

## 4 Gráfico de Controle VSI EWMA para Não-Conformidades

Neste capítulo, inicialmente descreveremos o esquema de controle VSI EWMA proposto nesta pesquisa, e, em seguida, trataremos da formulação do modelo matemático para cálculo de suas medidas de desempenho.

### 4.1. Descrição do Gráfico de Controle VSI EWMA para Não-Conformidades

A proposta desta pesquisa é incorporar a estratégia de gráficos adaptativos (utilizando um intervalo de tempo entre amostras variável) a um esquema EWMA para sinalizar aumentos na frequência de ocorrência de não-conformidades. Trata-se, portanto, de um gráfico VSI EWMA unilateral superior para controle do número de não-conformidades. A estatística registrada é a mesma estatística  $Z_t$  do esquema EWMA para não-conformidades apresentado na *Seção 3.1*:

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda C_t, \quad (4.1)$$

onde  $C_t$  representa o número de não-conformidades na amostra  $t$ ,  $C$  é uma variável aleatória de Poisson, com  $E(C) = VAR(C) = c_0$ , e para o valor inicial adota-se  $Z_0 = c_0$ .

O gráfico VSI EWMA proposto é construído usando-se um limite superior de advertência (LSA) e um limite superior de controle (LSC),  $0 < LSA < LSC$ , dados por

$$LSA = c_0 + K_A \sqrt{\frac{\lambda c_0}{2 - \lambda}} \quad (4.2)$$

e

$$LSC = c_0 + K_C \sqrt{\frac{\lambda c_0}{2 - \lambda}}, \quad (4.3)$$

onde  $K_A$  é o coeficiente de abertura do limite de advertência e  $K_C$  é o coeficiente de abertura do limite de controle.

A dimensão vertical do gráfico é dividida em duas regiões: o intervalo  $H_L = (0, LSA)$ , denominado “região verde”, e o intervalo  $H_S = (LSA, LSC)$ , denominado “região amarela”.

O intervalo de tempo entre amostras varia em função do valor corrente da estatística  $Z_t$ : quando o valor de  $Z_t$  se encontra na região verde, usa-se um intervalo mais longo de tempo entre amostras ( $h_L$ ) para a retirada da  $(t+1)$ ésima amostra, e quando o valor de  $Z_t$  se encontra na região amarela, usa-se um intervalo mais curto ( $h_S$ ). Assume-se, por definição, que  $h_S < h_L$ . O princípio básico dessa regra de operação é simples: se o valor de  $Z_t$  encontra-se entre o limite superior de advertência e o limite superior de controle, indicando uma possível situação de descontrole no processo, o controle é tornado mais rigoroso porque espera-se menos tempo que o usual para a retirada da próxima amostra; por outro lado, se o valor de  $Z_t$  encontra-se abaixo do limite superior de advertência, o controle pode ser relaxado; então espera-se um tempo mais longo que o usual para a retirada da próxima amostra. O uso do intervalo de tempo mais longo quando  $Z_t$  está na região verde tem por objetivo contrabalançar o uso do intervalo mais curto quando  $Z_t$  está na região amarela, de modo a não elevar o custo médio com amostragem.

Os parâmetros de projeto do gráfico VSI EWMA são, portanto, a constante de amortecimento  $\lambda$ , os coeficientes de abertura dos limites superiores de advertência ( $K_A$ ) e de controle ( $K_C$ ) e os dois intervalos de tempo entre amostras, mais longo ( $h_L$ ) e mais curto ( $h_S$ ).

Relembrando, nesta pesquisa, estamos supondo que ao iniciar-se o monitoramento, o processo esteja em controle, e só saia desse estado em algum momento aleatório no futuro, devido à ocorrência de alguma causa especial. Supõe-se também que a causa especial ocorra instantaneamente, elevando imediatamente o número médio de não-conformidades de  $c_0$  para  $c_1$ , e que o processo se mantenha nesse estado enquanto nenhuma ação corretiva for empreendida.

