5
Os Teoremas de Rendall

5.1
Teorema de Rendall para Aplicações Lineares Limitadas

Definição 5.1 *Consideremos $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra, $(\cdot,\cdot)$ um produto interno no espaço vetorial complexo V e ρ uma $*$-representação de $\mathcal{A}$ em V. Tal produto interno é dito fortemente admissível se*

i) para cada $a \in \mathcal{A}$ a aplicação linear $\rho(a)$ é limitada com respeito a norma definida pelo produto interno. Observemos que ρ se estende unicamente para a representação $\hat{\rho}$ no espaço de Hilbert $\hat{V}$; e

ii) $\hat{\rho}$ é topologicamente irredutível.

Definição 5.2 *Dados os produtos internos $(\cdot,\cdot)_1$ e $(\cdot,\cdot)_2$ definidos no espaço pré-Hilbert V, dizemos que $(\cdot,\cdot)_2$ é compatível com $(\cdot,\cdot)_1$ se qualquer seqüência x_n em V que satisfaz $(x_n,x_n)_1 \to 0$ quando $n \to \infty$ e que é uma seqüência de Cauchy em $(\cdot,\cdot)_2$ também satisfaz $(x_n,x_n)_2 \to 0$.*

Teorema 5.3 (***Teorema de Rendall para Aplicações Lineares Limitadas***) *Sejam $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra complexa, ρ uma representação no espaço pré-Hilbert complexo V e, ainda, os produtos internos $(\cdot,\cdot)_1$ e $(\cdot,\cdot)_2$, definidos em V, fortemente admissíveis com relação à representação ρ de $\mathcal{A}$. Suponha que $(\cdot,\cdot)_2$ é compatível com $(\cdot,\cdot)_1$. Então $(\cdot,\cdot)_1 = c(\cdot,\cdot)_2$ para algum número real positivo c.*

Demonstração. Por hipótese $(\cdot,\cdot)_1$ e $(\cdot,\cdot)_2$ são produtos internos fortemente admissíveis. Vamos definir uma forma sesquilinear hermitiana em $V \times V$:

$$
\begin{aligned}
(\cdot,\cdot)\colon V \times V &\to \mathbb{C} \\
\langle x,y\rangle &\mapsto (x,y) = (x,y)_1 + (x,y)_2
\end{aligned}
\tag{5-1}
$$

De 5-1 temos que $(x, x) \geq 0$ para todo x e, além disso, $(x, x) = 0$ implica que $\| x \|_1 = 0$ e portanto $x = 0$. Logo, $(\cdot, \cdot)$ define um produto interno cuja norma associada satisfaz:

$$\begin{aligned} \| x \|_1 &\leq \| x \| \\ \| x \|_2 &\leq \| x \|, \text{ para todo } x \in V. \end{aligned} \tag{5-2}$$

Seja $\hat{V}$ o espaço de Hilbert determinado pelo completamento de V em $(\cdot, \cdot)$. A limitação dos operadores $\rho(a)$ com relação a $(\cdot, \cdot)_1$ e $(\cdot, \cdot)_2$ implica que são limitados com respeito a $(\cdot, \cdot)$ porque

$$\begin{aligned} \| \rho(a)x \|^2 &= (\rho(a)x, \rho(a)x) \\ &= (\rho(a)x, \rho(a)x)_1 + (\rho(a)x, \rho(a)x)_2 \\ &= \| \rho(a)x \|_1^2 + \| \rho(a)x \|_2^2 \\ &\leq \max\{\| \rho(a) \|_{\mathcal{B}_1}^2 + \| \rho(a) \|_{\mathcal{B}_2}^2\}(\| x \|_1^2 + \| x \|_2^2) \\ &\leq 2\max\{\| \rho(a) \|_{\mathcal{B}_1}^2 + \| \rho(a) \|_{\mathcal{B}_2}^2\} \| x \|^2, \end{aligned}$$

onde $\| \rho(a) \|_{\mathcal{B}_{(j)}}$, $j = 1, 2$, representa a aplicação norma no espaço dos operadores limitados de V em V, com relação aos produtos internos $(\cdot, \cdot)_1$ e $(\cdot, \cdot)_2$.

