrática podem assumir qualquer valor positivo.

A1: $R(X_1 + C) = R(X_1) - C$

A2 : $R(X_1 + X_2) \leq R(X_1) + R(X_2)$ para todo X_1, X_2

A3: $R(\lambda X_1) = \lambda R(X_1)$ para todo $\lambda \geq 0$

A4: $R(X_2) \leq R(X_1)$ para todo X_1, X_2 com $X_1 \leq X_2$

O axioma A1 indica que a adição de um investimento livre de risco a um portfólio necessariamente reduz o risco do portfólio resultante.

O axioma A2 diz respeito à propriedade de subaditividade, e indica que a diversificação de um portfólio não cria riscos adicionais.

O axioma A3 indica que dado um portfólio com risco R(X), se o investidor decidir ampliar (reduzir) linearmente o capital empregado em tal portfólio, o risco do portfólio resultante é ampliado (reduzido) pelo fator linear empregado.

O axioma A4 estabelece que se um portfólio produz retornos maiores ou iguais aos de um outro portfólio, necessariamente o risco do primeiro portfólio é menor ou igual ao risco do segundo portfólio.

De fato, é bastante plausível se esperar que uma medida de risco satisfaça os quatro axiomas acima.

A principal motivação para o trabalho desenvolvido por Artzner, Delbaen, Eber e Heath está relacionada à disseminação do uso do VaR no gerenciamento de riscos. Tais autores mostram que o VaR não é uma medida consistente de risco, pois não satisfaz a propriedade de subaditividade (axioma A2), conforme pode ser visto no seguinte exemplo.

Suponha que uma empresa A tenha investido em um portfólio composto por dois ativos (ativos 1 e 2), cujos prováveis retornos são:

$$X_1 = \begin{cases} -500 & \text{com probab. } 0{,}008 \\ +500 & \text{com probab. } 0{,}992 \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} -700 & \text{com probab. } 0{,}008 \\ +300 & \text{com probab. } 0{,}992 \end{cases}$$

Os prováveis retornos do portfólio pertencente à empresa A são:

$$X_1 + X_2 = \begin{cases} -1200 & \text{com propab. } 0{,}000064 \\ -200 & \text{com probab. } 0{,}015872 \\ +800 & \text{com probab. } 0{,}984064 \end{cases}$$

Suponha que um órgão regulador exija que a empresa mantenha como garantia um depósito em uma conta do governo, equivalente ao VaR a nível de confiança de 99% do portfólio da empresa (quando tal valor é negativo). Logo, a empresa A deve manter em tal conta o valor de $200.

Suponha agora que a empresa A seja cindida em duas empresas A’ e A” (embora continuem pertencendo ao mesmo dono), de modo que a empresa A’ invista no ativo 1 e a empresa A” invista no ativo 2. Neste caso, os prováveis retornos de cada empresa são:

Empresa A’ $$X_1 = \begin{cases} -500 & \text{com probab. } 0{,}008 \\ +500 & \text{com probab. } 0{,}992 \end{cases}$$

Empresa A” $$X_2 = \begin{cases} -700 & \text{com probab. } 0{,}008 \\ +300 & \text{com probab. } 0{,}992 \end{cases}$$

O VaR a nível de confiança de 99% da empresa A’ é $500, e o da empresa A” é $300. Logo, o dono de tais empresas não precisará manter nenhum depósito na conta do governo. Tal exemplo mostra que o VaR não é subaditivo.

Posteriormente, Rockafellar, Uryasev e Zabarankin [26] formalizaram o conceito de medida de desvio. Eles caracterizam uma função $D(.)$ como uma medida de desvio, quando tal função obedece os seguintes axiomas:

B1: $D(X_1 + C) = D(X_1)$; de forma equivalente[1], $D(X_1) = D(X_1 - E[X_1])$

B2: $D(X_1 + X_2) \leq D(X_1) + D(X_2)$ para todo X_1, X_2

B3: $D(\lambda X_1) = \lambda D(X_1)$ para todo $\lambda \geq 0$

B4: $D(X_1) > 0$ para X_1 não constante, e $D(X_1) = 0$ para X_1 constante

No mesmo artigo, os autores relacionam uma medida de risco com uma medida de desvio[2]. Segundo eles, uma medida de desvio pode ser vista como uma medida de risco, quando aplicada à diferença entre a variável aleatória e seu valor esperado, ao invés da variável aleatória isoladamente. Matematicamente, a relação entre uma medida de desvio e uma medida de risco é dada por:

(a) $D(X_1) = R(X_1 - E[X_1])$

(b) $R(X_1) = -E[X_1] + D(X_1)$

Segundo os autores, a partir de uma medida de desvio (satisfaz B1, B2, B3 e B4), utilizando-se (a) ou (b) obtém-se uma medida de risco que satisfaz os axiomas A1, A2 e A3, mas não necessariamente A4, e vice-versa. Caso a medida de risco em questão seja consistente (isto é, satisfaça A4), a medida de desvio associada é classificada como uma medida consistente de desvio.

Por exemplo, a medida de desvio $D(X_1) = E[X_1] - \inf[X_1]$ está associada à medida de risco $R(X_1) = -\inf[X_1]$, ambas consistentes conforme mostrado no Apêndice D.

Vale ressaltar que Rockafellar e Uryasev mostram em [27] que o CVaR é uma medida de risco consistente (vide Apêndice E).

---

[1] A equivalência pode ser verificada fazendo-se C = $-E[X_1]$, onde $E[X_1]$ é o valor esperado de X_1.

[2] Com a definição formal de uma medida de desvio, verifica-se que o desvio padrão utilizado no modelo de Markowitz e o desvio médio absoluto utilizado no modelo MAD proposto por Konno e Yamazaki são na verdade medidas de desvio e não medidas de risco.

2.3. Otimização de Portfólio na Área de Comercialização de Energia Elétrica

O processo de reestruturação da indústria de energia elétrica que tem ocorrido a nível mundial, no qual as empresas geradoras e comercializadoras passaram a ter que gerenciar riscos decorrentes da comercialização de energia, fez com que surgissem aplicações da teoria do portfólio na área de comercialização de energia. Tais aplicações podem ser classificadas basicamente em três grupos:

- definição do despacho de geração considerando contratos pré-existentes;
- definição dos níveis ótimos de contratação;
- definição do uso ótimo de contrato flexível pré-existente.

Vale ressaltar que existem aplicações que se encaixam em mais de um grupo (por exemplo, que tratam do gerenciamento de riscos através da definição conjunta do despacho de geração e dos níveis ótimos de contratação), como será visto adiante.

Um trabalho que trata do gerenciamento de riscos através da definição do despacho de geração considerando contratos pré-existentes é o desenvolvido por Marmiroli, Tsukamoto e Yokoyama [28]. Tal trabalho considera que uma empresa possui diversos geradores e diversos contratos de venda de energia pré-definidos, e formula um problema para definir o despacho do conjunto de geradores da empresa de modo a maximizar seu lucro no curto prazo. Considera que o excesso ou déficit de geração em relação ao volume contratado é vendido ou comprado a um preço publicado a priori. Por ser de curto prazo, tal problema é determinístico.

Um outro trabalho que também trata do gerenciamento de riscos através da definição do despacho de geração considerando contratos pré-existentes é o desenvolvido por Bjorgan, Liu e Lawarrée [29]. Tal trabalho considera que uma geradora possui um conjunto de contratos pré-existentes a serem atendidos, e que o atendimento pode ser feito através da geração própria ou da compra de energia no mercado a vista. Além disso, caso o volume despachado da geradora seja maior que o volume de energia a ser atendido via os contratos, o excesso de geração é comercializado no mercado a vista. É então formulado um problema cujo objetivo é definir o despacho ótimo da geradora. Trabalha com o conceito de variância e valor esperado do lucro como medidas de risco e retorno, respectivamente. Leva em conta a estocasticidade dos preços da energia no mercado a vista, e do preço do gás utilizado para a produção de energia.