A *Figura 2* ilustra o esquema VSI EWMA proposto, com um exemplo. Para melhor transmitir a idéia, os espaçamentos entre amostras no eixo horizontal foram feitos variáveis, conforme o intervalo adotado, mas, obviamente, na prática pode-se traçar o gráfico adotando um espaçamento horizontal uniforme entre as amostras.

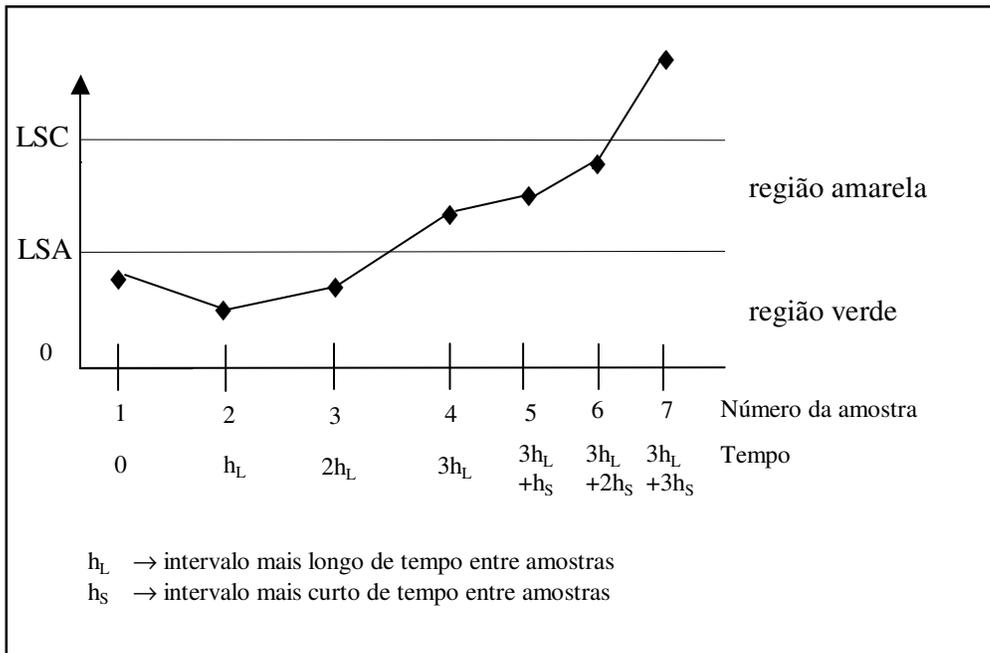


Figura 2 - Gráfico de controle VSI EWMA

Para avaliar a proteção que o esquema VSI EWMA proposto fornece contra alarmes falsos, é utilizada a medida de desempenho TMAF, que representa o tempo médio até a ocorrência de um alarme falso. Para analisar a rapidez do gráfico proposto na detecção de um aumento na incidência de não-conformidades é utilizada a medida de desempenho TES, valor esperado do tempo até o sinal, que representa estritamente o valor médio do tempo entre a ocorrência da causa especial e o alarme verdadeiro fornecido pelo gráfico, quando o processo se inicia em controle e a alteração no processo ocorre durante o seu monitoramento. Estas medidas de desempenho do esquema VSI EWMA são obtidas através de um modelo de cadeias de Markov, que será descrito na próxima seção.

A estratégia de resposta inicial rápida não será aplicada ao gráfico VSI EWMA proposto, pois estamos supondo que o monitoramento é iniciado com o processo em controle. Também não serão usados limites variáveis no tempo: os

limites superiores de advertência e de controle serão constantes, calculados com base na variância assintótica do processo, para evitar que a matriz de transição da cadeia de Markov do modelo para cálculo das medidas de desempenho varie de amostra para amostra.