Com isso ρ pode ser unicamente estendida a uma representação $\hat{\rho}$ por operadores limitados em $\hat{V}$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}\colon \mathcal{A} &\to \beta(\hat{V}) \\ a &\mapsto \overline{\rho(a)}\colon \hat{V} \to \hat{V}, \text{ onde } \rho(a)\colon V \to V. \end{aligned}$$

Temos também que

$$(x, y)_1 \leq \| x \|_1 \ \| y \|_1 \leq \| x \| \ \| y \|, \text{ para todo } x, y \text{ em } V. \tag{5-3}$$

Assim, $(\cdot, \cdot)_1$ é limitado em V com respeito a norma determinada por $(\cdot, \cdot)$ e portanto se estende unicamente a uma forma sesquilinear hermitiana S em $\hat{V}$ com relação a norma determinada por $(\cdot, \cdot)$. Essa extensão satisfaz 5-3. Não podemos afirmar que S é um funcional sesquilinear positivo definido, isto é, um produto interno, somente pelo fato de ser a extensão de um produto interno. Um exemplo que ilustra esse fato pode ser visto em $[RA2]$. Vamos provar que dada a hipótese de compatibilidade podemos afirmar que S é um produto interno em $\hat{V}$. De fato, suponha que $x \in \hat{V}$ satisfaz a condição que $S(x,x) = 0$. Como V é denso em $\hat{V}$ existe uma seqüência (x_n) de vetores em V com $||x - x_n|| \to 0$ quando $n \to 0$. Por outro lado, a continuidade de S implica que $S(x_n, x_n) \to 0$, o que é equivalente a condição que $||x_n||_1 \to 0$. A seqüência x_n é de Cauchy em relação a $(\cdot,\cdot)$ e, portanto, também o é em relação a $(\cdot,\cdot)_2$, como podemos concluir de 5-2. A hipótese de compatibilidade nos dá que $x_n \to 0$ com respeito a $(\cdot,\cdot)_2$. Como já sabemos que a seqüência tende a zero com respeito a $(\cdot,\cdot)_1$, então segue da definição da norma $||.||$ e da unicidade do limite que $x = 0$ e, portanto, S é um produto interno. Passaremos a denotar $S(\cdot,\cdot)$ por $(\cdot,\cdot)_1$.

Segue da continuidade do produto interno que a relação

$$(\rho(a)x, y)_1 = (x, \rho(a^*)y)_1 \tag{5-4}$$

ainda continua válida para a sua extensão.

Consideremos agora a aplicação $x \mapsto (x,y)_1$, que de 5-3 podemos concluir que se trata de um funcional linear contínuo em $\hat{V}$. Pelo Teorema da Representação de Riesz existe um $z \in \hat{V}$ com $(x,y)_1 = (x,z)$. Repetindo este processo, para cada $y \in \hat{V}$ dado obtemos uma aplicação linear $L_1 \colon y \mapsto z$ que é:

i) limitada

De fato, de 5-3 temos que $(x,y)_1 \leq \| x \| \| y \|$; também, $(x,y)_1 = (x, L_1 y)$. Assim,

$$\| L_1 y \|^2 = (L_1 y, L_1 y) = (L_1 y, y)_1 \leq \| L_1 y \|_1 \| y \|_1 \leq \| L_1 y \| \| y \| .$$

ii) satisfaz $(x,y)_1 = (x, L_1 y)$

iii) auto-adjunta

De fato, $(L_1 x, y) = \overline{(y, L_1 x)} = \overline{(y,x)_1} = (x,y)_1 = (x, L_1 y)$.

