3
DECISÃO SOB INCERTEZA

Este capítulo faz um resumo dos princípios e critérios de decisão sob incerteza, descrevendo sua fundamentação matemática e discutindo sua aplicação.

3.1
INTRODUÇÃO

A incerteza está presente em todos os mercados e, conseqüentemente, está presente em todas as decisões econômicas, ou seja, o agente não tem certeza sobre o resultado (a conseqüência) da sua decisão. Um exemplo de "decisão sob incerteza" é a decisão de despacho de geração hidrelétrica, uma vez que a afluência futura é incerta. Outro exemplo e as decisões sobre investimentos, cujos retornos são incertos.

Em alguns casos, o agente "conhece" a distribuição de probabilidade dos eventos que condicionam o resultado da sua decisão. Nestes casos dizemos que se trata de uma "decisão sob risco".

Noutros casos, não há informação sob a distribuição de probabilidade dos eventos que condicionam o resultado da decisão, ou mesmo, quando a incerteza é tão grande, como por exemplo quando a distribuição de probabilidades é quase uniforme. Nestes casos dizemos que se trata de uma decisão sob "incerteza absoluta". Um exemplo típico é a decisão sobre lances num leilão, uma vez que cada agente não conhece as estratégias dos demais agentes.

A questão da decisão sob incerteza, ou melhor dizendo, da "decisão sob risco" pode então ser resumida na escolha entre as distribuições de probabilidade dos possíveis resultados de cada decisão. "Escolher" significa expressar uma preferência do agente, o que requer que seja possível comparar os possíveis resultados. Portanto, para decidir sob incerteza é necessário um critério que nos permita comparar as distribuições de probabilidades dos possíveis resultados de cada decisão.

Na próxima seção discutiremos dois critérios básicos formais para avaliação / comparação de distribuições de probabilidade do ponto de vista de um agente: a "utilidade esperada" e a "dominância estocástica".

Na seção seguinte serão apresentadas brevemente, algumas heurísticas de decisão sob incerteza absoluta

3.2 UTILIDADE ESPERADA

O princípio da “utilidade esperada”, estabelecido por John von Neuman e Oskar Morgenstern em “*Economic Behaviour and Game Theory*” (von NEUMANN & MORGENSTERN, 1947), permite valorar a distribuição de probabilidade dos possíveis resultados de uma decisão e, portanto, estabelecer a preferência entre as decisões associadas a estas distribuições de probabilidade de resultados.

Seja um conjunto (“L”) de possíveis resultados “x_i” associados às respectivas probabilidades “p_i” expresso como:

$$L \equiv \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_N \\ p_1 & \cdots & p_N \end{bmatrix} \quad \text{.. eq.(1)}$$

A “utilidade esperada” desse conjunto “L” de resultados incertos é o valor esperado da “utilidade” dos resultados:

$$E\{U(L)\} = \sum_n p_n \, U(x_n) \quad \text{.. eq.(2)}$$

O princípio da “utilidade esperada” estabelece que se preferimos um resultado incerto “L_1” a outro “L_2”, então a “utilidade esperada” de “L_1” é maior que a de “L_2” e que se somos indiferentes entre estes resultados, então o valor das respectivas “utilidades esperadas” é igual:

$$L_1 \succ L_2 \Leftrightarrow E\{U(L_1)\} > E\{U(L_2)\} \quad \text{............................. eq.(3 a)}$$

$$L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow E\{U(L_1)\} = E\{U(L_2)\} \quad \text{..................................... (b)}$$

Onde os operadores “$\succ$” e “~” denotam, respectivamente, “preferência” e “indiferença”.

O Princípio da Utilidade Esperada está baseado nos seguintes axiomas (HUANG & LITZENBERGER, 1998):

- Resultado Limitado: os possíveis resultados “x” são limitados a um valor mínimo (pior) “x_L” e a um valor máximo (melhor) “x_H”, finitos.

- Decomposição: qualquer resultado incerto (conjunto de valores associados a probabilidades de ocorrência) pode ser decomposto numa árvore de loterias:

  Sejam "L_1" e "L_2" as seguintes loterias:

  $$L_1 \equiv \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{bmatrix} \text{ e } L_2 \equiv \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

  Seja "L" uma loteria cujos prêmios são os resultados das loterias "L_1" e "L_2":

  $$L \equiv \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ a & b \end{bmatrix}$$

  Então "L" pode ser decomposto como:

  $$L = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & y_1 & y_2 & \cdots \\ a.p_1 & a.p_2 & \cdots & b.q_1 & b.q_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

- "Equivalente Certo": a toda loteria corresponde um valor denominado "equivalente certo" àquela loteria. O agente é indiferente entre a loteria (resultado incerto) e o "equivalente certo":

  $$x_A \succ x^* \succ x_B \Rightarrow \exists\ p \in\ 0, 1\text{: } x^* \sim \begin{bmatrix} x_A & x_B \\ p & 1-p \end{bmatrix} \quad \text{...................... eq.(4)}$$

  Um corolário importante desse axioma é que a "utilidade" do "equivalente certo" é igual à "utilidade esperada" do conjunto de resultados incertos do qual ele é o "equivalente certo":

  $$E\{U(x^*)\} = U(x^*) = \textstyle\sum_n p_n\, U(x_n) \quad \text{................................ eq.(5)}$$

- Monotonia: se o valor "x" é preferível a um valor "y" então a loteria que proporciona maior probabilidade de obter o resultado "x" é preferível em relação à outra que proporciona menor probabilidade de obter o resultado preferido:

  $$\text{Se } x \succ y \text{ e } p > q\text{, então: } \begin{bmatrix} x & y \\ p & 1-p \end{bmatrix} \succ \begin{bmatrix} x & y \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

