



Karl Igor Martins Guerra

**Uma formulação do amortecimento dinâmico
de solos à luz da poromecânica**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Celso Romanel

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2019



Karl Igor Martins Guerra

Uma formulação do amortecimento dinâmico de solos à luz da poromecânica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação
em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Prof. Celso Romanel

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Dr^a. Jackeline Rosemery Castañeda Huertas

Consultora Independente

Rio de Janeiro, 20 de fevereiro de 2019

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

Karl Igor Martins Guerra

Graduou-se em Engenharia Civil pela UVA (Universidade Veiga de Almeida), em dezembro de 2016. Ingressou no mestrado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em março de 2017, desenvolvendo dissertação na linha de pesquisa de Geomecânica Teórica aplicada a Dinâmica dos Solos.

Ficha Catalográfica

Guerra, Karl Igor Martins

Uma formulação do amortecimento dinâmico de solos à luz da poromecânica. / Karl Igor Martins Guerra; orientador: Celso Romanel – 2019.

126 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)—Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2019.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Dinâmica dos solos. 3. Poromecânica. 4. Equação do amortecimento. 5. Análise acoplada. I. Romanel, Celso. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. III. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

Aos meus pais e família, por todo o apoio em todas as esferas necessárias para que eu pudesse chegar até aqui.

Ao meu irmão, que compartilha comigo o árduo caminho da vida acadêmica e quem me serve diariamente de inspiração.

Ao meu orientador, professor Celso Romanel, por ter confiado em meu trabalho, acreditado nos meus devaneios e me apoiado com toda sua experiência e zelo.

Aos meus amigos de longa data que, apesar da minha pouca frequência nas reuniões em que outrora participava, continuam demonstrando apoio, carinho e um verdadeiro sentido de amizade. Matheus, Fellipe e William, esse trabalho também é de vocês.

Aos amigos que fiz no mestrado, mostrando que o ser humano é um ser social que depende do próximo. Sem vocês, esta caminhada teria sido impossível. Thalita, Miguel, Carlos, Vinicius e Bruno, esse trabalho também é, especialmente, de vocês.

Às pessoas que apareceram aos poucos no meu caminho e que, de alguma forma, se tornaram importantes cada uma com seus motivos, maneiras, tempo, lugares e formas. Entre elas – e especialmente – à minha namorada, amiga e companheira, Fernanda.

Ao pessoal da limpeza, especialmente à Miriam, que torna este ambiente habitável e que sem seus trabalhos, realizados com muito cuidado, não poderia ter finalizado o meu em condições dignas. Obrigado pelo trabalho e pelos cafés divididos.

À Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro pelo espaço concedido, pela formação de excelência da qual pude desfrutar e pela dedicação a educação de nosso país.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

A todos aqueles que de alguma maneira contribuíram para que eu estivesse hoje aqui digitando este texto, meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

Guerra, Karl Igor Martins; Romanel, Celso. **Uma formulação do amortecimento dinâmico de solos à luz da poromecânica**. Rio de Janeiro, 2018. 126 p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A natureza física do amortecimento nos solos e sua formulação matemática têm sido objeto de intensa pesquisa ao longo do último meio século. Estes vários ensaios para explicar os mecanismos de perda de energia durante os episódios de vibração surgem da importância do amortecimento no problema de propagação de ondas para fins de engenharia. O objetivo deste estudo é propor uma maneira alternativa de analisar o fenômeno do amortecimento em solos, considerando o problema de vibração como um problema matemático poromecânico acoplado onde deslocamentos relativos e velocidades entre as duas fases que compõem o material geológico, fluido e sólido, gera forças de interação nas interfaces e pode desempenhar um papel importante na perda de energia vibracional dos solos. Presume-se que o problema seja resolvido na escala de poros, concentrando-se nas condições cinéticas e dinâmicas na interface entre o esqueleto sólido e o fluido de saturação. Variáveis adimensionais que misturam propriedades fluidas e sólidas permitem o acoplamento do problema, resultando no surgimento de uma massa aparente, coeficientes de amortecimento e rigidez que serão introduzidos posteriormente nas equações de movimento. A equação proposta de amortecimento será então justaposta a testes de laboratório e uma comparação com os modelos mais importantes da literatura será feita usando o software DEEPSOIL para análise de propagação de ondas para verificar sua validade.

Palavras-chave

Dinâmica dos solos; Amortecimento; Meios porosos; Análise acoplada.

Abstract

Guerra, Karl Igor Martins; Romanel, Celso (Advisor). **A formulation of dynamic damping of soils in the light of poromechanics**. Rio de Janeiro, 2018. 126 p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The physical nature of damping in soils and its mathematical formulation attempts have been the subject of intensive researches along the last half century. These several trials to explain the mechanisms of energy loss during vibration episodes arise from the importance of damping in the wave propagation problem for engineering purposes. The aim of this study is to propose an alternative way to analyze the damping phenomenon in soils by looking at the vibration problem as a coupled poromechanical mathematical problem where relative displacements and velocities in between the two phases that compose the geological material, fluid and solid, generates interaction forces at the interfaces and can play an important role in the vibrational energy loss of soils. The problem is assumed to be solved at the pore scale, focusing on the kinetic and dynamic conditions at the interface in between the solid skeleton and the saturating fluid. Dimensionless variables that mixes fluid and solid properties allows the coupling of the problem, resulting on the rising of an apparent mass, damping and stiffness coefficients that will be introduced later in the equations of motion. The proposed equation of damping will thus be juxtaposed to laboratory tests data and a comparison with the most important models in the literature will be done further using the software DEEPSOIL for wave propagation analysis to check its validity.

Keywords

Soil Dynamics; Damping; Porous media; Coupled analysis.

Sumário

1 . Introdução	14
1.1. Organização da dissertação	15
2 . Modelos matemáticos para fenômenos oscilatórios dissipativos.	17
2.1. O sistema harmônico amortecido	17
2.2. O amortecimento dependente da velocidade e a viscoelasticidade	19
2.3. O modelo viscoelástico de Maxwell	26
2.4. O amortecimento de Coulomb	31
2.5. Amortecimento proporcional: modelo de Rayleigh	35
2.6. O modelo não-linear generalizado: modelo da n-ésima potência	37
2.7. O amortecimento histerético	38
2.7.1. Noções físicas e matemáticas do modelo histerético.	38
2.7.2. O amortecimento histerético em solos	41
2.7.3. A dependência da frequência para meios porosos saturados.	45
3 . Formulação da equação do amortecimento no espaço poromecânico	47
3.1. Leis de conservação	47
3.1.1. Conservação de massa	47
3.1.2. Conservação de quantidade de movimento	50
3.2. Energia no material poroso.	52
3.2.1. Teorema da energia cinética e a energia de deformação.	52
3.2.2. Introdução a termodinâmica do meio poroso	55
3.2.3. Identificação de processos de dissipação	57
3.3. Análise dos mecanismos de dissipação	58
3.3.1. Dissipação por trabalho mecânico de deformação.	58
3.3.2. Acoplamento da dinâmica da matriz sólida com a dinâmica do fluido e a natureza das forças de interface.	
3.3.3. Efeito da velocidade reduzida suficientemente pequena.	72
3.4. Equação geral do acoplamento dinâmico	89
3.4.1. A equação geral e seus componentes	89

3.4.2. A aplicação da equação geral do acoplamento	90
3.4.3. Perda de estabilidade e comportamento assintótico da função de amortecimento dependente da frequência	93
4 . Resultados e discussões	100
4.1. Ensaio de laboratório	100
4.2. Resultados de campo	104
4.2.1. Sismo IBRH11	104
4.2.2. Sismo FKSH20	109
4.2.3. Sismo FKSH10	113
4.3. Comparação dos laços de histerese no espaço tensão-deformação	119
5 . Conclusões	122
6 . Referências bibliográficas	124

Lista de figuras

Figura 2.1 - Ciclo de histerese por módulo complexo (Ishihara, adaptado, 1995)	26
Figura 2.2 - Amortecedores de Kelvin e Maxwell e laço de histerese (Ishihara, adaptado, 1995)	31
Figura 2.3 - Comparação entre os coeficientes de perda em função da frequência (Ishihara, adaptado, 1996)	35
Figura 2.4 - Amortecimento de Rayleigh (autor, 2018)	36
Figura 2.5 - Ciclos de histerese não lineares gerados pelas regras de Masing no espaço tensão cisalhante x deformação cisalhante (Ishihara, 1996).	42
Figura 2.6 - Relação geométrica do amortecimento histerético por Masing (Ishihara, 1996).	43
Figura 2.7 - Regras de Masing para carregamentos não lineares no espaço tensão-deformação (Ishihara, 1995)	43
Figura 2.8 - Amortecimento histerético em função da degradação do módulo elástico (Ishihara, adaptado, 1995).	44
Figura 2.9 - Decaimento do módulo elástico em função da deformação e dos parâmetros de Ramberg-Osgood (Ishihara, adaptado, 1995).	45
Figura 3.1 - Esquema de fluxo em meio poroso com velocidades relativas (Coussy, 2010)	49
Figura 3.2 - Comparação do amortecimento total com o amortecimento histerético para pequenas deformações (autor, 2018)	94
Figura 3.3 - Perda de estabilidade do amortecimento total para médias e grandes deformações (autor, 2018)	94
Figura 3.4 - Comportamento assintótico da equação do amortecimento modificada para $\beta = 2,0$ (autor, 2018)	96
Figura 3.5 - Comparação do amortecimento total modificado com o amortecimento histerético para pequenas deformações (autor, 2018)	96
Figura 3.6 - Comparação com outros modelos de amortecimento, $\beta = 5$ (autor, 2018)	97
Figura 3.7 - Comparação com outros modelos de amortecimento, $\beta = 6,5$ (autor, 2018)	97
Figura 3.8 - Comparação com outros modelos de amortecimento, $\beta = 100$ (autor, 2018)	98

Figura 3.9 - Amortecimento em função da degradação do módulo elástico (Ishihara, modificado, 1995)	99
Figura 4.1 - Amortecimento em função da deformação para sílica muito porosa de grãos grandes seca e saturada com água (Sato, adaptado, 1995).	101
Figura 4.2 - Amortecimento em função da deformação para sílica muito porosa de grãos grandes, seca e saturada com óleo de silicone (Sato, adaptado, 1995).	102
Figura 4.3 - Amortecimento em função da deformação para sílica fina seca e saturada com água (Sato, adaptado, 1995).	103
Figura 4.4 - Amortecimento em função da deformação para sílica muito porosa seca e saturada com óleo de silicone (Sato, adaptado, 1995).	104
Figura 4.5 - - Mapa de isolinhas referente as acelerações de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience)	106
Figura 4.6 - Mapa de isolinhas referente as velocidades de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience).	106
Figura 4.7 - Comparação das acelerações espectrais medidas e computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função das frequências (autor, 2018)	107
Figura 4.8 - Comparação das acelerações espectrais medidas e computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função dos períodos fundamentais (autor, 2018)	108
Figura 4.9 - Mapa de isolinhas referente as acelerações de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience).	110
Figura 4.10 - Mapa de isolinhas referente as velocidades de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience).	111
Figura 4.11 - Comparação das acelerações espectrais medidas e computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função das frequências (autor, 2018)	112
Figura 4.12 - Comparação das acelerações espectrais medidas e computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função dos períodos fundamentais (autor, 2018)	112

Figura 4.13 - Mapa de isolinhas referente as acelerações de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience).	115
Figura 4.14 - Mapa de isolinhas referente as velocidades de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience).	116
Figura 4.15 - Comparação das acelerações espectrais computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função dos períodos fundamentais (autor, 2018)	117
Figura 4.16 - Comparação das acelerações espectrais computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função das frequências (autor, 2018)	117
Figura 4.17 - Comparação das acelerações espectrais computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função dos períodos fundamentais (autor, 2018)	118
Figura 4.18 - Comparação dos laços de histerese (autor, 2018)	120

Lista de tabelas

Tabela 3.1 - Parâmetros e variáveis referentes a cada fase do problema de acoplamento (autor, 2018)	61
Tabela 4.1 - Parâmetros físicos do solo ensaiado em coluna de ressonância (Sato, adaptado, 1995).	101
Tabela 4.2 - Propriedades geotécnicas do perfil sob o sismógrafo (autor, 2018).	105
Tabela 4.3 - Propriedades geotécnicas do perfil de solo sob o sismógrafo (autor, 2018).	109
Tabela 4.4 - – Propriedades geotécnicas do perfil de solo sob o sismógrafo (autor, 2018).	114
Tabela 4.5 - Propriedades físicas do solo analisado (autor, 2018)	119

“Complex physics need beautiful mathematics.”
Paul Dirac.

1. Introdução

Os sistemas dinâmicos, dissipativos ou amortecidos, são fortes frentes de pesquisa desde o surgimento da matemática diferencial e foi aprimorado com o surgimento dos computadores no meio do século passado. Através de pesquisas físicas e matemáticas rigorosas, se pôde entender como os movimentos oscilatórios acontecem, quais parâmetros governam tal movimento e, também, como a energia de um sistema oscilatório viaja no espaço e no tempo. Muito se interessou pelo entendimento matemático da dissipação de energia de um sistema dinâmico e, como consequência, analogias físicas e modelos matemáticos foram gerados ao longo dos anos, como os trabalhos de Maxwell, Kelvin, Biot, entre outros pesquisadores. O amortecimento de sistemas dissipativos foi estabelecido como resultante de uma força relativa a velocidade, logo, contrária ao movimento, gerando assim, uma dependência da frequência uma vez que a solução da equação diferencial do movimento depende explicitamente da frequência. Foi então observado em 1965 por Hardin, o que gerou uma fundamental publicação, que o amortecimento das areias submetidas a oscilações não era compatível com a teoria do amortecimento relativo a velocidade como previsto pela teoria clássica. Hardin então avançou a hipótese de que o amortecimento de areias secas fosse caracterizado como histerético (comportamento esse já visto em outros materiais), ou seja, não dependente da frequência e dependente do deslocamento e deformação do material. Para que tal teoria fosse coerente, o amortecimento das areias deveria ser relativo a uma dissipação interna, possivelmente gerada pelo rearranjo dos grãos e fricção entre as partículas.

O amortecimento histerético foi profundamente estudado por Crandall, Reid e Bishop no final do último século. A aproximação histerética foi identificada como extremamente defeituosa em sua coerência matemática. A adoção

de um módulo complexo para representar o armazenamento de energia e dissipação levaram a equação diferencial do movimento a não apresentar uma solução causal, ou seja, o efeito ocorre antes da causa. Além desta deficiência, o modelo histerético impõe que forças imaginárias gerem deslocamentos reais. Para resolver, ou diminuir as incoerências, o modelo não linear com base nas regras de Masing foi adaptado para representar as perdas de energia no solo. O modelo, contudo, depende fortemente da degradação do módulo de elasticidade e não permite que outros fatores influenciem na perda de energia. Todavia, o amortecimento em solos parece demonstrar uma dependência na frequência quando este está saturado por algum fluido em seus poros. O amortecimento então pode ser enxergado não como uma dissipação interna do material, mas sim devido a uma interação entre as fases que compõe o solo.

Darendeli, Idriss, Seed, Matasovic, Michael, Stoll, Miura, Biot e outros pesquisadores da dinâmica dos solos também notaram esta dependência na frequência quando o material se encontrara saturado. Entretanto, a literatura carece de modelos matemáticos rigorosos que expliquem a natureza deste fenômeno de amortecimento por interação entre as fases. Uma análise da escala dos poros foi entendida como necessária pelo autor deste trabalho para que as forças de interação pudessem ser profundamente estudadas e que o fenômeno do amortecimento fosse melhor compreendido, não com ajustes numéricos, mas sim com uma formulação mais rigorosa.

1.1.Organização da dissertação

A presente parte do trabalho na qual compreende este subitem está destinada a explicar a motivação e a contextualização desta dissertação de mestrado. No capítulo dois, alguns dos modelos matemáticos de amortecimento mais importantes da literatura estão citados e explicados. O terceiro capítulo deste trabalho é a contribuição do autor para a linha de pesquisa sobre amortecimento em solos e meios porosos em geral. No quarto capítulo, o leitor deste trabalho se deparará com as comparações

do modelo teórico com ensaios de laboratório e medições *in situ* de sismos de alta intensidade. A conclusão está escrita no quinto capítulo e as referências bibliográficas no sexto e último capítulo.

2. Modelos matemáticos para fenômenos oscilatórios dissipativos.

2.1.O sistema harmônico amortecido

Na mecânica clássica geral, um sistema perturbado por uma força externa e que possui uma força de restauração no sentido contrário ao movimento imposto pela força externa tende a oscilar nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. A representação matemática mais simples de um sistema como este é a equação do oscilador harmônico. De maneira ideal, propõe-se a existência de um corpo que não dissipe energia e que mantenha eternamente suas oscilações. Na realidade, nenhum sistema preserva de maneira absoluta a energia imposta inicialmente e tende a dissipar esta última seja por calor, som, fratura, mudança de volume entre outros mecanismos propostos na literatura. O termo dissipativo pode então aparecer de maneiras diversas e suas consequências matemáticas (Bishop, 1955) serão exploradas com profundidade neste capítulo assim como permitir que se entenda melhor as motivações físico-matemáticas do modelo proposto.

É amplamente compreendido na literatura que há duas grandes classificações para o amortecimento de um corpo em oscilação. Parte-se do princípio que o amortecimento é uma perda de energia e em seguida busca-se entender quais mecanismos levam ao amortecimento. Foi ressaltado em estudos anteriores que o material em vibração apresenta dois tipos de amortecimento: externo e interno. O amortecimento interno se dá pela fricção de suas partículas internas, rearranjo atômico, reagrupamento de grãos, microfissuras entre outros mecanismos inerentes ao material. O amortecimento externo aponta como um material imerso em outro (frequentemente um fluido) perde energia para o meio onde ele se encontra e que tal perda se dá diretamente pela presença do meio que o

cerca. Estas duas condições de amortecimento serão exploradas em detalhe mais a frente neste trabalho.

II.1.1 – Solução analítica do oscilador harmônico

Seja um oscilador harmônico genérico amortecido representado pela equação:

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + c \left(\frac{dx}{dt} \right) + kx = 0$$

$$x \rightarrow x(t) \quad (2.1)$$

Onde x representa o deslocamento de um elemento sólido no tempo, m é a massa do elemento, c é seu coeficiente de amortecimento e k sua rigidez. Nota-se que neste preciso caso o amortecimento se encontra na parcela da velocidade e logo deve ser correlacionado com uma grandeza viscosa. A solução geral desta equação diferencial ordinária é amplamente conhecida e aparece sob a forma de:

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{t(\sqrt{c^2 - 4km} + c)}{2m}} + A_2 e^{-\frac{t(\sqrt{c^2 - 4km} - c)}{2m}} \quad (2.2)$$

A_1 e A_2 sendo constantes arbitrárias dependentes das condições iniciais do sistema. Percebe-se que a resposta do oscilador depende fortemente do argumento existente nos radicais onde valores complexos podem existir caso $c^2 < 4km$. Sistemas onde a relação $c^2 < 4km$ existe são chamados de sistemas subamortecidos (*underdamped systems*) e serão estes os principais casos a serem estudados neste trabalho.

2.2.O amortecimento dependente da velocidade e a viscoelasticidade

II.2.1 – O Amortecimento Viscoso Elástico: Kelvin-Voigt

Na dinâmica estrutural assim como na análise mais geral de sistemas oscilatórios amortecidos se emprega o modelo viscoso linear para amortecimento. Este modelo, que possui um termo inercial, viscoso e uma rigidez, considerando uma distribuição em paralelo entre a rigidez e o amortecimento, é chamado de modelo de Kelvin-Voigt. O modelo propõe que haja um aparato viscoso que gera uma força de reação contrária a velocidade aplicada ao material. Sua simplicidade tem sido o motivo de sua ampla utilização em inúmeras áreas voltadas a análise de vibrações amortecidas (Verruijt, 1996, 1999). Porém o modelo possui uma forte dependência na frequência do oscilador e tal dependência não aparece nos ensaios realizados em laboratório.

Seja um sistema amortecido com vibração forçada de caráter sinusoidal:

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + c \left(\frac{dx}{dt} \right) + kx = F_0 \text{sen}(\omega t) \quad (2.3)$$

Onde F_0 é a amplitude da força imposta ao sistema e esta força oscila com frequência conhecida ω . Sabe-se que para tal sistema a solução da equação diferencial ordinária é uma função senoidal de argumento composto pelo tempo e pela frequência e que, devido ao amortecimento, a vibração não estará em fase com a excitação imposta. A equação e suas relações podem ser escritas então como:

$$x(t) = A \text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$A = \frac{F_0}{k} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right]^2}} \right\}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{c}{m\omega_n}$$

(2.4)

Onde ζ é conhecido como o fator de amortecimento do sistema e ω_n é a frequência natural de vibração do sistema.

A combinação da solução do estado estacionário com o estado de oscilações transientes resulta na solução geral do movimento oscilatório amortecido forçado e pode ser escrita sob a forma:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (\alpha \cos(\omega_D t) + \beta \sin(\omega_D t)) + A \sin(\omega t - \phi) \quad (2.5)$$

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Onde as constantes α e β simbolizam o deslocamento inicial e a velocidade inicial imposta ao sistema oscilatório respectivamente. O parâmetro ω_D representa a frequência amortecida do elemento. Devido a presença do termo exponencial negativo que multiplica as funções oscilatórias, percebe-se que a resposta transiente rapidamente deixa de existir e somente a resposta ao estado estacionário permanecerá e durará enquanto houver a excitação externa. A solução para o estado estacionário é então:

$$x(t) = A_{est} \left\{ \frac{\sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right]^2}} \right\} \quad (2.6)$$

Uma forma conveniente de medir o amortecimento deste sistema, que será aprofundada nos tópicos seguintes, é o fator de perda (*loss factor*) definido por:

$$\eta = \frac{\Delta W}{2\pi W} \quad (2.7)$$

Onde ΔW é a energia perdida por ciclo e W é a maior energia potencial acumulada neste mesmo ciclo.

A energia dissipada pelo sistema devido a presença de uma força de amortecimento pode ser representada pelo trabalho realizado por esta força em um ciclo de oscilação. Logo, tem-se:

$$\Delta W = \oint F_d dx \quad (2.8)$$

Onde F_d é a força realizada pela parcela do amortecimento viscoso.

Seja a velocidade da oscilação dada pela primeira derivada da posição em função do tempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} A \sin(\omega t + \phi) = \omega A \cos(\omega t - \phi) \quad (2.9)$$

A integral de linha que define o trabalho realizado torna-se então:

$$\Delta W = \oint \frac{cdx}{dt} dx = \oint c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = c\omega^2 A^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \phi) dt = \pi c\omega A^2 \quad (2.10)$$

Interpreta-se facilmente que a quantidade de energia dissipada pelo sistema é diretamente proporcional a frequência na qual ele vibra. Visto que o movimento $x(t)$, assim como a energia dissipada por ciclo não devem ser afetados pelo sinal da frequência, se torna matematicamente coerente de reformular a equação (2.10) com o módulo da frequência:

$$\Delta W = \oint \frac{cdx}{dt} dx = \pi c|\omega|A^2 \quad (2.11)$$

Forçando assim a condição de que, como função da frequência, a energia perdida por ciclo e o fator de perda sejam reais, não-negativos e pares.

No caso de uma oscilação não constante, transiente, o amortecimento viscoso exige um tratamento matemático mais rebuscado para a solução do problema assim como apresenta divergências mais sérias em relação a física. Seja um sistema oscilatório forçado inicialmente por uma força dependente do tempo e não harmônica (podendo assim também adotar o valor de zero):

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + c \left(\frac{dx}{dt} \right) + kx = F(t) \quad (2.12)$$

$$x \rightarrow x(t) \quad (2.13)$$

Para que uma solução seja proposta ao problema matemático (2.10), deve-se introduzir o conceito de impulso. Seja um impacto uma grandeza física definida como uma força de grande módulo agindo em um curto intervalo de tempo. Logo:

$$I = \int F(t) dt \quad (2.14)$$

A segunda lei de Newton afirma que a força que atua em um corpo de massa m é a taxa de variação da quantidade de movimento deste corpo. Matematicamente tal afirmação se torna:

$$\frac{d}{dt} \left(m \left(\frac{dx}{dt} \right) \right) = F = m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) \quad (2.15)$$

Um impacto repentino em um tempo t_i qualquer imprime uma velocidade em uma massa m dada por:

$$\frac{dx(t_i)}{dt} = \frac{I}{m} \quad (2.16)$$

E o deslocamento antes e logo após o impacto também é nulo, logo:

$$x(t_i) = 0 \quad (2.17)$$

Logo, a resposta no domínio do tempo de um sistema amortecido perturbado por um impulso pode ser escrita da maneira seguinte:

$$x(t) = I h(t) = \frac{I e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)}{m(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})} \quad (2.18)$$

Onde a função de resposta ao impulso no domínio do tempo propriamente dita é:

$$h(t) = \frac{1}{m(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})} e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \quad (2.19)$$

Onde, pelo princípio da superposição de um sistema linear (Biot, 1958; Bishop, 1955), a resposta transiente a uma sequência de impactos unitários pode ser escrita sob a forma de uma integral de convolução, também conhecida sob o nome de integral de Duhammel:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.20)$$

Outra forma de resolver esta equação é avaliá-la no domínio das frequências a partir de uma transformada de Fourier, ou seja, multiplicando cada termo da equação diferencial por $e^{-i\omega t}$ e integrando-os em todo o domínio do infinito. A equação diferencial torna-se então:

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)X(\omega) = F(\omega) \quad (2.21)$$

Logo:

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad (2.22)$$

Onde a função de resposta ao impacto no domínio da frequência explicita-se facilmente como:

$$H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad (2.23)$$

A função é claramente complexa e forma um par de Fourier com a função de resposta no domínio do tempo (Crandall, 1970). A resposta no domínio da frequência para um sistema perturbado por um impacto unitário pode então ser formulada como:

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (2.24)$$

Finalmente, existe uma maneira mais geométrica de entender o problema do amortecimento viscoso linear. Seja a solução da equação diferencial ordinária para um sistema amortecido com oscilação forçada, sem termo inercial e sem rigidez, sendo apenas uma força oscilatória atuando em um elemento amortecedor viscoso:

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (2.25)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t) \quad (2.26)$$

E seja a força gerada pelo amortecimento:

$$F_d = cA\omega \cos(\omega t) \quad (2.27)$$

Pode-se normalizar o deslocamento de forma adimensional assim como a força gerada pelo amortecimento. Tem-se então:

$$\frac{F_d}{cA\omega} = \cos(\omega t) \quad ; \quad \frac{x}{A} = \sin(\omega t) \quad (2.28)$$

Logo, pela relação fundamental da trigonometria:

$$\text{sen}(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \quad (2.29)$$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{F_d}{cA\omega}\right)^2 = 1 \quad (2.30)$$

E tem-se então uma equação da elipse que corta o eixo horizontal em A e o eixo vertical em $cA\omega$. Ao se introduzir uma massa e uma rigidez ao sistema, a elipse passa a ter uma inclinação do seu semi-eixo maior em relação ao eixo das abscissas. Esta inclinação se mostra relativa ao coeficiente elástico do material.

A área no interior da elipse corresponde a quantidade de energia dissipada pelo sistema a cada ciclo. Esta análise geométrica será utilizada de maneira recorrente nesta seção do trabalho para avaliar o amortecimento e perda de energia por ciclo em outros modelos matemáticos.