iv) positiva

De fato, $(L_1 x, x) = (x,x)_1 \geq 0$

Afirmamos que L_1 comuta com $\hat{\rho}(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$, ou seja,

$$(x, L_1 \hat{\rho}(a) y) = (x, \hat{\rho}(a) L_1 y), \text{ para todo } x, y \in \hat{V}. \tag{5-5}$$

De fato,

$$\begin{aligned}(x, L_1\hat{\rho}(a)y) &= (x, \hat{\rho}(a)y)_1\\ &\overset{(1)}{=} (\hat{\rho}(a^*)x, y)_1\\ &= (\hat{\rho}(a^*)x, L_1 y)\\ &\overset{(2)}{=} (x, \hat{\rho}(a)L_1 y);\end{aligned}$$

na série de igualdades acima, (1) vale porque $(\cdot,\cdot)_1$ é fortemente admissível e (2) vale porque $\hat{\rho}$ é uma $*$-representação com respeito a $(\cdot,\cdot)$.

Como $\| x \|_1 \leq \| x \|$ o operador identidade em V pode ser unicamente estendido a uma aplicação linear contínua $Q\colon (\hat{V}, \|\cdot\|) \to (\hat{V}_1, \|\cdot\|_1)$. Afirmamos que Q é injetiva. De fato, dados $x, y \in \hat{V}$ existem as seqüencias x_n e y_n em V tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$; suponhamos que $Qx = Qy$, temos

$$x = \lim x_n = \lim Qx_n = Qx = Qy = \lim Qy_n = \lim y_n = y.$$

Já citamos anteriormente que a representação ρ se estende a $\hat{V}$ e a $\hat{V}_1$ de forma natural. Dado $x \in \hat{V}$ escolhemos uma seqüencia (x_n) em V tal que $\| x - x_n \| \to 0$ e portanto 5-2 nos garante que $\| x - x_n \|_1 \to 0$. Então $\hat{\rho}(a)$ é definida pela condição de que $\| \hat{\rho}(a)x - \rho(a)x_n \| \to 0$. Assim, da continuidade de Q, segue que $\| Q\hat{\rho}(a)x - \rho(a)x_n \|_1 \to 0$. Agora, $\| Qx - x_n \|_1 \to 0$ e, da continuidade de $\hat{\rho}_1(a)$, obtemos que $\| \hat{\rho}_1(a)Qx - \rho(a)x_n \|_1 \to 0$; com isso, concluímos que $\hat{\rho}_1(a) \circ Q = Q \circ \hat{\rho}(a)$.

O operador L_1 é positivo, limitado e auto-adjunto, logo o seu espectro está contido no intervalo $[0, \lambda_1]$ para algum real $\lambda_1 > 0$. Tomemos λ_1 como o menor número real positivo possível, ou seja, $\lambda_1 = \sup_{x \in \hat{V}, \|x\|=1}(L_1 x, x)$. Há dois casos a serem considerados. O primeiro é aquele no qual o espectro de L_1 é igual a $\{\lambda_1\}$. Então $L_1 = \lambda_1 I$ e $(\cdot,\cdot)_1 = \lambda_1(\cdot,\cdot)$. No segundo caso o ínfimo λ_1' dos elementos do espectro de L_1 é estritamente menor que λ_1. Então existe algum μ com $\lambda_1' < \mu < \lambda_1$. Seja $\Pi = E([\mu, \lambda_1]) = \int_\mu^{\lambda_1} dE(\lambda)$, onde $dE(\lambda)$ é a medida espectral de L_1. A projeção Π é distinta de zero e da identidade. Logo, sua imagem, digamos K, é um subespaço próprio de $\hat{V}$ fechado e diferente de $\{0\}$. Como todos os $\hat{\rho}(a)$ comutam com L_1, também comutam com Π e então K é um subespaço invariante para a representação $\hat{\rho}$. Se provarmos que $\hat{\rho}$ é topologicamente irredutível, obteremos uma contradição, o que demonstra o teorema. Entretanto, não está claro que as irredutibilidades de $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ implicam na irredutibilidade de $\hat{\rho}$.