#### 4.2.

#### **Modelo Matemático para Cálculo das Medidas de Desempenho do Gráfico de Controle VSI EWMA para Não-Conformidades**

As expressões para cálculo das medidas de desempenho do esquema VSI EWMA proposto podem ser obtidas utilizando um modelo de cadeias de Markov, semelhante ao de Borror, Champ & Rigdon (1998). Para tal, divide-se o intervalo entre o limite superior de controle e a origem, ou seja, o intervalo  $(0, LSC)$ , em  $N$  subintervalos de mesma largura ( $larg$ )

$$larg = \frac{LSC}{N}. \quad (4.4)$$

Defina-se então uma cadeia de Markov com  $N$  estados transientes, cada um associado a um dos subintervalos assim definidos, e um estado absorvente ( $Z_t > LSC$ ). O estado da cadeia no instante  $t$  corresponde ao subintervalo no qual esteja contida a estatística  $Z_t$ . Suponha que o intervalo  $(0, LSA)$ , que determina a região verde, contenha  $V$  subintervalos, e o intervalo  $(LSA, LSC)$ , que determina a região amarela, contenha  $A$  subintervalos, de modo que  $V + A = N$ . Por simplicidade, requereremos que  $LSA = V \times larg$ , isto é, que  $LSA$  delimite um subintervalo; caso  $LSA$  seja dado como parâmetro de projeto e precise ser ajustado, um procedimento possível é fazer

$$V = \left\lceil \frac{LSA_{inicial}}{larg} \right\rceil \quad (4.5)$$

e

$$LSA = V \times larg. \quad (4.6)$$

O  $j$ -ésimo subintervalo  $E_j$  é delimitado por  $I_j$  e  $S_j$ , onde

$$I_j = (j-1) \frac{LSC}{N} \quad (4.7)$$

e

$$S_j = j \frac{LSC}{N}. \quad (4.8)$$

O ponto médio do  $j$ -ésimo subintervalo ( $m_j$ ) é, então,

$$m_j = (2j-1) \frac{LSC}{2N}. \quad (4.9)$$

A *Figura 3* mostra a divisão do intervalo  $(0, LSC)$  em  $N$  subintervalos.

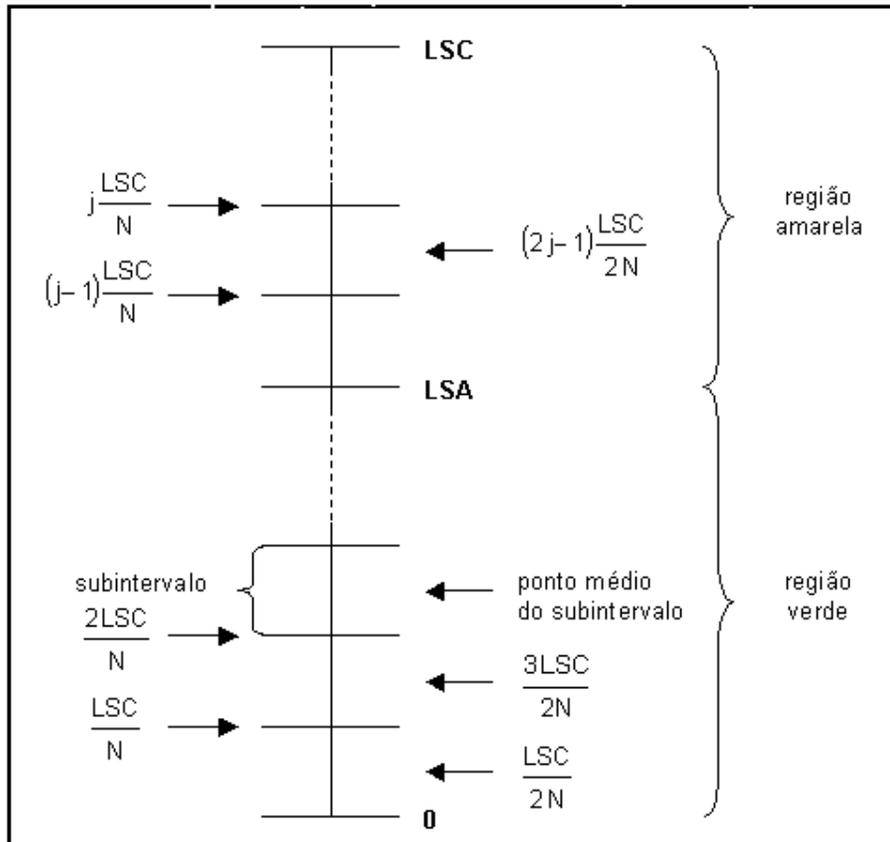


Figura 3 - Divisão do intervalo  $(0, LSC)$  em  $N$  subintervalos de mesma largura.