- Independência do contexto: se um valor "x" é preferível a outro "y", então a loteria na qual ocorra o valor "x" é preferível à loteria na qual o valor "x" seja substituído pelo valor "y", independentemente de outros valores "z" que ocorram da mesma forma nas duas loterias:

$$\text{Se } x \succ y \text{ então } \begin{bmatrix} x & z \\ p & 1-p \end{bmatrix} \succ \begin{bmatrix} y & z \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

Demonstração do Teorema do Princípio da Utilidade Esperada:

Sejam duas loterias (conjuntos de resultados incertos) L_a e L_b definidas como:

$$L_a \equiv \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ p & 1-p \end{bmatrix} \text{ e } L_b \equiv \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Cada possível resultado "x_i" pode ser definido com o "equivalente certo" de uma loteria correspondente "L_i" definida a partir dos limites superior "x_H" e inferior "x_L" dos possíveis resultados das loterias originais:

$$x_i \sim \begin{bmatrix} x_H & x_L \\ h_i & 1-h_i \end{bmatrix}$$

Analogamente, podemos definir o "equivalente certo" das loterias originais como:

$$x_a \sim \begin{bmatrix} x_H & x_L \\ h_a & 1-h_a \end{bmatrix} \text{ e } x_b \sim \begin{bmatrix} x_H & x_L \\ h_b & 1-h_b \end{bmatrix}$$

Utilizando a premissa da independência, podemos reconstruir as loterias originais, substituindo os possíveis resultados "x_i", pelas loterias correspondentes "L_i":

$$x_a \sim \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_H & x_L \\ h_1 & 1-h_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_H & x_L \\ h_2 & 1-h_2 \end{bmatrix} \\ p & 1-p \end{bmatrix} \text{ e } x_b \sim \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_H & x_L \\ h_3 & 1-h_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_H & x_L \\ h_4 & 1-h_4 \end{bmatrix} \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Utilizando a premissa da decomposição, podemos redefinir as loterias originais como:

$$x_a \sim \begin{bmatrix} x_H & x_L \\ p.h_1 + (1-p).h_2 & p.(1-h_1) + (1-p).(1-h_2) \end{bmatrix}$$

$$x_b \sim \begin{bmatrix} x_H & x_L \\ q.h_3 + (1-q).h_4 & q.(1-h_3) + (1-q).(1-h_4) \end{bmatrix}$$

Definindo $U(z) \equiv h_z$, sendo "z" o equivalente certo da loteria:

$$z \sim \begin{bmatrix} x_H & x_L \\ h_z & 1-h_z \end{bmatrix}$$

Então, temos da definição e redefinição das loterias originais que:

$$U(x_a) = p.U(x_1) + (1-p).U(x_2) = p.h_1 + (1-p).h_2\ )$$

$$U(x_b) = q.U(x_3) + (1-q).U(x_4) = q.h_3 + (1-q).h_4\ \ )$$

A partir da premissa da "monotonia" podemos concluir que:

Se $U(x_a) > U(x_b)$ então $L_a \succ L_b$, e

Se $U(x_a) = U(x_b)$ então $L_a \sim L_b$

Portanto, a ordenação pelo valor esperado da utilidade da loteria reproduz a ordenação de preferência entre as loterias. ■

3.2.1 FUNÇÃO UTILIDADE E AVERSÃO AO RISCO

A especificação da função utilidade "$U(x)$" deve refletir as preferências racionais dos agentes:

- Não saciedade: os agentes sempre preferem mais benefícios (resultados favoráveis) a menos benefícios, ou seja, a função utilidade é sempre crescente, ou pelo menos, não decrescente: $U'(x) \geq 0$.
- Atitude quanto à incerteza: a função utilidade deve traduzir a atitude do agente quanto à incerteza do resultado. Esta atitude pode ser de neutralidade, aversão ou atração pelo risco, caracterizada pela relação entre o equivalente certo "x^*" e o valor esperado do resultado "$E\{\tilde{x}\}$":
  - No caso da neutralidade, o equivalente certo é igual ao valor esperado: $x^* = E\{\tilde{x}\}$
  - No caso da aversão ao risco, o equivalente certo é inferior ao valor esperado: $x^* < E\{\tilde{x}\}$
  - No caso de atração pelo risco, o equivalente certo é maior que o valor esperado: $x^* > E\{\tilde{x}\}$

A relação entre o equivalente certo e o valor esperado é traduzida pela curvatura da Função Utilidade:

- Neutralidade ao Risco:

$$x^* = E\{\tilde{x}\} \rightarrow U(x^*) \equiv E\{U(\tilde{x})\} = U(E\{\tilde{x}\}) \rightarrow U(.)\ \text{linear}$$

O significado da relação entre a linearidade da Função Utilidade e a neutralidade ao risco é que o incremento de utilidade associado ao ganho de um determinado benefício tem a mesma amplitude que o decremento de utilidade associado à perda do mesmo benefício, como ilustrado na figura abaixo.

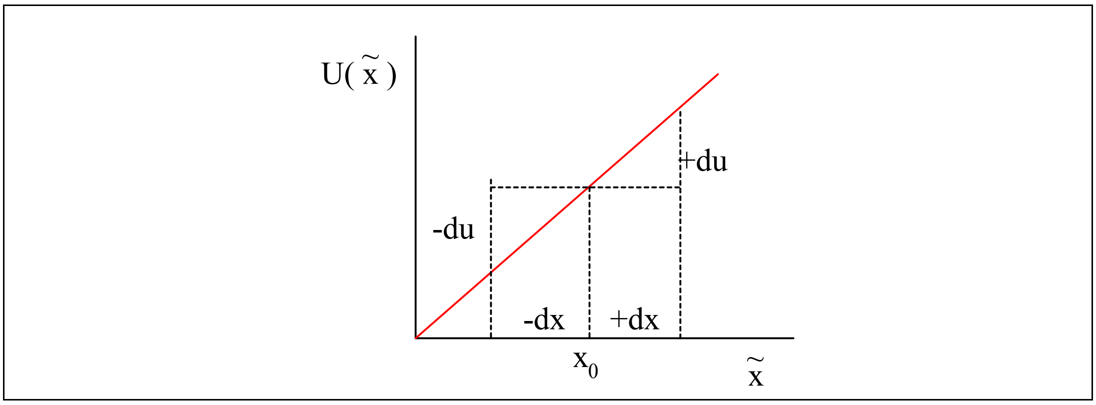

Figura 7 – Função Utilidade – Neutralidade ao Risco

- Aversão ao Risco:

$$x^* < E\{\tilde{x}\} \rightarrow U(x^*) \equiv E\{U(\tilde{x})\} < U(E\{\tilde{x}\}) \rightarrow U(.)\text{ côncava)}$$

