6
Considerações adicionais

Dada uma $*$-álgebra nem sempre é possível obtermos uma $*$-representação em um espaço pré-Hilbert. De fato, seja a $*$-álgebra gerada pelo conjunto $\{a\}$, módulo a relação $aa^* = -1$, e suponhamos, por absurdo, que seja possível definir uma $*$-representação ρ dessa álgebra em um espaço pré-Hilbert V; dado $x \in V$ temos $|\rho(a^*)x|^2 = (\rho(a^*)x, \rho(a^*)x) = (x, \rho(a)\rho(a^*) = -(x, Ix) = -|x|^2$, uma contradição.

Porém, como ressaltamos após a definição 2.22, podemos definir uma $*$ -representação enfraquecendo a hipótese de V ser um espaço pré-Hilbert. Por exemplo, não é possível definir uma $*$-representação da $*$-álgebra gerada pelo conjunto $\{Q\}$, módulo as relações $Q^* = Q$ e $Q^2 = 0$, em um espaço pré-Hilbert V. De fato, se existisse tal $*$-representação ρ, teríamos:

$$\parallel \rho(Q)x \parallel^2 = (\rho(Q)x, \rho(Q)x) = \rho(Q^2)x, x) = 0$$

para todo elemento Q da álgebra e para todo vetor $x \in V$, logo $\rho \equiv 0$.

Porém, se considerarmos o espaço $\mathbb{C}^2$ e o funcional sesquilinear indefinido $(z, w) = \overline{z_1}w_1 - \overline{z_2}w_2$ definimos a $*$-representação

$$\rho(Q) = \begin{pmatrix} a & \theta a \\ -\bar{\theta}a & -a \end{pmatrix}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e $\parallel \theta \parallel = 1$ é arbitrário.

Ainda podemos seguir uma construção parecida com a GNS usando um funcional sesquilinear hermitiano, ou seja, $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$ para obter uma representação por funcionais sesquilineares $\vartheta(ab) = \omega(a^*b)$. Os demais passos da construção são parecidos com os da Construção-GNS mas não podemos garantir que o funcional ϑ seja não-degenerado porque não podemos definir o Ideal de Gelfand. Com isso, uma questão relevante é a seguinte: dada uma $*$-representação em V relacionada a um funcional sesquilinear não-degenerado sobre que condições podemos garantir a unicidade deste funcional a menos de uma constante multiplicativa?

Outra questão interessante é a seguinte: se alterarmos somente a condição (i) da definição de produto interno admissível e passarmos a exigir que $\rho(a)$ tenha somente extensão auto-adjunta, para todo $a \in \mathcal{S}$, ainda é possível garantir a unicidade do produto interno, a menos de uma constante multiplicativa?