

4 Gráfico de Controle VSI EWMA para Não-Conformidades

Neste capítulo, inicialmente descreveremos o esquema de controle VSI EWMA proposto nesta pesquisa, e, em seguida, trataremos da formulação do modelo matemático para cálculo de suas medidas de desempenho.

4.1. Descrição do Gráfico de Controle VSI EWMA para Não-Conformidades

A proposta desta pesquisa é incorporar a estratégia de gráficos adaptativos (utilizando um intervalo de tempo entre amostras variável) a um esquema EWMA para sinalizar aumentos na frequência de ocorrência de não-conformidades. Trata-se, portanto, de um gráfico VSI EWMA unilateral superior para controle do número de não-conformidades. A estatística registrada é a mesma estatística Z_t do esquema EWMA para não-conformidades apresentado na *Seção 3.1*:

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda C_t, \quad (4.1)$$

onde C_t representa o número de não-conformidades na amostra t , C é uma variável aleatória de Poisson, com $E(C) = VAR(C) = c_0$, e para o valor inicial adota-se $Z_0 = c_0$.

O gráfico VSI EWMA proposto é construído usando-se um limite superior de advertência (LSA) e um limite superior de controle (LSC), $0 < LSA < LSC$, dados por

$$LSA = c_0 + K_A \sqrt{\frac{\lambda c_0}{2 - \lambda}} \quad (4.2)$$

e

$$LSC = c_0 + K_C \sqrt{\frac{\lambda c_0}{2 - \lambda}}, \quad (4.3)$$

onde K_A é o coeficiente de abertura do limite de advertência e K_C é o coeficiente de abertura do limite de controle.

A dimensão vertical do gráfico é dividida em duas regiões: o intervalo $H_L = (0, LSA)$, denominado “região verde”, e o intervalo $H_S = (LSA, LSC)$, denominado “região amarela”.

O intervalo de tempo entre amostras varia em função do valor corrente da estatística Z_t : quando o valor de Z_t se encontra na região verde, usa-se um intervalo mais longo de tempo entre amostras (h_L) para a retirada da $(t+1)$ ésima amostra, e quando o valor de Z_t se encontra na região amarela, usa-se um intervalo mais curto (h_S). Assume-se, por definição, que $h_S < h_L$. O princípio básico dessa regra de operação é simples: se o valor de Z_t encontra-se entre o limite superior de advertência e o limite superior de controle, indicando uma possível situação de descontrole no processo, o controle é tornado mais rigoroso porque espera-se menos tempo que o usual para a retirada da próxima amostra; por outro lado, se o valor de Z_t encontra-se abaixo do limite superior de advertência, o controle pode ser relaxado; então espera-se um tempo mais longo que o usual para a retirada da próxima amostra. O uso do intervalo de tempo mais longo quando Z_t está na região verde tem por objetivo contrabalançar o uso do intervalo mais curto quando Z_t está na região amarela, de modo a não elevar o custo médio com amostragem.

Os parâmetros de projeto do gráfico VSI EWMA são, portanto, a constante de amortecimento λ , os coeficientes de abertura dos limites superiores de advertência (K_A) e de controle (K_C) e os dois intervalos de tempo entre amostras, mais longo (h_L) e mais curto (h_S).

Relembrando, nesta pesquisa, estamos supondo que ao iniciar-se o monitoramento, o processo esteja em controle, e só saia desse estado em algum momento aleatório no futuro, devido à ocorrência de alguma causa especial. Supõe-se também que a causa especial ocorra instantaneamente, elevando imediatamente o número médio de não-conformidades de c_0 para c_1 , e que o processo se mantenha nesse estado enquanto nenhuma ação corretiva for empreendida.

A *Figura 2* ilustra o esquema VSI EWMA proposto, com um exemplo. Para melhor transmitir a idéia, os espaçamentos entre amostras no eixo horizontal foram feitos variáveis, conforme o intervalo adotado, mas, obviamente, na prática pode-se traçar o gráfico adotando um espaçamento horizontal uniforme entre as amostras.