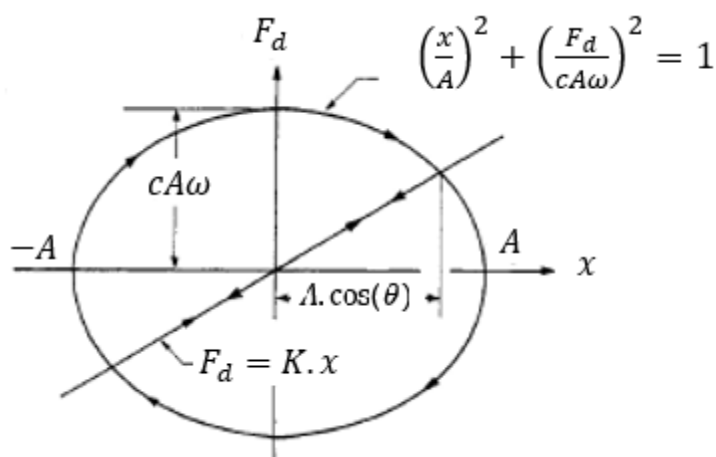


Figura 2.1 - Ciclo de histerese por módulo complexo (Ishihara, adaptado, 1995)

2.3.O modelo viscoelástico de Maxwell

O modelo de Maxwell para materiais viscoelásticos é, junto ao modelo de Kelvin-Voigt, um dos modelos clássicos deste tipo de abordagem da mecânica. Sua diferença para o modelo de Kelvin-Voigt é a associação em série do elemento de rigidez e do elemento viscoso. A abordagem deste

modelo é comumente realizada no domínio das tensões, gerando uma independência da massa onde as forças atuam. Assim sendo, seja a deformação total atuando em um elemento de Maxwell:

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_d \quad (2.31)$$

Onde o primeiro termo do lado direito da equação representa a deformação instantânea (devido a rigidez) e o segundo representa a deformação viscosa (devido ao amortecedor). Como o modelo apresenta elementos em série, a tensão atuando no amortecedor viscoso é a mesma que atua na mola de rigidez E, logo:

$$\sigma = E_i \varepsilon_i = C_d \varepsilon_d \quad (2.32)$$

Propõe-se então a seguinte relação:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma}{E_i}; \quad \varepsilon_d = \int \frac{\sigma}{C_d} dt \quad (2.33)$$

Obtém-se então que a deformação total em um elemento de Maxwell pode ser expressa por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_i} + \int \frac{\sigma}{C_d} dt \quad (2.34)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_i} + \frac{\sigma}{C_d} \quad (2.35)$$

Com a notação de ponto representando a derivada temporal de uma grandeza. Nota-se pela expressão matemática que o material irá

apresentar dois tipos distintos de comportamento. Um deles é a resposta instantânea ao carregamento que será a mesma utilizada na elasticidade linear de Hooke. O segundo efeito, dependente do tempo, pode ser analisado de duas maneiras diferentes. Busca-se entender o comportamento chamado “creep” onde as deformações continuam a aumentar sem que haja acréscimo nas tensões, ou pode-se abordar o problema pela relaxação do material, ou seja, uma vez que não há mais indução de deformações, quanto tempo o corpo levaria para dissipar toda a tensão gerada em seu interior.

Para estudar o creep, basta igualar a derivada temporal da tensão a zero e resolver a equação diferencial resultante, sendo esta:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{c_d} \quad (2.36)$$

$$\int \frac{d\varepsilon}{dt} dt = \int \frac{\sigma}{c_d} dt \quad (2.37)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{c_d} t \quad (2.38)$$

A equação (2.38) aponta que para uma tensão constante, o material desenvolve deformações sem limites com o avanço do tempo.

A análise da relaxação do material é feita tornando zero a taxa de deformação, logo:

$$0 = \frac{\dot{\sigma}}{E_i} + \frac{\sigma}{c_d} \quad (2.39)$$

Com solução:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{tE_i}{c_d}} \quad (2.40)$$

Em um cenário de vibração harmônica, as tensões e deformações podem ser representadas por:

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (2.41)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (2.42)$$

Substituindo as equações (2.41) e (2.42) na equação diferencial proposta anteriormente (2.39), obtem-se:

$$\sigma_0 = \frac{E_i C_d i \omega}{E_i + i \omega^2 C_d^2} \varepsilon_0 \quad (2.43)$$

$$\sigma_0 = \frac{C_d^2 E_i \omega^2 + E_i C_d i \omega}{E_i^2 + \omega^2 C_d^2} \varepsilon_0 \quad (2.44)$$

Onde nota-se facilmente a existência de uma parte real e outra imaginária que ao serem separadas podem ser reescritas como:

$$\sigma_0 = \left(\frac{C_d^2 E_i \omega^2}{E_i^2 + \omega^2 C_d^2} + i \frac{E_i^2 C_d \omega}{E_i^2 + \omega^2 C_d^2} \right) \varepsilon_0 \quad (2.45)$$

A parte real (*storage modulus*) é responsável por armazenar a energia elástica potencial fornecida ao material. A parte imaginária (*loss modulus*) definirá a dissipação da energia acumulada pelo primeiro módulo. A razão entre o armazenamento e a perda gera uma grandeza conhecida como razão de perda. Em outras palavras, esse parâmetro define o quanto da energia fornecida tenderá a ser dissipada pelo material. Para o modelo de Maxwell, tal razão pode ser escrita matematicamente como:

$$\eta = \frac{E_i}{C_d \omega} \quad (2.46)$$

Logo, o módulo complexo, composto por uma parte real e outra imaginária será representado como:

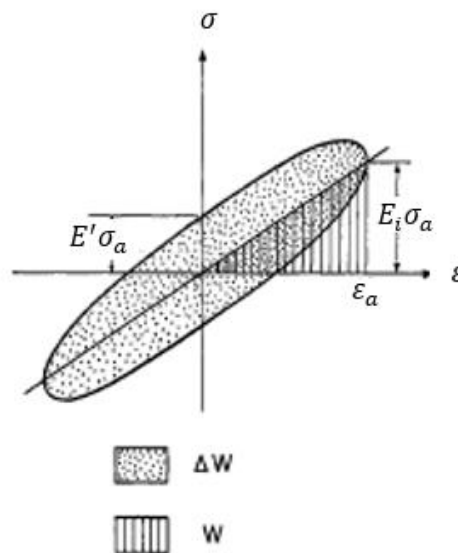
$$E^* = Re[E^*](1 + i\eta) \quad (2.47)$$

Ressalta-se também que o parâmetro razão de perda é diretamente proporcional ao amortecimento do material. A relação matemática entre essas grandezas pode ser expressa por:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta W}{W} \right) \quad (2.48)$$

$$D = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta W}{W} \right) \quad (2.49)$$

$$D = \frac{\eta}{2} \quad (2.50)$$



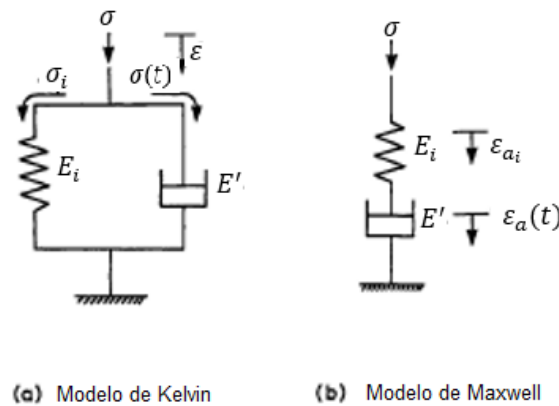


Figura 2.2 - Amortecedores de Kelvin e Maxwell e laço de histerese (Ishihara, adaptado, 1995)

2.4.O amortecimento de Coulomb

O contato entre duas superfícies lisas em movimento sob influência de uma força normal a interface de contato entre elas é uma fonte de amortecimento. Tal amortecimento ocorre, pois, o atrito entre duas superfícies dissipa energia em forma de calor e som. Seja um bloco de massa m e rigidez k deslizando harmonicamente sobre uma superfície plana que possui um certo atrito com o corpo em movimento. A força de atrito gerada durante as oscilações possui sinal contrário a velocidade desta oscilação, como já amplamente conhecido pela mecânica clássica, causando uma não linearidade no sistema. Logo, antes de abordar a solução da equação diferencial para este tipo de amortecimento, precisa-se expor as condições nas quais ele existe:

$$f_c = F_c(\dot{x}) = \begin{cases} -\mu N & \frac{dx}{dt} > 0 \\ 0 & \frac{dx}{dt} = 0 \\ \mu N & \frac{dx}{dt} < 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

A equação que governa o movimento da oscilação em um grau de liberdade (horizontal) pode ser escrita como:

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + kx = \mu mg \quad \text{para } \frac{dx}{dt} < 0 \quad (2.52)$$

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + kx = -\mu mg \quad \text{para } \frac{dx}{dt} > 0 \quad (2.53)$$

Ou, utilizando a função de sinal, as duas equações (2.52) e (2.53) podem ser escritas em uma só da seguinte maneira:

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + \mu mg \cdot \left[\text{sgn} \left(\frac{dx}{dt} \right) \right] + kx = 0 \quad (2.54)$$

Porém, para resolver esta equação analiticamente se faz necessário resolver para cada um dos cenários possíveis. Para a condição de velocidade negativa, a solução assume a forma de:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \text{sen}(\omega_n t) + \frac{\mu mg}{k} \quad (2.55)$$

Considerando o problema de valor inicial:

$$x(0) = A_1 + \frac{\mu mg}{k} = x_0 \quad (2.56)$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = \omega_n A_2 = 0 \quad (2.57)$$

Logo se a massa está inicialmente no ponto x_0 (em repouso) e se desloca para a esquerda, esta perturbação gerará o seguinte movimento:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) \cos(\omega_n t) + \frac{\mu mg}{k} \quad (2.58)$$

A equação (2.58) irá governar o movimento até que a velocidade mude de sentido, ou seja, quando a derivada da posição em relação ao tempo atinja o valor zero. Neste ponto, a equação do movimento se tornará:

$$\frac{dx(t_i)}{dt} = -\omega_n \left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) \text{sen}(\omega_n t_i) = 0 \quad (2.59)$$

Logo, quando:

$$t_i = \frac{\pi}{\omega_n}, \quad \frac{dx(t_i)}{dt} = 0 \quad (2.60)$$

Neste instante, a massa começa a se deslocar no sentido oposto considerando que a força exercida pela mola seja maior do que o atrito entre a massa e o plano. A equação que passa a governar o movimento a partir desse ponto é muito similar a primeira, invertendo-se somente o da força de atrito:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \text{sen}(\omega_n t) - \frac{\mu mg}{k} \quad (2.61)$$

Desta vez, as condições iniciais precisam ser as condições finais da primeira parte da oscilação quando a velocidade atingiu o valor de zero pela primeira vez. Logo:

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) \cos(\pi) + \frac{\mu mg}{k} = \frac{2\mu mg}{k} - x_0 \quad (2.62)$$

$$\frac{dx\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right)}{dt} = -\omega_n \left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) \text{sen}(\pi) = 0 \quad (2.63)$$

Logo o problema de valor inicial para a nova configuração do sistema é:

$$A_1 = x_0 - \frac{3\mu mg}{k} \quad (2.64)$$

$$A_2 = 0 \quad (2.65)$$

Permitindo assim que a solução para este intervalo seja:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu mg}{k}\right) \cos(\omega_n t) - \frac{\mu mg}{k} ; \quad \forall \frac{\pi}{\omega_n} < t < \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.66)$$

Quando a velocidade nesta nova configuração atingir o valor zero, a primeira equação volta a governar o movimento e assim sucessivamente até que a força exercida pela mola seja menor do que a força de atrito existente no sistema. Com isso, o sistema perde linearmente energia (o decaimento acontece com inclinação constante), diferente do amortecimento viscoso que tem seu decaimento em forma exponencial.

Nota-se também que para este tipo de amortecimento, a frequência do oscilador não é afetada pela perda de energia, isto é, não se utiliza uma frequência amortecida como no caso anterior. Percebe-se também que um sistema sob amortecimento de Coulomb pode parar de oscilar em uma posição diferente do valor inicial. Em outros mecanismos de dissipação, a solução estacionária sempre orbita o ponto de equilíbrio inicial, já que a solução oscila em torno do ponto de equilíbrio.

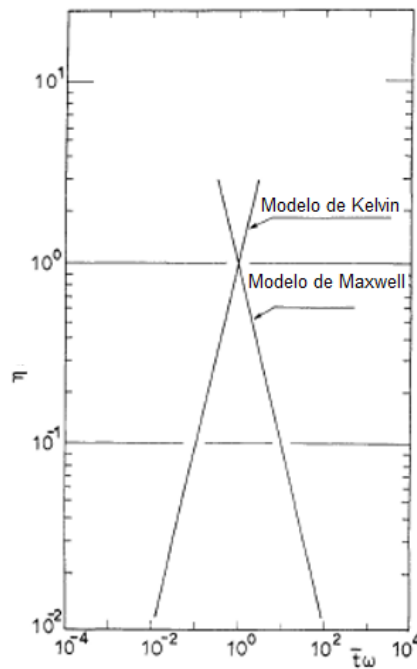


Figura 2.3 - Comparação entre os coeficientes de perda em função da frequência (Ishihara, adaptado, 1996)

2.5. Amortecimento proporcional: modelo de Rayleigh

O amortecimento proporcional, também conhecido como modelo de Rayleigh, é um modelo de amortecimento baseado na perda de energia cinética, idealizado por Lord Rayleigh em sua publicação Teoria do Som (1877). Tal modelo parte das equações do movimento de Lagrange, em coordenadas gerais.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q \quad \forall \quad q(q_i, t), Q(Q_i) \quad (2.67)$$

Onde q é o vetor de posição geral e Q é o vetor dos carregamentos ou forças. Esta equação diferencial parcial, sem coeficientes, se mostra uma equação generalizada para qualquer tipo de corpo em movimento (não aplicável na escala atômica). Ao resolver esta equação admitindo que os termos que compõe a função lagrangeana sejam a energia cinética e uma energia potencial elástica, obtêm-se a mesma equação do movimento de Newton em função da massa e da rigidez do corpo. Logo, Rayleigh admitiu em seu trabalho que o coeficiente de amortecimento, agindo na primeira

derivada da posição, deveria ser, por natureza, proporcional a massa e a rigidez. Ficou estabelecido então que o coeficiente de amortecimento pudesse ser escrito sob a forma:

$$C = \alpha m + \beta k \quad (2.68)$$

Onde α e β são coeficientes estritamente positivos. Substituindo este conceito dentro da solução geral da equação do movimento newtoniana, as relações seguintes podem ser extraídas (Sondipon, 2000):

$$\alpha = \frac{2\zeta}{\omega_i + \omega_j} (\omega_i \omega_j) \quad (2.69)$$

$$\beta = \frac{2\zeta}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.70)$$

Sendo ζ a razão de amortecimento que deverá ser medida em laboratório, ω_i e ω_j são o par de frequências desejados para o qual o projeto será realizado. Esta análise pode ser obtida tomando um corpo com mais de um grau de liberdade como a sobreposição de seus modos. Separando cada modo e construindo uma matriz ortogonal a cada modo, obtém-se a formulação de Rayleigh para os coeficientes de amortecimento. De maneira mais visual, a formulação de Rayleigh pode ser expressa como:

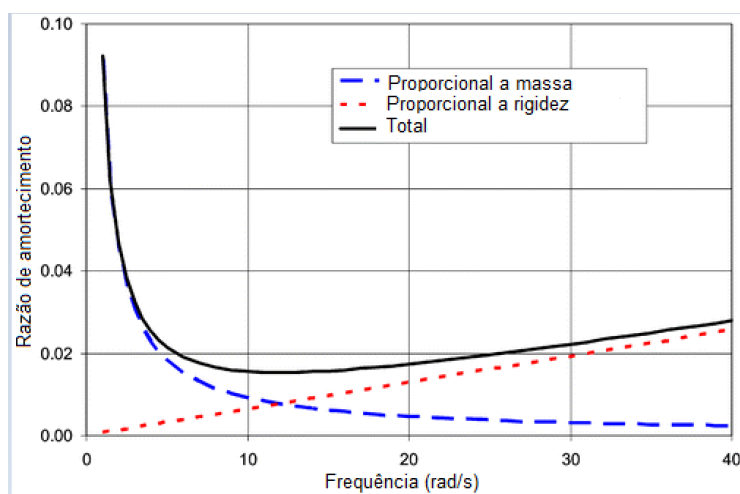


Figura 2.4 - Amortecimento de Rayleigh (autor, 2018)

Este modelo, apesar de gerar resultados pouco realistas para baixas e altas frequências ainda é o mais utilizado devido a sua simplicidade.

2.6.O modelo não-linear generalizado: modelo da n-ésima potência

A generalização do modelo de amortecimento dependente somente da velocidade do oscilador pode ser realizada embutindo uma função de ordem maior no termo da velocidade. Para um oscilador perturbado por uma força qualquer (inclusive em vibração livre) pode ser escrita pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + c_1 \left(\frac{dx}{dt} \right) + h \left(\frac{dx}{dt} \right) + kx = F(t) \quad (2.71)$$

Para que seja possível realizar uma solução quase-linear para a equação diferencial (2.71), propõe-se substituir o amortecimento não linear por um termo linear otimizado. A otimização do novo elemento pode ser realizada de diversas maneiras, incluindo: (i) minimização dos erros, (ii) equilíbrio de potências, (iii) séries truncadas. A literatura recomenda que cada um destes métodos seja testado um após o outro para que seja possível ter uma ideia física mais clara sobre a natureza do amortecimento presente no corpo estudado. Seja o elemento linear chamado de coeficiente equivalente e tenha como notação matemática c_{eq} . Após tratamento matemático de otimização, a literatura sugere que o coeficiente equivalente para um amortecimento cúbico seja definido por:

$$c_{eq} = \frac{c_3}{\sigma_{\dot{x}\dot{x}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}^4 e^{\frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}\dot{x}}}} \quad (2.72)$$

Onde o termo $\sigma_{\dot{x}\dot{x}}$ é a variância da velocidade de oscilação.

O coeficiente de amortecimento total do corpo pode ser então escrito como:

$$c_e = c_1 + c_{eq} = c_1 + 3c_3\sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2 \quad (2.73)$$

O modelo sendo amortecido na parcela da velocidade pode ser então considerado como viscoso. O cálculo do amortecimento viscoso pode então ser repetido para o modelo atual substituindo o valor do amortecimento viscoso (perda de energia) pelo coeficiente equivalente calculado logo acima. Logo:

$$\Delta W = c_{eq}|\omega|\pi A^2 \quad (2.74)$$

2.7.O amortecimento histerético

2.7.1.Noções físicas e matemáticas do modelo histerético.

Observações em laboratório indicam que alguns materiais perdem energia durante o processo de vibração, porém, sem depender (ou pouco depender) da frequência com a qual o material está sendo excitado. Para solos, esta observação foi feita por Hardin (Hardin, 1965), ao notar que areias amorteciam as vibrações com a mesma perda de energia por ciclo, independente da frequência do ensaio. Outros engenheiros e matemáticos como Crandall e Reid (1965, 1970) tentaram ao longo dos anos melhorar a teoria do amortecimento histerético devido a suas fortes patologias matemáticas. Para representar um corpo sob vibração induzida forçada, o modelo prevê com grande acurácia o comportamento de tal corpo em seu estado estacionário, principalmente se as soluções forem explicitadas no domínio das frequências. Porém, para vibrações livres ou transientes, por adotar uma formulação com módulo complexo, o modelo de amortecimento

histerético deixa falhas e inconsistências físico-matemáticas (Inaudi & Makris, 1996).

Existem essencialmente três maneiras matemáticas para descrever o amortecimento histerético no domínio do tempo (Bishop, 1985, 1986). Estas aproximações matemáticas serão explicadas a presente.

- *Módulo de rigidez complexo*: Neste modelo, o módulo de rigidez do oscilador guarda duas informações. No domínio real o módulo guarda a sua capacidade de estocar energia potencial elástica ou de deformação (storage modulus) e na parte imaginária o módulo guarda a informação de como acontece a perda de energia por ciclo. A equação da força de restauração do oscilador com módulo complexo pode ser escrita sob a forma:

$$f(t) = (k + ik^*)x(t) = k(1 + i\eta)x(t) \quad (2.75)$$

Onde k representa o parâmetro de rigidez e k^* representa a constante de amortecimento histerético. Na terceira parcela da equação, o parâmetro $\eta = \frac{k^*}{k}$, também conhecido como o fator de perda histerético. Um grave defeito matemático surge da equação; existe uma geração de forças imaginárias a partir de um deslocamento (deformação) real.

- *Amortecimento dependente da frequência*: Neste modelo, a força de restauração do oscilador permite que haja um coeficiente de amortecimento que escala a velocidade do sistema, assim como no amortecimento viscoso, porém, este coeficiente é fracionário e possui em seu denominador a própria frequência do sistema. Isto é:

$$f(t) = \frac{h}{\omega} \frac{dx}{dt} + kx$$

$$x \rightarrow x(t) \quad (2.76)$$

Onde ω é a variável representativa da frequência, k é o coeficiente de rigidez do sistema e h é a constante de amortecimento histerético (similar ao c do amortecimento viscoso). Nota-se então que a força de amortecimento é proporcional a velocidade e inversamente proporcional a frequência. A equação (2.76) já aponta duas das principais patologias matemáticas do modelo histerético. Para uma oscilação forçada em estado estacionário, a frequência no denominador possui sentido físico compreensível e pode ser adotada como a frequência amortecida do sistema. Entretanto, para sistemas em vibração livre e transiente, a variável da frequência perde total sentido físico. Além disso, nota-se que a equação mistura termos do domínio do tempo com termos do domínio da frequência, dificultando o entendimento matemático do processo de amortecimento.

Na literatura, se propõe utilizar um coeficiente de amortecimento viscoso equivalente para resolver o problema das vibrações livres (Maia, 2009). A partir de uma combinação de equações de amortecimento viscoso e histerético obtém-se a resposta no domínio das frequências e uma frequência amortecida é então gerada a partir do coeficiente histerético (Gaul; Bohlen; Kelly, 1995). Mesmo com esses métodos matemáticos rigorosos, um dos maiores problemas do amortecimento histerético ainda não obteve resposta. Trata-se da não causalidade do sistema (Makris, 1997). A não causalidade indica que, para um oscilador com amortecimento histerético de módulo complexo, o efeito pode surgir antes da causa. A falta de consistência física para esta solução matemática gerou uma frente de pesquisa intensa sobre a causalidade de sistemas histeréticos e permitiu que ferramentas matemáticas como as transformadas de Hilbert fossem aprimoradas (Inaudi & Kelly, 1995). Entretanto, a melhor solução encontrada na época se deve a Maurice Biot (Biot, 1951) em seu trabalho sobre amortecedores de Maxwell em série infinita.

- *O modelo de Biot*. Seja uma força da restauração do sistema definida por:

$$f(t) = k \left\{ x(t) + \frac{2}{\pi} \eta \int_{t_0}^t \int_u^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi [\varepsilon(t - \tau)] \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \right\} \quad (2.77)$$

$$\eta = \frac{h}{k}; \quad \varepsilon > 0 \quad (2.78)$$

Nota-se que a força de restauração é dependente de duas principais parcelas. Uma instantânea e outra com um fator de atraso devido a uma viscosidade. Percebe-se que a estrutura da parte dependente do tempo (viscosa) é conhecida e se assemelha a uma convolução comum com decaimento exponencial. Ao investigar com cautela o modelo de Biot percebe-se que se trata de uma associação em série, infinita, de elementos de Maxwell (Biot, 1958). O modelo de amortecimento histerético de Biot responde bem para pequenas oscilações forçadas e livres.

2.7.2.O amortecimento histerético em solos

Na mecânica dos solos é conhecido que o amortecimento dos solos submetidos a oscilações é independente da taxa na qual o movimento é imposto. Este tipo de amortecimento foi notado e exposto primeiramente por Hardin (Hardin, 1965) ao demonstrar que a frequência não afetava a perda de energia por ciclo. Quando a amplitude da deformação cisalhante ainda é muito pequena ($10^{-6} \sim 10^{-5}$), a resposta do solo para a excitação imposta a ele não varia com a progressão dos ciclos e então, o módulo de cisalhamento assim como as propriedades de amortecimento continuam constantes durante os ciclos. Entretanto, quando o nível de deformações atinge graus elastoplásticos, na ordem de 10^{-4} , o comportamento do solo adota uma forma não linear gerando um ciclo de histerese não linear no espaço tensão-deformação. Diferente dos modelos de ciclo histerético pautados na viscoelasticidade ou módulo complexo (gerando elipses), não há ainda um modelo matemático fisicamente coerente para realizar ciclos de histerese não lineares com inversão de tensões nos pontos críticos da oscilação. Para resolver este impasse, foram propostos modelos hiperbólicos simples (Kondner & Zelasko; Hardin; Idriss) a fim de estabelecer uma relação não linear entre tensões e deformações e em seguida aplicando-se as regras de Masing para a função hiperbólica,

atinge-se um ciclo de histerese não linear, porém sem solução analítica rigorosa.

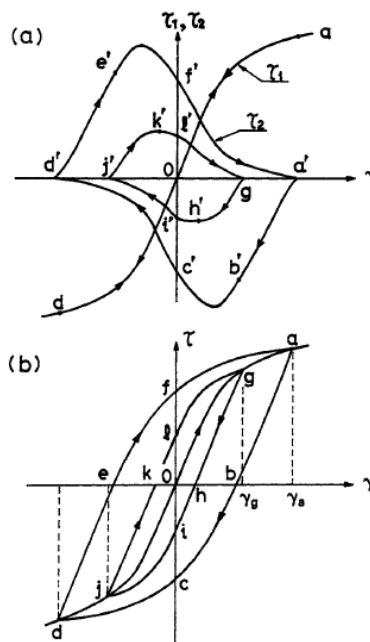


Figura 2.5 - Ciclos de histerese não lineares gerados pelas regras de Masing no espaço tensão cisalhante x deformação cisalhante (Ishihara, 1996).

As regras de Masing supracitadas permitem que o ciclo de histerese se feche ao considerar que em um cenário de descarga ou recarregamento, a forma da função original é esticada nos dois eixos do plano estudado. Assim sendo, a curva hiperbólica inicial, também chamada de curva *backbone* (curva esqueleto), terá o argumento de sua função dividido pela metade assim como a contra-imagem desta última (Duncan & Chang, 1970).

A teoria do amortecimento histerético propõe que o amortecimento seja a razão entre a energia acumulada em um ciclo pela energia dissipada. A hipótese se traduz em uma relação entre a área sob a curva de carregamento inicial (curva esqueleto) onde se considera que toda energia potencial elástica lá está armazenada e a área do ciclo de histerese (Caughey, 1962). Afirma-se que se o material fosse perfeitamente elástico e conservativo, as trajetórias de carregamento descarregamento ocorreria pelo mesmo trajeto e que, caso diferente, a integral de linha do trabalho

realizado não seria nula, apontando uma perda de energia durante o processo. Esquematicamente, esta relação de energia acumulada e dissipada pode ser vista no diagrama abaixo.