<u>Demonstração</u>:

Linearizando a Função Utilidade em torno do valor esperado "$\bar{x}$":

$$U(x^*) = E\{U(\tilde{x})\} = E\{U(\bar{x}) + U'(\bar{x})\,(\tilde{x} - \bar{x}) + \tfrac{1}{2}\,U''(\theta\,\tilde{x} + (1\text{-}\theta).\bar{x})\,(\tilde{x} - \bar{x})\})$$

$$\rightarrow U(x^*) = U(\bar{x}) + U'(\bar{x})\,E\{(\tilde{x} - \bar{x})\} + \tfrac{1}{2}\,E\{U''(\theta\,\tilde{x} + (1\text{-}\theta)\,\bar{x})\,(\tilde{x} - \bar{x})^2\})$$

$$\rightarrow U(x^*) = U(\bar{x}) + \tfrac{1}{2}\,E\{U''(\theta\,\tilde{x} + (1\text{-}\theta)\,\bar{x})\,(\tilde{x} - \bar{x})^2\})$$

$$\rightarrow U(x^*) - U(\bar{x}) = \tfrac{1}{2}\,E\{U''(\theta\,\tilde{x} + (1\text{-}\theta)\,\bar{x})\,(\tilde{x} - \bar{x})^2\})$$

O termo do lado esquerdo é negativo para um agente com aversão ao risco.

O termo do lado direito da equação é um produto, no qual o 2º fator é necessariamente positivo por ser quadrático.

Portanto, o 1º fator $U''(\theta.\tilde{x} + (1\text{-}\theta).\bar{x})$ tem que ser negativo, ou seja, $U''<0$, o que implica que a função utilidade de um agente com aversão ao risco é côncava. ■

O significado da relação entre a concavidade da Função Utilidade e a aversão ao risco é que o incremento de utilidade associado ao ganho de um determinado benefício é menor que o decremento de utilidade associado à perda do mesmo benefício, como ilustrado na figura abaixo.

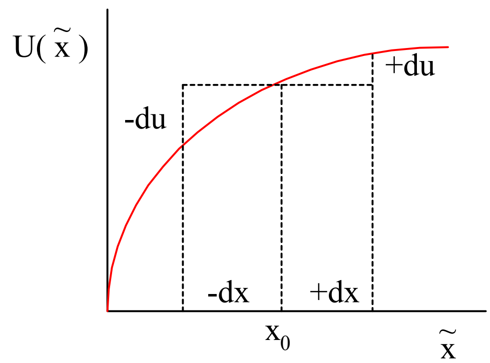

Figura 8 – Função Utilidade – Aversão ao Risco

- Atração pelo Risco:

$x^* > E\{\tilde{x}\} \rightarrow U(x^*) \equiv E\{U(\tilde{x})\} > U(E\{\tilde{x}\}) \rightarrow U(.)$ convexa)

O significado da relação entre a convexidade da Função Utilidade e a atração pelo risco é que o incremento de utilidade associado ao ganho de um determinado benefício é maior que o decremento de utilidade associado à perda do mesmo benefício, como ilustrado na figura abaixo.

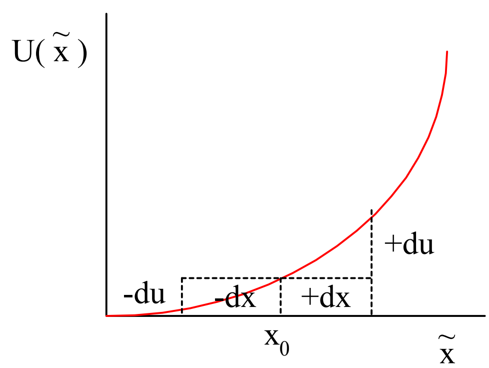

Figura 9 - Função Utilidade – Atração pelo Risco

A diferença entre o valor esperado "$E\{\tilde{x}\}$" e o valor do equivalente certo "x^*" é chamado de "prêmio do risco" (π):

$$\pi \equiv E\{x\} - x^* \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{eq.(6)}$$

O prêmio de risco é o valor que o agente avesso ao risco pagaria para evitar a incerteza, ou complementarmente, é o valor que precisaria receber para aceitar a incerteza ao invés de receber o equivalente certo e vice-versa no caso do agente atraído pelo risco, como mostrado a seguir, onde incluímos a variável "x_0" representando o valor da riqueza inicial (antes da revelação do resultado incerto):

$$\pi = x_0 + E\{\tilde{x}\} - x^* \rightarrow x^* = x_0 + E\{\tilde{x}\} - \pi$$

$$U(x^*) \equiv E\{U(x_0 + \tilde{x})\} \rightarrow U(x_0 + E\{\tilde{x}\} - \pi) = E\{U(x_0 + \tilde{x})\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{eq.(7)}$$

3.2.2
GRAU DE AVERSÃO AO RISCO

O valor do prêmio de risco e conseqüentemente a curvatura da Função Utilidade expressam o grau de aversão ao risco (atração pelo risco), como ilustrado na figura abaixo.