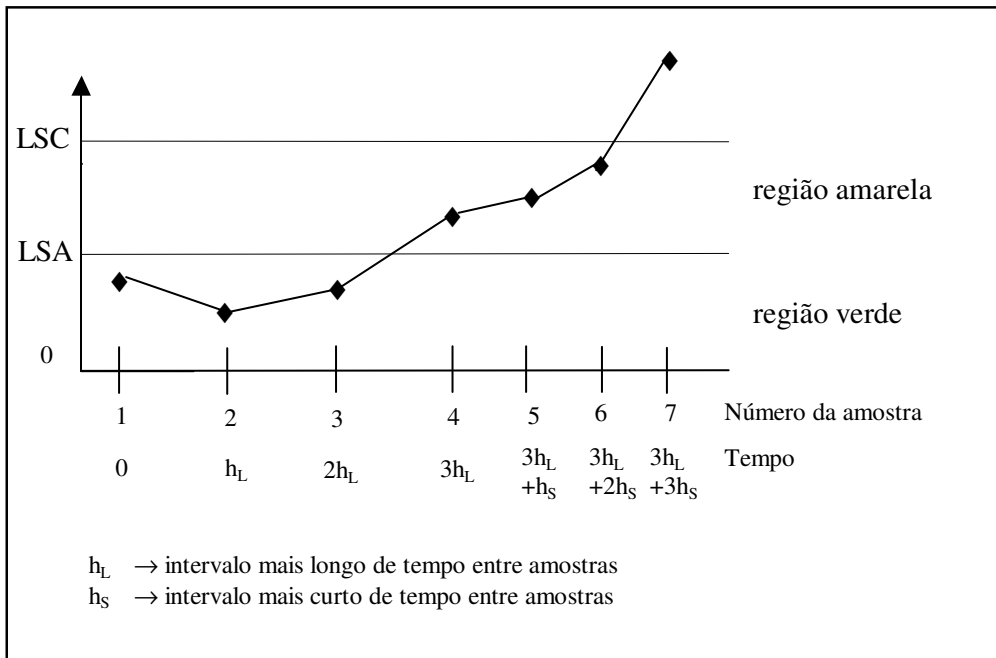


Figura 2 - Gráfico de controle VSI EWMA

Para avaliar a proteção que o esquema VSI EWMA proposto fornece contra alarmes falsos, é utilizada a medida de desempenho TMAF, que representa o tempo médio até a ocorrência de um alarme falso. Para analisar a rapidez do gráfico proposto na detecção de um aumento na incidência de não-conformidades é utilizada a medida de desempenho TES, valor esperado do tempo até o sinal, que representa estritamente o valor médio do tempo entre a ocorrência da causa especial e o alarme verdadeiro fornecido pelo gráfico, quando o processo se inicia em controle e a alteração no processo ocorre durante o seu monitoramento. Estas medidas de desempenho do esquema VSI EWMA são obtidas através de um modelo de cadeias de Markov, que será descrito na próxima seção.

A estratégia de resposta inicial rápida não será aplicada ao gráfico VSI EWMA proposto, pois estamos supondo que o monitoramento é iniciado com o processo em controle. Também não serão usados limites variáveis no tempo: os

limites superiores de advertência e de controle serão constantes, calculados com base na variância assintótica do processo, para evitar que a matriz de transição da cadeia de Markov do modelo para cálculo das medidas de desempenho varie de amostra para amostra.

4.2.

Modelo Matemático para Cálculo das Medidas de Desempenho do Gráfico de Controle VSI EWMA para Não-Conformidades

As expressões para cálculo das medidas de desempenho do esquema VSI EWMA proposto podem ser obtidas utilizando um modelo de cadeias de Markov, semelhante ao de Borror, Champ & Rigdon (1998). Para tal, divide-se o intervalo entre o limite superior de controle e a origem, ou seja, o intervalo $(0, LSC)$, em N subintervalos de mesma largura ($larg$)

$$larg = \frac{LSC}{N}. \quad (4.4)$$

Defina-se então uma cadeia de Markov com N estados transientes, cada um associado a um dos subintervalos assim definidos, e um estado absorvente ($Z_t > LSC$). O estado da cadeia no instante t corresponde ao subintervalo no qual esteja contida a estatística Z_t . Suponha que o intervalo $(0, LSA)$, que determina a região verde, contenha V subintervalos, e o intervalo (LSA, LSC) , que determina a região amarela, contenha A subintervalos, de modo que $V + A = N$. Por simplicidade, requereremos que $LSA = V \times larg$, isto é, que LSA delimite um subintervalo; caso LSA seja dado como parâmetro de projeto e precise ser ajustado, um procedimento possível é fazer

$$V = \left\lceil \frac{LSA_{inicial}}{larg} \right\rceil \quad (4.5)$$

e

$$LSA = V \times larg. \quad (4.6)$$

O j -ésimo subintervalo E_j é delimitado por I_j e S_j , onde

$$I_j = (j-1) \frac{LSC}{N} \quad (4.7)$$

e

$$S_j = j \frac{LSC}{N}. \quad (4.8)$$

O ponto médio do j -ésimo subintervalo (m_j) é, então,

$$m_j = (2j-1) \frac{LSC}{2N}. \quad (4.9)$$

A *Figura 3* mostra a divisão do intervalo $(0, LSC)$ em N subintervalos.