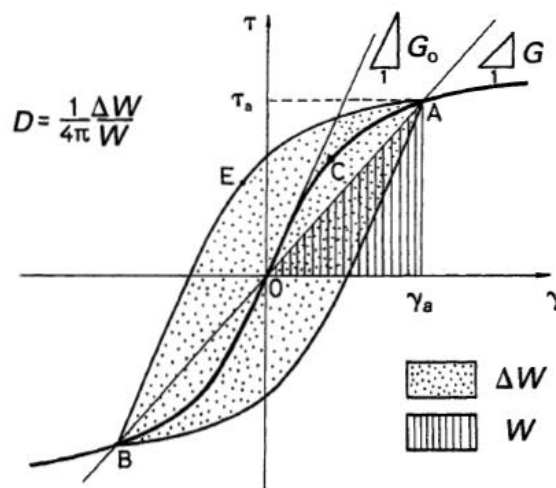


Figura 2.6 - Relação geométrica do amortecimento histerético por Masing (Ishihara, 1996).

Onde a área hachurada verticalmente corresponde a energia potencial elástica acumulada e, por consequência, a área pontilhada representaria a perda de energia em um ciclo.

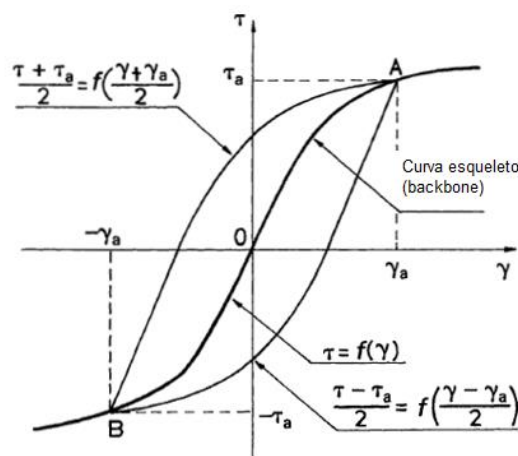


Figura 2.7 - Regras de Masing para carregamentos não lineares no espaço tensão-deformação (Ishihara, 1995)

Nota-se facilmente que há uma forte dependência do amortecimento com a degradação do módulo de cisalhamento do material (Harding & Drnevich, 1972). Nas expressões hiperbólicas, esta relação é direta pois a integração de uma superfície que depende das tensões e das deformações automaticamente dependerá do valor do módulo tangente a curva (Hara, 1980), e logo, o amortecimento passa a ser função somente da deformação (Seed & Idriss, 1970; Vucetic & Dobry, 1991). O que se observa em laboratório é que tal aproximação parece condizente com a realidade para pequenas deformações ou baixas velocidades de carregamento, mas, para deformações maiores (maior degradação do módulo), a curva teórica deixa de ser realista.

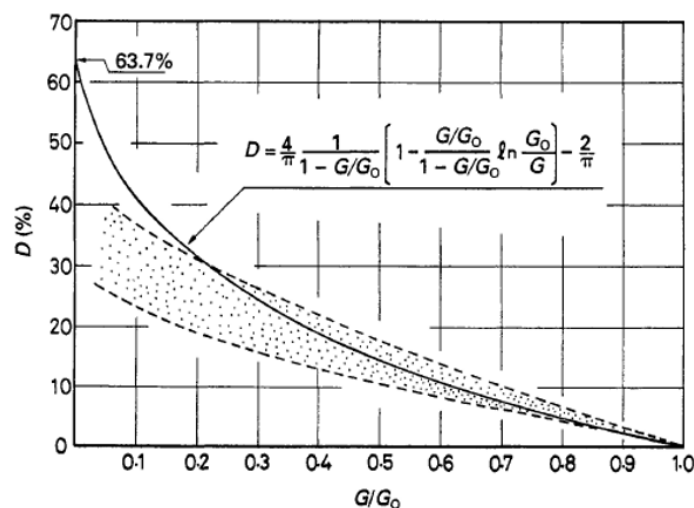


Figura 2.8 - Amortecimento histerético em função da degradação do módulo elástico (Ishihara, adaptado, 1995).

A alternativa matemática, pouco rigorosa e mais voltada para um ajuste de curva, é de ponderar a formulação hiperbólica por coeficientes que controlam a curvatura e o decaimento da função (Ramberg-Osgood; Darendeli). Apesar de não representar fisicamente o comportamento do amortecimento, estes ajustes permitem melhor simular a evolução do amortecimento e degradação do módulo de um solo específico.

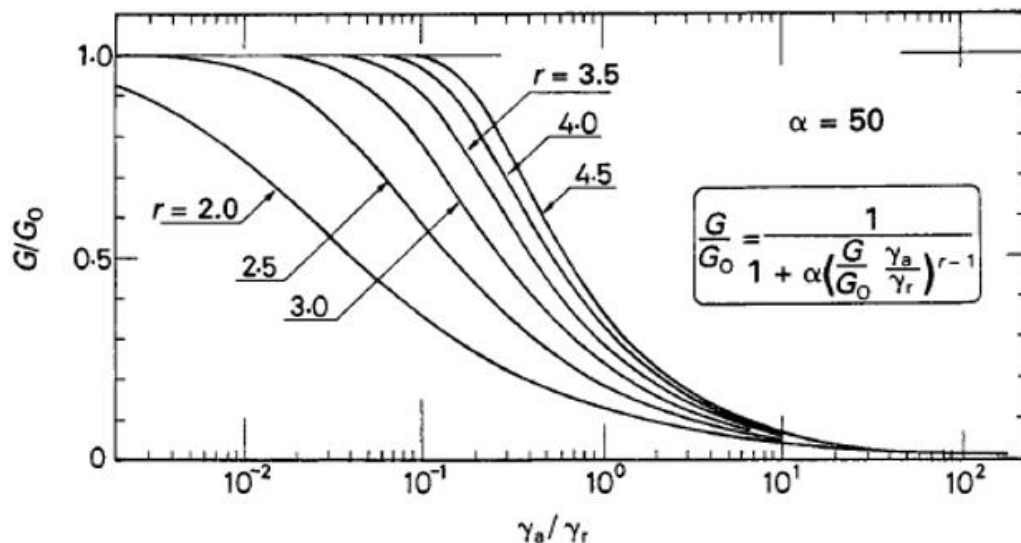


Figura 2.9 - Decaimento do módulo elástico em função da deformação e dos parâmetros de Ramberg-Osgood (Ishihara, adaptado, 1995).

2.7.3.A dependência da frequência para meios porosos saturados.

A pouca dependência do amortecimento com a frequência de oscilação do fenômeno, como previsto pela aproximação do amortecimento histerético, torna-se pouco verossímil ao considerar um sólido poroso saturado. Em ensaios de laboratório realizados por Stoll (1985), ou nos trabalhos matemáticos de Miura (2001), Kramer (1996), a presença de fluido nos poros realça uma certa dependência do amortecimento na frequência. O amortecimento passa a ter então uma parcela externa, onde a perda de energia é devida a interação do sólido com o meio que o cerca. Segundo Miura (2001), Foti e Strobbia (2002), para baixas frequências, não deve haver movimento relativo entre as duas fases, logo a dependência na frequência seria nula. Quando a frequência ultrapassa o limiar descrito por Miura (2001), que depende de cada solo, há uma diferença de fase na oscilação do sólido em relação ao fluido, gerando assim um amortecimento externo. É proposto em trabalhos recentes que, para um meio poroso saturado com fluidos, em altas frequências, o comportamento do fluido dentro dos poros pode ser descrito com a lei de Darcy para fluxos laminares, colocando a dependência da frequência diretamente associada

a permeabilidade do meio Miura (2001), Foti e Strobbia (2002). Ainda sobre o comportamento histerético, Darendeli (2001) propôs que houvesse um amortecimento mínimo a ser adicionado ao histerético pois este último se torna nulo para pequenas deformações já que o material é adotado como linear e perfeitamente elástico.

Na intenção de explicitar o acoplamento entre as duas fases, Michaels (2006) propõe que a equação do movimento seja formulada em termos vetoriais e que a rigidez da força de restauração assim como o coeficiente de amortecimento seja separada para as duas fases, gerando assim um sistema de equações diferenciais ordinárias. Esta aproximação permite que o sistema funcione como um oscilador de duas massas, rigidez e viscosidades e ainda realce a influência do movimento de uma fase em relação a outra (fenômeno de batimento ou interferência). Entretanto, esta aproximação não explica fisicamente a interação entre as duas fases na escala micro.

Esta complexa interação entre as fases, assim como as leis físico-matemáticas que regem tal comportamento serão discutidas com profundidade a presente neste trabalho. Busca-se a partir de agora abordar o fenômeno da interação fluido-sólido em uma escala micro, nas dimensões do poro e generalizando-a para todo o domínio por ferramentas matemáticas extensivas.

3. Formulação da equação do amortecimento no espaço poromecânico

3.1. Leis de conservação

3.1.1. Conservação de massa

A formulação matemática de um meio poroso deve obedecer às mesmas leis físicas do meio contínuo sólido. Entre essas leis se destacam principalmente as relativas a conservação de massa e energia. Seja o material poroso um domínio material constituído por uma matriz sólida e uma matriz relativa ao fluido presente nos poros comunicantes (Terzaghi, 1923). Propõe-se então que ρ_s e ρ_f sejam respectivamente a densidade de massa das matrizes sólida e do fluido nos poros, onde a relação volumétrica pode ser escrita por $\rho_s(1-n)d\Omega_t$, sendo n e Ω_t respectivamente a porosidade e o volume (domínio) total do corpo estudado. A conservação de massa durante toda a evolução do tempo pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_s (1 - n) d\Omega_t = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{d^f}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_f n d\Omega_t = 0 \quad (3.2)$$

Onde, considerando que o equilíbrio se dê de maneira local, pelo princípio da extensividade, o integrando pode sair do operador e garantir validade mesmo não considerando todo o domínio, logo:

$$\frac{d^s}{dt} (\rho_s (1 - n) d\Omega_t) = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{d^f}{dt}(\rho_f n da)\Omega_t = 0 \quad (3.4)$$

Garantindo assim pelo teorema da continuidade lagrangeano:

$$\frac{\partial(\rho_s(1-n))}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_s(1-n)\mathbf{V}^s) = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial(\rho_f n)}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_f n \mathbf{V}^f) = 0 \quad (3.6)$$

Onde o operador Nabla (Del) determina o divergente em relação a coordenada espacial e \mathbf{V}^s e \mathbf{V}^f são respectivamente a velocidade da matriz sólida e do fluido (Biot, 1941). Nota-se que não é considerado uma única velocidade para todo o sistema e sim que o fluido e a matriz sólida possam ter diferentes velocidades mesmo fazendo parte de um mesmo domínio material fechado. Uma formulação mais coerente do comportamento do esqueleto sólido deveria ser feita contemplando o movimento relativo entre o fluido e o sólido em seu referencial inicial. Sendo assim, ao considerarmos $J_f da$ a massa de fluido fluindo pela superfície sólida de da de orientação \mathbf{n} em um tempo $t + dt$ tem-se:

$$J_f da = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da \quad (3.7)$$

Sendo $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w}(x,t)$ o vetor de fluxo relativo euleriano da massa de fluido. Seja $n(\mathbf{V}^f - \mathbf{V}^s) \cdot \mathbf{n} da dt$, n sendo a porosidade, a expressão recém citada descreve o volume infinitesimal de fluido escoando pela superfície do esqueleto sólido da em um tempo dt .

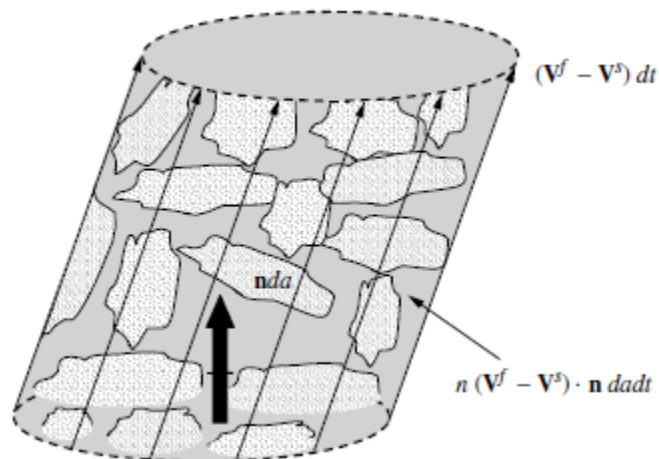


Figura 3.1 - Esquema de fluxo em meio poroso com velocidades relativas (Coussy, 2010)

Pela definição de fluxo relativo a matriz sólida e invocando esta condição nas equações da continuidade lagrangiana tem-se que:

$$\frac{d^s(\rho_f n)}{dt} + \rho_f n \nabla_x \cdot \mathbf{V}^s + \nabla_x \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (3.8)$$

Em um meio saturado, a massa do fluido presente nos poros no estado atual em relação a configuração inicial (Lagrange) pode ser relacionada com a quantidade de massa do fluido no domínio (volume) atual pela equação:

$$\rho_f n d\Omega_t = m_f d\Omega_0 \quad (3.9)$$

Logo, a massa atual pode ser escrita como:

$$m_f = \rho_f \phi \quad (3.10)$$

3.1.2. Conservação de quantidade de movimento

Seja \mathbf{T} uma tensão atuando em uma direção \mathbf{x} , em um tempo t e em uma superfície de vetor normal \mathbf{n} , sendo então $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ da onde da é uma superfície infinitesimal da matriz sólida. O vetor \mathbf{T} é parte constituinte de um tensor de tensões que pode ser dividido em duas partes pelo princípio das tensões efetivas de Terzaghi. \mathbf{T} é então pertencente a $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \sigma_{ij}$, onde:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} \sigma \\ \delta_{ij} &= 1, \quad i = j \\ \delta_{ij} &= 0, \quad i \neq j \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pela definição de pressão por Pascal e considerando matematicamente as tensões hidrostáticas como um tensor esférico (Biot, 1961), tem-se que:

$$\sigma = p_f = \text{pressão do fluido}. \tag{3.12}$$

A conservação da quantidade de movimento pode ser expressa pelas duas seguintes expressões:

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_s (1-n) \mathbf{V}^s d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_f n \mathbf{V}^f d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) da \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times \rho_s (1-n) \mathbf{V}^s d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times \rho_f n \mathbf{V}^f d\Omega_t \\ = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) da \end{aligned} \quad (3.14)$$

Onde a primeira expressão é relativa a conservação de *momentum* linear e a segunda indica a conservação de *momentum* angular. O vetor \mathbf{f} que aparece nas expressões (3.13) e (3.14) está relacionado as forças de corpo existentes dentro do domínio como um todo, não sendo dependente de nenhuma das fases (sólido ou fluido) em particular.

Seja γ^s e γ^f respectivamente as acelerações da matriz sólida e do fluido nos poros, então do teorema da divergência e da conservação de energia pode-se propor que o comportamento dinâmico do meio poroso seja regido de maneira genérica pelas equações (Biot, 1956):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} (\rho_s (1-n) \gamma^s + \rho_f n \gamma^f) d\Omega_t &= \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) da \\ \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\rho_s (1-n) \gamma^s + \rho_f n \gamma^f) d\Omega_t \\ &= \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) da \end{aligned} \quad (3.15)$$

Onde a primeira e a segunda equação descrevem respectivamente as forças dinâmicas e o *momentum* angular dinâmico no corpo contido no domínio ômega.

A equação geral do movimento pode ser escrita como uma resultante dinâmica local, substituindo o vetor \mathbf{T} pelo seu respectivo tensor. Logo, aplicando a generalização do tensor de \mathbf{T} na equação das forças dinâmicas obtém-se:

$$\int_{\Omega_t} (\rho \mathbf{f} - \rho_s(1-n)\gamma^s - \rho_f n \gamma^f) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (3.16)$$

Pelo teorema da divergência, o que passa pela fronteira do domínio deve ser igual ao divergente desta mesma quantidade no interior do domínio, logo:

$$\int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\Omega_t} \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega_t \quad (3.17)$$

Então a força dinâmica resultante pode ser expressa como:

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_s(1-n)(\mathbf{f} - \gamma^s) + \rho_f n(\mathbf{f} - \gamma^f) = 0 \quad (3.18)$$

Onde se foi permitido abandonar o operador de integração pois a resultante independe do domínio escolhido para ser analisado.

3.2. Energia no material poroso.

3.2.1. Teorema da energia cinética e a energia de deformação.

Em um material poroso, isotérmico, elástico, definido por um volume Ω e delimitado por uma fronteira $\partial\Omega$, a energia livre do sistema fluido-sólido corresponde a energia de deformação deste mesmo (Biot 1956, 1961;

Coussy, 1989). Em outras palavras, a variação da energia de deformação é igual ao trabalho virtual realizado pelos esforços existentes na fronteira do domínio. Tal relação já foi parcialmente descrita quando as forças dinâmicas resultantes foram formuladas com ajuda do teorema da divergência (Biot, 1962, 1972).

A taxa de trabalho realizado por deformação está diretamente associada com o campo de velocidades \mathbf{V} imposto ao domínio total. Esta taxa depende das forças atuando na superfície, forças de corpo e forças de inercia. Primeiramente se admite que a resposta para um campo de velocidade \mathbf{V} imposto ao domínio seja um campo de velocidade \mathbf{V} idêntico para o fluido e para a matriz sólida. Nesta hipótese tem-se que:

$$\dot{W}(\mathbf{V}) = \int_{\Omega_t} \rho f \cdot \mathbf{V} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} da - \int_{\Omega_t} (\rho_s(1-n)\boldsymbol{\gamma}^s + \rho_f n \boldsymbol{\gamma}^f) \cdot \mathbf{V} d\Omega_t \quad (3.19)$$

Pelo teorema da divergência e admitindo que o tensor de tensões seja simétrico, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V} da = \int (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \mathbf{V} \cdot (\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma})) d\Omega_t \quad (3.20)$$

Onde \mathbf{d} é a taxa de deformação dependente do campo de velocidades \mathbf{V} , ou seja, \mathbf{d} precisa adotar simetria e ter relação direta com o gradiente espacial de \mathbf{V} . A notação de multiplicação com dois pontos indica uma multiplicação entre dois tensores de ordem dois invocando a somatória Einsteiniana. Logo:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{V} + \nabla_x^t \mathbf{V}) \quad (3.21)$$

Se faz natural questionar o que aconteceria em um cenário no qual o campo de velocidades do fluido não seja o mesmo dos sólidos. Tal hipótese parte do princípio de que o solo é um material composto por duas fases distintas e que materiais distintos possuem cinemáticas distintas (Parker et al, 1987; Biot, 1962; Coussy, 1989) e logo responderiam diferentemente a um mesmo estímulo interno. A equação da energia de deformação pode então ser reescrita sob a forma:

$$\begin{aligned} \dot{W}(\mathbf{V}^s, \mathbf{V}^f) = & \int_{\Omega_t} (\rho_s(1-n)\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}^s + \rho_f n \mathbf{f} \cdot \mathbf{V}^f) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}^s \cdot \mathbf{V}^s + \mathbf{T}^f \cdot \mathbf{V}^f) da \\ & - \int_{\Omega_t} (\rho_s(1-n)\boldsymbol{\gamma}^s \cdot \mathbf{V}^s + \rho_f n \boldsymbol{\gamma}^f \cdot \mathbf{V}^f) d\Omega_t \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sejam as equações de equilíbrio local para cada uma das fases constituintes do solo:

$$\nabla_x \cdot [(1-n)\boldsymbol{\sigma}^s] + \rho_s(1-n)(\mathbf{f} - \boldsymbol{\gamma}^s) + \mathbf{f}_s^f = 0 \quad (3.23)$$

$$\nabla_x \cdot (n\boldsymbol{\sigma}^f) + \rho_f n(\mathbf{f} - \boldsymbol{\gamma}^f) + \mathbf{f}_f^s = 0 \quad (3.24)$$

Onde \mathbf{f}_a^b representa a força de interação que a fase b exerce na fase a , a equação da energia de deformação para campos de velocidades diferentes para cada fase se torna:

$$\begin{aligned}
\dot{W}(\mathbf{V}^s, \mathbf{V}^f)_{local} &= \int_{\Omega_t} (1 - n) \boldsymbol{\sigma}^s : \mathbf{d}^s d\Omega_t + \int_{\Omega_t} n \boldsymbol{\sigma}^f : \mathbf{d}^f d\Omega_t \\
&+ \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_s^f \cdot (\mathbf{V}^s - \mathbf{V}^f) d\Omega_t
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

Sendo o último termo a direita da equação a taxa de trabalho por deformação gerado pela força resultante da diferença de velocidade entre as duas fases (Coussy, 2002).

Este resultado é de extrema importância para este trabalho. A natureza e consequências desta força de interação e da diferença de velocidade entre as duas fases serão estudadas a presente em maior profundidade e busca-se compreender como o acoplamento da dinâmica de duas fases distintas que compõe um mesmo material afeta a capacidade e maneira de dissipar energia deste último.

3.2.2. Introdução a termodinâmica do meio poroso

A termodinâmica é uma poderosa ferramenta de análise das transformações de toda e qualquer forma de energia em um sistema em evolução. Esta subárea da termostática se baseia em duas grandes leis. A primeira garante que toda forma de energia se preserva, logo, a energia não se perde nem se cria. A segunda lei afirma que durante o processo de evolução de um sistema, a qualidade da energia, ou seja, a sua capacidade de transformação, se deteriora de maneira obrigatória ao longo do processo. Como afirma-se que a flecha do tempo evolui em uma só direção, a qualidade da energia pode somente se deteriorar.

A primeira lei da termodinâmica aplicada a um material poroso pode ser expressa na seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^s}{dt} \int_{\Omega_s} \rho_s (1 - n) \left(e_s + \frac{1}{2} (\mathbf{V}^s)^2 \right) d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_f n \left(e_f + \frac{1}{2} (\mathbf{V}^f)^2 \right) d\Omega_t \\
& = \dot{W}[\mathbf{f}, \mathbf{t}](\mathbf{V}^s, \mathbf{V}^f) + \dot{Q}
\end{aligned}
\tag{3.26}$$

Onde $[\mathbf{f}, \mathbf{t}]$ indica que a taxa de trabalho por deformação é referente somente as forças externas aplicadas ao material. Na equação (3.26) e_s e e_f representam respectivamente a energia interna específica (por unidade de volume) da fase sólida e do fluido. A parcela dependente do campo de velocidades \mathbf{V} é a energia cinética por unidade de volume. Entende-se que a energia interna de um material sólido é dependente da taxa de deformação a qual ele está submetido (Coussy, 1989, 2002).

A segunda lei da termodinâmica, por sua vez, pode ser formulada para meios porosos a partir a análise da evolução da entropia relativa a cada fase. Logo tem-se que:

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_s (1 - n) S_s d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_f n S_f d\Omega_t \geq \int_{\partial\Omega_t} -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} da
\tag{3.27}$$

Onde S_s e S_f são respectivamente as entropias de cada fase por unidade de volume, \mathbf{q} é o fluxo de calor que cruza a fronteira do material e T é a temperatura local. Colocando todos os termos a esquerda da equação obtém-se consequentemente:

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_s (1 - n) S_s d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_f n S_f d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} da \geq 0
\tag{3.28}$$

Esta equação é de grande importância para o entendimento dos mecanismos de dissipação de energia do material poroso. Além de enfatizar que o sistema sempre tende a perder energia, ela aponta que tal

evolução das energias depende da maneira como a energia do sólido evolui, a do fluido evolui, assim como a influência das energias externas.

3.2.3. Identificação de processos de dissipação

Sabe-se a presente que o comportamento energético de um material poroso (o solo neste estudo) depende da evolução dos estados de cada fase que o compõe. Definindo-se que o material poroso tende sempre a perder energia durante qualquer transformação e invocando a desigualdade de Clausius-Duhem para a deformação de um meio poroso contínuo, a taxa de dissipação de energia total pode ser representada pela forma (Coussy, 2002):

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_f + \Phi_t \geq 0 \quad (3.29)$$

Sendo as três parcelas a direita da igualdade, respectivamente, a taxa de dissipação de energia do sólido, do fluido e a taxa de dissipação de energia térmica. A perda de energia térmica não será abordada neste estudo, portanto a última das três parcelas a direita da igualdade será descartada das futuras formulações. As outras duas parcelas referentes ao fluido e ao sólido podem ser expandidas e formuladas como:

$$\Phi_s = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + p \frac{d\phi}{dt} - \frac{d\psi_s}{dt} \geq 0 \quad (3.30)$$

$$\Phi_f = \Phi_f = (-\nabla_x p + \rho_f (\mathbf{f} - \boldsymbol{\gamma}^f)) \cdot \boldsymbol{\Lambda} \geq 0 \quad (3.31)$$

Onde $\varphi_f \cdot d\Omega_t = \Phi_f \cdot d\Omega_0$, porém para variações infinitesimais as matrizes de transporte e transformação de vetores entre os dois referenciais tende a ter valor unitário, logo os valores para os dois referenciais tendem a ser muito próximos podendo assim serem considerados idênticos. A quantidade Λ que aparece ao final da parcela de dissipação do fluido é o

vetor filtro que caracteriza a velocidade relativa entre o fluido e a matriz sólida (Coussy, 2002). A parcela da dissipação de energia do fluido é então formulada com base nos movimentos relativos entre o fluido e o sólido, as forças geradas por estes movimentos e o efeito da viscosidade na interface. Portanto se torna natural avançar a hipótese de que a força gerada pela diferença de velocidades vai por sua vez afetar a dinâmica da matriz sólida que irá por consequência afetar a dinâmica do fluido nos poros. Este é então a principal motivação de um estudo acoplado.

Nota-se que dentro da parcela de dissipação da matriz sólida existe uma sub-parcela relativa a deformação mecânica da matriz propriamente dita, uma segunda parcela relativa a deformação dos poros devido a poropressão ou forças em geral atuantes no interior dos poros e uma parcela de variação de energia interna do material. Esta última parcela, que envolve propriedades intrínsecas do material poroso, será abordada com mais detalhes ao longo do trabalho.

3.3. Análise dos mecanismos de dissipação

3.3.1. Dissipação por trabalho mecânico de deformação.

É considerado na engenharia geotécnica que somente as deformações cisalhantes dissipam energia. A partir desta afirmação uma variedade de modelos constitutivos para solos baseados em estados críticos foram desenvolvidos. Considera-se que as tensões normais de um elemento de solo em equilíbrio gerem somente uma deformação volumétrica do material e não causam distorção nem levam o material a ruptura. Seja então a parcela de trabalho da deformação:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \frac{dW_\varepsilon}{dt} \quad (3.32)$$

Expandindo o tensor das taxas de deformação \mathbf{d} obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma} : \left[\frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{V}^s + \nabla_x^t \mathbf{V}^s) \right] = \frac{dW_\varepsilon}{dt} \quad (3.33)$$

Porém, considerando a hipótese de que somente as deformações cisalhantes geram dissipação de energia por trabalho, podemos considerar somente os cisalhamentos puros presentes no tensor e multiplica-los por suas correspondentes taxas de deformação cisalhantes. Reduzindo a relação constitutiva generalizada da lei de Hooke para somente o caso de deformações planas e puramente cisalhantes, o tensor de quarta ordem referente aos coeficientes elásticos se reduz por sua vez a somente o módulo de cisalhamento G . Obtém-se então a relação entre tensão e deformação utilizada na interpretação do amortecimento histerético no espaço τ - γ avaliando-se puramente a razão entre as áreas entre a curva e o eixo das abscissas e a área contida no laço de histerese. A parcela mecânica devido ao trabalho dissipativo por deformação se escreve como já presente na literatura como:

$$\Delta W = \int_{\gamma} g(\gamma) d\gamma = \int_t (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) dt \quad (3.34)$$

Onde $g(\gamma)$ é a curva fechada no espaço tensão deformação correspondendo ao laço de histerese em um ciclo. A integração no tempo se faz necessária pois \mathbf{d} está em função das velocidades e deve ser transformado em deslocamentos para que os operadores do gradiente presentes em sua formulação transformem esses deslocamentos em deformações. Percebe-se então que ao dividir esta dissipação de energia pela energia previamente acumulada durante o carregamento, encontra-se o conhecido amortecimento histerético proposto na literatura (Hardin, 1965; Seed e Idriss, 1970; Crandall 1985). Nota-se também que este amortecimento, segundo a formulação poromecânica recém mencionada, é apenas uma das parcelas responsáveis pela perda de energia do solo submetido a vibrações. Propõe-se então que as o amortecimento possa ter em sua formulação fenômenos dependentes das interações fluido-sólido (Biot, 1972; Coussy; 1989, Miura, 2001).

