3
Gráfico de Controle EWMA

A EWMA (de *Exponentially Weighted Moving Average*) é uma estatística usada para vários fins: é largamente usada em métodos de estimação e previsão de séries temporais, e é utilizada em gráficos de controle estatístico de processos. A EWMA consiste na média ponderada exponencialmente das observações: os pesos decaem de acordo com a idade das observações, em progressão geométrica, cujo fator é determinado pela constante de amortecimento λ. A EWMA pode se aplicar a qualquer estatística: $\overline{X}$, X, p, c, ou outra. Em controle estatístico de processos, o mais usual é aplicá-la a observações individuais de características mensuráveis. Inicialmente, para apresentação do esquema, focaremos nessa aplicação; as demais são análogas. Ao final deste capítulo, detalharemos o esquema EWMA para controle do número de não-conformidades.

No gráfico de controle EWMA, são registrados valores da estatística Z_t, calculados recursivamente por

$$Z_t = (1-\lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t, \tag{3.1}$$

onde λ é a constante de amortecimento, tal que $0 < \lambda \leq 1$. O índice t = 1, 2, ... representa o número de ordem da observação; e para o valor inicial adota-se $Z_0 = \mu_0$ (valor-alvo ou valor médio em controle da variável X).

Supondo os X_t's independentes e identicamente distribuídos, com variância σ_X^2, a variância de Z_t é dada por

$$\sigma^2(Z_t) = \left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]\frac{\lambda}{2-\lambda}\sigma_X^2. \tag{3.2}$$

O limite superior de controle (LSC), a linha média (LM) e o limite inferior de controle (LIC) do gráfico EWMA são dados por

$$LSC = \mu_0 + K\sigma_X\sqrt{\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]\frac{\lambda}{2-\lambda}}, \tag{3.3}$$

$$LM = \mu_0, \tag{3.4}$$

$$LIC = \mu_0 - K\sigma_X \sqrt{\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]\frac{\lambda}{2-\lambda}}\,, \tag{3.5}$$

onde K é o coeficiente de abertura dos limites de controle ("limites de K-sigma") e σ_X é o desvio-padrão do processo quando em controle.

Note-se, portanto, que os limites de controle variam em função do número de ordem da observação. Porém, à medida que t aumenta, a quantidade $[1-(1-\lambda)^{2t}]$ tende para a unidade; assim, a variância assintótica de Z_t é

$$\sigma_Z^2 = \frac{\lambda}{2-\lambda}\sigma_X^2\,, \tag{3.6}$$

e os limites de controle tendem assintoticamente para os valores constantes

$$LSC = \mu_0 + K\sigma_X \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \tag{3.7}$$

e

$$LIC = \mu_0 - K\sigma_X \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}\,. \tag{3.8}$$

Os parâmetros de um gráfico de controle EWMA são, portanto, a constante de amortecimento λ e o coeficiente de abertura dos limites de controle K.

O processo é considerado fora de controle e ações devem ser tomadas sempre que Z_t se encontre fora da faixa de limites de controle. Enquanto o processo está em controle, Z_t oscila em torno da linha média do gráfico; ocorrendo uma mudança da média da variável X, Z_t crescerá (ou decrescerá) até atingir o novo valor da média e, em seguida, passará a oscilar em torno do mesmo. A cada reinício do processo após a eliminação da causa especial e conseqüentes reajustes, deve-se fazer $Z_0 = \mu_0$.

Para valores pequenos da constante de amortecimento λ, o esquema EWMA detecta desajustes de pequena magnitude com maior rapidez. Valores pequenos de λ fazem com que os dados históricos (observações anteriores à última disponível) tenham peso grande no cálculo de Z_t e, inversamente, valores grandes de λ fazem com que a última observação tenha peso grande no cálculo de Z_t. Para $\lambda = 1$, o gráfico EWMA reduz-se ao gráfico de Shewhart, e os dados históricos deixam de ter influência no cálculo de Z_t.

O esquema EWMA pode ser usado num gráfico de controle unilateral superior, unilateral inferior, ou bilateral. Um gráfico unilateral superior tem como objetivo detectar aumentos no valor médio da característica de qualidade de interesse (tipicamente aplica-se ao monitoramento de características cujo aumento significa uma deterioração da qualidade, como *p* ou *c*); o gráfico fornece um sinal de descontrole quando Z_t > LSC. De maneira similar, um gráfico unilateral inferior tem como objetivo detectar reduções no valor médio da característica de interesse (um exemplo é o caso do controle do número de itens conformes entre itens não-conformes); o gráfico fornece um sinal de descontrole quando Z_t < LIC. Já um gráfico bilateral é construído usando os limites inferior e superior de controle, e um sinal de descontrole é fornecido quando Z_t < LIC ou Z_t > LSC; aplica-se ao monitoramento de características como a média do processo, caso em que tanto um aumento como uma redução são indesejáveis, ou ainda ao monitoramento de características como fração defeituosa, no caso de se estar interessado em detectar tanto deteriorações quanto melhoras na qualidade do processo.