A probabilidade de transição  $q_{ij}$  é a probabilidade de ir do estado  $i$  para o estado  $j$ , ou seja, é a probabilidade de  $Z_t$  estar dentro dos limites do subintervalo  $j$ , condicionada ao fato de  $Z_{t-1}$  pertencer ao subintervalo  $i$ . Por simplicidade, suporemos sempre que  $Z_{t-1}$  está no ponto médio do subintervalo a que pertence (no caso,  $m_i$ ). Essa aproximação será tão melhor quanto maior o número de subintervalos. Dada essa suposição de que  $Z_{t-1}$  coincide com  $m_i$ , a probabilidade de transição  $q_{ij}$  é dada por

$$q_{ij} = \Pr\left(\mathbf{I}_j < Z_t \leq S_j \mid Z_{t-1} = m_i\right) \quad (4.10)$$

$$q_{ij} = \Pr\left((j-1)\frac{LSC}{N} < \lambda C_t + (1-\lambda)Z_{t-1} \leq j\frac{LSC}{N} \mid Z_{t-1} = m_i\right)$$

$$q_{ij} = \Pr\left((j-1)\frac{LSC}{N} < \lambda C_t + (1-\lambda)m_i \leq j\frac{LSC}{N}\right)$$

$$q_{ij} = \Pr\left((j-1)\frac{LSC}{N} < \lambda C_t + (1-\lambda)\left((2i-1)\frac{LSC}{2N}\right) \leq j\frac{LSC}{N}\right)$$

$$q_{ij} =$$

$$= \Pr\left(\frac{LSC}{2N\lambda}(2(j-1) - (1-\lambda)(2i-1)) < C_t \leq \frac{LSC}{2N\lambda}(2j - (1-\lambda)(2i-1))\right) \quad (4.11)$$

onde  $C_t \sim \text{Poisson}(c)$ , ou seja,  $C_t$  só assume valores positivos e inteiros.

Obtém-se, portanto, a matriz  $\mathbf{Q}$  das probabilidades de transição  $q_{ij}$  entre os estados transientes, com  $1 \leq i \leq N$  e  $1 \leq j \leq N$ . Quando  $c = c_0$  (processo em controle), a matriz  $\mathbf{Q}$  é calculada levando em consideração que  $C_t \sim \text{Poisson}(c_0)$ , e será denotada por  $\mathbf{Q}_0$ . Quando  $c = c_1$  (processo fora de controle), a matriz  $\mathbf{Q}$ , considerando que  $C_t \sim \text{Poisson}(c_1)$ , será denotada por  $\mathbf{Q}_1$ .

Com as matrizes  $\mathbf{Q}_0$  e  $\mathbf{Q}_1$  calculadas, podem ser obtidas as matrizes  $\mathbf{N}_0$  e  $\mathbf{N}_1$ , cujos elementos  $n_{ij}$  correspondem respectivamente aos números esperados de passagens pelo estado de transição  $j$  se o estado inicial for  $i$ , em um ciclo do processo (até a absorção pelo estado absorvente), através das expressões

$$\mathbf{N}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0)^{-1} \quad (4.12)$$

e

$$\mathbf{N}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1)^{-1}, \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{I}$  representa a matriz identidade. Cada elemento  $n_{ij}$  da matriz  $\mathbf{N}_0$  fornece o número esperado de passagens pelo estado transiente  $j$  se o processo estiver em controle, tendo sido iniciado no estado  $i$  (em  $t = 0$ ), e cada elemento  $n_{ij}$  da matriz  $\mathbf{N}_1$  fornece o número esperado de passagens pelo estado transiente  $j$  se o processo estiver fora de controle, tendo estado no estado  $i$  imediatamente antes da ocorrência da causa especial.