3.3.2. Acoplamento da dinâmica da matriz sólida com a dinâmica do fluido e a natureza das forças de interface.

Foi exposto nas seções precedentes que, devido a um movimento relativo entre o sólido e o fluido, forças de interação surgem no interior dos poros. Quando se analisa o movimento do fluido a partir do deslocamento do sólido, isto é, considerando um fluido inicialmente estático (sem fluxo) no qual um sólido se move repentinamente, pode-se afirmar que o sólido gera uma força no fluido provocando movimento neste último e fazendo com que o movimento do próprio fluido afete o movimento do sólido. Este tipo de problema físico é modelado matematicamente a partir de técnicas de acoplamento entre as dinâmicas do fluido e do sólido.

Um dos princípios fundamentais da física é que as quantidades medidas por leis devem ser invariantes ao referencial. Para atender a esta condição, deve-se formular leis físicas a partir de quantidades adimensionais representativas de cada parcela que possa influenciar no fenômeno a ser descrito. Para definir o número de parâmetros adimensionais necessários para modelar um fenômeno físico, neste caso o acoplamento entre fluido e sólido, deve-se invocar o teorema central de Vaschy-Buckingham. Sejam as quantidades abaixo os parâmetros dimensionais referentes ao fluido e ao sólido, necessários para a descrição do problema:

Tabela 3.1 - Parâmetros e variáveis referentes a cada fase do problema de acoplamento (autor, 2018)

Fluido		Sólido	
Coordenadas	\mathbf{x}	\mathbf{x}	Coordenadas
Tempo	t	t	Tempo
Campo de Velocidades	\mathbf{V}^f	ξ	Campo de Deslocamento
Viscosidade	μ	E	Rigidez
Dimensão	L	L	Dimensão
Gravidade	g	g	Gravidade
Densidade	ρ_f	ρ_s	Densidade
Velocidade Inicial	\mathbf{V}_0^f	ξ_0	Deslocamento Inicial

Seja G uma função arbitrária dependente de onze parâmetros tal que:

$$G \rightarrow G(\mathbf{V}^f, x, t, \mu, \rho_f, \mathbf{V}_0^f, L, g, E, \rho_s, \xi_0) \quad (3.35)$$

E sejam todos os seus parâmetros referentes as três unidades fundamentais L (espaço), T (tempo) e M (massa). Utilizando-se do teorema central de Vaschy-Buckingham é possível escrever que um parâmetro arbitrário x tem suas unidades pautadas na relação:

$$[x] = L^\alpha M^\beta T^\gamma \quad (3.36)$$

Neste sentido, L , M e T serão componentes do vetor coluna indicador das potências alfa, beta e gama para cada parâmetro. Assim sendo, do teorema de Vaschy-Buckingham obtém-se:

$$\left\{ V^f \quad x \quad t \quad \mu \quad \rho_f \quad V_0^f \quad L \quad g \quad E \quad \rho_s \quad \xi_0 \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ M \\ T \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.37)

Onde o vetor das unidades fundamentais possui três elementos e o número total de parâmetros dimensionais é de onze elementos. O número de parâmetros adimensionais necessários para a formulação das equações de acoplamento será então o resultado da subtração do número de parâmetros dimensionais pelo número de parâmetros de unidade fundamentais, ou seja, $11-3 = 8$.

A literatura já possui alguns parâmetros adimensionais relativos a dinâmica dos fluidos que podem ser escritos a partir dos parâmetros dimensionais propostos no problema. Sejam eles:

$$\frac{V^f}{V_0^f}, \frac{x}{L}, \frac{V_0^f t}{L}, \frac{\rho_f V_0^f L}{\mu}, \frac{V_0^f}{\sqrt{gL}} \quad (3.38)$$

Para o sólido podemos propor as relações adimensionais:

$$\frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_s g L}{E} \quad (3.39)$$

Tem-se a presente sete parâmetros. O teorema de Vaschy-Buckingham afirma que oito parâmetros independentes são necessários para a formulação matemática do problema. A hipótese então é que o oitavo parâmetro seja ele mesmo um elemento com propriedades do fluido

e do sólido em sua composição. Um dos parâmetros possíveis pode ser a relação entre as massas das fases, logo:

$$M = \frac{\rho_f}{\rho_s} \quad (3.40)$$

Ou então uma relação entre as velocidades naturais de cada fase, dada por:

$$V_R = \frac{v_0^f}{\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}} \quad (3.41)$$

Este parâmetro em particular relaciona a velocidade de convecção do fluido com a velocidade da onda elástica no sólido. Foi proposto no início desta seção que as forças que o fluido aplica no sólido é devido ao movimento do próprio sólido em relação ao fluido. Logo, um parâmetro adimensional que relacione tensões e rigidez entre as duas fases seria algo desejável para a formulação do problema. Tal parâmetro já existe na literatura e se denomina Número de Cauchy, que pode ser expresso por:

$$C_Y = \frac{\rho_f v_0^f{}^2}{E} \quad (3.42)$$

Onde o numerador da fração é a força que o fluido faz normal ao sólido e E é o módulo de elasticidade da matriz sólida.

A presente, se faz necessário apresentar as equações que governam a fase sólida e a fase fluida. Estas equações, como reforçado previamente, são derivadas das condições de continuidade e conservação de energia. Para o fluido, a continuidade Lagrangiana se traduz pela conhecida

equação de Navier-Stokes (Lamb, 1879; Bistafa, 2018). Tal afirmação pode ser demonstrada como a seguir:

Seja a equação da conservação de quantidade de movimento, associando-a a segunda lei de Newton:

$$\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{V} d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.43)$$

Onde, separando o tensor \mathbf{T} em um tensor de tensões normais e outro de tensões desviadoras, aplicando o teorema da divergência, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{ij} \mathbf{n}_j) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[-\nabla \cdot p + \mu \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{V}_j^f}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{V}^f) \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (3.44)$$

Distribuindo o operador Nabla (del) para dentro dos parênteses relativos ao tensor desviador:

$$\int_{\Omega} \left[-\nabla \cdot p + \mu \Delta \mathbf{V}^f + \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{V}^f) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{V}^f) \right) \right] d\Omega \quad (3.45)$$

Considerando que a divergência do campo de velocidades no fluido é identicamente igual a zero:

$$\int_{\Omega} (-\nabla \cdot p + \mu \Delta \mathbf{V}^f) d\Omega \quad (3.46)$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{V}^f d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{b}_f d\Omega + \int_{\Omega(t)} (-\nabla \cdot p + \mu \Delta \mathbf{V}^f) d\Omega \quad (3.47)$$

Onde para transformar a equação (3.47) em uma equação diferencial, deve-se passar a derivada em relação ao tempo para dentro da integral. Nas condições (3.13) e (3.14) tal manobra não seria possível pois o domínio

material é dependente do tempo e evolui. Uma ferramenta permitindo congelar o tempo para que se analise o integrando e não o domínio em si deve ser adotada. Seja a equação da conservação de quantidade de movimento reescrita em um domínio fixado em um tempo inicial (0):

$$\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{V}^f d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho V^f (\Gamma(x_0, t), t) \cdot \mathbf{J} d\Omega_0 \quad (3.48)$$

Nota-se a presença de um Jacobiano \mathbf{J} que mapeia o domínio em um tempo genérico a partir do domínio inicial em $t=0$. Há também o aparecimento de uma função gama $\Gamma(x_0, t)$, correspondente a nova posição de um ponto qualquer no domínio Ω_0 em um tempo t , que age como um mapa symplectomórfico de Ω_0 em um Ω qualquer. A derivada temporal pode então passar para dentro da integral e aplicando-a em todos os componentes da função, pela regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{V}^f d\Omega = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}^f) \mathbf{J} + \rho \mathbf{V}^f \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) d\Omega_0 \quad (3.49)$$

Utilizando-se do lema que a derivada temporal de um Jacobiano é igual ao divergente da quantidade que este mesmo mapeia, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{V}^f d\Omega = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}^f) \mathbf{J} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{V}^f) \mathbf{J} \right) d\Omega_0 \quad (3.50)$$

Colocando o Jacobiano em evidência:

$$\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{V}^f d\Omega = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}^f) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{V}^f) \right) \mathbf{J} d\Omega_0 \quad (3.51)$$

Onde percebe-se que pela propriedade fundamental do Jacobiano, $\mathbf{J} d\Omega_0 = d\Omega(t)$ e obtém-se finalmente:

$$\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{V}^f d\Omega = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}^f) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{V}^f) \right) d\Omega \quad (3.52)$$

A conservação de quantidade de movimento agora pode ser calculada identicamente em qualquer ponto do domínio, inclusive para um subdomínio tendendo a zero. Logo, toda a informação deve estar concentrada no integrando e, assim sendo, chega-se a expressão da derivada material:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}^f) + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}^f) = \rho \frac{D\mathbf{V}^f}{Dt} \quad (3.53)$$

Logo, ignorando as forças de corpo:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}^f}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{p} + \mu \Delta \mathbf{V}^f \quad (3.54)$$

Conclui-se então que o comportamento de um fluido em repouso excitado pelo movimento repentino de um sólido nele imerso é governado pela equação de Navier-Stokes (Fefferman, 2017), podendo ser escrita sob a forma:

$$\frac{\rho_f d\mathbf{V}^f}{dt} = -\rho_f \mathbf{x} - \nabla_x \mathbf{p} + \mu \Delta \mathbf{V}^f \quad (3.55)$$

E a conservação de massa se traduz por:

$$\text{div} \mathbf{V}^f = 0 \quad (3.56)$$

Para o domínio matemático relativo a matriz sólida, os deslocamentos podem ser simplificados pela aproximação de único modo de vibração. Esta condição garante que o deslocamento do sólido é representado pelo produto entre uma função dependente do tempo por uma segunda função

dependente do espaço. De maneira genérica, os deslocamentos do sólido podem então ser descritos por uma função da forma:

$$\xi(x, t) = q(t)\varphi(x) \quad (3.57)$$

Onde $q(t)$ pode ser a equação de um simples oscilador clássico. Na equação (3.57), a função dependente do tempo é a incógnita do problema pois a parcela dependente do espaço pode ser deduzida por ensaios ou métodos numéricos.

Assim sendo, a equação dependente do tempo pode ser escrita sob a forma:

$$q(t) \rightarrow m \frac{d^2 q}{dt^2} + kq = f(t) \quad (3.58)$$

Uma vez que as equações governantes de cada fase foram descritas, o acoplamento entre elas deve acontecer logicamente na interface entre as duas fases. Na interface duas condições principais devem ser atendidas para que o problema físico seja matematicamente coerente. A primeira condição é chamada de condição cinemática e expressa como os movimentos ocorrem na interface. Admite-se que durante um sismo, para um lençol freático em condição hidrostática, não haja movimentos pré-estabelecidos da fase fluida em relação a fase sólida. Logo, o movimento na interface se faz principalmente pelo movimento do sólido imerso no fluido (Hassan & Kawaii, 2018; Vladimirov, 2005). Um argumento coerente para isso é que se estuda o comportamento de um solo submetido ao carregamento de uma onda S e, como o fluido resiste muito menos ao cisalhamento do que o sólido, então o maior movimento será o deslocamento do sólido durante a passagem da onda. Em notação matemática, expressa-se como:

$$\mathbf{V}^f = \frac{d\xi}{dt} \quad (3.59)$$

Logo:

$$\mathbf{V}^f(x, t) = \frac{dq(t)}{dt} \varphi(x) \quad (3.60)$$

A equação (3.60) afirma que a velocidade do fluido $\mathbf{V}^f(x, t)$ depende do deslocamento do sólido $q(t)$.

A segunda condição necessária na interface é chama de condição dinâmica. Esta condição se refere ao equilíbrio de forças na região do contato sólido-fluido. Se o sólido gera uma força $f(t)$ no fluido então por um mecanismo semelhante a um “feedback”, o fluido colocado em movimento pelo sólido exercerá uma força no sólido e estas duas forças deverão estar em equilíbrio. Seja a força aplicada pelo fluido em uma direção \mathbf{n} qualquer em um ponto qualquer do domínio:

$$[-p\mathbf{I} + \mu(\nabla_x \mathbf{V}^f + \nabla_x^t \mathbf{V}^f)] \cdot \mathbf{n} \quad (3.61)$$

Onde a primeira parcela dentro dos colchetes é a pressão atuando de maneira normal a parede do corpo e a segunda parcela referente a velocidade é a força gerada pela viscosidade (atrito) do fluido com a parede do poro. Logo, numa interface de área infinitesimal dS , o equilíbrio de forças se dá pela relação:

$$\int_{Int} \{[-p\mathbf{I} + \mu(\nabla_x \mathbf{V}^f + \nabla_x^t \mathbf{V}^f)] \cdot \mathbf{n}\} \varphi dS = \mathbf{f} \quad (3.62)$$

As equações (3.61) e (3.62) que governam a dinâmica do fluido e a interação na interface estão formuladas com parâmetros dimensionais. Exige-se então que todos os parâmetros sejam substituídos pelas quantidades adimensionais. Desta forma obtém-se para a fase fluida:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \tilde{x} = \frac{x}{L} \\ V^f \rightarrow \tilde{V}^f = \frac{V^f}{V_0^f} \\ p \rightarrow \tilde{p} = \frac{p}{\rho V_0^{f^2}} \end{array} \right\}$$

(3.63)

Onde deste ponto para frente as quantidades relacionadas ao fluido adotarão o marcador til (~).

Em relação a fase sólida, as quantidades adimensionais podem ser escritas sob a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \bar{x} = \frac{x}{L} \\ q \rightarrow \bar{q} = \frac{q}{\xi_0} \\ f \rightarrow \bar{f} = \frac{f}{k\xi_0} \end{array} \right\}$$

(3.64)

É importante notar que o parâmetro de rigidez k que aparece na força adimensional e na equação do oscilador citada anteriormente não é necessariamente a rigidez real da matriz sólida e sim uma rigidez virtual associada ao oscilador que representa o deslocamento no tempo do sistema fluido-sólido.

Até o presente momento o parâmetro tempo não foi abordado e este possui uma importância crucial na análise do acoplamento dinâmico. O tempo deve ser colocado sob a forma de um fator tempo adimensional que de alguma maneira simbolize um “relógio interno” para cada fase do meio poroso. Estas propriedades serão abordadas com maior profundidade ao decorrer deste trabalho. Sejam os fatores tempo adimensionais para cada fase:

$$T_{fluido} = \frac{L}{v_f} \quad (3.65)$$

$$T_{sólido} = \frac{L}{c} \rightarrow c = \sqrt{\frac{E}{\rho_s}} \quad (3.66)$$

Onde o fator tempo do fluido é relacionado com o tempo de convecção do fluido e o fator tempo do sólido com a velocidade da onda elástica propagada no sólido. O fator tempo normalizado deve corresponder a uma razão entre o tempo real e o tempo interno de cada material. Como a presente análise está sendo realizada em relação a matriz sólida, adota-se:

$$\bar{t} = \frac{t}{T_{sólido}} \quad (3.67)$$

Tem-se então todos os parâmetros e quantidades adimensionais necessários para a formulação do problema matemático do acoplamento. Estas quantidades adimensionais devem agora ser introduzidas nas equações que governam cada fase e a interface, substituindo os parâmetros dimensionais destas. Para as equações governantes da fase fluida, a substituição gera:

$$\frac{\rho dV^f}{dt} = -\rho g x - \nabla_x p + \mu \Delta V^f \rightarrow \frac{c}{V_0^f} \frac{d\widetilde{V}^f}{dt} = -\frac{gLx}{V_0^{f^2}} - \nabla_x \widetilde{p} + \frac{\mu}{\rho_f V_0^{fL}} \Delta \widetilde{V}^f \quad (3.68)$$

$$\text{div} V^f = 0 \rightarrow \text{div} \widetilde{V}^f = 0 \quad (3.69)$$

Pelo mesmo processo de substituição dos parâmetros dimensionais pelas quantidades adimensionais, as equações governantes da matriz sólida se tornam:

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} + kq = f \rightarrow m \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \right)^2 \xi_0 \frac{d^2 \bar{q}}{d\bar{t}^2} + k \xi_0 \bar{q} = k \xi_0 \bar{f} \quad (3.70)$$

As equações de interação entre as fases na interface podem ser reescritas então como:

$$V^f(x, t) = \frac{dq(t)}{dt} \varphi(x) \rightarrow \frac{V_0^{fT_{solido}}}{L} \widetilde{V}^f = \frac{\xi_0}{L} \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} \varphi(x) \rightarrow U_R \widetilde{U} = D \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} \varphi(x) \quad (3.71)$$

$$\int_{Int} \{ [-p\mathbf{I} + \mu(\nabla_x V^f + \nabla_x^t V^f)] \cdot \mathbf{n} \} \varphi dS = f \rightarrow \quad (3.72)$$

$$\int_{Inter} \left\{ \frac{\rho_f V_0^{f^2} L}{k} \left[-\widetilde{p}\mathbf{I} + \frac{\mu}{\rho_f V_0^{fL}} (\nabla \widetilde{V}^f + \nabla^t \widetilde{V}^f) \right] \cdot \mathbf{n} \right\} \varphi dS = \frac{\xi_0}{L} \bar{f} \quad (3.73)$$

Naturalmente surge o questionamento sobre a real necessidade de transformar todos os parâmetros em quantidades adimensionais. Com as formulações refeitas em termos de quantidades sem dimensão, tem-se uma maior evidência sobre a influência de todas essas quantidades no fenômeno estudado e pode-se então identificar a importância de cada termo e permitir que simplificações sejam feitas em algumas condições. Para as futuras formulações que aparecerão neste trabalho, será

necessário realizar novas relações adimensionais entre os parâmetros dimensionais. Desta vez, parâmetros mistos (propriedades do fluido e do sólido) serão gerados para reforçar a ideia do acoplamento entre as dinâmicas das duas partes.

3.3.3. Efeito da velocidade reduzida suficientemente pequena.

O parâmetro adimensional chamado “velocidade reduzida” é a razão entre as velocidades intrínsecas de cada material que compõe o meio poroso. Isto é, ele correlaciona os períodos fundamentais de oscilação ou transporte de cada meio por uma razão direta entre eles. O parâmetro V_R pode ser visto então como T_S/T_F . No interior do domínio fluido, sabe-se que:

$$\frac{T_S}{T_f} = \frac{v_0^f}{c} \ll 1 \quad (3.74)$$

Logo admite que dentro do domínio o fluido pode ser considerado estático. Na interface, admite-se que a velocidade do fluido é dada diretamente pelo movimento do sólido. Na interface:

$$v^f = \frac{d\xi}{dt} \quad (3.75)$$

E sabe-se que o deslocamento evolui com respeito ao período fundamental do sólido T_s . Logo a ordem de grandeza da velocidade do fluido na interface é dada por:

$$\frac{d\xi}{dt} = O\left(\frac{\xi_0}{T_s}\right) = v^f \quad (3.76)$$

Se dentro do domínio do fluido a velocidade inicial é de ordem próxima a zero, pode-se propor que o fenômeno estudado corresponde a um sólido oscilando dentro de um fluido estático. Na interpretação poromecânica onde trabalha-se com a velocidade relativa entre as fases, tem-se, portanto, que a velocidade relativa pode ser considerada a própria velocidade do sólido. Além disso pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{v_{0Ts}^f}{L} \ll \frac{\xi_0}{L} \rightarrow V_R \ll D \quad (3.77)$$

Entende-se então que a velocidade inicial do fluido não é importante para o desenvolvimento do acoplamento para este cenário. Se torna necessário ponderar que, mesmo escolhendo-se negligenciar a velocidade inicial do fluido, esta pode ser considerada se necessário em outras análises. Em um caso de fluxo pela fundação em uma barragem, a velocidade inicial do fluido pode trazer consequências para as formulações matemáticas da vibração do solo durante um sismo.

Foi visto até o presente momento que em algumas quantidades adimensionais geradas para formular o problema, a velocidade inicial do fluido compõe as expressões. Afirmou-se anteriormente que a velocidade inicial do fluido pode ser desprezada. Deve-se então reformular as quantidades adimensionais em razão de uma outra velocidade que não seja a inicial do fluido. Propõe-se então de substituí-la pela velocidade da onda elástica no sólido. Logo, obtém-se quantidades adimensionais já conhecidas na literatura como o número de Stokes, Froud dinâmico e razão das massas:

$$S_T = \frac{\rho_f c L p}{\mu} ; \quad F_D = \frac{c}{\sqrt{gL}} ; \quad M = \frac{\rho_f c^2}{E} = \frac{\rho_f}{\rho_s} \quad (3.78)$$

Estes novos parâmetros permitirão a análise dos efeitos da viscosidade na interface, das ondas de gravidade no fluido e da razão entre as massas no comportamento geral do domínio. Porém, ao analisar-se as equações governantes do domínio fluido e da interface, alguns parâmetros estão normalizados em relação a velocidade inicial do fluido como por exemplo:

$$\widetilde{V}^f = \frac{v^f}{v_0^f}; \quad \widetilde{p} = \frac{p}{\rho_f v_0^{f^2}} \quad (3.79)$$

Substituindo a velocidade inicial do fluido pela velocidade de propagação da onda elástica, obtém-se então:

$$\widetilde{V}^f \rightarrow \overline{V}^f = \frac{v^f}{c} \quad (3.80)$$

$$\widetilde{p} \rightarrow \overline{p} = \frac{p}{\rho_f c^2} \quad (3.81)$$

As equações governantes do domínio fluido e da interface passam então a ser escritas respectivamente como:

$$\text{div} \overline{\mathbf{V}}^f = 0; \quad \frac{d\overline{\mathbf{V}}^f}{dt} = -\frac{1}{F_D^2} \mathbf{x} - \nabla_x \overline{\mathbf{p}} + \frac{1}{S_T} \Delta \overline{\mathbf{V}}^f \quad (3.82)$$

$$\overline{\mathbf{V}}^f = D \frac{d\overline{\mathbf{q}}}{dt} \boldsymbol{\varphi}(x); \quad \int_{Int} \left\{ M \left[-\overline{\mathbf{p}} \mathbf{I} + \frac{1}{S_T} (\nabla_x \overline{\mathbf{V}}^f + \nabla_x^t \overline{\mathbf{V}}^f) \right] \mathbf{n} \right\} \boldsymbol{\varphi} dS = D \overline{\mathbf{f}} \quad (3.83)$$

Assume-se agora uma outra forte condição: Os deslocamentos na matriz sólida são de baixas amplitudes. Isto é, o deslocamento de um ponto referencial na matriz é desprezível em relação ao tamanho total da matriz sólida. Tal condição pode ser forçada pois sabe-se que a ordem das amplitudes de uma vibração devido a propagação de ondas em um solo é da ordem de 10^{-6}m . Esta relação pode ser escrita matematicamente como:

$$D = \frac{\xi_0}{L} \rightarrow D \ll 1 \quad (3.84)$$

A teoria da elasticidade linear parte do princípio que para deformações muito pequenas, os termos de ordem maior são perfeitamente desprezíveis em relação ao termo de primeira ordem. Logo, se D é uma quantidade pequena, pode-se expandir os parâmetros adimensionais em uma linearização em relação ao próprio D , isto é:

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + D\bar{p} + D^2 \dots \quad (3.85)$$

$$\bar{V}^f = \bar{V}_0^f + D\bar{V}^f + D^2 \dots \quad (3.86)$$

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + D\bar{q}\varphi \quad (3.87)$$

Ao substituir-se os valores de ordem zero nas equações governantes do domínio fluido, encontra-se as equações da hidrostática onde a pressão depende somente da gravidade e não há velocidade. Porém para este estudo, os valores de ordem zero são pouco relevantes e deseja-se estudar o acoplamento com velocidade de cada fase. Colocando os valores de primeira ordem nas equações que governam o fluido, tem-se:

$$\text{div}\bar{V}^f = 0 \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial \bar{V}^f}{\partial t} = -\nabla_x \bar{p} + \frac{1}{S_T} \Delta \bar{V}^f \quad (3.89)$$

As condições cinemáticas na interface podem então serem escritas sob a forma:

$$D\bar{V}^f = D \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} \varphi \rightarrow \bar{V}^f = \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} \varphi \quad (3.90)$$

Para as condições dinâmicas, ou seja, o equilíbrio de forças na interface, a modificação deve ser mais cuidadosa. Sabe-se que o sólido oscila em contato com fluido e sua oscilação pode ser representada pelo

produto de uma função de dependência temporal e outra espacial. A dependência espacial é aplicada a cada ponto da interface devido a integração na superfície. Esta integração é realizada em relação a posição instantânea (atual) da interface, porém a interface está ela mesma deformada pela interação com o fluido. Invocando mais uma vez o princípio da linearidade por causa das pequenas deformações, pode-se propor que a deformação da matriz sólida é linear e ocorre de maneira similar a uma translação rígida pois o grão é considerado incompressível e indeformável para este nível. Assume-se então que a interface tenha se deslocado de maneira linear descrita por:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + D\bar{q}\varphi \quad (3.91)$$

Em uma condição de translação rígida, o modal de evolução espacial pode ser tirado da integral resultando assim em:

$$M\varphi \int_{Int} \left[\bar{P}I + \frac{1}{S_T} (\nabla_x \bar{V}^f + \nabla_x^t \bar{V}^f) \right] ndS = D\bar{f} \quad (3.92)$$

Onde a pressão e a velocidade do fluido podem ser expandidas em relação a D obtendo-se assim:

$$\bar{P}(\bar{x} + D\bar{q}\varphi) = \bar{P}_0(\bar{x} + D\bar{q}\varphi) + D\bar{p}(\bar{x} + D\bar{q}\varphi) + \dots \quad (3.93)$$

$$\bar{V}^f(\bar{x} + D\bar{q}\varphi) = 0 + D\bar{V}^f(\bar{x} + D\bar{q}\varphi) + \dots \quad (3.94)$$

Pela condição de linearidade a expansão do termo da pressão pode passar a depender somente da pressão inicial e de seu gradiente:

$$\bar{P}(\bar{x} + D\bar{q}\varphi) = \bar{P}_0(\bar{x}) + D\bar{q}\varphi \nabla_x \bar{P}_0 + D\bar{p}(\bar{x}) + \dots \quad (3.95)$$

Ao substituir estes termos expandidos na equação da interface, os D se cancelam e obtém-se finalmente:

$$M\varphi \int_{Int} \left[\bar{p}I + \frac{1}{S_T} (\nabla_x \bar{V}^f + \nabla_x^t \bar{V}^f) \right] ndS - M\bar{q}\varphi \int_{Int} (\nabla_x \bar{P}_0 \varphi) ndS = \bar{f} \quad (3.96)$$

A equação (3.96) é simultaneamente importante e óbvia. Ela ressalta que a força agindo na matriz sólida devido a interação do fluido nos poros com a parede dos poros em si depende da cinemática do fluido nos poros e da pressão hidrostática exercida pelo fluido na matriz sólida. Na mecânica dos solos sabe-se de longa data que este fenômeno é real pois estuda-se a força de arrasto devido ao movimento do fluido nos poros assim como efeito da poropressão hidrostática no comportamento do solo como um todo. O resultado (3.13) e (3.14) deve então ser rigorosamente estudado para melhor entender a influência de cada uma das parcelas em condições dinâmicas do solo.