Tal artigo também trata do gerenciamento de riscos através da definição dos níveis ótimos de contratação. Neste caso, assume-se que um agente gerador vende toda sua produção de energia no mercado a vista, porém, de modo a reduzir sua exposição ao risco, negocia contratos futuros na bolsa (puramente financeiros, isto é, não acarretam na entrega da energia). É então formulado um problema cujo objetivo é determinar o número de contratos futuros a serem negociados de modo a minimizar a variância do lucro do agente gerador. Considera a estocasticidade dos preços da energia no mercado a vista, dos preços do gás (combustível utilizado na geração de energia) no mercado a vista, e nos preços de liquidação dos contratos futuros.

Outros trabalhos que tratam do gerenciamento de risco através da definição dos níveis ótimos de contratação são os desenvolvidos por Domingues, Arango, Abreu, Campinho e Paulillo [30] e Azevedo, Vale e Vale [31].

Domingues, Arango, Abreu, Campinho e Paulillo aplicam a teoria do portfólio para definir o nível ótimo de contratação de um novo empreendimento de geração. Assumem um único contrato de venda de energia de longo prazo, válido para todo o horizonte de simulação. Consideram que a demanda contratada, preços da energia no mercado a vista e afluências são incertas. Utilizam simulação Monte Carlo para gerar séries sintéticas para estas variáveis, e a partir delas obtêm valores esperados e desvios padrões das remunerações em função da demanda contratada, traçando-se assim a fronteira eficiente de contratação.

Já Azevedo, Vale e Vale propõem um modelo para determinação dos volumes de energia a serem comercializados através de contratos futuros e de opções, de modo a maximizar a utilidade do lucro de uma empresa geradora (os autores não dão detalhes com relação à função utilidade utilizada). Consideram que os contratos são comercializados em lotes (por exemplo, cada lote corresponde a 15 MWh), o que introduz variáveis inteiras na formulação do problema. Levam em conta a incerteza relacionada aos preços da energia no mercado a vista. Os autores mencionam que devido à característica combinatória de tal problema, sua solução via técnicas de otimização não é fácil, e por isto o resolvem via algoritmos genéticos.

No grupo de definição do uso ótimo de contrato flexível pré-existente, tem-se o trabalho desenvolvido por Palamarchuk [32]. Um contrato flexível é um contrato que possui um preço de energia, período de vigência (início e término) e volume total de energia a ser utilizado durante toda a sua vigência especificados, porém existe flexibilidade no volume de energia a ser utilizado em cada intervalo de tempo. O artigo trata da definição do volume a ser utilizado em cada intervalo de tempo, de modo a seu portador maximizar o valor esperado de seu lucro. Assume que o volume de energia utilizado em cada intervalo de tempo é comercializado no mercado a vista. Leva em conta a estocasticidade dos preços da energia no mercado a vista, porém não considera a aversão ao risco de seu portador.

Mo, Gjelsvik e Grundt [33] propõem um modelo cujo objetivo é definir a estratégia conjunta de geração e comercialização de energia, de modo a maximizar o valor esperado do lucro de uma empresa geradora. O lucro é função dos volumes de energia comercializados no mercado a vista e através de contratos de compra e venda. Trata a aversão ao risco através de penalização pelo não atendimento a um lucro mínimo em janelas de tempo pré-determinadas. Os autores citam que a função penalidade, que é especificada pelo usuário, pode ser vista como uma função utilidade inversa. Considera a estocasticidade dos preços da energia no mercado a vista e das afluências. Uma aplicação de tal modelo a um caso real, correspondente ao sistema de geração da segunda maior empresa geradora da Noruega, é apresentada por Kristiansen [34].

Trabalho bastante similar a [33] é o proposto por Grundt, Eliassen, Mo e Gjelsvik [35]. Entretanto, neste último sugere-se a obtenção da fronteira eficiente através do seguinte procedimento: resolve-se um dado problema utilizando-se diferentes funções penalidade, obtendo-se assim diferentes distribuições para o lucro; para cada uma destas distribuições calcula-se o valor esperado e desvio padrão; utilizando-se os pares valor esperado e desvio padrão traça-se a fronteira eficiente.