O teorema do mapeamento espectral nos garante que $(L_1 - \mu I)|_K$ é um operador com espectro positivo e portanto um operador positivo. Então $(L_1x, x) \geq \mu(x, x)$ ou $\| x \| \leq \mu^{-\frac{1}{2}} \| x \|_1$ em K. Donde concluímos que as duas normas $\| \cdot \|$ e $\| \cdot \|_1$ são equivalentes quando restritas a K. Em particular, dado que Q é injetiva, K pode ser tomado como um subespaço K_1 de $\hat{V}_1$. O subespaço K é fechado na norma $\| \cdot \|$ e, portanto, completo; segue que K_1 é completo na norma $\| \cdot \|_1$ e, portanto, K_1 é fechado em $\hat{V}_1$. Afirmamos que K_1 é invariante por $\hat{\rho}_1$. De fato, dado $a \in \mathcal{A}$, temos $\hat{\rho}_1(a)(K_1) = \hat{\rho}_1(a)Q(K) = Q\hat{\rho}(a)(K) \subseteq K_1$, onde a inclusão segue do fato de K ser invariante por $\hat{\rho}(a)$. Como $\hat{\rho}_1$ é irredutível, isso é impossível a menos que $K_1 = \hat{V}_1$. Suponhamos que, para uma dada escolha de μ, tenhamos $K_1 = \hat{V}_1$. Sejam $\tilde{\mu}$ um número no intervalo $(0, \mu)$, $\tilde{\Pi} = E([\tilde{\mu}, \lambda_1]) = \int_{\tilde{\mu}}^{\lambda_1} dE(\lambda)$ e $\tilde{K}$ o conjunto imagem de $\tilde{\Pi}$; como $\tilde{\Pi} \geq \Pi$ então $\tilde{K} \supseteq K$. Pelo argumento anterior $Q|_{\tilde{K}}$ é injetiva e, então, $K_1 = \hat{V}_1$ implica que $K = \tilde{K}$. Se $\lambda_1^{'}$ fosse maior do que zero obteríamos uma contradição porque se escolhêssemos $\tilde{\mu} < \lambda_1^{'}$ teríamos $\tilde{\Pi} = I$ e, portanto, K não estaria propriamente em $\hat{V}$. Assim, $\lambda_1^{'} = 0$; além disso, para todo $0 < \epsilon < \mu$ temos que $\int_0^{\epsilon} dE(\lambda)$ é a projeção ortogonal em um subespaço do complemento ortogonal de K, $K^{\perp}$; isso significa que o valor da medida espectral no conjunto $\{0\}$ é a projeção sobre $K^{\perp}$. Porém, como a medida espectral em $\{0\}$ é dada pelo núcleo de L_1, $\mathcal{N}(L_1)$, concluímos que $\mathcal{N}(L_1) = K^{\perp}$. Assim, se $x \in \mathcal{N}(L_1)$ então $(x, x)_1 = 0$, o que implica em $x = 0$ porque $(\cdot, \cdot)_1$ é um produto interno não-degenerado. Logo, o núcleo de L_1 é trivial, isto é, $\mathcal{N}(L_1) = \{0\}$. Assim, obtemos uma contradição e, portanto, o primeiro é o único caso possível. Logo, $(\cdot, \cdot)_1 = \lambda_1(\cdot, \cdot)$. Similarmente, $(\cdot, \cdot)_2 = \lambda_2(\cdot, \cdot)$ para algum $\lambda_2 > 0$. Logo, $(\cdot, \cdot)_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\cdot, \cdot)_2$. $\square$

A proposição abaixo nos diz que sem a hipótese da irredutibilidade topológica de $\hat{\rho}$ não podemos garantir a unicidade do produto interno a menos de uma constante multiplicativa.