Aprofundando-se na segunda parcela da equação (3.96), ou seja, na parcela relativa a força gerada pelo gradiente de pressão hidrostático, percebe-se que devido a presença do gradiente na equação da conservação de quantidade de movimento este pode ser substituído por uma função do número de Froud dinâmico na seguinte forma:

$$-\frac{1}{F_D^2} \mathbf{x} - \nabla_x \bar{P}_0 = 0 \rightarrow -\nabla_x \bar{P}_0 = \frac{1}{F_D^2} \mathbf{x} \quad (3.97)$$

Substituindo na segunda parcela da equação obtém-se:

$$\bar{q} \frac{M}{F_D^2} \int_{Int} (\varphi \cdot \mathbf{x})(\varphi \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.98)$$

Onde,

$$\frac{M}{F_D^2} \int_{Int} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}) dS = k_f = \text{constante} \quad (3.99)$$

$$-\bar{q}k_f = \bar{f} \quad (3.100)$$

Logo interpreta-se k_f como um coeficiente de rigidez. O sólido poroso saturado que se movimenta imerso em um fluido com gradiente de pressão é equivalente a um sólido preso por uma mola de rigidez k .

A primeira parcela da equação, ou seja, a parcela referente a pressão gerada no sólido pelo movimento do sólido dentro do fluido e as forças resultantes da viscosidade, depende fortemente da quantidade adimensional denominada número de Stokes. Na mecânica dos fluidos, este parâmetro define o grau de viscosidade do fluido. Um alto número de Stokes torna a parcela do efeito viscoso completamente negligenciável e um baixo número de Stokes induz que a viscosidade seja estudada no fenômeno. Seja o número de Stokes representado por:

$$S_T = \frac{\rho_f c L_p}{\mu} \rightarrow \frac{\rho_f L_p^2}{\mu T_s} \quad (3.101)$$

Onde L sendo alguma dimensão relativa ao poro e μ a viscosidade do fluido, nota-se que o número de Stokes pode variar de muito alto a muito baixo em dependência a esses dois fatores principais na análise poromecânica. A natureza de L será discutida posteriormente. Um solo com baixa porosidade diminui drasticamente o número de Stokes, assim como um solo saturado com óleo, tornando-o aparentemente mais viscoso. O solo com maior porosidade saturado com água se torna então menos viscoso. Analisando somente a viscosidade intrínseca do fluido que compõe o solo, nota-se pelo número de Stokes que um solo seco (saturado com ar) possui a tendência de ser muito menos viscoso do que este mesmo solo saturado com água. Essa viscosidade aparente do sistema se mostra

de grande importância para o amortecimento de oscilações sísmicas no solo.

Biot (1956) propôs um coeficiente de dissipação em sua equação 6.8. Este coeficiente vem da solução exata das equações diferenciais parciais correspondentes a propagação de ondas elásticas em meios dissipativos porosos. O coeficiente é escrito como:

$$b = \frac{\mu n^2}{k'} \quad (3.102)$$

Onde μ corresponde a viscosidade do fluido, n a porosidade volumétrica e k' é relativo ao coeficiente de permeabilidade de Darcy. A relação se dá por:

$$k' = \frac{k\mu}{g\rho_f} \quad (3.103)$$

Onde k é o coeficiente de Darcy em (m/s) e k' em (m²). A equação da perda de carga de Darcy-Weisbach, dependente do comprimento do poro, pode ser escrita como:

$$h_f = \frac{fLV_s^2}{2\delta g} \quad (3.104)$$

Onde f , δ e g são respectivamente o fator de atrito entre o fluido e o sólido, o diâmetro efetivo do poro e a aceleração da gravidade. Logo, experimentalmente, a dimensão L relativa a um comprimento efetivo dos poros (considerados paralelos e cilíndricos) pode ser extraída a partir da equação:

$$\frac{2h_f \delta g}{f V_s^2} = L \quad (3.105)$$

Ao aplicar o coeficiente de dissipação de Biot como parâmetro de amortecimento na equação diferencial da vibração e resolvendo-a no domínio das frequências, obtém-se (Michaels, 2006):

$$L = \left[\frac{G_0}{\omega^2 (1-n) G S \rho_f} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$L_p = 0,00017 \cdot D_{méd} \cdot L \quad (3.106)$$

Sendo a frequência no denominador, relativa a uma oscilação monocromática. Para obter uma aproximação do tamanho real dos poros, partindo de uma distribuição homogênea de suas dimensões, basta multiplicar L por uma razão entre o tamanho médio dos grãos e o tamanho do poro.

Adota-se para este caso que os grãos são perfeitamente circulares e se tangenciam em quatro pontos. A área vazia na região dos contatos entre os grãos pode ter suas dimensões calculadas simplesmente por uma relação de Pitágoras. Admite-se para este trabalho que a relação entre o tamanho de um poro e o diâmetro médio dos grãos seja de 0,00017.

Suponha um solo arenoso medianamente compacto e seco. Em uma visão poromecânica, o sólido poroso está saturado de ar que possui baixa viscosidade intrínseca. Consequentemente este material apresentará um alto número de Stokes. A parcela relativa ao efeito viscoso pode ser então desprezada e a equação que governa o fluido torna-se:

$$\text{div} \overline{\mathbf{V}_f} = 0 \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{V}_f}}{\partial t} = -\nabla_x \overline{\mathbf{p}} \quad (3.108)$$

A na interface as equações se tornam:

$$\overline{\mathbf{V}}_f \cdot \mathbf{n} = \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} \varphi \cdot \mathbf{n} \quad (3.109)$$

$$M \int_{Int} (-\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}) \varphi dS = \bar{\mathbf{f}} \quad (3.110)$$

A equação diferencial ordinária (3.108), junto a sua condição de contorno na fronteira possui solução do tipo:

$$\overline{\mathbf{V}}_f(\mathbf{x}, t) = \frac{d\bar{q}(t)}{d\bar{t}} \varphi(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} \quad (3.111)$$

A velocidade do fluxo está então relacionada com a primeira derivada da posição e a pressão estará relacionada com a segunda derivada da posição, ou seja, a aceleração. Sendo assim, a pressão e velocidade no interior do domínio do fluido se dão por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathbf{p}}^f(\mathbf{x}, t) = \frac{d^2 \bar{q}(t)}{d\bar{t}^2} \varphi_p(\mathbf{x}) \\ \overline{\mathbf{V}}_f(\mathbf{x}, t) = \frac{d\bar{q}(t)}{d\bar{t}} \varphi_v(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (3.113)$$

$$(3.114)$$

Onde para que a solução seja coerente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \overline{\mathbf{V}}_f = 0 \rightarrow \text{div} \varphi_v = 0 \\ \frac{\partial \overline{\mathbf{V}}_f}{\partial \bar{t}} = -\nabla_x \bar{\mathbf{p}} \rightarrow \varphi_v = -\nabla_x \varphi_p \end{array} \right. \quad (3.115)$$

$$(3.116)$$

Substituindo as soluções (3.115) e (3.116) nas condições cinemáticas e dinâmicas da interface, chega-se a:

$$\overline{V_f}(x, t) \cdot \mathbf{n} = \frac{d\bar{q}(t)}{d\bar{t}} \boldsymbol{\varphi}(x) \cdot \mathbf{n}; \quad \boldsymbol{\varphi}_V \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \quad (3.117)$$

$$M \int_{Int} (-\bar{p} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\varphi} dS = \bar{f} \quad (3.118)$$

Logo:

$$\bar{f} = -\frac{d^2\bar{q}(t)}{d\bar{t}^2} \left[M \int_{Int} \boldsymbol{\varphi}_p \cdot \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi} dS \right] \quad (3.119)$$

Nota-se que o termo entre colchetes é uma constante associada à razão entre as massas. Sendo o primeiro termo uma aceleração, deduz-se então que o termo constante entre colchetes seja uma massa. Interpreta-se esse resultado como a adição de uma massa em um sólido que oscila. Um sólido poroso com alto número de Stokes pode ser então representado por um oscilador cuja massa foi aumentada. O aumento da massa em um oscilador aumenta consequentemente o trabalho realizado e diminui a frequência de oscilação. Logo, reescreve-se a equação da interface como:

$$\bar{f} = -\frac{d^2\bar{q}(t)}{d\bar{t}^2} m_A \quad (3.120)$$

O problema de acoplamento então se reduziria a:

$$\frac{d^2\bar{q}(t)}{d\bar{t}^2} (1 + m_A) + \bar{q} = 0 \quad (3.121)$$

É importante que seja analisada a influência desse efeito de adição de massa ao sistema. Se o modal de evolução espacial da velocidade é o resultado do gradiente do modal de evolução espacial da pressão, logo o divergente do modal de evolução espacial da velocidade pode ser escrito como o Laplaciano deste mesmo. Matematicamente tem-se:

$$\boldsymbol{\varphi}_V = -\nabla_x \boldsymbol{\varphi}_p \quad (3.122)$$

$$\text{div} \boldsymbol{\varphi}_V = \text{div}(-\nabla_x \boldsymbol{\varphi}_p) = \Delta \boldsymbol{\varphi}_p \quad (3.123)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varphi}_p = 0 \quad (3.124)$$

E a condição de contorno na interface é:

$$\nabla_x \boldsymbol{\varphi}_p \cdot \mathbf{n} = \varphi \cdot \mathbf{n} \quad (3.125)$$

Seja um sólido circular imerso em um fluido também delimitado por uma zona sólida impermeável circular, gerando um anel de fluido entre dois corpos sólidos como representação de um fluido dentro de um poro. Seja o raio deste sólido imerso igual a um. Em coordenadas polares a solução da equação homogênea de Laplace é:

$$\boldsymbol{\varphi}_p(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{r} \quad (3.126)$$

Logo o modal de evolução espacial da velocidade no fluido pode ser expresso como o gradiente da equação (3.126), assim sendo:

$$\boldsymbol{\varphi}_V = \frac{1}{r^2} [\cos(\theta) \mathbf{r} + \sin(\theta) \boldsymbol{\theta}] \quad (3.127)$$

Sendo o efeito de adição de massa dado pela integral:

$$M \int_{Int} \boldsymbol{\varphi}_p \cdot \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi} dS = m_A \quad (3.128)$$

E impondo mais uma condição de contorno especificando que a distância entre as paredes dos dois sólidos separados pelo fluido seja δ e que δ seja maior ou igual a $r=1$, obtém-se da integral:

$$m_A = M\pi \left(\frac{\delta^2 + 1}{\delta^2 - 1} \right) \quad (3.129)$$

Onde matematicamente percebe-se que se δ tender a 1, o efeito de adição de massa tende ao infinito. Uma massa infinita resultaria em uma frequência de oscilação nula. Este resultado é significativo para a análise do meio poroso pois demonstra que haveria possibilidade de um amortecimento do solo por um parâmetro ligado a aceleração do corpo e não a sua velocidade como classicamente descrito pela literatura. O efeito de massa infinita pode ser interpretado fisicamente como uma necessidade de inércia infinita para que haja movimento do sólido em relação ao fluido (e vice-versa), gerando uma rápida estagnação do movimento oscilatório (Conca et al., 1997).

Busca-se a presente entender como o sólido poroso se comportaria se saturado com um fluido viscoso ou com uma porosidade muito baixa, ou seja, com número de Stokes muito baixo. Uma alta viscosidade, seja pela viscosidade real do fluido ou pelas condições de confinamento deste, anula a parcela da inércia da equação do fluido pois a aceleração experimentada por este é muito inferior ao termo da difusão. Logo, da equação da continuidade de Navier-Stokes, tem-se:

$$0 = -\nabla_x \bar{p} + \frac{1}{S_T} \Delta \bar{V}^f \quad (3.130)$$

Nota-se que a equação, para manter-se coerente, deve ser colocada novamente em escala multiplicando a pressão pelo número de Stokes, resultando assim em:

$$0 = -\nabla_x \bar{p} + \Delta \bar{V}^f \quad (3.131)$$

$$\text{div} \bar{V}^f = 0 \quad (3.132)$$

E na interface as equações das condições cinemáticas e de equilíbrio dinâmico se tornam:

$$\overline{V^f} = \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} \boldsymbol{\varphi} \quad (3.133)$$

$$\bar{f} = \frac{M}{S_T} \int_{Int} \boldsymbol{\varphi} [-\bar{p}I + (\nabla_x \overline{V^f} + \nabla_x^t \overline{V^f})] \mathbf{n} dS \quad (3.134)$$

Para resolver esta equação, uma vez que há ausência do termo relativo a aceleração do fluido em seu domínio, estabelece-se que as funções da velocidade e da pressão sejam da forma:

$$\overline{V^f}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\bar{q}(t)}{d\bar{t}} \boldsymbol{\varphi}_V(\mathbf{x}) \quad (3.135)$$

$$\overline{p^f}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\bar{q}(t)}{d\bar{t}} \boldsymbol{\varphi}_p(\mathbf{x}) \quad (3.136)$$

Desta vez a função da pressão no interior do domínio deve depender somente da velocidade. As condições de conservação de massa implicam que em qualquer parte do domínio fluido garante-se:

$$\text{div} \overline{V^f} = 0 \rightarrow \text{div} \boldsymbol{\varphi}_V = 0 \quad (3.137)$$

$$0 = -\nabla_x \bar{p} + \Delta \overline{V^f} \rightarrow 0 = -\nabla \boldsymbol{\varphi}_p + \Delta \boldsymbol{\varphi}_V \quad (3.138)$$

E na interface com o sólido:

$$\overline{V^f} = \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} \boldsymbol{\varphi}; \quad \boldsymbol{\varphi}_V = \boldsymbol{\varphi} \quad (3.139)$$

Substituindo na equação do equilíbrio de forças na interface (condição dinâmica), chega-se a equação:

$$\bar{f} = - \left[-\frac{M}{S_T} \int_{Int} \boldsymbol{\varphi} [-\boldsymbol{\varphi}_p \mathbf{I} + (\nabla_x \boldsymbol{\varphi}_V + \nabla_x^t \boldsymbol{\varphi}_V) \cdot \mathbf{n} dS] \right] \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} \quad (3.140)$$

Todo o termo entre colchetes que multiplica pelo termo da velocidade é uma constante. Logo nota-se que a força que o fluido exerce na matriz sólida é um amortecimento viscoso (ou clássico). Finalmente, a equação da força que o fluido exerce na matriz sólida pode ser reescrita como:

$$\bar{f} = -c_A \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} \quad (3.141)$$

Onde a resposta do fluido ao movimento da matriz sólida é instantânea.

Se a combinação entre o tamanho médio dos poros e a viscosidade intrínseca do fluido gerarem um número de Stokes intermediário, não muito baixo nem muito alto, não se poderá mais descartar qualquer parcela. Os efeitos de um número de Stokes intermediário (próximo a 1) serão abordados a presente. A equação de Navier-Stokes se apresentará de maneira completa, não omitindo qualquer termo de sua composição. Isto implica em uma não linearidade na resolução da equação diferencial parcial pois o termo relativo a velocidade aparece nos dois lados da equação:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}} \bar{f}}{\partial \bar{t}} = -\nabla_x \bar{p} + \frac{1}{S_T} \Delta \bar{\mathbf{v}} \bar{f} \quad (3.142)$$

As soluções genéricas para este tipo de problema matemático são do tipo:

$$\overline{V^f}(x, t) = A(t)B(x) \quad (3.143)$$

E a função passa então a ter dependência em uma função temporal e na derivada em função do tempo. Fisicamente isto implica o aparecimento de uma escala de tempo intrínseca ao domínio, seja ele sólido ou fluido. Antecipa-se que a resposta do fluido ao movimento da matriz sólida, por consequência, não seja mais instantânea.

Seja um meio poroso saturado e em repouso. Este meio é então perturbado repentinamente por uma força proveniente de um impulso. Matematicamente este impulso pode ser descrito pela função dita Heaviside. Tal função se caracteriza por ter um valor de imagem constante até um determinado valor do domínio. Neste valor específico do domínio ela muda repentinamente o valor de sua imagem, formando um degrau de tangente infinita e logo em seguida um platô que se mantém constante até o infinito. Seja tal função representativa da velocidade da matriz sólida em relação ao tempo. A velocidade é nula até um determinado tempo e repentinamente passa a adotar um valor não nulo positivo. Esta mudança repentina de atitude da função velocidade gera um campo de velocidade e de pressão no interior do fluido.

Por definição, sabe-se que uma função Heaviside é formulada como:

$$\begin{aligned} H(x) &= 0 \rightarrow -\infty < x < 0 \\ H(x) &\neq 0 \rightarrow 0 \leq x < \infty \end{aligned} \quad (3.144)$$

Logo, caso deseja-se computar várias variações repentinas de velocidade ao longo do tempo, a função deve ter deslocada para a direita. Para isso, subtrai-se o argumento da função pelo valor do tempo correspondente ao momento do acréscimo. Se a função deve mudar seu valor repentinamente em um tempo τ , logo a função se torna:

$$H(t - \tau) \neq 0 \text{ em } \tau = t \quad (3.145)$$

Seja uma trajetória de evolução qualquer da velocidade em relação ao tempo e admite-se que qualquer trajetória pode ser consequência de um somatório de funções Heaviside de acréscimos infinitesimais. A função da velocidade torna-se:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \int_0^t \frac{d^2\bar{q}(\tau)}{dt^2} H(t - \tau) d\tau \quad (3.146)$$

Admitindo uma linearidade, a força que o fluido exercerá na matriz sólida será a soma de sucessivos impulsos infinitesimais. Logo a força pode ser reescrita como:

$$\bar{f}(t) = \int_0^t \frac{d^2\bar{q}(\tau)}{dt^2} \bar{f}^{imp}(t - \tau) d\tau \quad (3.147)$$

Onde percebe-se que a equação toma a forma de uma convolução entre a aceleração da matriz sólida e a força gerada no impulso.

A consequência maior desta equação é que a força que o fluido faz nas paredes do poro em um tempo t resulta do histórico de movimentos do próprio fluido até o tempo t , e estes movimentos são eles mesmos causados pelo movimento do sólido inicialmente. Tal fenômeno ocorre somente porque o fluido possui uma escala de tempo própria diferente da escala de tempo da matriz sólida. Este comportamento do fluido dentro dos poros indica um fenômeno interessante para a análise do amortecimento: o fluido amortece o movimento da matriz sólida, mas, por conservação de quantidade de movimento, ele continua se movimentando nos poros gerando forças nas paredes dos poros e iniciando um outro movimento da matriz sólida.

3.4. Equação geral do acoplamento dinâmico

3.4.1. A equação geral e seus componentes

Após o desenvolvimento teórico de cada quantidade adimensional, parâmetros físicos e suas respectivas influências, permite-se propor uma equação geral para que o amortecimento do solo seja explicitado em função da interação com o fluido nos seus poros. Sejam os parâmetros adimensionais m_A , c_A e k_A , todos definidos anteriormente pela interação do fluido com a matriz sólida. A equação geral do oscilador torna-se:

$$m_A \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + c_A \cdot \frac{dx}{dt} = - \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d^2 x(\tau)}{dt^2} * H(t - \tau) \right) d\tau \quad (3.148)$$

Onde para que a equação (3.148) seja considerada um oscilador:

$$- \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d^2 x(\tau)}{dt^2} * H(t - \tau) \right) d\tau = -\bar{q} \cdot \frac{M}{F_D^2} \int_{Int} (\varphi \cdot x)(\varphi \cdot n) dS = k_f \cdot x(t) \quad (3.149)$$

Logo, a equação geral do oscilador amortecido pode ser reescrita como:

$$m_A \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c_A \cdot \frac{dx(t)}{dt} + k_f \cdot x(t) = 0 \quad (3.150)$$

As consequências desta equação serão abordadas com maior profundidade nas seções seguintes deste trabalho.

3.4.2. A aplicação da equação geral do acoplamento

As equações do amortecimento histerético foram desenvolvidas supondo que a real natureza do amortecimento de ondas nos solos e rochas fossem diretamente ligadas a natureza friccional do material geológico. Os ensaios de Idriss, Seed e Hardin evidenciaram que o solo seco apresentava um amortecimento quando em oscilação livre. Admitindo que um ajuste da curva de Ramberg-Osgood, por exemplo, para representar o comportamento do amortecimento histerético do solo seco seja coerente, propõe-se entender os novos mecanismos que influenciariam no amortecimento caso este mesmo solo fosse saturado com água ou outro fluido qualquer. A equação geral do acoplamento proposta anteriormente, tem como proposta ajustar a curva do amortecimento sem recorrer a fatores de correção puramente matemáticos, mas que, de maneira rigorosa, determine a influência das propriedades físicas do meio fluido que satura a matriz sólida.

Propõe-se então que para cada deformação cisalhante haja uma velocidade de cisalhamento e que os parâmetros físicos do solo evoluam com as deformações. Isto indica que para cada novo processo de cisalhamento, haverá uma equação geral do oscilador que gerará valores de m_A , c_A e k_A . Estes valores serão substituídos na equação do oscilador e uma solução genérica da equação diferencial será obtida. Para esta solução, calcula-se o amortecimento da seguinte maneira:

$$D_f = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \quad (3.151)$$

Onde x_1 e x_2 representam a amplitude do movimento oscilatório em tempos sucessivos separados por um período. O amortecimento

encontrado é então adicionado ao amortecimento histerético e o uma nova curva de amortecimento é encontrada referente ao mesmo solo saturado com o fluido desejado.

Admite-se que, por se tratar de uma formulação dependente do módulo elástico G , que o intervalo de deformações admissíveis para o modelo proposto seja inferior ou igual a 10^{-4} . Este intervalo de deformações é caracterizado na literatura como perfeitamente elástico (até 10^{-6}) e elastoplástico (até 10^{-4}). Notou-se que para este intervalo de validade, a variação dos coeficientes da equação diferencial proposta anteriormente é desprezível e que a média dos valores neste intervalo pode ser representativa.

A influência do fluido no amortecimento deverá aparecer na formulação como uma parcela aditiva ao final do amortecimento histerético. Este mesmo amortecimento viscoso devido aos movimentos relativos nos poros deve ser expresso em função da perda de energia que ele proporciona por ciclo de oscilação, assim como a medida do amortecimento histerético. Propõe-se então que a medida do amortecimento viscoso deve ser a taxa de decaimento das amplitudes do oscilador representativo da EDO, que pode ser expresso como uma função da razão de amortecimento.

Seja a função (3.152) representativa da evolução do módulo G normalizado com respeito a amplitude de deformação também normalizada:

$$\frac{G}{G_0} \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_r} \right) = \frac{\gamma_r}{\gamma_a} \left(1 - e^{-\frac{\gamma_a}{\gamma_r}} \right) \quad (3.152)$$

E seja também a equação do amortecimento gerada pela integração da curva histerética de Ramberg-Osgood em função das deformações:

$$D_h = \frac{2}{\pi} \frac{r-1}{r+1} \alpha \frac{\left(\frac{G}{G_0} \gamma'\right)^{r-1}}{1 + \alpha \left(\frac{G}{G_0} \gamma'\right)^{r-1}} \quad (3.153)$$

Onde

$$\gamma' = \frac{\gamma_a}{\gamma_r} \quad (3.154)$$

Substituindo a relação matemática do módulo normalizado na equação do amortecimento histerético obtém-se:

$$D_h = \frac{2}{\pi} \left(\frac{r-1}{r+1}\right) \alpha \frac{\left(\frac{1}{\gamma_r}(1-e^{-\gamma'})\gamma'\right)^{r-1}}{1 + \alpha \left(\frac{1}{\gamma_r}(1-e^{-\gamma'})\gamma'\right)^{r-1}} \quad (3.155)$$

Logo, desejando-se incorporar a equação (3.155) a parcela referente ao amortecimento viscoso, deve-se acrescentar a perda de energia por ciclo devido a força de amortecimento viscoso. Seja esta força a resultante de uma integral fechada em um ciclo da força viscosa, obtém-se:

$$\oint \mathbf{F}_v d\mathbf{x} = \pi C_A \omega |\mathbf{u}|^2 \quad (3.156)$$

Nota-se na equação (3.156) a já esperada dependência na frequência do amortecimento viscoso. Sendo assim, a equação geral do amortecimento, contemplando a parte histerética e a parte viscosa devido a interação do fluido nos poros pode ser escrita sob a forma:

$$D = D_h + D_v = \frac{2}{\pi} \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \alpha \frac{\left(\frac{1}{\gamma'} (1-e^{-\gamma'}) \gamma' \right)^{r-1}}{1 + \alpha \left(\frac{1}{\gamma'} (1-e^{-\gamma'}) \gamma' \right)^{r-1}} + \gamma'^2 \pi C_A \omega \quad (3.157)$$

Se faz necessário lembrar que o parâmetro C_A deve ser calculado a partir dos parâmetros adimensionais previamente descritos.

3.4.3. Perda de estabilidade e comportamento assintótico da função de amortecimento dependente da frequência

Seja o amortecimento total uma função definida na equação (3.157) em uma soma de duas parcelas

$$f(\gamma) = D_h(\gamma) + D_v(\gamma) \quad (3.158a)$$

$$D_h(\gamma) = \frac{\left(\frac{2}{\pi} \right) \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \alpha \left(\frac{G}{G_0} \gamma \right)^{r-1}}{1 + \alpha \left(\frac{G}{G_0} \gamma \right)^{r-1}} \quad (3.158b)$$

$$D_v(\gamma) = C_A \pi \omega \gamma^2 \quad (3.158c)$$

Onde a primeira parcela D_h é o amortecimento histerético dependente somente da degradação do módulo de cisalhamento e do nível de deformações e a segunda parcela D_v é o amortecimento dependente da frequência.

Nota-se que, para o intervalo de estudo da dissertação (Figura 3.2), o amortecimento puramente histerético e o amortecimento total geram resultados ligeiramente diferentes para deformações muito pequenas e há uma maior divergência para valores próximos de 0,01%.

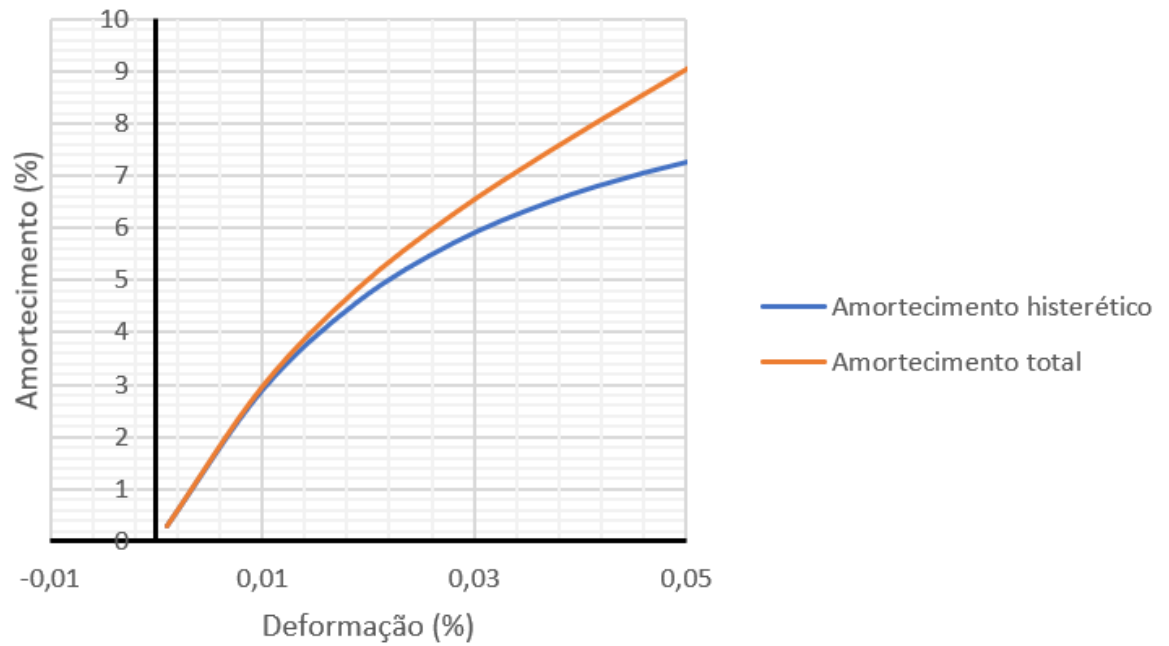


Figura 3.2 - Comparação do amortecimento total com o amortecimento histerético para pequenas deformações (autor, 2018)

Entretanto, ao aumentar a escala de análise, percebe-se que a função de amortecimento total tende a um valor infinito de amortecimento quando as deformações tendem a valores mais altos (0,5%) (Figura 3.3).