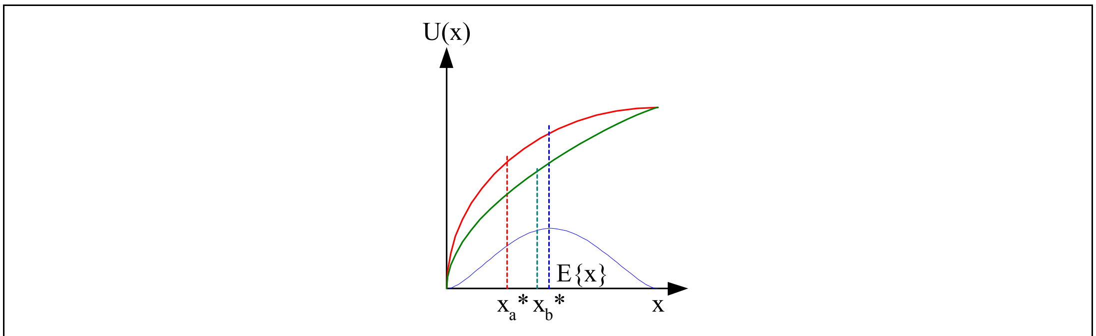

Figura 10 – Curvatura da Função Utilidade x Aversão ao Risco

Para um resultado com incerteza pequena podemos estabelecer uma relação aproximada entre o prêmio de risco e a variância do resultado, como demonstrado a seguir:

Como visto anteriormente: $U(x^*) = U(x_0 + \bar{x} - \pi) = E\{U(x_0 + \tilde{x})\}$

Supondo, sem perda de generalidade, que o valor médio do resultado incerto é nulo: $U(x_0 - \pi) = E\{U(x_0 + \tilde{x})\}$

Expandindo o termo à esquerda da equação, numa série de Taylor em torno do valor da riqueza inicial "x_0":

$$U(x_0 - \pi) = U(x_0) - \pi.\ U'(x_0) + ...$$

Expandindo o termo à direita da equação, numa série de Taylor em torno do valor da riqueza inicial "x_0":

$$E\{U(x_0 + \tilde{x})\} = E\{U(x_0) + \tilde{x}\ U'(x_0) + ½\ \tilde{x}^2.U''(x_0) + ...\}$$

$$\rightarrow E\{U(x_0 + x)\} = U(x_0) + ½\ \sigma^2.\ U''(x_0) + ...$$

Portanto:

$$U(x_0 - \pi) = E\{U(x_0 + \tilde{x})\} \rightarrow U(x_0) - \pi.\ U'(x_0) + ... = U(x_0) + ½\ \sigma^2.\ U''(x_0) + ...$$

$$\rightarrow \pi.\approx -½\ \sigma^2.\ U''(x_0) / U'(x_0) \quad \text{.................................} \quad \text{eq.(8)}$$

Definindo $\lambda(x_0) \equiv - U''(x_0) / U'(x_0)$

$$\pi.\approx ½\ \sigma^2.\ \lambda(x_0) \text{...} \quad \text{eq.(9)}$$

A grandeza "$\lambda(x_0)$" que relaciona o prêmio de risco "π" à variância do resultado "σ^2", é chamada de "grau de aversão absoluta ao risco". (PRATT 1964)

Vale observar que embora a expansão de "$U(x_0 - \pi)$" tenha sido truncada no termo de 1ª. ordem, enquanto que a expansão de "$E\{U(x_0 + x)\}$" tenha sido truncada no termo de 2ª. ordem, os termos truncados têm a mesma ordem de grandeza, pois na expansão de "$U(x_0 - \pi)$" os termos truncados são de ordem superior a "π" e na expansão de "$E\{U(x_0 + x)\}$" os termos truncados são de ordem superior a "σ^2" e como visto o prêmio de risco "π" tem a mesma ordem de grandeza da variância "σ^2" do resultado, e portanto, em ambos os casos a expansão foi truncada em termos com a mesma ordem de grandeza.

A definição do grau de aversão ao risco de um agente é equivalente à definição da sua função utilidade:

$$\lambda(x_0) \equiv -U''(x_0)/U'(x_0) \rightarrow U(x) = \int e^{-\int \lambda(x_0)dx} dx \quad \text{................} \quad \text{eq.(10)}$$

Sendo o prêmio de risco "π" proporcional ao grau de aversão a risco "$\lambda(x_0)$" e este definido como a razão entre as derivadas 2ª e 1ª da função utilidade, ambas as grandezas, "π" e "$\lambda(x_0)$", são insensíveis a uma transformação linear da função utilidade:

$$V(x_0) = a.U(x_0) + b \rightarrow V'(x_0) = a.U'(x_0) \text{ e } V''(x_0) = a.U''(x_0))$$

$\rightarrow \lambda_V(x_0) \equiv - V''(x_0)/V'(x_0) = - a.U''(x_0)/a.U'(x_0) = - U''(x_0)/U'(x_0) \equiv \lambda_U(x_0) \rightarrow \pi_V = \pi_U$

Alternativamente à aversão absoluta ao risco "$\lambda(x_0)$", a função utilidade também pode ser caracterizada pela "aversão relativa ao risco "$\lambda'(x_0)$" que expressa a aversão ao risco medido como uma proporção da riqueza inicial (taxa de retorno):

Seja a riqueza final (após o resultado incerto) definida em função da taxa de retorno incerta "$\tilde{y}$": $\tilde{x} = x_0.(1 + \tilde{y})$

Seja "$\pi'(x_0)$" é o prêmio de risco por nível de riqueza: $\pi'(x_0) = \pi(x_0)/x_0$

Então, o equivalente certo pode ser redefinido como:

$$x^* = E\{x_0.(1 + \tilde{y})\} - \pi'(x_0).x_0 \rightarrow x^* = x_0.(E\{(1 + \tilde{y})\} - \pi'(x_0)))$$

Supondo, sem perda de generalidade que $E\{\tilde{y}\} = 0 \Rightarrow x^* = x_0.(1 - \pi'(x_0))$

Da definição do equivalente certo:

$$U(x^*) = E\{U(\tilde{x})\} \rightarrow U(x_0.(1 - \pi'(x_0))) = E\{U(x_0.(1 + \tilde{y}))\})$$