Proposição 5.4 *Sejam $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra, ρ uma representação de $\mathcal{A}$ no espaço vetorial complexo V e $(\cdot, \cdot)\colon V \times V \to \mathbb{C}$ um produto interno. Suponhamos que o ítem (i) de 5.1 é satisfeito, mas a extensão $\hat{\rho}$ não é topologicamente irredutível. Afirmamos que é falso supor a unicidade, a menos de uma constante multiplicativa, dos produtos internos definidos em $V \times V$.*

Demonstração. Consideremos o produto interno

$$\begin{array}{rcl}(\cdot,\cdot)\colon V\times V & \to & \mathbb{C}\\ \langle x,y\rangle & \mapsto & \alpha_1(Px,Py)+\alpha_2((I-P)x,(I-P)y),\end{array}$$

onde α_1 e α_2 são constantes reais positivas arbitrárias, P é a projeção ortogonal do completamento de V, que denotamos por $\hat{V}$, em $K \subsetneq \hat{V}$, com K fechado e invariante por $\hat{\rho}$. Temos

$$\begin{array}{rcl}(x,\rho(a)y)_1 & = & \alpha_1(Px,P\rho(a)y)+\alpha_2((I-P)x,(I-P)x\rho(a)y)\\ & = & \alpha_1(Px,P\hat{\rho}(a)y)+\alpha_2((I-P)x,(I-P)\hat{\rho}(a)y);\end{array}$$

de 2.25 e do fato de termos $\hat{\rho}=\hat{\rho}|_K\oplus\hat{\rho}|_{L^\perp}$ segue que $P\hat{\rho}=\hat{\rho}P$ (idêntico raciocínio para $(I-P)$); usando também o fato da limitação de $\hat{\rho}(a)$ nos garantir que a aplicação linear $\hat{\rho}(a)^*$ existe, é definida em todo H e que $\hat{\rho}(a)^{**}=\hat{\rho}(a)$, obtemos ρ é uma $*$-representação de $\mathcal{A}$ em V com relação ao produto interno $(\cdot,\cdot)_1$ porque

$$\begin{array}{rcl}(x,\rho(a)y)_1 & = & \alpha_1(Px,\hat{\rho}(a)Py)+\alpha_2((I-P)x,\hat{\rho}(a)(I-P)y)\\ & = & \alpha_1(\hat{\rho}(a)^*Px,Py)+\alpha_2(\hat{\rho}(a)^*(I-P)x,(I-P)y)\\ & = & \alpha_1(\hat{\rho}(a^*)Px,Py)+\alpha_2(\hat{\rho}(a^*)(I-P)x,(I-P)y)\\ & = & \alpha_1(P\hat{\rho}(a^*)x,Py)+\alpha_2((I-P)\hat{\rho}(a^*)x,(I-P)y)\\ & = & \alpha_1(P\rho(a^*)x,Py)+\alpha_2((I-P)\rho(a^*)x,(I-P)y)\\ & = & (\rho(a^*),y)_1.\end{array}$$

Como as constante α_1 e α_2 são escolhidas arbitrariamente dentre os números reais positivos, é fácil concluir que $(\cdot,\cdot)_1$ não é um múltiplo de $(\cdot,\cdot)$. □

5.2
Teorema de Rendall para Aplicações Lineares Ilimitadas

Nesta seção vamos obter uma versão do teorema 5.3 que nos garanta a unicidade do produto interno, a menos de uma constante multiplicativa, sem exigir uma representação limitada. Devemos entender por representação limitada o homomorfismo definido em uma álgebra e que assume valores na sub-álgebra das aplicações lineares limitadas de um espaço de Hilbert. A importância de tal versão está no fato de que nem sempre é possível obter uma $*$-representação limitada para uma $*$-álgebra como podemos ver da

Proposição 5.5 *Afirmamos que não existe uma representação ρ limitada para a álgebra de Heisenberg.*