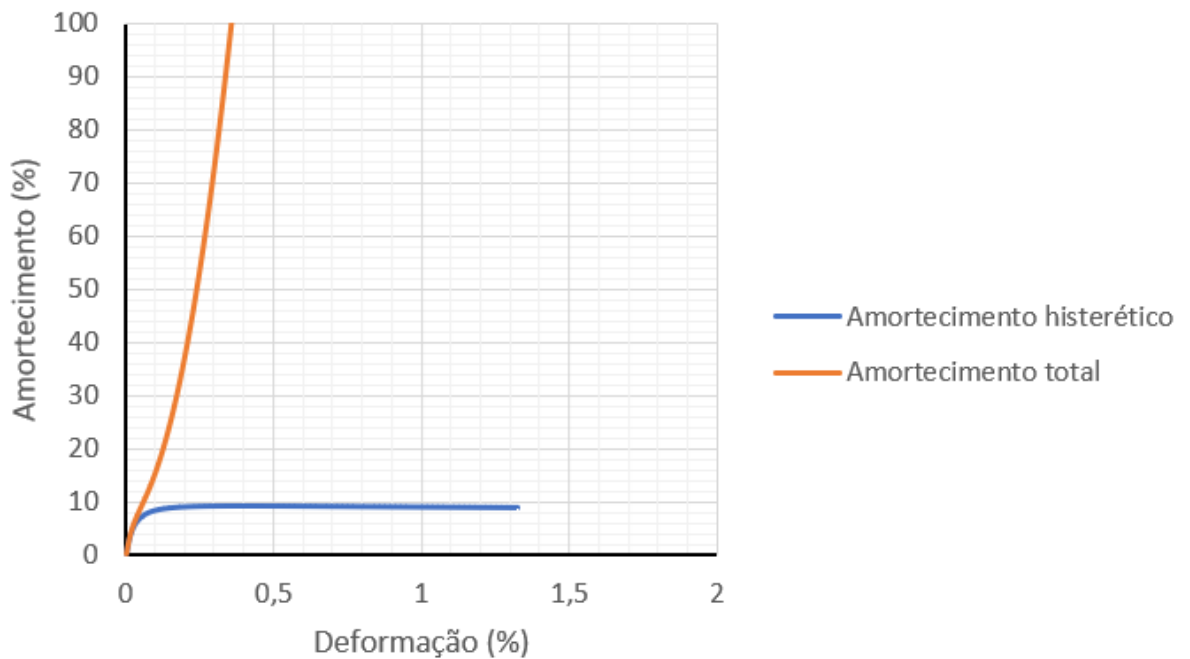


Figura 3.3 - Perda de estabilidade do amortecimento total para médias e grandes deformações (autor, 2018)

Tal comportamento obviamente não condiz com uma função de perda de energia e deveria atingir um valor assintótico horizontal assim como a parcela histerética.

Seja $N(\gamma)$ uma função que possua D_v em sua estrutura tal que:

$$N(\gamma) = \xi(\gamma)D_v(\gamma) \quad (3.159)$$

Que aponte valores assintóticos para $0 < D_v < 100$. As dimensões da função $\xi(\gamma)$ devem garantir que a nova função N não modifique os valores de amortecimento total para deformações muito pequenas, mas que garanta uma assíntota para grandes deformações, assim como encontrado em ensaios de laboratório. Uma assíntota horizontal impõe a condição de uma função fracionária, logo

$$N(\gamma) = \xi(\gamma)D_f(\gamma) = \frac{D_v(\gamma)}{F(\gamma)} = \frac{C_A\pi\omega\gamma^2}{F(\gamma)} \quad (3.160)$$

Sabe-se que para valores de $\gamma \rightarrow \infty$, N deve se manter constante, e para valores de $\gamma \rightarrow 0$, N deve se aproximar de D_v . Logo, a estrutura da nova função deve ser algo como

$$N(\gamma) = \frac{D_v}{1+\beta\gamma} = \frac{C_A\pi\omega\gamma^2}{1+\beta\gamma} \quad (3.161)$$

Pela condição que $0 < D_v < 100$, os valores de β devem ser da ordem de $0 < \beta < 10$ aproximadamente. Tal condição permite então que a função de amortecimento total entre em comportamento assintótico e não perca seus valores para pequenas deformações (Figuras 3.4).

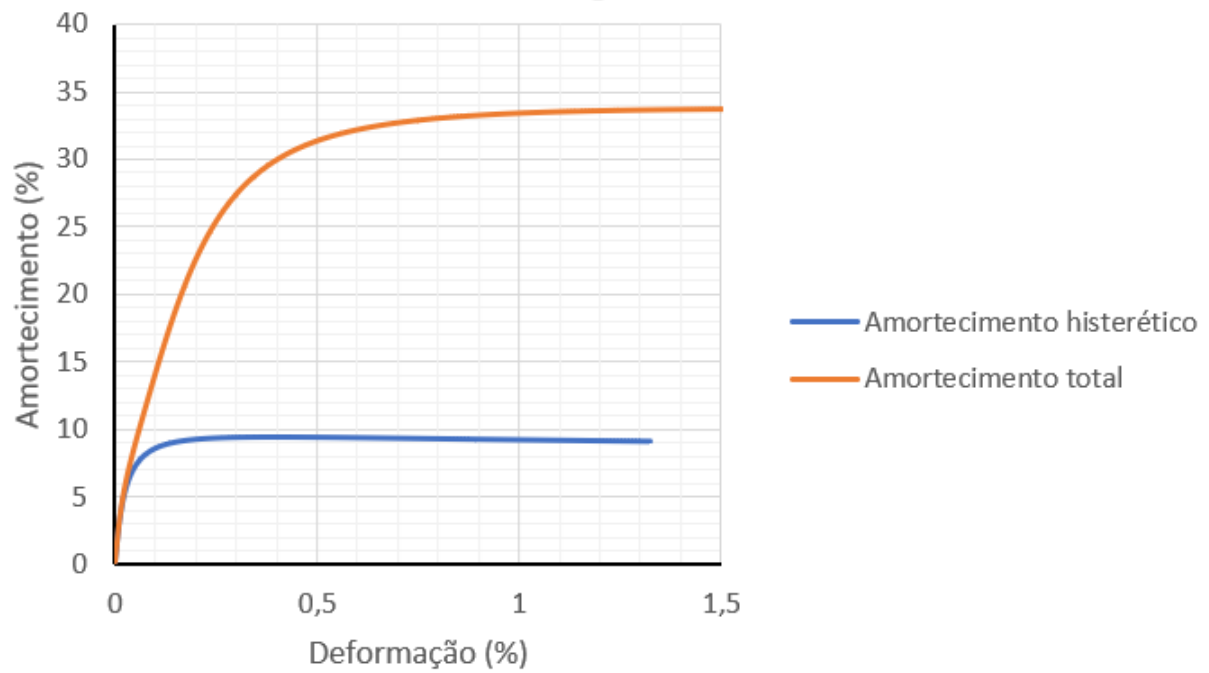


Figura 3.4 - Comportamento assintótico da equação do amortecimento modificada para $\beta = 2,0$ (autor, 2018)

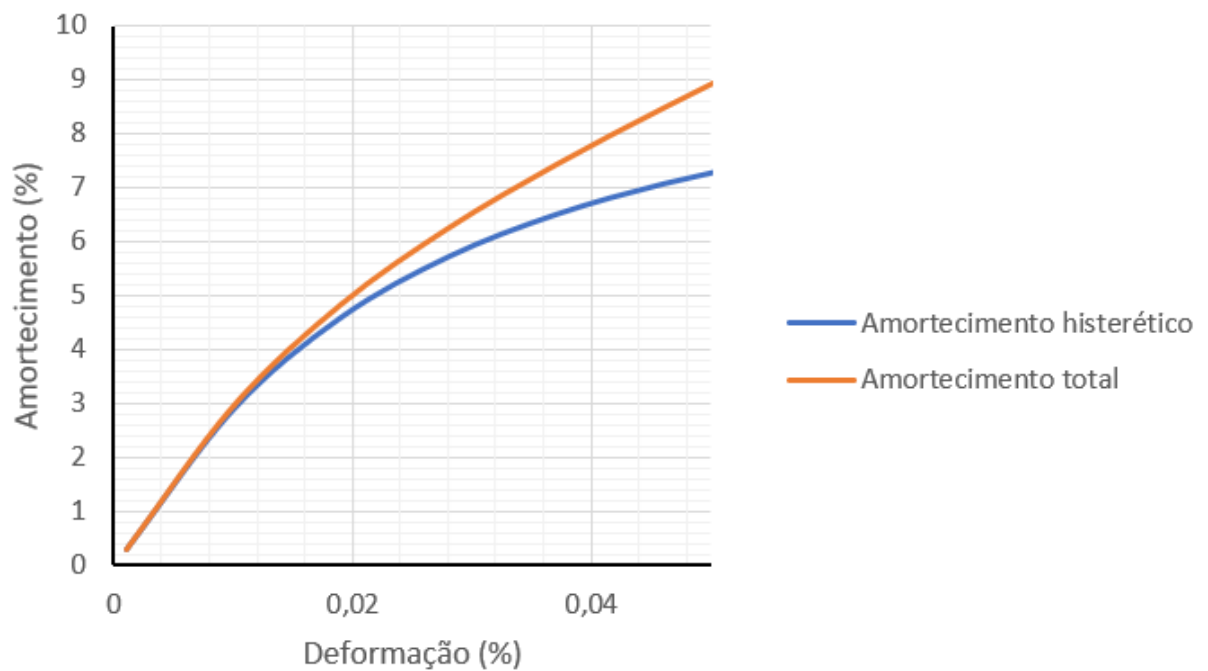


Figura 3.5 - Comparação do amortecimento total modificado com o amortecimento hysterético para pequenas deformações (autor, 2018)

As figuras seguintes (Figuras 3.6 a 3.8) comparam os modelos clássicos da literatura (Seed e Idriss, Darendeli) com o modelo proposto

neste trabalho ajustando-se o parâmetro β . Dentro do modelo proposto, a parte histerética é governada pelas equações hiperbólicas de Ramberg-Osgood, logo, quando a parcela dependente da velocidade tende a zero, o modelo se aproxima de uma solução histerética clássica.

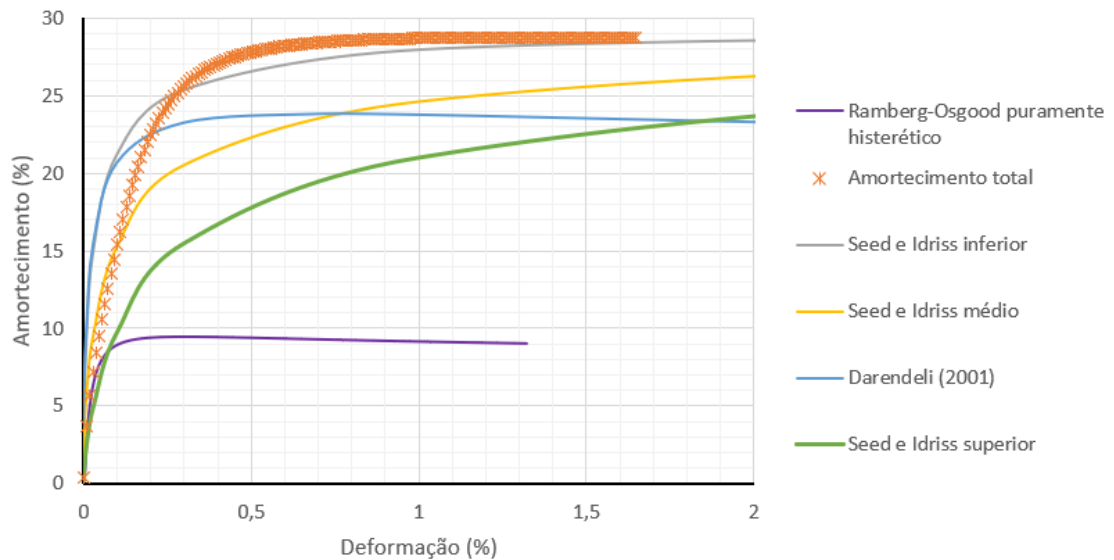


Figura 3.6 - Comparação com outros modelos de amortecimento, $\beta = 5$ (autor, 2018)

Nota-se na figura 3.6 que para um valor de $\beta = 5$ o comportamento assintótico do modelo proposto se aproxima do modelo de Seed e Idriss inferior.

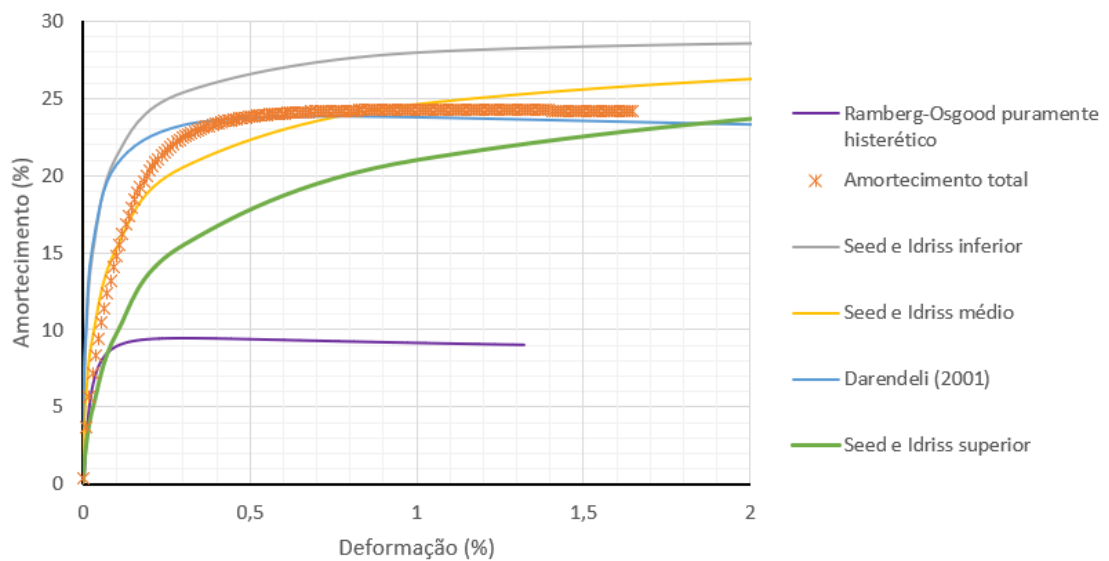


Figura 3.7 - Comparação com outros modelos de amortecimento, $\beta = 6,5$ (autor, 2018)

Para $\beta = 6,5$ o modelo mostra valores entre o modelo de Darendeli (2001) e o modelo médio de Idriss e Seed (1970). Contudo, seu comportamento assintótico está mais próximo do modelo de Darendeli (2001).

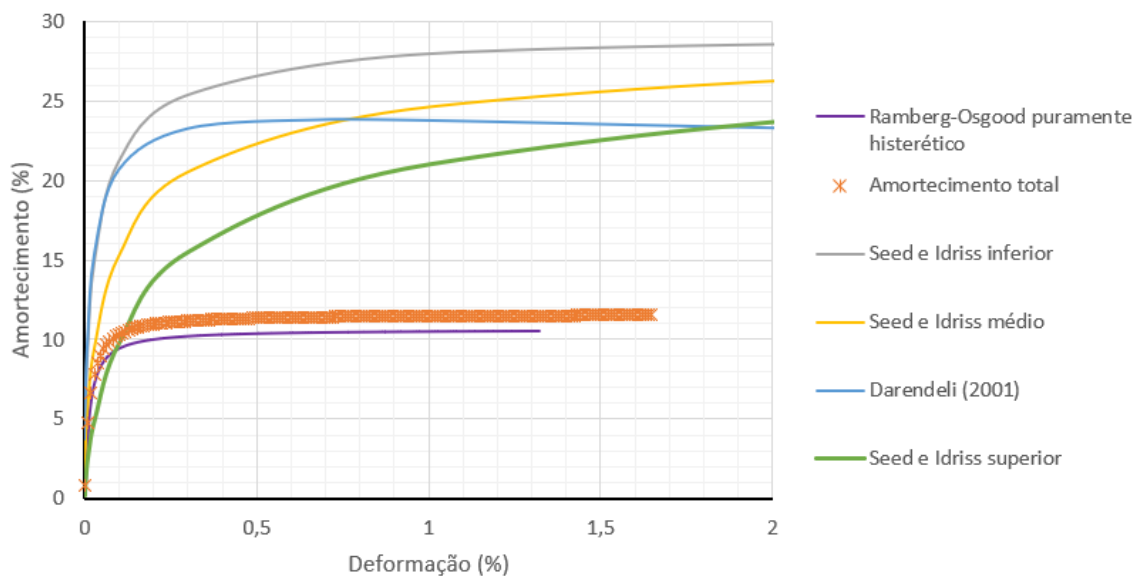


Figura 3.8 - Comparação com outros modelos de amortecimento, $\beta = 100$ (autor, 2018)

A figura 3.8 demonstra que para valores muito altos de β , o modelo perde sua parcela dependente da velocidade e passa a se comportar como um modelo histerético puro do tipo Ramberg-Osgood. A figura 3.9 mostra que o modelo proposto parece corrigir o erro apontado por Ishihara (1996).

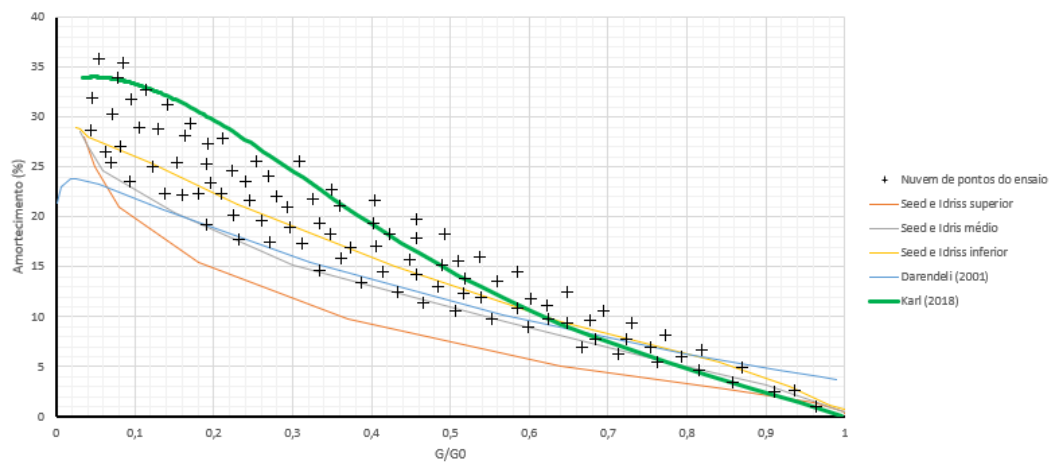


Figura 3.9 - Amortecimento em função da degradação do módulo elástico (Ishihara, modificado, 1995)

4. Resultados e discussões

Para a validação do modelo de amortecimento dependente da frequência, foi utilizado o software DeepSoil V7.0, com implementação das equações propostas. Em primeira análise, ensaios de laboratório mesa vibrante com centrífuga foram realizados em solos secos e saturados com água e óleo (silicone) foram modelados analiticamente e os resultados foram sobrepostos. Em seguida, dados extraídos dos sismógrafos do tipo KiK-Net fornecidos pelo departamento de riscos e desastres do Japão foram simulados no DeepSoil e os valores reais foram comparados com as respostas previstas pelo modelo.

Os sismógrafos KiK-Net registram as acelerações em profundidade na rocha sã e simultaneamente na superfície do perfil, permitindo que a análise da propagação de ondas seja realizada. A validação do modelo foi executada comparando as respostas calculadas na superfície com o real registro de acelerações na superfície. Conhecendo-se o perfil de solo no qual os sismógrafos estão instalados, assim como as propriedades físicas de cada camada, as curvas de amortecimento e degradação do módulo cisalhante foram geradas para cada camada com o modelo que melhor se adapta, dependendo assim da pedologia de cada estrato. Os modelos escolhidos foram os já existentes no programa DeepSoil, sendo estes separados para areias e argilas. Em seguida, para o mesmo perfil de solo, as curvas de amortecimento foram geradas pelas equações apresentadas neste trabalho e as respostas foram devidamente comparadas por superposição.

4.1. Ensaio de laboratório

O primeiro ensaio analisado é um ensaio de mesa vibratória com centrífuga em uma areia quartzosa de alta porosidade e grãos grandes. O ensaio foi realizado em uma frequência de 40 a 150Hz com o mesmo solo

seco e saturado com água e óleo de silicone (30cS e 100cS). As propriedades físicas do solo ensaiado estão listadas na tabela abaixo.

Tabela 4.1 - Parâmetros físicos do solo ensaiado em coluna de ressonância (Sato, adaptado, 1995).

Tamanho médio dos grãos (mm)	Coeficiente de uniformidade	Índice de vazios máximo	Índice de vazios mínimo	Gravidade específica	Densidade relativa do solo (%)
<i>Areia grossa de sílica</i>					
1,20	1,79	0,975	0,654	2,632	60
<i>Areia de Toyoura</i>					
0,20	1,77	0,952	0,525	2,645	45
<i>Areia fina de sílica</i>					
0,09	1,57	1,385	0,797	2,631	55

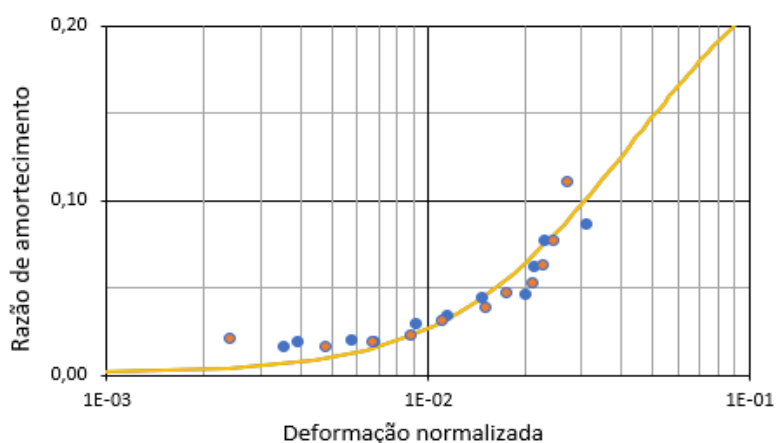


Figura 4.1 - Amortecimento em função da deformação para sílica muito porosa de grãos grandes seca e saturada com água (Sato, adaptado, 1995).

Nota-se que as curvas teóricas para o amortecimento histerético e viscoso se confundem durante todo o intervalo de deformações, assim como os dados de laboratório indicam que não há uma significativa diferença entre o amortecimento do solo seco e do solo saturado.

Para esta mesma areia, desta vez submetida a um ensaio com frequência de 150Hz e saturada com óleo de silicone de viscosidade 100 cS, a dependência na frequência se torna clara.

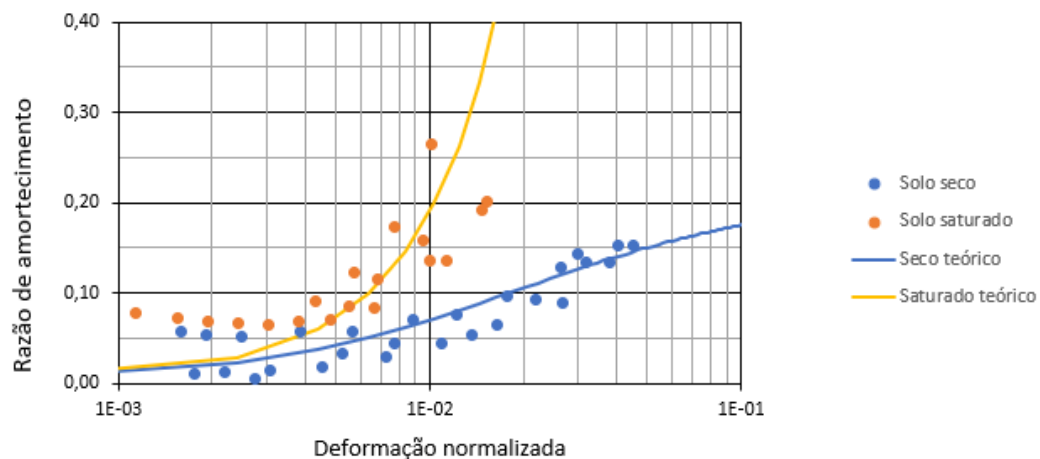


Figura 4.2 - Amortecimento em função da deformação para sílica muito porosa de grãos grandes, seca e saturada com óleo de silicone (Sato, adaptado, 1995).

Os ensaios apontam uma atitude exponencial do crescimento do amortecimento no solo saturado com óleo, diferente do comportamento hiperbólico com assíntota definida do ensaio em solo seco. Os ensaios são realizados com frequência constante, logo, quando se aumenta a deformação, a velocidade de oscilação deve aumentar por sua vez para manter a frequência em 150Hz. Um amortecimento que cresce exponencialmente com a velocidade de oscilação é por definição um amortecimento viscoso.

No caso de um solo arenoso fino, saturado com água, o comportamento viscoso também se nota durante os ensaios de coluna de ressonância. Tal comportamento está de acordo com a teoria descrita neste trabalho, afirmando assim a dependência da viscosidade aparente do sistema na porosidade e na viscosidade do fluido dos poros.

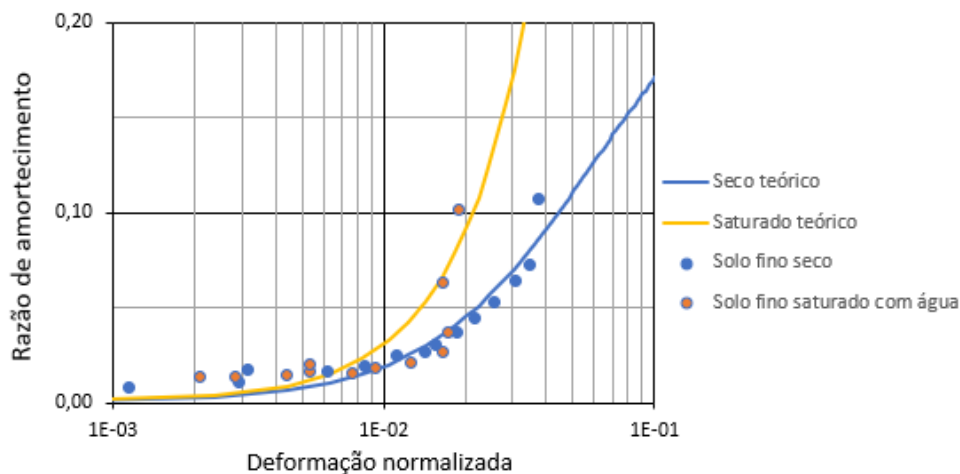


Figura 4.3 - Amortecimento em função da deformação para sílica fina seca e saturada com água (Sato, adaptado, 1995).