A variância do resultado "σ_x^2" pode ser expressa em função da variância da taxa de retorno "σ_y^2":

$$\tilde{x} = x_0.(1 + \tilde{y}) \rightarrow \sigma_x^2 = x_0^2.\sigma_y^2)$$

Da definição do prêmio de risco:

$\pi(x_0) = \pi'(x_0).x_0 = ½\, \sigma_x^2\, \lambda(x_0)$

$\rightarrow \pi'(x_0) = ½\, \sigma_x^2\, \lambda(x_0)/x_0 = ½\, x_0^2.\sigma_y^2\, \lambda(x_0)/x_0 = ½\, x_0.\sigma_y^2\, \lambda(x_0)$

$\rightarrow \pi'(x_0) = ½\, \sigma_y^2\, \lambda(x_0).x_0$

$\rightarrow \pi'(x_0) = ½\, \sigma_y^2\, \lambda'(x_0))$ .... eq.(11)

Onde "$\lambda'(x_0)$" é o "grau de aversão relativa ao risco":

$\lambda'(x_0) = \lambda(x_0).x_0$ .... eq.(12)

O grau de aversão a risco "$\lambda(x_0)$" é função do nível inicial da riqueza do agente e permite modelar agentes cuja aversão ao risco seja constante, ou decrescente com o nível de riqueza, isto é, com $\partial\lambda/\partial x_0 \leq 0$. Em tese a aversão ao risco também pode ser crescente com o nível de riqueza, no entanto, esta atitude não é considerada racional.

Exemplos de função utilidade com aversão absoluta ao risco constante:

- Neutralidade ao Risco ($c = 0$): $U(x) = x$ .... eq.(13)
- Aversão ao Risco ($c > 0$): $U(x) = -e^{-c.x}$ .... eq.(14)
- Atração pelo Risco ($c < 0$): $U(x) = e^{c.x}$ .... eq.(15)

Exemplos de função utilidade com aversão relativa ao risco, constante:

- $U(x) = \ln(x)$ ... $c' = 1$ .... eq.(16)
- $U(x) = -x^{-(c-1)}$ ... $c' > 1$ .... eq.(17)

A aversão relativa ao risco constante implica numa aversão absoluta ao risco inversamente proporcional à riqueza, pois $\lambda(x_0) = \lambda'(x_0)/x_0$

Embora o conceito de "grau de aversão a risco" tenha sido desenvolvido baseado na premissa de uma variância pequena (infinitesimal), ele continua sendo válido mesmo para riscos com ordem de grandeza como pode ser verificado substituindo a variável "x" por "$x + k$" na expressão das funções utilidade com aversão absoluta ao risco [eq.(13) a (15)] e por "$k.x$" na expressão das funções utilidade com aversão absoluta ao risco acima.

É interessante observar que a função quadrática "$U(x) = x^2$" é um caso particular da função utilidade com aversão relativa ao risco crescente o que seria uma atitude econômica irracional.

Finalmente é interessante observar que no caso da incerteza ter uma distribuição de probabilidade Normal, e o agente apresentar aversão absoluta ao risco constante expressa através de uma função utilidade modelada como uma exponencial negativa [eq.(14)], o equivalente certo é <u>exatamente</u> a diferença entre a média e a variância da incerteza, penalizada pelo grau de aversão ao risco do agente "$\mu - \lambda.\sigma^2/2$", como mostrado abaixo (SARGENT 1987, pp.154-155). Esta expressão "média – variância" do equivalente certo é a função adotada por Markowitz para descrever o comportamento dos investidores em ativos de risco.

Seja $x \sim N(\mu,\sigma^2)$ e $U(x) = -e^{-\lambda.x}$

Portanto, a utilidade do equivalente certo de "x" "$U(x^*)$" é:

$$U(x^*) \equiv E\{U(\tilde{x})\} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda x} dx$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 9725007/CA

$$\rightarrow U(x^*) \equiv E\{U(\tilde{x})\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+\lambda x\right)} dx$$

$$\rightarrow U(x^*) \equiv E\{U(\tilde{x})\} = \frac{-e^{-\lambda\left(\mu-\frac{\lambda.\sigma^2}{2}\right)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{(x-\mu+\lambda.\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Definindo $\mu' \equiv \mu - \lambda.\sigma^2 \Rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{(x-\mu+\lambda.\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{(x-\mu')^2}{2\sigma^2}} dx = 1$

$$\Rightarrow U(x^*) \equiv E\{U(\tilde{x})\} = -e^{-\lambda\left(\mu-\frac{\lambda.\sigma^2}{2}\right)} \quad \text{.. eq.(18)}$$

3.3
DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA

Como discutido anteriormente, a ordenação de resultados incertos pela respectiva utilidade esperada reflete a preferência de um agente econômico com relação a estes resultados e que uma função utilidade pode expressar a atitude de uma gente diante da incerteza.

No entanto, a aplicação prática de funções utilidade requer a definição do grau de aversão ao risco, o que é um critério bastante subjetivo, ainda mais se considerarmos a sua variação em função do nível de riqueza.

Por outro lado, nem todas as premissas (axiomas) adotadas na justificação do "princípio da utilidade esperada" se verificam na prática, como mostrado na experiência que ficou conhecida como "Paradoxo de Allais[6]", descrita no quadro abaixo.