Demonstração. É fácil ver por indução que $[q^n, pq] = niq^n$ para todo inteiro positivo n. Suponhamos agora que uma representação limitada existe; então, temos:

$$\begin{aligned} n \parallel \rho(q^n) \parallel \;=\; \parallel \rho(inq^n) \parallel &= \parallel \rho(q^n pq) \text{ - } \rho(pqq^n) \parallel \\ &\leq \parallel \rho(q^n pq) \parallel \;+\; \parallel \rho(pqq^n) \parallel \\ &= 2 \parallel \rho(q^n) \parallel \;\; \parallel \rho(pq) \parallel . \end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes possibilidades:

i) $\rho(q^n) \neq 0$ para todo inteiro positivo n

Neste caso, teríamos:

$$n \leq 2 \parallel \rho(pq) \parallel \text{ para todo n, um absurdo.}$$

ii) $\rho(q^n) = 0$ para algum n

Dado que $\rho(q^0) = \rho(e) = I$, existe um inteiro não-negativo k tal que $\rho(q^k) \neq 0$ mas $\rho(q^{k+1}) = 0$.

Portanto tomando k com $\rho(q^k) \neq 0$ e $\rho(q^{k+1}) = 0$ vem:

$$0 = [\rho(p), \rho(q^{k+1})] = \rho(pq^{k+1} \text{ - } q^{k+1}p);$$

mas $q^{k+1}p - q^k pq = iq^k$ e $q^k pq - pq^{k+1} = ikq^k$, donde segue que

$$0 = -i(k+1)\rho(q^k), \text{uma contradição.}$$

□

Definição 5.6 *Sejam $\mathcal{A}$, ρ e V como em 5.1. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos elementos de $\mathcal{A}$ tais que $a^* = a$ e que gera $\mathcal{A}$. O produto interno $(\cdot, \cdot)$ definido em V é dito admissível se:*

i) para todo $a \in \mathcal{S}$ a aplicação $\rho(a)$ é essencialmente auto-adjunta; e

ii) ρ não é totalmente redutível.

O ítem (i) da definição acima é sugerido pelo fato de que possivelmente nem todo elemento auto-adjunto de uma $*-$álgebra possui representação essencialmente auto-adjunta. De fato, dados a Representação de Schrödinger da álgebra de Heisenberg e o elemento auto-adjunto $pq^3 + q^3p$ de $\mathcal{H}$, temos:

$$\begin{aligned} \rho(pq^3 + q^3p)f(x) &= -i\frac{d}{dx}(x^3 f(x)) - ix^3\frac{d}{dx}f(x) \\ &= -i3x^2 f(x) - i2x^3 f'(x). \end{aligned}$$

Afirmamos, sem apresentar a demonstração, que o operador r $[\rho(pq^3+q^3p)]^*$ é um operador diferencial tal que

$$\rho^*(pq^3 + q^3p)f(x) = -i3x^2 f(x) - 2ix^3 f'(x),$$

cujo domínio contém $\{f \in L^2 \cap C'(\mathbb{R}); -i3x^2 f(x) - i2x^3 f'(x) \in L^2\}$.

Assim, usando a Proposição 3.5, concluímos que a aplicação $[\rho(pq^3 + q^3p)]^*$ não é essencialmente auto-adjunta porque seus índices de deficiência não são iguais a zero. De fato, fazendo $[\rho(pq^3 + q^3p)]^* = \pm if(x)$, obtemos $-i3x^2 f(x) - i2x^3 f' = \pm if(x) \therefore 2x^3 f' + (3x^2 \pm 1)f(x) = 0$, que é uma equação diferencial homogênea de 1ª ordem, cuja solução é dada por $f(x) = ce^{-\frac{3}{2}ln|x| \mp \frac{1}{4x^2}}$, onde c é uma constante real; pode ser verificado que somente a solução com sinal negativo é um elemento de L^2 e, portanto, os índices de deficiência de $\rho(pq^3 + q^3p)$ são 1 e 0, de acordo com a ordem das definições apresentadas em 3.4.