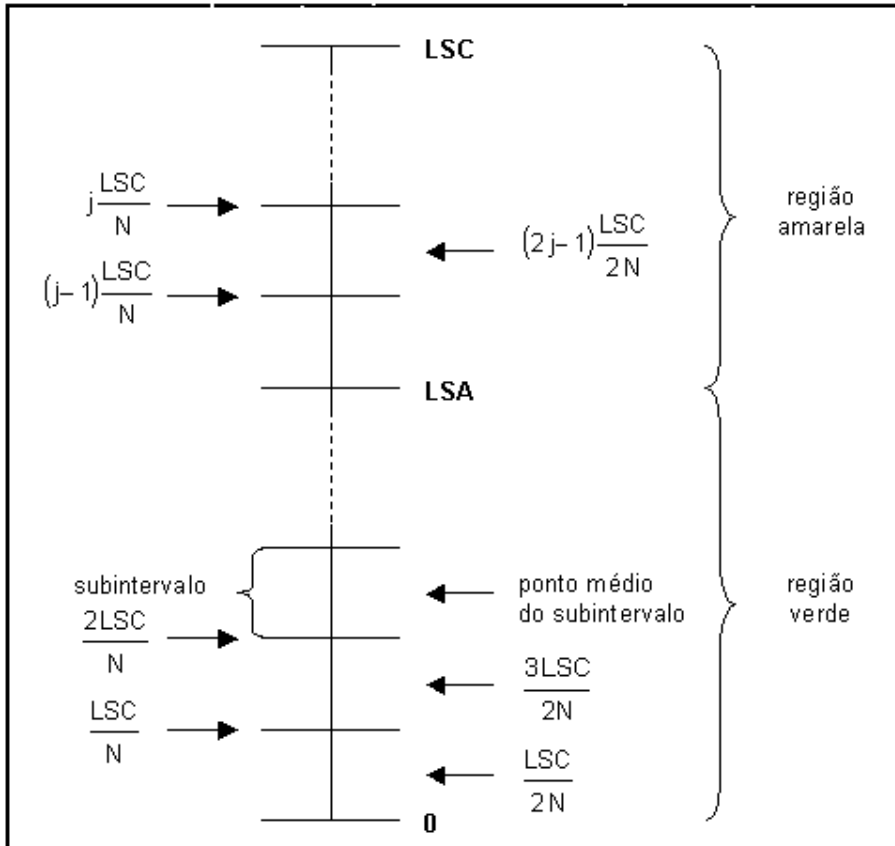


Figura 3 - Divisão do intervalo $(0, LSC)$ em N subintervalos de mesma largura.

A probabilidade de transição q_{ij} é a probabilidade de ir do estado i para o estado j , ou seja, é a probabilidade de Z_t estar dentro dos limites do subintervalo j , condicionada ao fato de Z_{t-1} pertencer ao subintervalo i . Por simplicidade, suporemos sempre que Z_{t-1} está no ponto médio do subintervalo a que pertence (no caso, m_i). Essa aproximação será tão melhor quanto maior o número de subintervalos. Dada essa suposição de que Z_{t-1} coincide com m_i , a probabilidade de transição q_{ij} é dada por

$$q_{ij} = \Pr\left(\mathbf{I}_j < Z_t \leq S_j \mid Z_{t-1} = m_i\right) \quad (4.10)$$

$$q_{ij} = \Pr\left((j-1)\frac{LSC}{N} < \lambda C_t + (1-\lambda)Z_{t-1} \leq j\frac{LSC}{N} \mid Z_{t-1} = m_i\right)$$

$$q_{ij} = \Pr\left((j-1)\frac{LSC}{N} < \lambda C_t + (1-\lambda)m_i \leq j\frac{LSC}{N}\right)$$

$$q_{ij} = \Pr\left((j-1)\frac{LSC}{N} < \lambda C_t + (1-\lambda)\left((2i-1)\frac{LSC}{2N}\right) \leq j\frac{LSC}{N}\right)$$

$$q_{ij} =$$

$$= \Pr\left(\frac{LSC}{2N\lambda}(2(j-1) - (1-\lambda)(2i-1)) < C_t \leq \frac{LSC}{2N\lambda}(2j - (1-\lambda)(2i-1))\right) \quad (4.11)$$

onde $C_t \sim \text{Poisson}(c)$, ou seja, C_t só assume valores positivos e inteiros.