"Paradoxo de Allais"

Seja a situação 1, onde se propõe a escolha entre as seguintes loterias:

$$L_{1,1} \equiv \begin{bmatrix} 1000 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } L_{1,2} \equiv \begin{bmatrix} 5000 & 1000 & 0 \\ 0.1 & 0.89 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Na situação 1 o agente deve escolher entre receber um prêmio de \$1000 com certeza (probabilidade = 1) ou uma loteria com alta probabilidade de receber \$1000, uma probabilidade pequena (0.1) de receber \$5000 e uma probabilidade bem menor (0.01) de não receber nada. A maioria dos agentes prefere a 1ª. opção: $L_{1,1} >_p L_{1,2}$

Seja a situação 2, onde se propõe a escolha entre as seguintes loterias:

$$L_{2,1} \equiv \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0.11 & 0.89 \end{bmatrix} \text{ e } L_{2,2} \equiv \begin{bmatrix} 5000 & 0 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Na situação 2 o agente deve escolher entre receber um prêmio de \$1000 ou de

---

[6] Maurice Allais, 1953: Fondements d'une Theorie Positive de Choix Comportant un Risque et Critique des Postulats et Axioms de L'Ecole Americaine

$5000 com probabilidades quase iguais (0.11 e 0.1). A maioria dos agentes prefere a 2ª. opção: $L_{2,1} <_p L_{2,2}$

As situações 1 e 2 podem ser rescritas como:

$$L_{1,2} \equiv \begin{bmatrix} 1000 & 1000 & 1000 \\ 0.1 & 0.01 & 0.89 \end{bmatrix} \text{ e } L_{1,2} \equiv \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 1000 \\ 0.1 & 0.01 & 0.89 \end{bmatrix}$$

$$L_{2,1} \equiv \begin{bmatrix} 1000 & 1000 & 0 \\ 0.1 & 0.01 & 0.89 \end{bmatrix} \text{ e } L_{2,2} \equiv \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.01 & 0.89 \end{bmatrix}$$

Pode-se observar que as loterias das situações 1 e 2 diferem apenas com relação à 3ª.possibilidade de resultado (3ª.coluna).

Se a preferência do agente fosse "independente do contexto", que é uma premissa do "Princípio da Utilidade Esperada", então o agente deveria preferir a mesma opção nas 2 situações, ou seja, ao preferir a opção 1 ($L_{1,1}$) na situação 1, também deveria preferir a opção 1 ($L_{2,1}$) na situação 2, contrariando a observação empírica do comportamento dos agentes.

Contrapondo-se às dificuldades na especificação da função utilidade de um agente e às contradições empíricas do Princípio da Utilidade Esperada, o agente pode comparar as distribuições dos resultados e estabelecer sua preferência, ou seja, o agente pode estabelecer a "dominância estocástica" de uma distribuição em relação à outra.

Diz-se que um resultado incerto "$\tilde{x}$" domina estocasticamente outro "$\tilde{y}$", se e somente se o equivalente certo do resultado favorecido "x^*" for maior ou igual ao do desfavorecido "y^*":

$$\tilde{x} \succ \tilde{y} \Leftrightarrow x^* \geq y^* \Leftrightarrow E\{U(\tilde{x})\} \geq E\{U(\tilde{y})\} \quad \text{........................ eq.(19)}$$

Apesar do critério de dominância estocástica se referir à função utilidade, a sua aplicação não requer a especificação dela, mas somente da sua classe, que estabelece a ordem de dominância estocástica:

- Dominância estocástica de 1ª ordem: Não saciedade $\rightarrow U'(x) \geq 0$
- Dominância estocástica de 2ª ordem: Avessa ao Risco $\rightarrow U''(x) \leq 0$
- Dominância estocástica de 3ª ordem: Aversão Decrescente ao Risco $\rightarrow U'''(x) \geq 0$

3.3.1
DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA DE 1ª ORDEM

Diz-se para agentes que preferem sempre mais, que uma loteria "$\tilde{x}$" tem dominância estocástica de 1ª ordem sobre outra loteria "$\tilde{y}$", se e somente se a probabilidade de ocorrência de qualquer resultado na loteria dominante for menor ou igual que a probabilidade de ocorrência do mesmo resultado na loteria dominada.

$$\tilde{x} \succ_1 \tilde{y} \Leftrightarrow F(\tilde{x}) \leq G(\tilde{y}) \quad \text{.......................................} \quad \text{eq.(20)}$$

onde "$F(\tilde{x})$" e "$G(\tilde{y})$" são as distribuições de probabilidade acumulada de "$\tilde{x}$" e "$\tilde{y}$"

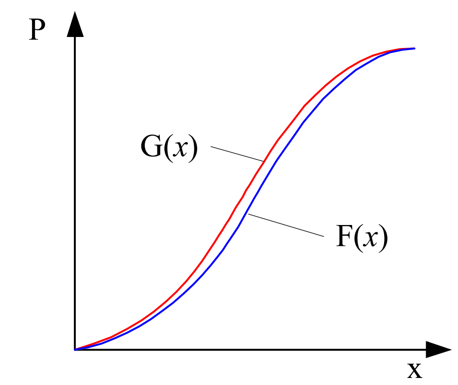

Figura 11 – Dominância Estocástica de 1ª. Ordem

$$E^F\{U(\tilde{x})\} \equiv \int_a^b U(x)\,dF(x) \text{ e } E^G\{U(\tilde{x})\} \equiv \int_a^b U(x)\,dG(x)$$

"$F(\tilde{x})$" domina "$G(\tilde{x})$" se e somente se $E\{U(\tilde{x})\} \geq E\{U(\tilde{x})\}$

$$\Rightarrow \int_a^b U(x)\,dF(x) \geq \int_a^b U(x)\,dG(x) \rightarrow \int_a^b U(x)[dF(x) - dG(x)] \geq 0$$

Integrando por partes

$$\int_a^b U(x)[dF(x) - dG(x)] = U(x).(F(x) - G(x)]_a^b - \int_a^b U'(x)[F(x) - G(x)]dx \geq 0$$