Proposição 5.7 *Uma representação fortemente admissível é admissível.*

Demonstração. Basta mostrar que o ítem (i) acima é satisfeito, porque já demonstramos que no caso de uma $*$-representação por operadores limitados em espaço de Hilbert os conceito de representação topologicamente irredutível e representação não totalmente redutível se equivalem. Da definição do conjunto $\mathcal{S}$ e do fato de ρ ser uma $*$-representação temos:

$$(\rho(a)x, y) = (x, \rho(a^*)y) = (x, \rho(a)y),$$

para quaisquer $a \in \mathcal{S}$ e $x, y \in V$. Logo, $\rho(a)$ é uma aplicação simétrica; esse fato e a continuidade do produto interno nos dão que o fecho de $\rho(a)$, $\overline{\rho(a)}$, é uma aplicação simétrica definida em $\hat{V}$, logo, é auto-adjunta. Mas a proposição 2.17 nos dá que $\overline{\rho(a)}^* = \rho(a)^*$ e $\overline{\rho(a)} = \rho(a)^{**}$. □

Sejam $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra, $\mathcal{S}$ o conjuntos dos elementos de $\mathcal{A}$ tais que $a^* = a$ e que gera $\mathcal{A}$, e ρ uma $*$-representação de $\mathcal{A}$ em um espaço de Hilbert H com domínio $\mathcal{D}$, tal que toda aplicação linear $\rho(a)$ admite um fecho, que denotaremos por $F_1(a)$, com relação ao produto interno que denotaremos por $(\cdot,\cdot)_1$. Definiremos $\overline{\mathcal{A}_1}$ como o conjunto dos elementos da forma $A = \sum_j \alpha_j F_1({a_1}^{(j)})\cdots F_1({a_k}^{(j)})$, onde $\alpha_j \in \mathbb{C}$, ${a_i}^{(j)} \in \mathcal{S}$, para $i = 1\cdots k$, e k é um número natural finito. O domínio da aplicação linear A é dado por $\mathcal{D}(A) = \bigcap_j \mathcal{D}(F_1({a_1}^{(j)})\cdots F_1({a_k}^{(j)}))$.

Teorema 5.8 (***Teorema de Rendall para Aplicações Lineares Ilimitadas***) *Sejam $(\cdot,\cdot)_1$ e $(\cdot,\cdot)_2$ produtos internos admissíveis no espaço vetorial complexo V com respeito a $*$-representação ρ de uma $*$-álgebra $\mathcal{A}$, gerada pelo conjunto $\mathcal{S}$ acima definido, em V. Suponha que*

i) $(\cdot,\cdot)_2$ *é compatível com* $(\cdot,\cdot)_1$*;*

ii) $(\pm i - F_1(a))^{-1}(V) \subseteq V$, *onde* $F_1(a)$ *é definido como acima. De modo idêntico, definimos* $F_2(a)$ *e assumimos que* $(\pm i - F_2(a))^{-1}(V) \subseteq V$*; e*

iii) $V = \bigcap_{A\in\overline{\mathcal{A}_1}} \mathcal{D}(A)$, *onde o conjunto* $\overline{\mathcal{A}_1}$ *foi definido acima. Assumimos, também, esta hipótese para idêntica construção com respeito a* $(\cdot,\cdot)_2$.

Então $(\cdot,\cdot)_1 = c(\cdot,\cdot)_2$ *para algum número real positivo* c.

Demonstração. Seja $a \in \mathcal{S}$. Da proposição 3.2 podemos garantir que a aplicação auto-adjunta $F_1(a)$(ver proposição 2.17) determina a existência da Transformada de Cayley $U_1(a)$, para todo $a \in \mathcal{S}$, definida por

$$U_1(a) = (F_1(a) - i)(F_1(a) + i)^{-1}. \tag{5-6}$$

De modo idêntico, podemos definir $F_2(a)$ e $U_2(a)$, para $a \in \mathcal{S}$, usando $(\cdot,\cdot)_2$.