Neste ensaio, percebe-se que para deformações muito pequenas (baixas velocidades), a influência de fluido nos poros pode ser negligenciada. O ensaio foi realizado com uma frequência de 40Hz e percebe-se uma divergência entre o amortecimento histerético e o viscoso a partir de uma deformação normalizada de 10^{-2} , correspondendo a aproximadamente uma deformação absoluta de 2×10^{-4} . Mais uma vez, o comportamento exponencial do crescimento do amortecimento fica evidenciado nos ensaios de laboratório e a curva teórica parece bem se adequar aos ensaios.

Em um ensaio com o mesmo solo saturado desta vez com um óleo de silicone com viscosidade de 30 cS, excitado a uma frequência de 50Hz, nota-se que a viscosidade de fluido sendo menor, a parcela dependente da frequência não aparece com a mesma diferença em relação ao histerético como no ensaio anterior.

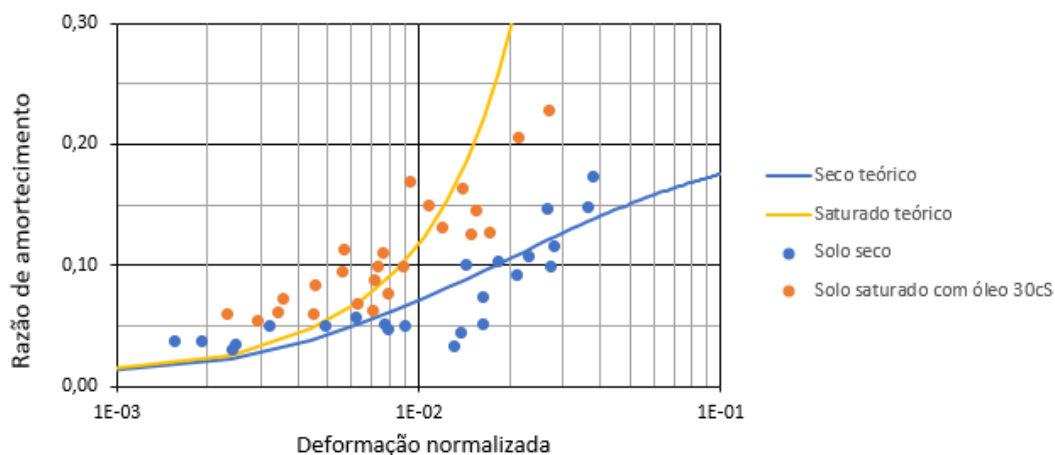


Figura 4.4 - Amortecimento em função da deformação para sílica muito porosa seca e saturada com óleo de silicone (Sato, adaptado, 1995).

4.2. Resultados de campo

Os resultados de campo, assim como explicitado anteriormente no início deste capítulo, serão analisados a partir dos dados coletados em sismógrafos do tipo KiK-Net em profundidade e na superfície do perfil. Os dados foram concedidos pela National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience do Japão. As histórias de acelerações registradas pelos sismógrafos foram tratadas computacionalmente por ferramentas de análise de sinais presentes nos programas DeepSoil e Maple 18. As análises feitas no software DeepSoil possuem um amortecimento mínimo de 5% para os cenários puramente histeréticos e foi utilizado o amortecimento de Rayleigh para redução de ruídos em altas frequências. Torna-se importante enfatizar que as análises foram feitas de forma não linear e no domínio do tempo. As respostas previstas pelos modelos existentes na literatura e pelo modelo proposto neste trabalho serão sobrepostas a resposta real registrada.

4.2.1. Sismo IBRH11

O sismo IBRH11 foi registrado em 23/06/2015 na costa leste do Japão às 21h19 no horário local. O perfil de solo do sismógrafo mais próximo do

evento sísmico é composto de camadas de solos moles, rochas e aterro como mostra a tabela a seguir.

Tabela 4.2 - Propriedades geotécnicas do perfil sob o sismógrafo (autor, 2018).

Espessura da camada (m)	Classificação do solo	Peso específico dos sólidos (kN/m³)	Velocidade de onda S (m/s)	Modelo da literatura utilizado
8	Aterro Arenoso	16	130	Seed e Idriss médio (1970)
2	Granito Alterado	25	180	Menq (2003)
6	Matacão	20	240	Menq (2003)
14	Argila Mista	17	450	Vucetic e Dobry (1991)
36	Granito I	27	2100	Seed e Idriss superior modificado (1970)
15	Arenito	25	2100	Menq (2003)
11	Granito II	27	2100	Small hardening soil (Benz, 2010)
5	Granito III	27	2100	Small hardening soil (Benz, 2010)
5	Folhelho	24	2100	Small hardening soil (Benz, 2010)

Pelos ensaios geofísicos determina-se que o nível d'água esteja no topo da camada de argila, a aproximadamente oito metros de profundidade. O sismo ocorreu no Oceano Pacífico, a aproximadamente 750 quilômetros de Tóquio. O mapa das acelerações de pico na superfície (PGA) indica uma média de 0,002g no território Japonês, como pode ser observado na figura abaixo.

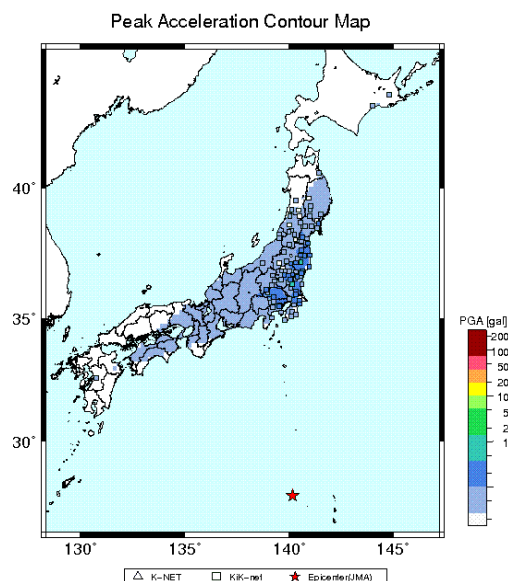
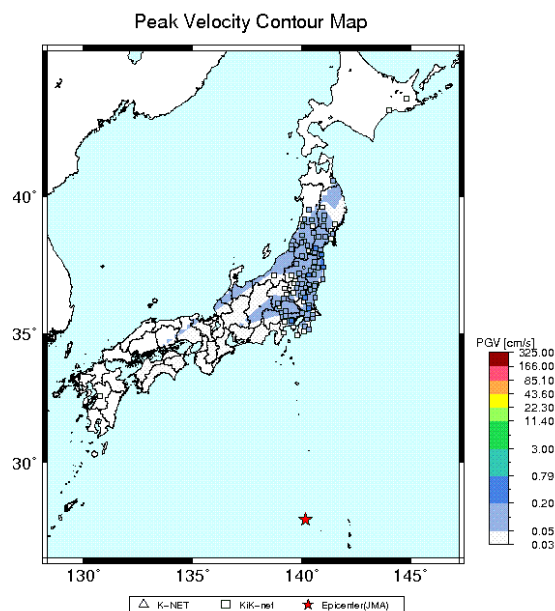


Figura 4.5 - - Mapa de isolinhas referente as acelerações de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience)

As velocidades de pico na superfície (PGV) médias foram registradas na ordem de 0,5cm/s nos locais mais afetados.



2015/06/23-21:19 27.700N 140.178E 484km M6.8

Figura 4.6 - Mapa de isolinhas referente as velocidades de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience).

A resposta na superfície calculada pelo modelo proposto a partir dos sinais registrados em profundidade foi então sobreposta a resposta real da superfície para que o modelo pudesse ser avaliado em condições de campo.

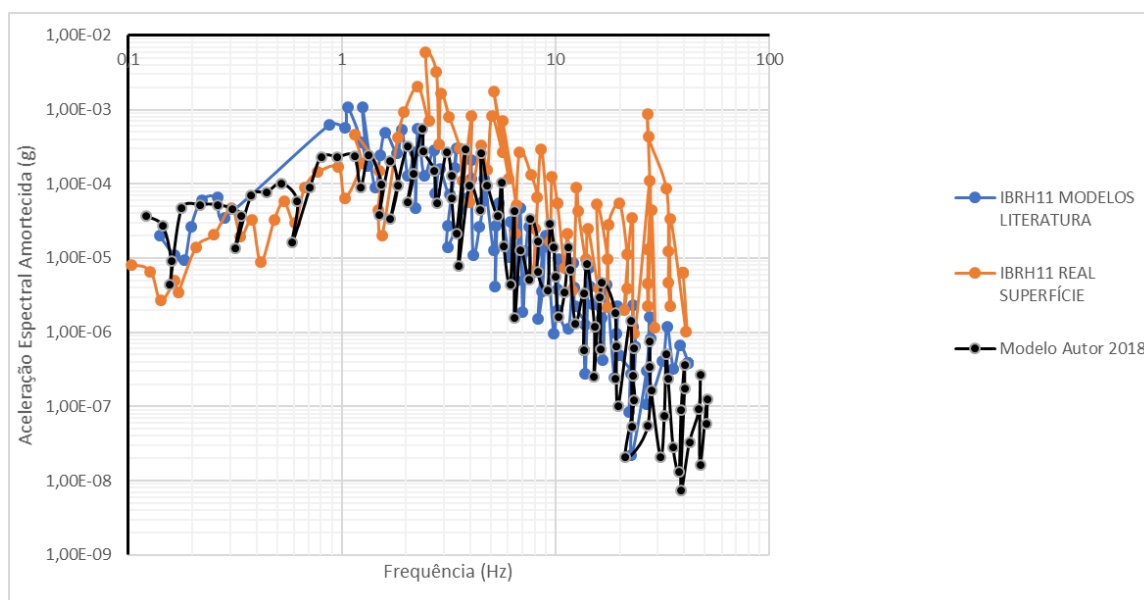


Figura 4.7 - Comparação das acelerações espectrais medidas e computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função das frequências (autor, 2018)

A curva representada em azul corresponde a previsão feita por uma combinação de modelos de degradação do módulo elástico e curvas de amortecimento já conhecidos na literatura. Cada camada de solo foi modelada com um modelo que melhor se adequava ao tipo de solo em questão, sendo Seed & Idriss (1970) (Médio) para areias, Vucetic & Dobry (1991) e Darendelli (2001) para argilas, entre outros modelos. A curva representada em preto é o modelo único apresentado neste trabalho, formulado apenas com parâmetros físicos do solo/rocha em questão, não dependendo diretamente do tipo do material. A curva representada em laranja corresponde ao registro real na superfície.

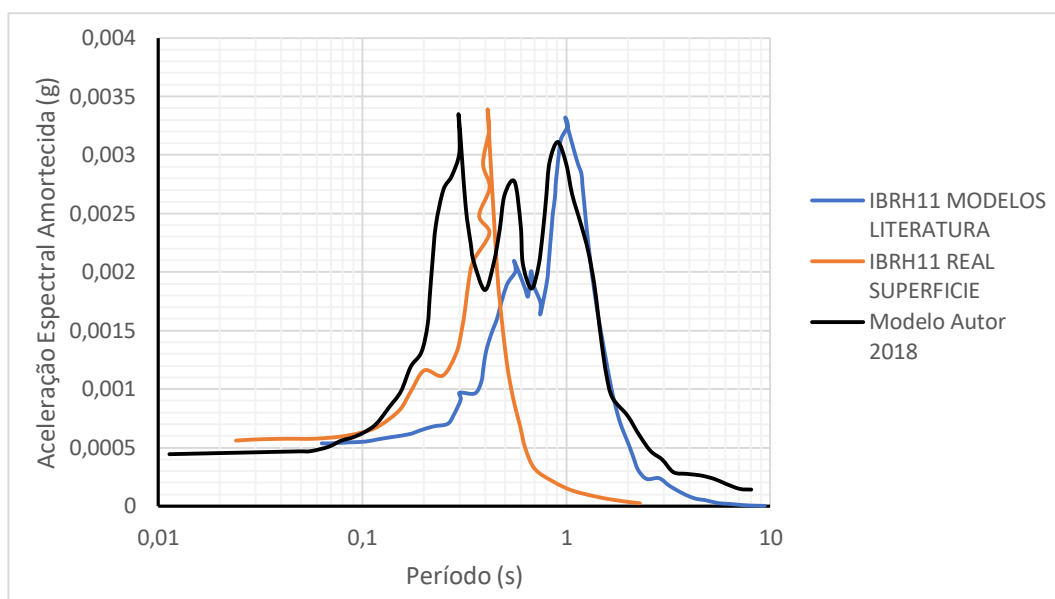


Figura 4.8 - Comparação das acelerações espectrais medidas e computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função dos períodos fundamentais (autor, 2018)

A obtenção dos parâmetros do modelo proposto se faz de maneira natural ao calcular o módulo de cisalhamento máximo a partir do peso específico do material e da velocidade de propagação da onda S, a porosidade a partir de uma estimativa da porosidade média dos materiais geológicos listados pela RocScience (2016) e a frequência de oscilação a partir da análise do espectro de frequências do sismo no DeepSoil. Com estes parâmetros definidos, termos secundários como velocidade e pressão são gerados posteriormente. Nota-se que o modelo aproxima com acurácia os resultados medidos em campo pelos sismógrafos, com um erro negligenciável no valor da aceleração de pico na superfície e um erro de aproximadamente 8% no valor do período fundamental para este mesmo valor de aceleração de pico. O erro em relação ao período fundamental correspondente a aceleração máxima é de aproximadamente 2% para o modelo proposto e de 50% para os modelos existentes na literatura. Para fins de projeto, o modelo simplifica a estimativa da resposta sísmica pela utilização de uma única equação do amortecimento para qualquer material geológico e prevê tal resposta com um erro tolerável.

4.2.2. Sismo FKSH20

O sismo FKSH20, também conhecido como o sismo de Fukushima 2015, foi um forte abalo sísmico de intensidade 8,1 na escala Richter que atingiu a costa leste do Japão em 30/05/2015 as 20:30 no horário local. O epicentro estava localizado a cerca de 500km da costa do país. O perfil de solo na região do sismógrafo estudado se encontra descrito na tabela abaixo.

Tabela 4.3 - Propriedades geotécnicas do perfil de solo sob o sismógrafo (autor, 2018).

Espessura da camada (m)	Classificação do solo	Peso específico dos sólidos (kN/m³)	Velocidade de onda S (m/s)	Modelo da literatura utilizado
12	Argila Orgânica Mole	14	300	Darendeli (2001)
50	Pedregulho	25	350/500	Menq (2003)
25,5	Silte	17	610	Vucetic e Dobry (1991)
5	Arenito Fino	25	610	Menq (2003)
8	Arenito Médio	26	610	Small hardening soil model (Benz, 2010)
11	Arenito Fino	25	610	Small hardening soil model (Benz, 2010)

O nível d'água se encontra próximo a superfície da argila orgânica mole, tornado-a saturada. As acelerações de pico registradas na superfície atingiram valores superiores a 0,1g nas vizinhanças de Fukushima. Os

sismógrafos também registraram velocidades de oscilação na superfície de aproximadamente 11cm/s em Fukushima.

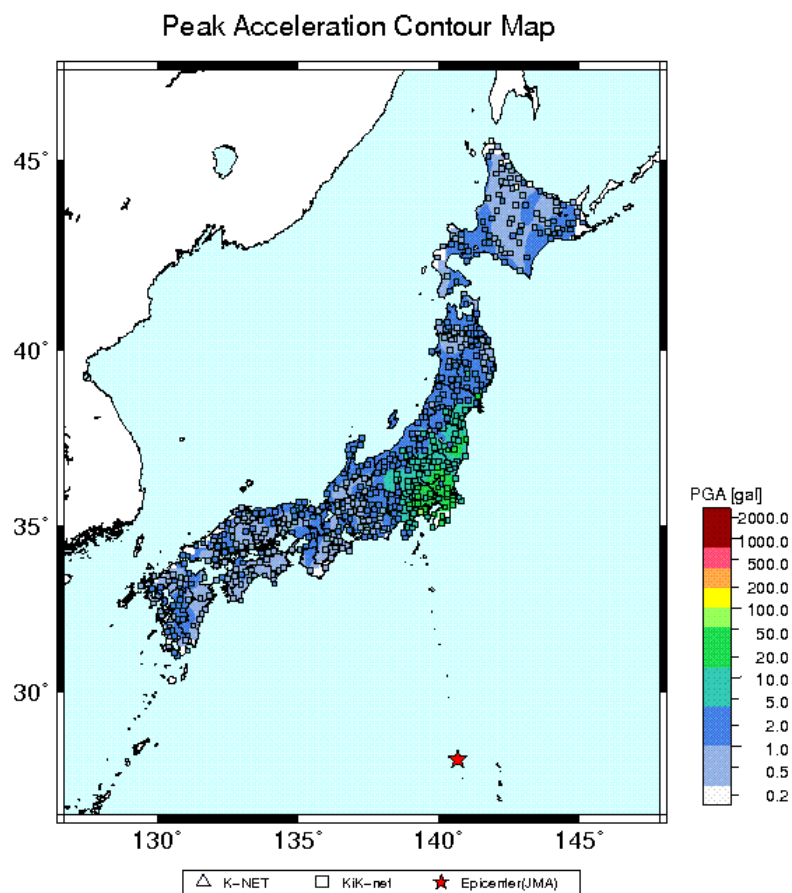


Figura 4.9 - Mapa de isolinhas referente as acelerações de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience).

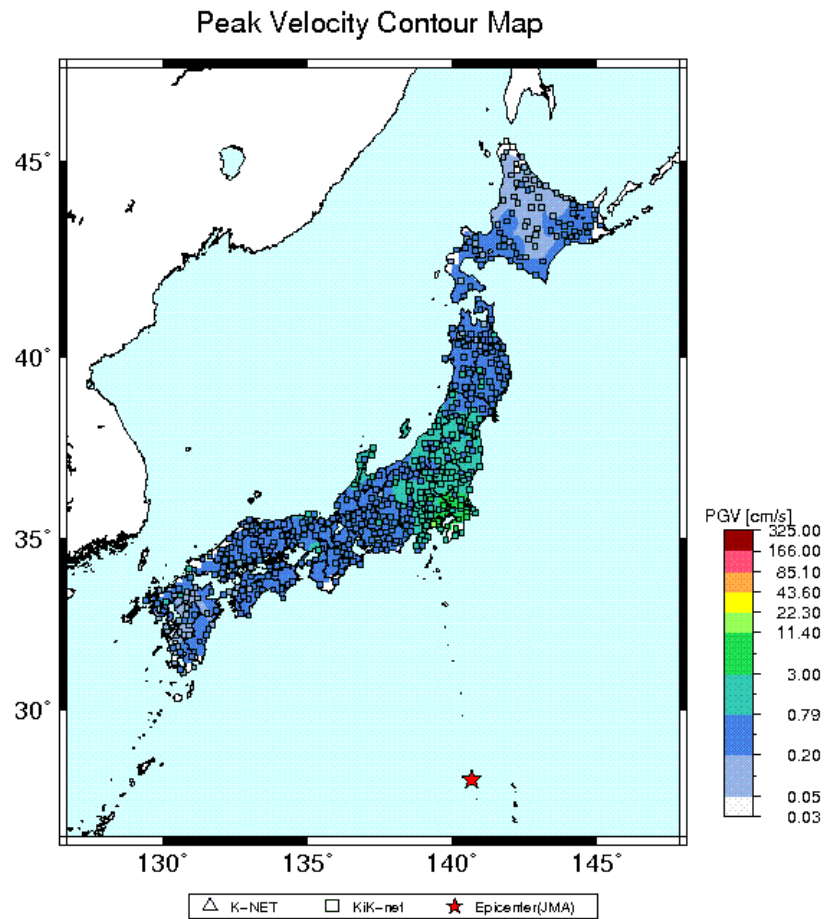


Figura 4.10 - Mapa de isolinhas referente as velocidades de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience).

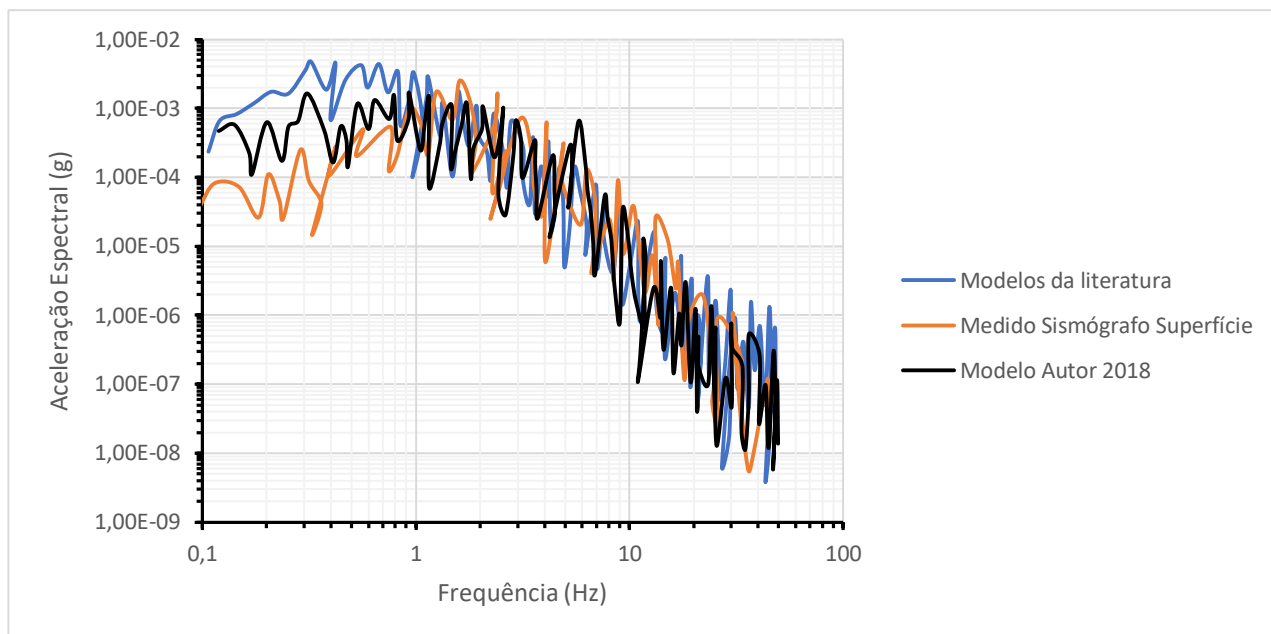


Figura 4.11 - Comparação das acelerações espectrais medidas e computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função das frequências (autor, 2018)

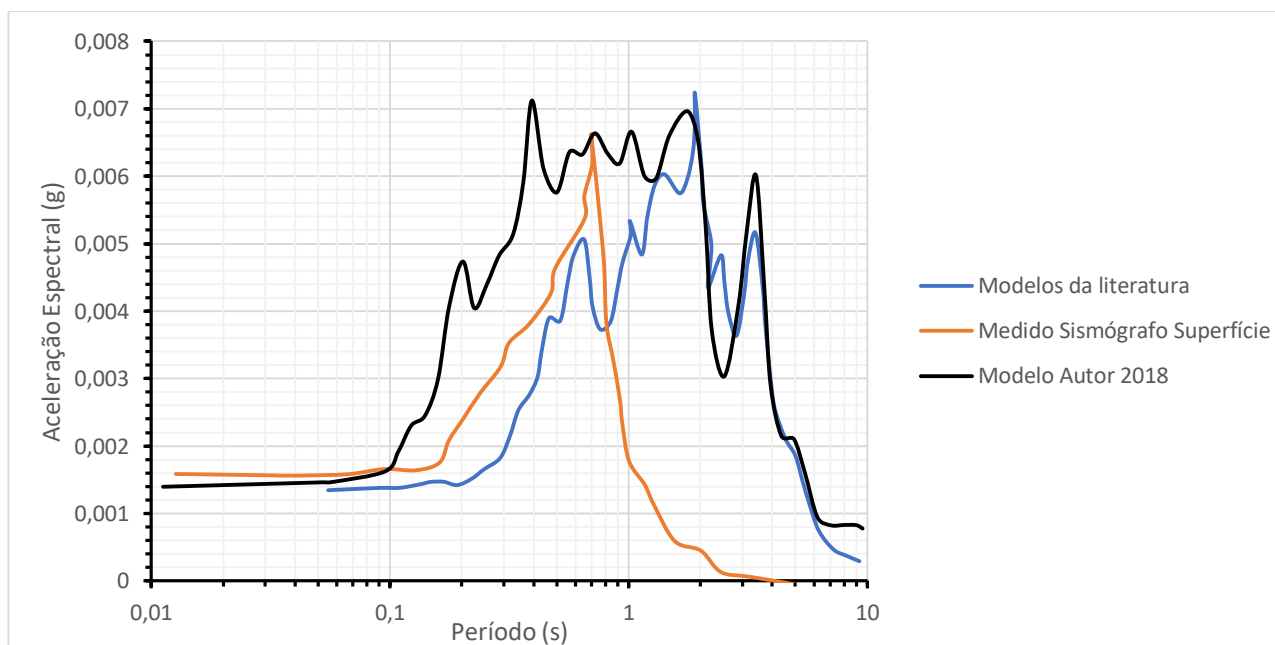


Figura 4.12 - Comparação das acelerações espectrais medidas e computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função dos períodos fundamentais (autor, 2018)

Na figura 4.12 nota-se que a simulação com os modelos já existentes na literatura prevê uma aceleração máxima de 0,0072g para um período fundamental de aproximadamente 2 segundos. O modelo proposto no presente trabalho prevê uma aceleração máxima de 0,007g para um período fundamental de 0,6 segundos. O sismógrafo registrou na superfície uma aceleração máxima de 0,0066g para um período fundamental de 0,8 segundos. Entretanto, o modelo proposto computou o mesmo valor de 0,0066g para um período de 0,8 segundos, mesmo este não sendo o máximo previsto. O erro da aceleração máxima calculada pelo modelo proposto em relação a aceleração medida pelo sismógrafo é de 7,6% e de 33% para o período correspondente a aceleração máxima amortecida. Os modelos presentes na literatura apresentaram um erro de 9,2% para a aceleração máxima e de 150% para o período correspondente.

A acurácia do modelo proposto pode ser verificada visualmente na figura 4.11, onde o espectro de frequências e as respectivas acelerações espectrais são sobrepostas. O modelo exibe também uma melhor concordância com os valores medidos em relação aos previstos pelos modelos existentes para baixas frequências. Tal concordância pode ser justificada pela presença da parcela dependente da frequência mesmo em baixas frequências de excitação, condição esta que não é garantida pelo amortecimento histerético, impedindo assim que o verdadeiro valor das acelerações seja computado.

4.2.3. Sismo FKSH10

O sismo registrado pela rede de sismógrafos FKSH10, ocorreu no dia 11/03/2011 na costa leste do território japonês nas proximidades de Fukushima. O sismo teve intensidade 9,0 na escala Richter e teve seu epicentro a 24km da superfície. O perfil do solo sob o sismógrafo está representado na tabela abaixo.

Tabela 4.4 - -- Propriedades geotécnicas do perfil de solo sob o sismógrafo (autor, 2018).