$F(a) = G(a) = 0$ e $F(b) = G(b) = 1$

$$\Rightarrow \int_a^b U(x)[dF(x) - dG(x)] = - \int_a^b U'(x)[F(x) - G(x)]dx$$

Por hipótese $U'(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \int_a^b U(x)[dF(x) - dG(x)] \geq 0 \text{ se e somente se } \int_a^b U'(x)[F(x) - G(x)]dx \leq 0$$

$$\Rightarrow F(\tilde{x}) \leq G(\tilde{x}) \quad \blacksquare$$

3.3.2
DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA DE 2ª ORDEM

Diz-se para agentes que preferem sempre mais e são avessos ao risco, que uma loteria "$\tilde{x}$" tem dominância estocástica de 2ª ordem sobre outra loteria "$\tilde{y}$", se e somente se a probabilidade de ocorrência de um resultado inferior a um certo valor na loteria dominante for menor ou igual que a probabilidade de ocorrência do mesmo resultado na loteria dominada e o valor esperado das 2 loterias for igual, como demonstrado a seguir.

$$\tilde{x} \succ_2 \tilde{y} \Leftrightarrow \int_a^x F(x)dx \leq \int_a^x G(x)dx \quad \text{e} \quad E^F\{\tilde{x}\} = E^G\{\tilde{x}\} \quad \text{...} \quad \text{eq.(21)}$$

onde "$F(\tilde{x})$" e "$G(\tilde{x})$" são as distribuições de probabilidade acumulada das loterias "$\tilde{x}$" e "$\tilde{y}$"

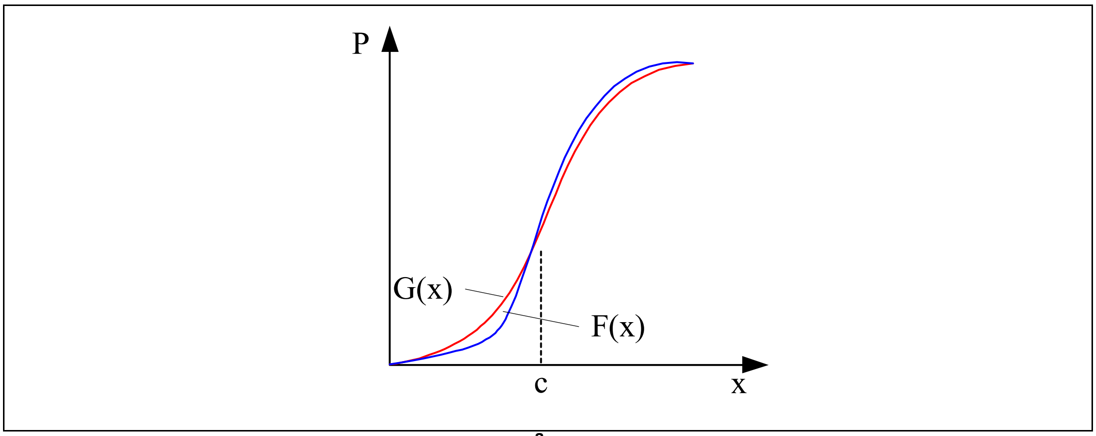

Figura 12 – Dominância Estocástica de 2ª. Ordem

$$E\{U(\tilde{x})\} \equiv \int_a^b U(x)dF(x) \text{ e } E\{U(\tilde{x})\} \equiv \int_a^b U(x)dG(x))$$

$$\text{“}F(\tilde{x})\text{” domina “}G(\tilde{y})\text{”} \Leftrightarrow E\{U(\tilde{x})\} \geq E\{U(\tilde{y})\}$$

Da demonstração do Teorema de Dominância Estocástica de 1ª ordem:

$$E\{U(x)\} \geq E\{U(y)\} \Rightarrow -\int_a^b U'(x)[F(x)-G(x)]dx \leq 0$$

Integrando por partes:

$$-\int_a^x\int_a^b U'(x)[F(x)-G(x)]dx =$$

$$= -U'(x)\int_a^x [F(z)-G(z)]dz\Big]_a^b + \int_a^b U''(x)\int_a^x [F(z)-G(z)]dz\,dx$$

$$= -U'(b)\int_a^b [F(z)-G(z)]dz + \int_a^b U''(x)\int_a^x [F(z)-G(z)]dz\,dx$$

Por hipótese:

$$U'(b) \geq 0 \Rightarrow U'(b)\int_a^b [F(z)-G(z)]dz \geq 0 \text{ se } \int_a^b [F(z)-G(z)]dz \leq 0$$

$$U'(b) \geq 0 \text{ e } U''(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b U''(x)\int_a^x [F(z)-G(z)]dz\,dx \geq 0 \text{ se e somente se } \int_a^x [F(z)-G(z)]dz \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^x F(z)dz \leq \int_a^x G(z)dz \quad \blacksquare$$

3.3.2.1
DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA DE 2ª ORDEM E O MODELO RISCO – RETORNO (MARKOWITZ)

A dominância estocástica de 2ª ordem (aversão ao risco) é um pressuposto na determinação da “fronteira eficiente” do modelo Risco - Retorno (MARKOWITZ, 1959) de alocação de *portfolios* de ativos de risco, pois para cada nível de risco, o agente quer o que produz mais riqueza, definindo o lugar geométrico dos “portfolios de máximo retorno”, indicado pela curva “a - c” na fgura abaixo e sendo o agente avesso ao risco, ele requer maior retono com o nível de risco, limitando o lugar geométrico dos *portfolios* de interesse ao trecho “a - b”, que é por definição a “fronteira eficiente”.