Outro trabalho que trata do gerenciamento de riscos através da estratégia de geração e de comercialização de energia é o desenvolvido por Bjφrkvoll, Fleten, Nowak, Tomasgard e Wallace [36]. Entretanto, tais autores não tratam de forma integrada em um único problema a definição da estratégia de geração e de contratação. Eles propõem o seguinte procedimento: define-se a programação da geração de modo a maximizar o valor esperado do lucro da geradora com a comercialização de energia pura e exclusivamente no mercado a vista, e dada à estratégia ótima de geração, encontra-se um conjunto de contratos que maximiza o valor esperado do lucro total (o obtido com o modelo de programação da geração mais o lucro devido à compra e venda de energia através de contratos). Este último problema trata o risco através de uma penalização pelo valor esperado do déficit em relação a um lucro especificado. Considera incertezas nas afluências (modelo de programação da geração) e nos preços da energia no mercado a vista (ambos os modelos).

Já Sen, Yu, e Genc [37] propõem um modelo no qual o objetivo é definir o despacho de geração e os volumes a serem comercializados através de contratos de compra e venda de energia e de compra de gás (utilizado como combustível para a usina térmica), de modo a maximizar o valor esperado do lucro de uma geradora térmica. Consideram que os contratos são puramente financeiros, do tipo negociados em bolsas. De modo a limitar a exposição ao risco, consideram um limite dentro do qual é possível alterar a composição do portfólio de contratos, e um valor limite para as perdas da geradora. Levam em conta as incertezas relacionadas à demanda a ser atendida pela geradora, aos preços de liquidação associados aos contratos de compra e venda de energia, aos preços de liquidação associados aos contratos de compra de gás e na evolução dos preços da energia no mercado a vista.

O trabalho desenvolvido por Illerhaus e Verstege [38] trata do gerenciamento de riscos através da definição da estratégia conjunta de geração de energia e uso ótimo de contratos flexíveis. Apresentam uma aplicação onde um sistema municipal deve atender uma certa demanda de vapor (aquecimento) e energia elétrica, cujas curvas de carga são conhecidas. O sistema municipal dispõe de caldeiras e usinas próprias. Além disso, possui contratos flexíveis de compra de energia e de compra de carvão e gás utilizados como combustível das caldeiras e usinas. O objetivo do município é maximizar o valor esperado de seu lucro através do gerenciamento do uso dos contratos flexíveis, da geração própria e da comercialização de energia no mercado a vista. Considera a estocasticidade dos preços da energia no mercado a vista. A aversão ao risco não é modelada no problema de otimização.

Um exemplo de gerenciamento de riscos através da definição conjunta da estratégia de uso de um contrato flexível e do nível ótimo de contratação é apresentado por Mo e Gjelsvik

[39]. Em tal trabalho, os autores consideram que uma determinada empresa possui um contrato flexível de compra de energia, e que esta empresa deseja maximizar o valor esperado de seu lucro através do gerenciamento do uso de tal contrato e da compra e venda de energia através de contratos futuros. Assume que o portfólio de contratos futuros pode ser modificado dinamicamente no tempo. A diferença entre a energia absorvida do contrato flexível e comercializada através dos contratos futuros é negociada no mercado a vista. Leva em conta a estocasticidade dos preços da energia no mercado a vista e preços de fechamento dos contratos futuros. A aversão ao risco é modelada através de uma penalização na função objetivo pela não obtenção de um lucro alvo.

Analisando as aplicações à área de comercialização de energia citados nesta seção, constata-se que a aversão ao risco, quando tratada, é modelada principalmente através da variância ou desvio padrão, função utilidade e penalização pelo não atendimento a um lucro mínimo. Verifica-se então que medidas de risco propostas recentemente na área econômico-financeira, como o CVaR, não foram ainda utilizadas nos modelos de otimização de portfólio aplicados à área de comercialização de energia. Vale ressaltar que o uso do CVaR como medida de risco em um modelo de otimização de portfólio de contratos de energia é um dos objetivos desta tese.