Consideremos a fase em controle do processo.

Seja  $\mathbf{Y}$  uma matriz auxiliar de dimensão  $N \times 2$ . A primeira coluna tem seus primeiros  $V$  elementos iguais a 1 e seus últimos  $A$  elementos iguais a zero, e a

segunda coluna tem seus primeiros  $V$  elementos iguais a zero e seus últimos  $A$  elementos iguais a 1, onde, lembremos,  $A + V = N$ .

Seja  $\mathbf{w}$  o vetor  $N \times 1$  de probabilidades do estado inicial da fase em controle. Então o produto  $\mathbf{w}^T \mathbf{N}_0 \mathbf{Y}$  é um vetor  $1 \times 2$  cujos elementos são, respectivamente, o número médio de passagens por estados verdes [ $E(\# \text{ verdes})$ ] e o número médio de passagens por estados amarelos [ $E(\# \text{ amarelos})$ ] até a absorção pelo estado absorvente (alarme falso):

$$\mathbf{w}^T \mathbf{N}_0 \mathbf{Y} = [E(\# \text{ verdes}) \quad E(\# \text{ amarelos})]. \quad (4.14)$$

Supondo que o monitoramento se inicia por definição com  $Z_0 = c_0$ , então o vetor  $\mathbf{w}^T$  será simplesmente

$$\mathbf{w}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \dots \quad 1 \dots \quad 0], \quad (4.15)$$

composto por  $(N-1)$  elementos iguais a zero e um único elemento igual a 1. O índice do elemento igual a 1 no vetor coincide com o índice do subintervalo que contém  $c_0$  (que chamaremos aqui de  $i_0$ ), calculado por

$$i_0 = \left\lceil \frac{c_0}{\text{larg}} \right\rceil. \quad (4.16)$$

O NMAF (número médio de amostras até um alarme falso) é fornecido pela soma dos elementos do vetor  $\mathbf{w}^T \mathbf{N}_0 \mathbf{Y}$ :

$$\text{NMAF} = E(\# \text{ verdes}) + E(\# \text{ amarelos}). \quad (4.17)$$

A frequência relativa esperada de passagens por estados verdes até um alarme falso constitui a probabilidade em controle de a cadeia estar num estado verde condicionada a não estar no estado absorvente (alarme falso), e é dada por

$$p_v = \frac{E(\# \text{ verdes})}{\text{NMAF}}, \quad (4.18)$$

e a frequência relativa esperada de passagens por estados amarelos até um alarme falso, isto é, a probabilidade de estar num estado amarelo dado que o processo está em controle e que o gráfico não está sinalizando, é dada por

$$p_A = \frac{E(\# \text{ amarelos})}{\text{NMAF}} = 1 - p_v. \quad (4.19)$$

Seja o vetor  $\mathbf{h}$ , de dimensão  $N$ , onde os primeiros  $V$  elementos são iguais a  $h_L$  (intervalo mais longo de tempo entre amostras), e os últimos  $A$  elementos são iguais a  $h_S$  (intervalo mais curto de tempo entre amostras). Com o vetor  $\mathbf{h}$ , pode-se obter o valor de TMAF (tempo médio até a ocorrência de um alarme falso):

$$\text{TMAF} = \mathbf{w}^T \mathbf{N}_0 \mathbf{h}. \quad (4.20)$$

Enquanto o processo permanece em controle, o intervalo médio de tempo entre amostras ( $\bar{h}$ ) é dado por

$$\bar{h} = p_A h_S + p_V h_L. \quad (4.21)$$

O valor de  $\bar{h}$  será restrição para o projeto do gráfico; adotou-se neste trabalho  $\bar{h} = 1$ , sem perda de generalidade. Para o projeto, o valor de  $h_S$  será fornecido, e, portanto, o valor de  $h_L$  pode ser determinado em função de  $h_S$ , restrito a  $\bar{h} = 1$ . Então

$$h_L = \frac{1 - p_A h_S}{p_V}. \quad (4.22)$$

Com  $\bar{h} = 1$ , o valor de TMAF tem o mesmo valor de NMAF, pois  $\text{TMAF} = \bar{h} \text{NMAF}$ .