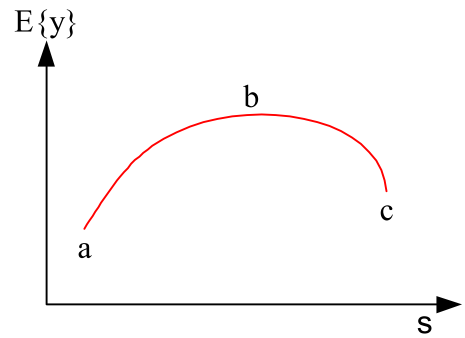

Figura 13 – Fronteira Eficiente e Dominância Estocástica

3.3.3
DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA DE 3ª ORDEM

Diz-se para agentes que preferem sempre mais, são avessos ao risco e cujo grau de aversão é decrescente com o nível de riqueza, que uma loteria "$\tilde{x}$" tem dominância estocástica de 3ª ordem sobre outra loteria "$\tilde{y}$", se e somente se a probabilidade de ocorrência de um resultado inferior na loteria dominante for menor ou igual que a probabilidade de ocorrência do mesmo resultado na loteria dominada e o valor esperado da loteria dominante for maior que o da dominada, como demonstrado a seguir.

$$\tilde{x} \succ_3 \tilde{y} \Leftrightarrow \int_a^x \int_a^t F(x)dx\,dt \leq \int_a^x \int_a^t G(y)dy\,dt \quad \text{e} \quad E\{\tilde{x}\} > E\{\tilde{y}\} \quad \text{eq.(22)}$$

onde "$F(\tilde{x})$" e "$G(\tilde{y})$" são as distribuições de probabilidade acumulada de "$\tilde{x}$" e "$\tilde{y}$"

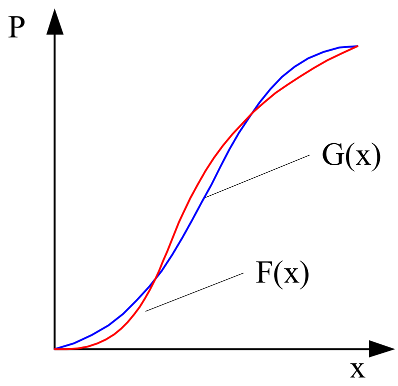

Figura 14 – Dominância Estocástica de 3ª. Ordem

$$E\{U(\tilde{x})\} \equiv \int_a^b U(x)\,dF(x) \text{ e } E\{U(\tilde{x})\} \equiv \int_a^b U(x)\,dG(x)\,)$$

"$F(\tilde{x})$" domina "$G(\tilde{y})$" $\Leftrightarrow E\{U(\tilde{x})\} \geq E\{U(\tilde{y})\}$

Da demonstração do Teorema de Dominância Estocástica de 2ª ordem:

$$E\{U(x)\} \geq E\{U(y)\} \Rightarrow -U'(b)\int_a^b [F(z)-G(z)]dz + \int_a^b U''(x)\int_a^x [F(z)-G(z)]dz\,dx \geq 0)$$

Integrando o 2º. termo por partes:

$$-U'(b)\int_a^b [F(z)-G(z)]dz + U''(b)\int_a^t\int_a^b [F(z)-G(z)]dz\,dt - \int_a^b U'''(x)\int_a^x\int_a^t [F(z)-G(z)]dt\,dz\,dx\,)$$

Por hipótese:

$$E\{x\} > E\{y\} \Rightarrow \int_a^b [F(z)-G(z)]dz < 0)$$

$$E\{x\} > E\{y\} \text{ e } U'(x) \geq 0 \Rightarrow -U'(b)\int_a^b [F(z)-G(z)]dz \geq 0)$$

$E\{x\} > E\{y\}$, $U''(x) \leq 0$ e $U'''(x) \geq 0$)

$$\Rightarrow U''(b)\int_a^t\int_a^b [F(z)-G(z)]dz\,dt \geq 0 \text{ e } -\int_a^b U'''(x)\int_a^x\int_a^t [F(z)-G(z)]dt\,dz\,dx \geq 0)$$

se e somente se $\int_a^t\int_a^x [F(z)-G(z)]dz\,dt \leq 0$ ■

3.4
HEURÍSTICAS DE DECISÃO SOB INCERTEZA ABSOLUTA

Nos casos em que não houver informação sobre a probabilidade de ocorrência dos possíveis resultados, podem ser aplicadas heurísticas[7], dentre as quais se destacam as seguintes (EKENBERG 2000):

- Princípio da Incerteza Absoluta (Laplace): se não houver nenhuma informação sobre a probabilidade dos possíveis resultados, então se deve assumir que eles são eqüiprováveis, ou seja, a sua ocorrência tem distribuição Uniforme e o critério de escolha deve ser o de maior valor esperado.
- Princípio da Utilidade "Maximin" (Wald): se não houver nenhuma informação sobre a probabilidade dos possíveis resultados, então se deve escolher a loteria cujo pior resultado seja melhor que o pior resultado das demais loterias.
- Índice de Pessimismo - Otimismo (Hurwicz): se não houver nenhuma informação sobre a probabilidade dos possíveis resultados, então se deve escolher a loteria que maximizar o valor ponderado do melhor resultado "x_H" e o pior resultado "x_L": $\max v = \alpha.x_L + (1\text{-}\alpha).x_H$, sendo $\alpha \in (0,1)$
- Princípio da Utilidade "Minimax" ou Princípio do Mínimo Arrependimento (Savage): se não houver nenhuma informação sobre a probabilidade dos possíveis resultados, então se deve escolher a loteria que minimizar o maior arrependimento "r", definido como a diferença entre cada possível resultado "x_i" e o melhor resultado: $\min r_i = \max \{x_i - x_H\} \ldots \forall i$

É interessante notar que estas heurísticas não são necessariamente coerentes entre si, ou seja, podem levar a escolhas diferentes diante das mesmas opções como ilustrado pelo exemplo apresentado a seguir, no qual temos 4 loterias e cada uma seria a preferida segundo cada um dos critérios discutidos.

---

[7] Milnor, 1954: Games against Nature in Decision Processes

	C_1	C_2	C_3	C_4	E{L}	$\underline{L}$	$\bar{L}$	max{arrependimento}	Heurística
L_1	2	2	0	1	5/4	1	2	max{0,2,1,0} = 2	Laplace
L_2	1	1	1	1	4/4	1	1	max{1,3,0,0} = 3	Wald
L_3	0	4	0	0	4/4	0	4	max{2,0,1,1} = 2	Hurwicz (α > ¼)
L_4	1	3	0	0	4/4	0	3	max{1,1,1,1} = 1	Savage

Tabela 2 - Heurísticas de Escolha sob Incerteza Absoluta - Exemplo de Milnor