2.4. Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os principais modelos de otimização de portfólio propostos tanto para aplicação à área econômico-financeira quanto de comercialização de energia. As principais conclusões do capítulo são:

- Apesar da aceitação e disseminação do modelo média-variância de Markowitz, a adoção da variância como medida de risco pode não ser adequada, pois na realidade ela se caracteriza como uma medida de desvio e não de risco, já que penaliza tanto desvios positivos quanto negativos em relação à média.

- Muitas vezes é necessário considerar aspectos que requeiram a introdução de variáveis inteiras na formulação do problema, como por exemplo, a limitação do número de ativos a compor o portfólio. Nestes casos, o modelo média variância de

Markowitz passa a requerer a solução de um problema de programação inteira quadrática cuja solução é extremamente complexa, o que pode inviabilizar sua aplicação para problemas de grande porte.

- Têm-se verificado na prática que os portfólios ótimos obtidos via modelo média-variância são muito instáveis, isto é, pequenas variações nos dados de entrada podem resultar em portfólios completamente diferentes.

- O modelo MAD proposto por Konno e Yamazaki é um modelo de programação linear, cuja solução é mais rápida e eficiente do que a solução do modelo quadrático de Markowitz.

- Para o caso onde os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal multivariada, os modelos MAD e média-variância são equivalentes.

- O modelo MAD não requer a estimação da matriz de covariâncias, e limita automaticamente o número de ativos no portfólio. Tal fato pode implicar em um menor custo de transação quando da revisão do portfólio.

- O desvio médio absoluto utilizado no modelo MAD é na verdade uma medida de desvio e não de risco, logo pode não ser adequada para medir o risco de um portfólio.

- O modelo MiniMax proposto por Young também é um modelo de programação linear, ou seja, de solução mais rápida e eficiente do que o modelo média-variância de Markowitz.

- No caso de a distribuição dos retornos ser assimétrica, o modelo MiniMax é mais apropriado do que o modelo média-variância de Markowitz.

- Os modelos MiniMax são extremamente conservadores, caracterizados por uma forte aversão aos piores resultados, o que faz com que sua solução possa ser afetada pela presença de valores espúrios no conjunto de dados.

- O VaR, quando se trabalha com distribuições discretas, é uma função extremamente difícil de ser otimizada, pois é não convexa, não diferenciável em alguns pontos, e que apresenta múltiplos extremos locais.

- A formulação de um problema de otimização de portfólio cuja medida de risco a ser minimizada é o VaR requer muitas variáveis binárias, e algoritmos eficientes para a solução de tal problema ainda não estão disponíveis.

- O VaR é uma medida de risco que não fornece nenhuma informação a respeito das perdas que o excede, as quais podem ser significativamente grandes. Sua minimização pode conduzir a um indesejável aumento destas perdas.

- O VaR não é considerado uma medida consistente de risco, pois não é subaditivo, isto é, a diversificação do portfólio pode resultar em um aumento do risco quando medido pelo VaR.

- O CVaR, uma medida derivada do VaR, é uma medida de risco consistente.

- O CVaR é uma medida de risco mais conservadora que o VaR.

- O CVaR quantifica os resultados piores que o VaR.

- O CVaR pode ser eficientemente minimizado via técnicas de programação linear.

- O CVaR tem a propriedade de unicidade, pois é um valor ótimo. O VaR, por ser um minimizador, não apresenta tal propriedade.

- O CVaR é uma medida de risco altamente flexível. Quando o nível de confiança tende a um, o CVaR tende ao mínimo da distribuição (critério MiniMax, extremamente conservador). Quando o nível de confiança tende a zero, o CVaR tende ao valor esperado da distribuição (neutralidade ao risco).

- A modelagem da aversão ao risco nos problemas de otimização de portfólio aplicados à área de comercialização de energia é feita principalmente com o uso da variância ou desvio padrão, função utilidade e penalização pelo não atendimento a um lucro mínimo. Ou seja, medidas de risco propostas recentemente na área econômico-financeira, como o CVaR, não foram ainda utilizadas nos modelos de otimização de portfólio aplicados à área de comercialização de energia.