Consideremos agora a fase fora de controle.

Seja o vetor  $\mathbf{r}$ , de dimensão  $N$ , que fornece as proporções esperadas de passagem por cada estado transiente até a ocorrência de um alarme falso. Cada elemento  $r_j$  do vetor  $\mathbf{r}$  é calculado por

$$r_j = \frac{n_{i_0 j}}{\text{NMAF}}, \quad (4.23)$$

onde  $n_{i_0 j}$  é o  $j$ -ésimo elemento da  $i_0$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{N}_0$ , lembrando que  $i_0$  é o índice do subintervalo que contém  $c_0$ , dado pela expressão (4.16).

Seja  $\mathbf{s}$  o vetor de dimensão  $N$  que fornece as probabilidades de a estatística EWMA estar em cada subintervalo no instante da alteração no processo. Como em Reynolds *et al.* (1988), considera-se que as probabilidades de a alteração no processo ocorrer durante um intervalo mais longo ou durante um intervalo mais curto de tempo entre amostras sejam proporcionais ao produto do comprimento do intervalo pela probabilidade (com o processo em controle) de ocorrência do intervalo com este comprimento. Portanto, cada elemento  $s_j$  do vetor  $\mathbf{s}$  é calculado por

$$s_j = \frac{r_j h_j}{\mathbf{r}^T \mathbf{h}}, \quad (4.24)$$

onde  $h_j$  é o intervalo de tempo entre amostras usado no estado transiente  $j$  ( $h_j = h_L$ ,  $j = 1, 2, \dots, V$ ;  $h_j = h_S$ ,  $j = V+1, V+2, \dots, N$ ).

Pode-se, finalmente, calcular os valores das medidas de desempenho  $TES_f$ , que representa o tempo esperado desde a última amostra anterior ao descontrole até a sinalização deste pelo gráfico (alarme verdadeiro), e  $TES$ , que é o tempo esperado entre o instante de ocorrência do descontrole e o alarme verdadeiro.

A expressão que fornece a medida de desempenho  $TES_f$  é análoga à expressão (4.20), lembrando que agora o processo encontra-se fora de controle:

$$TES_f = \mathbf{s}^T \mathbf{N}_1 \mathbf{h}. \quad (4.25)$$

Como, porém, nesta pesquisa supõe-se que a alteração no processo ocorre em algum instante genérico entre duas amostras, o tempo esperado entre a alteração no processo e sua sinalização pelo gráfico é dado pelo TES:

$$TES = TES_f - E(Q), \quad (4.26)$$

onde  $E(Q)$  é o valor esperado do tempo entre a última amostra retirada durante o período em controle e a alteração no processo. Como a alteração pode ocorrer a qualquer instante dentro de um intervalo de tempo entre amostras, supõe-se aqui, como também o foi em Reynolds *et al.* (1988), que o instante exato da alteração é uniformemente distribuído neste intervalo. Conseqüentemente,

$$E(Q) = \mathbf{s}^T \mathbf{h} / 2, \quad (4.27)$$

e, portanto, a expressão para cálculo do TES torna-se

$$TES = TES_f - \frac{\mathbf{s}^T \mathbf{h}}{2}. \quad (4.28)$$

Na verdade, para se obter a expressão exata para  $E(Q)$ , seria necessário conhecer a distribuição do tempo em que o processo está em controle; no entanto, de acordo com Epprecht, Costa & Mendes (2003), a expressão (4.27) é uma excelente aproximação para  $E(Q)$  se os intervalos de tempo entre amostras  $h_S$  e  $h_L$  forem menores que 10% do tempo médio em controle; adota-se, aqui, então, esta aproximação por simplicidade e para generalidade dos resultados da análise.