Espessura da camada (m)	Classificação do Solo	Peso Específico dos Sólidos (kN/m ³)	Velocidade de Onda S (m/s)	Modelo da literatura utilizado
1,0	Aterro arenoso	18	220	Seed e Idriss médio (19700)
102	Ardósia	22	2830	Small hardening soil model (Benz, 2010)

O nível d'água foi admitido como abaixo do nível do aterro arenoso, sendo assim a rocha se mantém saturada e a areia se mantém seca. As acelerações de pico chegaram a pouco mais de 0,6g na superfície. Os mapas de cores referentes as acelerações e velocidades de pico estão expostos abaixo:

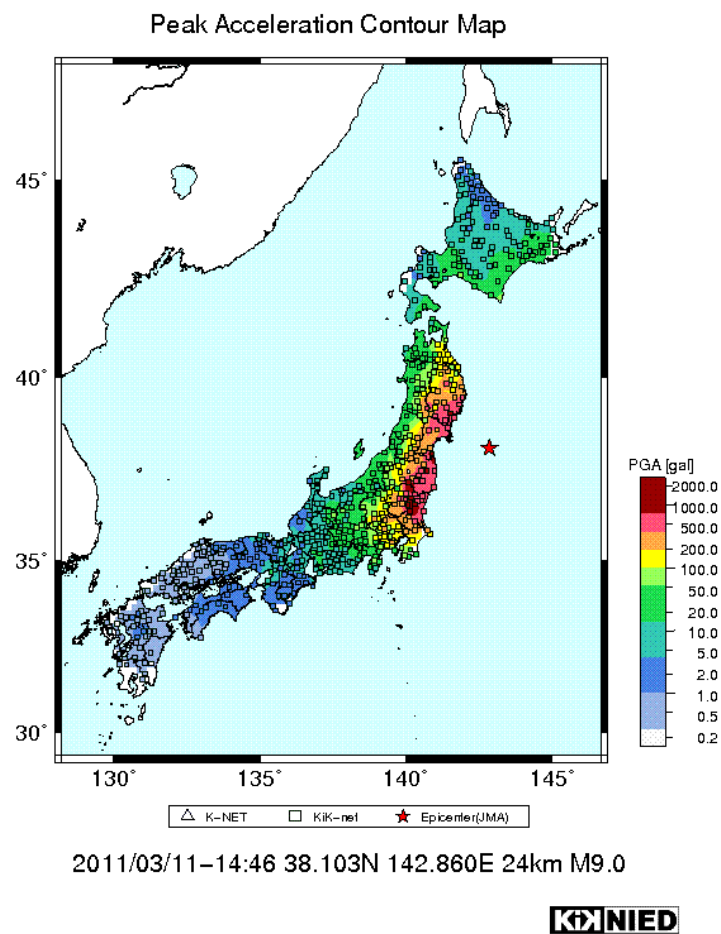


Figura 4.13 - Mapa de isolinhas referente as acelerações de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience).

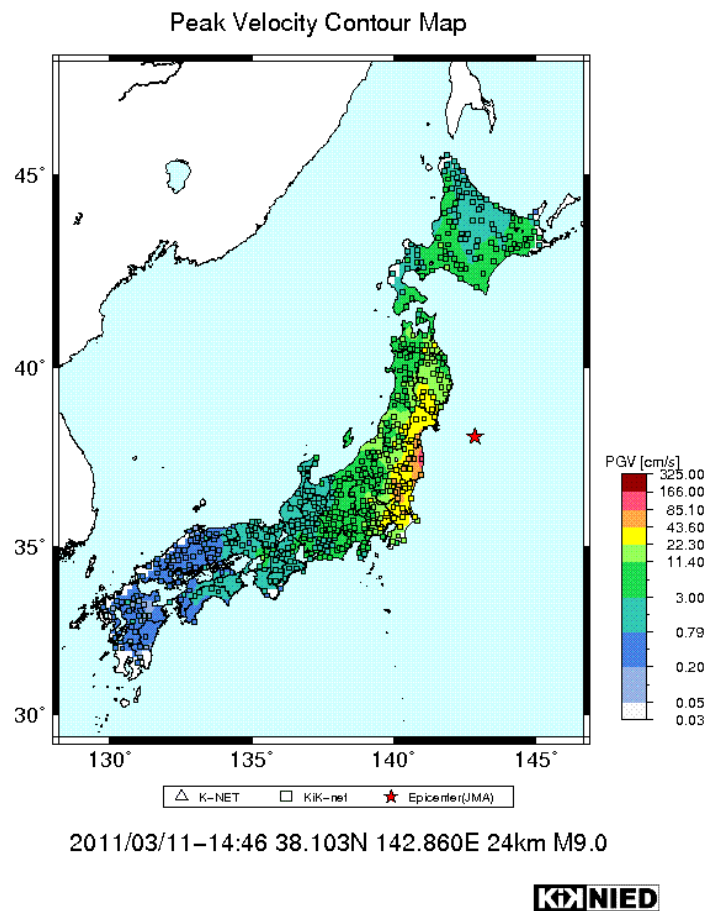


Figura 4.14 - Mapa de isolinhas referente as velocidades de pico na superfície no território Japonês (National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience).

As respostas sísmicas calculadas pelos modelos presentes na literatura e o modelo proposto neste trabalho foram sobrepostas para que sejam comparadas.

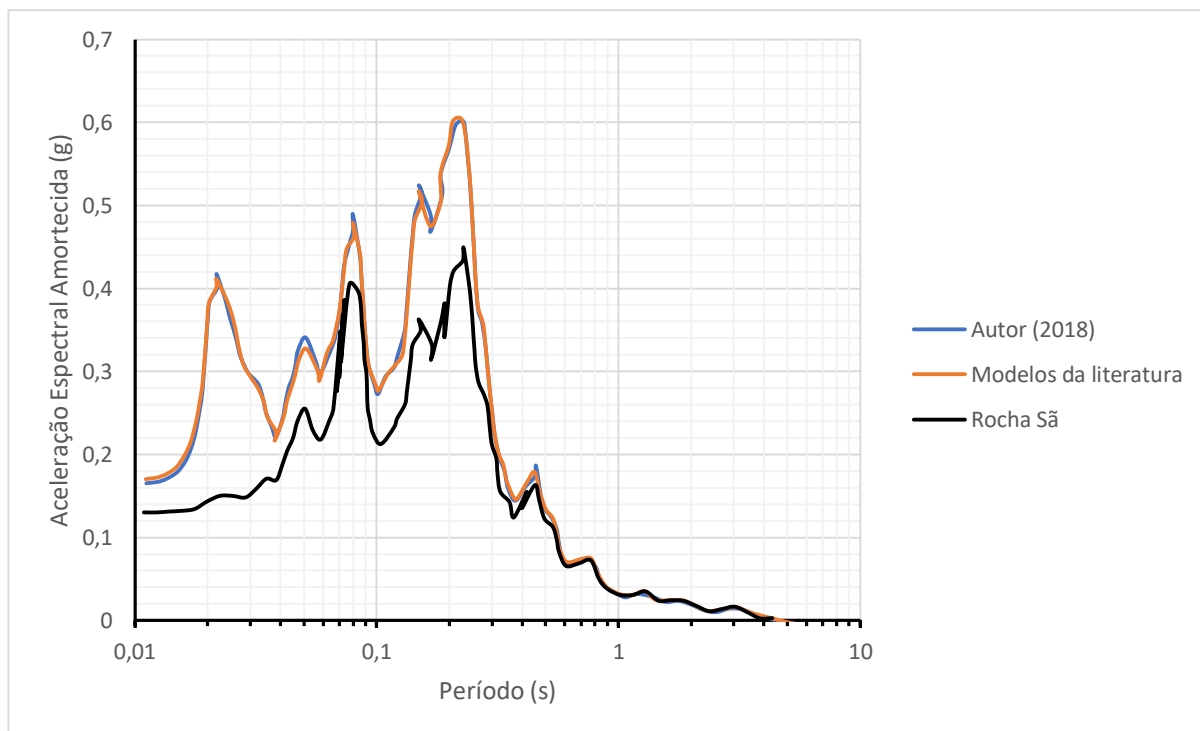


Figura 4.15 - Comparação das acelerações espectrais computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função dos períodos fundamentais (autor, 2018)

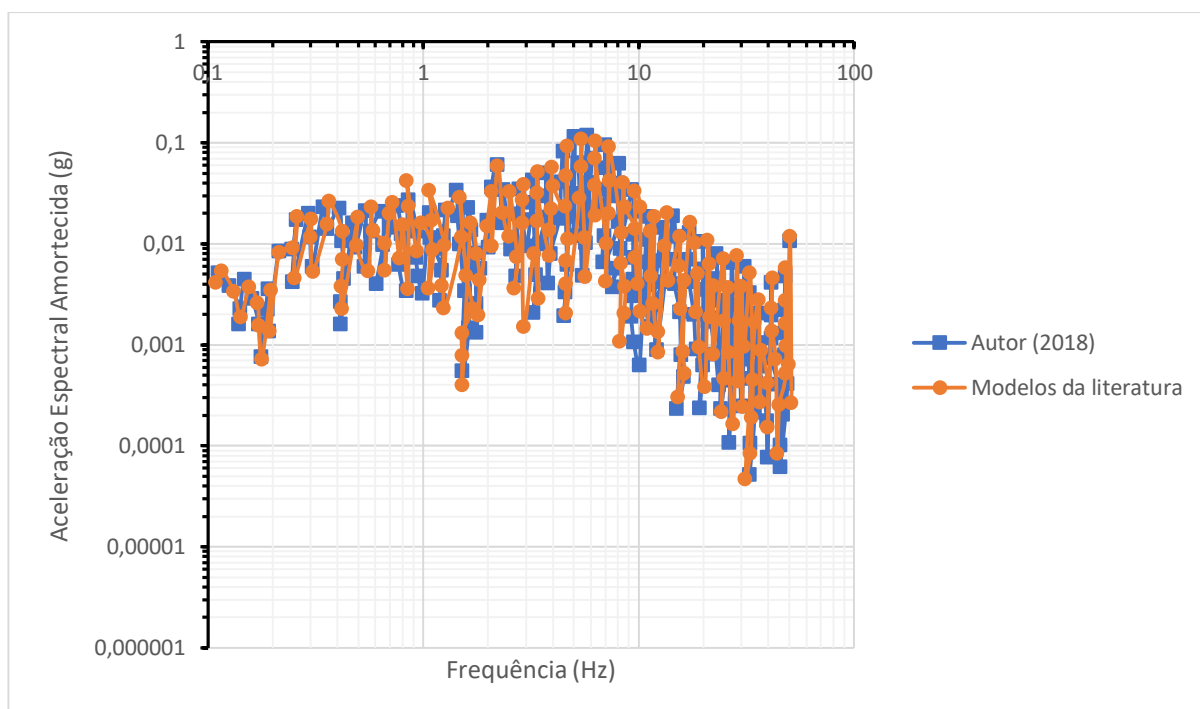


Figura 4.16 - Comparação das acelerações espectrais computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função das frequências (autor, 2018)

Nota-se que a formulação proposta pelo autor se aproxima muito dos resultados obtidos pelos modelos existentes na literatura, havendo sobreposição satisfatória dos valores para alguns intervalos de frequência e período.

Sismógrafos localizados nas proximidades do último avaliado foram capazes de detectar e registrar as acelerações a 200m de profundidade e simultaneamente na superfície do perfil. A análise e computação dos valores de acelerações previstos pelos modelos clássicos da literatura, o modelo proposto pelo autor e o real registro das acelerações foram comparados por superposição no gráfico abaixo:

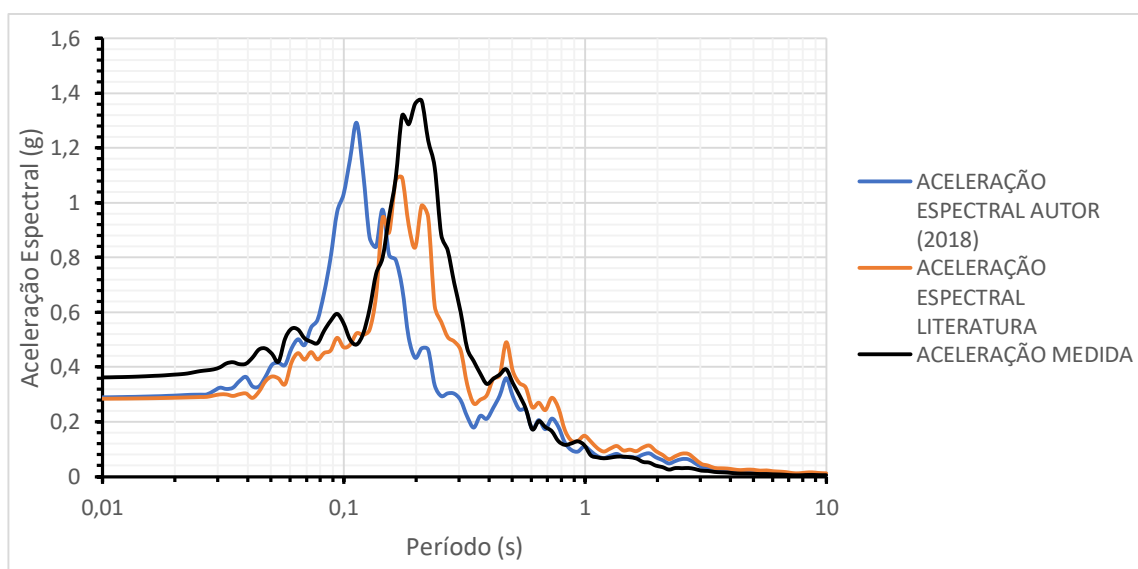


Figura 4.17 - Comparação das acelerações espectrais computadas pelos métodos existentes e o método proposto, em função dos períodos fundamentais (autor, 2018)

Nota-se uma boa aproximação para os valores de aceleração imprimida no solo da superfície, assim como a previsão de pico de aceleração para um corpo de um grau de liberdade para um período fundamental de aproximadamente 0,2s. O modelo proposto pelo autor calcula uma aceleração máxima de 1,22g enquanto o valor registrado foi de 1,38g, contra os 1,1 calculados pelos modelos previstos na literatura. O erro em relação a aceleração máxima para o modelo proposto é de 11,6% enquanto os modelos da literatura desenvolvem resultados com erros de 20,2%. Entretanto, para este caso de terremoto de altíssima intensidade, o

modelo proposto admite um erro maior na previsão do período onde esta amplitude máxima ocorre. Os sismógrafos registraram esta amplitude máxima para um período de 0,2s enquanto o modelo proposto computou 0,11s contra os 0,18s dos modelos já existentes. Sendo assim, o erro observado pelo modelo proposto em relação ao período fundamental é de 45% contra os 10% dos modelos da literatura. Pondera-se que este erro seja causado talvez pela falta de informação sobre o grau de saturação de todo o perfil de solo assim como uma má escolha dos parâmetros físicos do solo.

4.3. Comparação dos laços de histerese no espaço tensão-deformação

Para um melhor entendimento do comportamento tensão deformação e a perda de energia do sistema, busca-se comparar os laços de histerese para um mesmo material geológico simulado com diferentes modelos. O solo em questão é arenoso, de compactidade média e saturado. As especificações físicas estão descritas na tabela abaixo:

Tabela 4.5 - Propriedades físicas do solo analisado (autor, 2018)

α	r	γ_r	$G(\text{Mpa})$	n	G_s	ρ	e
60	2,1	0,025	8	0,28	2,6	1,8	0,4

O modelo constitutivo utilizado para calcular as tensões e deformações a partir dos deslocamentos é o modelo MKZ (Modified Kondner Zelasco). O registro artificial de acelerações geradas foi de caráter senoidal regular harmônico do tipo:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 0,5 \cos(\omega t) ; \omega = 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}} ; u \rightarrow u(t) \quad (4.1)$$

A resposta no espaço tensão-deformação foi calculada para o modelo proposto em duas frequências diferentes (4 e 15Hz) assim como para o modelo clássico de Seed e Idriss (1970).

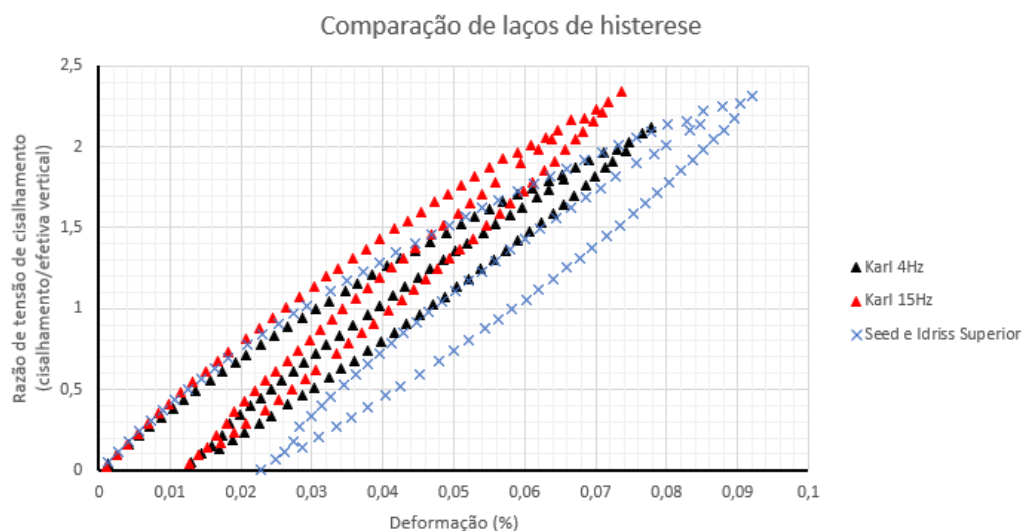


Figura 4.18 - Comparação dos laços de histerese (autor, 2018)

O resultado observado parece ser contra intuitivo, mas está pautado pela física presente nas equações desenvolvidas neste trabalho. Um amortecimento maior, na perspectiva histerética, significa uma maior degradação do módulo elástico e logo uma maior deformação, gerando assim um laço de histerese mais aberto e mais horizontalizado. Entretanto, nota-se que, mesmo apresentando um amortecimento maior que o histerético, o modelo prevê uma deformação menor e uma tensão mais alta para o caso de 15Hz. Tal resultado pode ser explicado ao ressaltar que o amortecimento viscoso que foi inserido neste trabalho, é dependente da velocidade (e da frequência) do carregamento. Isto é, o amortecimento somado ao histerético não afeta o módulo de elasticidade (cisalhamento) do material, mas reduz a velocidade dos deslocamentos e logo, as deformações se apresentam menores. Estes resultados corrigem o erro apresentado na figura 2.7 (Ishihara, 1995) como mostra a figura 3.9, onde a previsão do modelo histerético para o amortecimento se mostra muito maior do que os ensaios de laboratório devido a sua forte dependência com a degradação do módulo.

Para frequências baixas (4Hz), é possível notar no gráfico que o modelo proposto neste trabalho coincide para baixas deformações com o modelo de Idriss e Seed (1970), mesmo apresentando uma deformação máxima menor do que este último. Para frequências maiores, o material

parece 'endurecer' pois as tensões para um mesmo nível de deformação são ligeiramente maiores, comportamento típico de um material viscoso sendo solicitado rapidamente.

5. Conclusões

O desenvolvimento matemático do modelo proposto coloca em perspectiva a dependência do amortecimento de solos saturados na frequência imposta pelo oscilador. A princípio, o amortecimento do solo foi classificado como histerético, ou seja, interno e não dependente da frequência na qual o solo vibra. A dependência na frequência notada por Tatsuoka, Seed e Biot no início da segunda metade do século passado em ensaios de laboratório foi verificada teoricamente ao adotar uma análise na escala dos poros.

O modelo proposto evidencia que na escala microscópica, a interação do fluido que satura o material com as paredes dos poros pode gerar uma força de amortecimento dependente da velocidade do carregamento e logo, da frequência. A diferença de fase na resposta oscilatória das duas fases que compõe o solo permite que haja movimentos relativos dentro dos poros, mecanicamente associado ao fluxo e gerando forças de percolação contrárias ao movimento do sólido. Para baixas frequências, baixas velocidades de vibração, o movimento do fluido estaria em fase com o movimento do sólido, não promovendo fluxo entre os poros e logo permitindo que o material se comporte de uma maneira não drenada, não demonstrando qualquer diferença entre o amortecimento viscoso e o histerético, como pode ser visto nos ensaios de laboratório presentes no trabalho.

Na literatura, os modelos existentes são específicos para cada tipo de solo, exigindo parâmetros distintos para areias, pedregulhos, argilas e rochas. Tais modelos, baseados na integração das curvas de tensão deformação cíclicas, necessitam de parâmetros puramente matemáticos para ajustar as curvas hiperbólicas (Kondner, Zelasko, Darendeli, Ramberg-Osgood). Estes modelos, entretanto, não possuem um embasamento matemático rigoroso que descreva o fenômeno físico. O

modelo proposto neste trabalho é fundamentado nas leis básicas da física como termodinâmica, leis de Newton e leis de conservação de massa e quantidade de movimento. Logo, o modelo apresentado se propõe em ser um modelo generalizado para qualquer tipo de material geológico, uma vez que os parâmetros necessários são comuns para todo solo. A generalidade proposta pelo modelo facilita a obtenção das curvas de amortecimento e diminui os riscos de erros relativos aos parâmetros a serem obtidos. A acurácia e precisão dos resultados obtidos para previsão da resposta sísmica na superfície de um perfil de solo, reforçam sua aplicabilidade e necessidade de uma mais profunda pesquisa no assunto para otimizar o modelo. O autor sugere que uma formulação bidimensional e tridimensional do problema seja realizada a fim de melhor interpretar a resposta total do perfil geológico a um carregamento dinâmico, uma vez que a composição da onda gerada por um sismo é esférica e depende fortemente das direções espaciais.

6. Referências bibliográficas

Biot M.A., General theory of three-dimensional consolidation, **Journal of Applied Physics**, 12, 1941.

Biot M.A., Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, **Journal of Applied Physics**, 1962.

Biot M.A., The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I, lower frequency range, **Journal of the Acoustical Society of America**, 28, 1956.

Biot M.A., Theory of finite deformation of porous solids, Indiana University, **Mathematical Journal**, 24, 1972.

Biot, M. A., Linear Thermodynamics and Mechanics of Solids, Proceedings of the 3rd U.S. **National Congress of Applied Mechanics**, ASME, New York, 1958.

Bishop, R. E. D., The Treatment of Damping Forces in Vibration Theory, **Journal of the Royal Aeronautical Society**, 1955.

Bishop, R. E. D; Price, W. G., A Note on Hysteretic Damping of Transient Motions, **Random Vibration-status and recent developments**, Elsevier, Amsterdam, 1986.

Bishop, R. E. D; Price, W. G., On the Hysteretic Damping of Nonsinusoidal Motions, **Strojnický Casopis**, 1985.

Bistafa, S., On the development of the Navier-Stokes equation by Navier, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brazil, **Rev. Bras. Ensino Fís. vol.40 no.2** São Paulo, 2018.

Caughey, T. K., Vibration of Dynamic System with Linear Hysteretic Damping (linear theory), **Proceedings of the 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics**, ASME, New York, 1962.

Conca, C; Osses, A; Planchard, J., Added Mass and Damping in Fluid-Structure Interaction, **Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1997.

Coussy O., Thermodynamics of saturated porous solids in finite deformation, **European Journal of Mechanics, A/Solids**, 8, 1989.

Coussy O; Dangla P., Approche énergétique du comportement des sols non saturés, **Mécanique des Sols Non Saturés**, ed. Coussy O. and Fleureau J.-M. Hermès, Paris, 2002.

Crandall, S. H., The Hysteretic Damping Model in Vibration Theory, Journal of Mechanical Engineering Science, **Proceedings of the American Society of Civil Engineers**, 1965.

Crandall, S. H., The Role of Damping in Vibration Theory, **Journal of Sound and Vibration**, 1970.

Darendeli, B. M., **Development of a new family of normalized modulus reduction and material damping curves**, PhD dissertation, University of Texas at Austin, Texas, USA, 2001.

Duncan, J. M; Chang, C. Y., Nonlinear analysis of stress and strain in soils. Proceedings AXE, **SiM5**, 96, 1970.

Fefferman, C. L., **Existence and smoothness of the Navier–Stokes equation**, Clay Mathematics Institute. Retrieved, 2017.

Foti, S; Strobbia, C., Some Notes on Model Parameters for Surface Wave Propagation Data Inversion, **Conference Paper**, 2002.

Gaul, L; Bohlen, S; Kelly, S, Linear Hysteretic Damping and the Hilbert Transform, **Journal of Engineering Mechanics**, 121(5), 1995.

Hara, A., **Dynamic deformation characteristics of soils and seismic response analyses of the ground**. Dissertation submitted to the University of Tokyo, 1980.

Hardin, B. O., The nature of Damping in Sands, Journal of the Soil mechanics and Foundations division, **Proceedings of the American Society of Civil Engineers**, 1965.

Harding, B. O; Drnevich, V. P., Shear modulus and damping in soils, **Journal of the Soil Mechanics Foundation Division**, ASCE 98, 1972.

Hassan, S; Kawaji, M., The effects of vibrations on particle motion in a viscous fluid cell, **J. Appl. Mech.** 75, 031012.1-7, 2008

Inaudi, J. A; Kelly, J. M., Linear Hysteretic Damping and the Hilbert Transform, **Journal of Engineering Mechanics**, 1995.

Inaudi, J. A; Makris, N., Time-Domain Analysis of Linear Hysteretic Damping, **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, 1996.

Kondner, R. L; Zelasko, J. S., A Hyperbolic stress-strain formulation of sands, **Proceedings of the 2nd Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering**, 1963.

Lamb, H., **Hydrodynamics**, 6th edition, Dover Publications, New York, 106-201, 1879.

Maia, N., Reflections on the hysteretic damping model, **Journal of Shock and Vibrations**, 2009.

Makris, N., Causal Hysteretic Element, **Journal of Engineering Mechanics**, 1997.

Miura, K; Yoshida, N; Kim, Y., Frequency Dependent Property of Waves in Saturated Soil, **Soils and Foundations**, Vol. 41, 2001.

Parker J.C; Lenhard R.J; Kuppusamy T., A parametric model for constitutive properties governing multiphase flow in porous media, **Water Resources Research**, 23, (4), 1987.

Rayleigh, L., **Theory of Sound** (dois volumes), Dover Publications, New York, 1877.

Sato, M., Shear moduli and damping ratios of saturated sand deposits on shaking table tests in the centrifuge, **JSCEJ**, 1995.

Seed, H. B; Idriss, I. M., Soil moduli and damping factors for dynamic response analysis. Report N°. EERC 70-10, **Earthquake Engineering Research Center**, Berkeley, California, 1970.

Sondipon, A., **Damping models for structural vibration**, Thesis, University of Cambridge, 2000.

Terzaghi K., **Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungsercheinungen, Sitzung berichte**. Akademie der Wissenschaften, Wien Mathematisches-Naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa, 132, 1923.

Verruijt, A., Dynamics of soils with hysteretic damping, **In Geotechnical Engineering for Transportation Infrastructure**, pages V. 1, pp. 3–14, Rotterdam, 1999.

Verruijt, A., **Soil Dynamics**, Delft University of Technology, The Netherlands, 1996.

Vladimirov, V.A., On vibrodynamics of pendulum and submerged solid, **J. Math. Fluid Mech.** 7, S397–S412, 2005

Vucetic, M; Dobry, R., Effect of soil plasticity on cyclic response, **Journal of Geotechnical Engineering**, Vol. 117, N° 1, 1991.