Um procedimento que pode ser usado para aprimorar o gráfico de controle EWMA com limites de controle assintóticos (equações (3.7) e (3.8)) é o procedimento denominado “resposta inicial rápida” (FIR, de *Fast Initial Response*). Seu objetivo é reduzir o tempo até o sinal caso o processo já se inicie fora de controle. De acordo com Lucas & Saccucci (1990), este procedimento torna-se mais útil para esquemas EWMA projetados com pequenos valores para a constante de amortecimento λ ($\lambda \leq 0{,}25$), pois, neste caso, a variância da estatística converge muito lentamente para seu valor assintótico, e assim, esquemas EWMA que usam limites de controle assintóticos tendem a ser insensíveis quando do início do monitoramento. A estratégia de resposta inicial rápida em esquemas de controle EWMA bilaterais pode ser obtida implementando-se simultaneamente dois esquemas EWMA unilaterais, cada um com um valor inicial diferente: um esquema unilateral superior, que usa um valor inicial maior que o valor-alvo, e um esquema unilateral inferior, usando um valor inicial menor que o valor-alvo. A vantagem oferecida pelo uso do recurso de resposta inicial rápida em esquemas EWMA decorre do fato de que, se o processo estiver fora de controle no início do monitoramento, um esquema EWMA com esta estratégia tenderá a sinalizar uma condição de fora de controle mais rapidamente que um esquema EWMA que não a utiliza. Por outro lado, se o processo estiver inicialmente em controle, a estatística Z_t (ou as estatísticas, no caso de dois esquemas unilaterais) convergirá(ão) rapidamente para o valor médio em controle. A desvantagem do uso de resposta inicial rápida é que esta estratégia, no caso de EWMA bilateral, requer dois esquemas EWMA separados para o monitoramento de cada processo. Uma alternativa a esta abordagem de resposta inicial rápida, sugerida por Chandrasekaran, English & Disney (1995), que pode ser usada tanto para esquemas unilaterais como bilaterais, sem a necessidade de implementar dois esquemas EWMA simultâneos, é o uso dos limites de controle exatos, variando conforme o número de ordem da observação (equações (3.3) e (3.5)), mais estreitos que os limites assintóticos (equações (3.7) e (3.8)) para as primeiras observações (aumentando a probabilidade de detecção de desvios nas primeiras amostras).

3.1. Esquema EWMA para Controle do Número de Não-Conformidades

Quando a característica de qualidade de interesse é o número de não-conformidades de um processo, freqüentemente a distribuição de Poisson fornece um modelo de probabilidades adequado para essa característica. Os requisitos básicos para que o número de não-conformidades obedeça a uma distribuição de Poisson são os conhecidos "Postulados de Poisson": a freqüência média de não-conformidades deve ser proporcional à unidade de inspeção (quantidade de produto) considerada; as não-conformidades devem ocorrer de forma independente; e na unidade de inspeção considerada, deve existir uma infinidade de oportunidades para ocorrência de não-conformidades, mas o evento associado à ocorrência de uma não-conformidade num local ou pequena região específica da unidade de inspeção deve ser um evento raro.

Suponha, então, que o número de não-conformidades observadas em amostras de tamanho especificado sejam variáveis aleatórias de Poisson independentes e identicamente distribuídas, com média c. O processo é dito estar em controle quando o número médio de não-conformidades c é igual a c_0, e fora de controle quando o número médio de não-conformidades sofre um desvio para outro valor $c = c_1$.

Aplicando o esquema EWMA para o monitoramento de não-conformidades, os valores sucessivos da estatística EWMA são descritos por

$$Z_t = (1-\lambda)Z_{t-1} + \lambda C_t\,, \tag{3.9}$$

onde C_t representa o número de não-conformidades na amostra t, C é uma variável aleatória de Poisson, com *VAR*(C) = *E*(C) (e, portanto, com o processo em controle, *VAR*(C) = c_0); e para o valor inicial adota-se $Z_0 = c_0$.

A variância de Z_t é, portanto,

$$\sigma^2(Z_t) = \left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]\frac{\lambda}{2-\lambda}c_0\,. \tag{3.10}$$

O limite superior de controle (LSC), a linha média (LM) e o limite inferior de controle (LIC) do gráfico EWMA bilateral para não-conformidades são dados por

$$LSC = c_0 + K\sqrt{\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]\frac{\lambda c_0}{2-\lambda}}\,, \tag{3.11}$$

$$LM = c_0\,, \tag{3.12}$$

$$LIC = c_0 - K\sqrt{\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]\frac{\lambda c_0}{2-\lambda}}\,, \tag{3.13}$$

onde K é o coeficiente de abertura dos limites de controle. Para o gráfico EWMA unilateral superior, LIC = 0, ou, equivalentemente, não existe LIC.

A variância assintótica é

$$\sigma_Z^2 = \frac{\lambda}{2-\lambda}c_0\,, \tag{3.14}$$

portanto os limites de controle tendem assintoticamente para

$$LSC = c_0 + K\sqrt{\frac{\lambda c_0}{2-\lambda}} \tag{3.15}$$

e

$$LIC = c_0 - K\sqrt{\frac{\lambda c_0}{2-\lambda}}\,. \tag{3.16}$$