Obtém-se, portanto, a matriz \mathbf{Q} das probabilidades de transição q_{ij} entre os estados transientes, com $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq j \leq N$. Quando $c = c_0$ (processo em controle), a matriz \mathbf{Q} é calculada levando em consideração que $C_t \sim \text{Poisson}(c_0)$, e será denotada por \mathbf{Q}_0 . Quando $c = c_1$ (processo fora de controle), a matriz \mathbf{Q} , considerando que $C_t \sim \text{Poisson}(c_1)$, será denotada por \mathbf{Q}_1 .

Com as matrizes \mathbf{Q}_0 e \mathbf{Q}_1 calculadas, podem ser obtidas as matrizes \mathbf{N}_0 e \mathbf{N}_1 , cujos elementos n_{ij} correspondem respectivamente aos números esperados de passagens pelo estado de transição j se o estado inicial for i , em um ciclo do processo (até a absorção pelo estado absorvente), através das expressões

$$\mathbf{N}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0)^{-1} \quad (4.12)$$

e

$$\mathbf{N}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1)^{-1}, \quad (4.13)$$

onde \mathbf{I} representa a matriz identidade. Cada elemento n_{ij} da matriz \mathbf{N}_0 fornece o número esperado de passagens pelo estado transiente j se o processo estiver em controle, tendo sido iniciado no estado i (em $t = 0$), e cada elemento n_{ij} da matriz \mathbf{N}_1 fornece o número esperado de passagens pelo estado transiente j se o processo estiver fora de controle, tendo estado no estado i imediatamente antes da ocorrência da causa especial.

Consideremos a fase em controle do processo.

Seja \mathbf{Y} uma matriz auxiliar de dimensão $N \times 2$. A primeira coluna tem seus primeiros V elementos iguais a 1 e seus últimos A elementos iguais a zero, e a

segunda coluna tem seus primeiros V elementos iguais a zero e seus últimos A elementos iguais a 1, onde, lembremos, $A + V = N$.

Seja \mathbf{w} o vetor $N \times 1$ de probabilidades do estado inicial da fase em controle. Então o produto $\mathbf{w}^T \mathbf{N}_0 \mathbf{Y}$ é um vetor 1×2 cujos elementos são, respectivamente, o número médio de passagens por estados verdes [$E(\# \text{ verdes})$] e o número médio de passagens por estados amarelos [$E(\# \text{ amarelos})$] até a absorção pelo estado absorvente (alarme falso):

$$\mathbf{w}^T \mathbf{N}_0 \mathbf{Y} = [E(\# \text{ verdes}) \quad E(\# \text{ amarelos})]. \quad (4.14)$$

Supondo que o monitoramento se inicia por definição com $Z_0 = c_0$, então o vetor \mathbf{w}^T será simplesmente

$$\mathbf{w}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \dots \quad 1 \dots \quad 0], \quad (4.15)$$

composto por $(N-1)$ elementos iguais a zero e um único elemento igual a 1. O índice do elemento igual a 1 no vetor coincide com o índice do subintervalo que contém c_0 (que chamaremos aqui de i_0), calculado por

$$i_0 = \left\lceil \frac{c_0}{\text{larg}} \right\rceil. \quad (4.16)$$

O NMAF (número médio de amostras até um alarme falso) é fornecido pela soma dos elementos do vetor $\mathbf{w}^T \mathbf{N}_0 \mathbf{Y}$:

$$\text{NMAF} = E(\# \text{ verdes}) + E(\# \text{ amarelos}). \quad (4.17)$$

A frequência relativa esperada de passagens por estados verdes até um alarme falso constitui a probabilidade em controle de a cadeia estar num estado verde condicionada a não estar no estado absorvente (alarme falso), e é dada por

$$p_v = \frac{E(\# \text{ verdes})}{\text{NMAF}}, \quad (4.18)$$

e a frequência relativa esperada de passagens por estados amarelos até um alarme falso, isto é, a probabilidade de estar num estado amarelo dado que o processo está em controle e que o gráfico não está sinalizando, é dada por

$$p_A = \frac{E(\# \text{ amarelos})}{\text{NMAF}} = 1 - p_v. \quad (4.19)$$

Seja o vetor \mathbf{h} , de dimensão N , onde os primeiros V elementos são iguais a h_L (intervalo mais longo de tempo entre amostras), e os últimos A elementos são iguais a h_S (intervalo mais curto de tempo entre amostras). Com o vetor \mathbf{h} , pode-se obter o valor de TMAF (tempo médio até a ocorrência de um alarme falso):

$$\text{TMAF} = \mathbf{w}^T \mathbf{N}_0 \mathbf{h}. \quad (4.20)$$

Enquanto o processo permanece em controle, o intervalo médio de tempo entre amostras (\bar{h}) é dado por

$$\bar{h} = p_A h_S + p_V h_L. \quad (4.21)$$

O valor de \bar{h} será restrição para o projeto do gráfico; adotou-se neste trabalho $\bar{h} = 1$, sem perda de generalidade. Para o projeto, o valor de h_S será fornecido, e, portanto, o valor de h_L pode ser determinado em função de h_S , restrito a $\bar{h} = 1$. Então

$$h_L = \frac{1 - p_A h_S}{p_V}. \quad (4.22)$$

Com $\bar{h} = 1$, o valor de TMAF tem o mesmo valor de NMAF, pois $\text{TMAF} = \bar{h} \text{NMAF}$.

Consideremos agora a fase fora de controle.

Seja o vetor \mathbf{r} , de dimensão N , que fornece as proporções esperadas de passagem por cada estado transiente até a ocorrência de um alarme falso. Cada elemento r_j do vetor \mathbf{r} é calculado por

$$r_j = \frac{n_{i_0 j}}{\text{NMAF}}, \quad (4.23)$$

onde $n_{i_0 j}$ é o j -ésimo elemento da i_0 -ésima linha da matriz \mathbf{N}_0 , lembrando que i_0 é o índice do subintervalo que contém c_0 , dado pela expressão (4.16).

Seja \mathbf{s} o vetor de dimensão N que fornece as probabilidades de a estatística EWMA estar em cada subintervalo no instante da alteração no processo. Como em Reynolds *et al.* (1988), considera-se que as probabilidades de a alteração no processo ocorrer durante um intervalo mais longo ou durante um intervalo mais curto de tempo entre amostras sejam proporcionais ao produto do comprimento do intervalo pela probabilidade (com o processo em controle) de ocorrência do intervalo com este comprimento. Portanto, cada elemento s_j do vetor \mathbf{s} é calculado por

$$s_j = \frac{r_j h_j}{\mathbf{r}^T \mathbf{h}}, \quad (4.24)$$

onde h_j é o intervalo de tempo entre amostras usado no estado transiente j ($h_j = h_L$, $j = 1, 2, \dots, V$; $h_j = h_S$, $j = V+1, V+2, \dots, N$).

Pode-se, finalmente, calcular os valores das medidas de desempenho TES_f , que representa o tempo esperado desde a última amostra anterior ao descontrole até a sinalização deste pelo gráfico (alarme verdadeiro), e TES , que é o tempo esperado entre o instante de ocorrência do descontrole e o alarme verdadeiro.

A expressão que fornece a medida de desempenho TES_f é análoga à expressão (4.20), lembrando que agora o processo encontra-se fora de controle:

$$TES_f = \mathbf{s}^T \mathbf{N}_1 \mathbf{h}. \quad (4.25)$$

Como, porém, nesta pesquisa supõe-se que a alteração no processo ocorre em algum instante genérico entre duas amostras, o tempo esperado entre a alteração no processo e sua sinalização pelo gráfico é dado pelo TES:

$$TES = TES_f - E(Q), \quad (4.26)$$

onde $E(Q)$ é o valor esperado do tempo entre a última amostra retirada durante o período em controle e a alteração no processo. Como a alteração pode ocorrer a qualquer instante dentro de um intervalo de tempo entre amostras, supõe-se aqui, como também o foi em Reynolds *et al.* (1988), que o instante exato da alteração é uniformemente distribuído neste intervalo. Conseqüentemente,

$$E(Q) = \mathbf{s}^T \mathbf{h} / 2, \quad (4.27)$$

e, portanto, a expressão para cálculo do TES torna-se

$$TES = TES_f - \frac{\mathbf{s}^T \mathbf{h}}{2}. \quad (4.28)$$

Na verdade, para se obter a expressão exata para $E(Q)$, seria necessário conhecer a distribuição do tempo em que o processo está em controle; no entanto, de acordo com Epprecht, Costa & Mendes (2003), a expressão (4.27) é uma excelente aproximação para $E(Q)$ se os intervalos de tempo entre amostras h_S e h_L forem menores que 10% do tempo médio em controle; adota-se, aqui, então, esta aproximação por simplicidade e para generalidade dos resultados da análise.