As restrições de $F_1(a)$ e $F_2(a)$ a V são ambas iguais a $\rho(a)$. Assim, 5-6 e a equação análoga para $U_2(a)$ implica que

$$(U_1(a) - U_2(a))(\rho(a) + i)|_V = 0,$$

donde concluímos que as restrições das Transformadas de Cayley ao subespaço vetorial V dado por $(\rho(a)+i)(V)$ são iguais. Mas $\rho(a)$ é essencialmente auto-adjunta e, portanto, $[(\rho(a) + i)(V)]^\perp = \{0\}$, ou seja, este subespaço é denso em V; assim, segue da continuidade de $U_1(a)-U_2(a)$ que as restrições de $U_1(a)$ e $U_2(a)$ a V são iguais.

Do ítem (ii) segue que $U_1(a)(V) \subseteq V$ e $U_1(a)^*(V) \subseteq V$, para todo $a \in \mathcal{S}$.

Seja $g_1(a) = U_1(a)|_V$; vamos denotar por $\mathcal{G}_1$ a $*$-álgebra gerada por $\{g_1(a), [g_1(a)]^*;\ a \in \mathcal{S}\}$. Vamos definir uma representação por aplicações limitadas σ_1 de $\mathcal{G}_1$ em V dada por

$$g_1(a) \mapsto \sigma(g_1(a)) = g_1(a) \colon V \to V;$$

na verdade, σ_1 é uma $*$-representação em $(\cdot,\cdot)_1$ porque

$$\begin{aligned}
(\sigma_1(g_1(a))x, y)_1 &= ((F_1(a) - i)(F_1(a) + i)^{-1}x, y)_1 \\
&= ((F_1(a) + i)^{-1}x, (F_1(a) + i)y)_1 \\
&\overset{(1)}{=} ([(F_1(a) - i)^{-1}]^* x, (F_1(a) + i)y)_1 \\
&= (x, (F_1(a) - i)^{-1}(F_1(a) + i)y)_1 \\
&\overset{(2)}{=} (x, [(F_1(a) - i)(F_1(a) + i)^{-1}]^* y)_1 \\
&= (x, \sigma_1([g_1(a)]^*)y)_1,
\end{aligned}$$

onde as igualdades (1) e (2) seguem da proposição 2.14. Podemos estender σ_1 a uma $*$-representação em $\hat{V}_1$, que representa a completeza de V em $(\cdot,\cdot)_1$. De modo idêntico, podemos definir σ_2 e estendê-la a $\hat{V}_2$, completeza de V em $(\cdot,\cdot)_2$. Assim, o ítem (1) da definição 5.1 é satisfeito para as $*$-representações σ_1 e σ_2.

Para examinarmos se a construção acima satisfaz a hipótese (ii) de 5.1, suponhamos que K é um subespaço fechado não-trivial invariante para as extensões a $\hat{V}_1$ de todos os elementos de $\mathcal{G}$. Em particular, se $a \in \mathcal{S}$ então $U_1(a)$ comuta com P_K, a projeção de $\hat{V}_1$, em K, como podemos concluir dos resultados de $[BN]$, páginas 385 e 409. Isto significa que P_K comuta com todas as projeções espectrais de $U_1(a)$, o que, juntamente com o ítem (ii) de 3.17 implica que P_K comuta com todas as projeções espectrais de $F_1(a)$, donde segue que P_K comuta com $F_1(a)$. Assim, segue que P_K leva o domínio de $F_1(a)$ em si próprio e que para todo x neste domínio $P_K F_1(a)x = F_1(a)P_K x$.

Dado $A \in \overline{\mathcal{A}_1}$, com $A = F_1(a_1)\cdots F_1(a_k)$, vamos provar que P_K leva $\mathcal{D}(A)$ em $\mathcal{D}(A)$ e $AP_K x = P_K Ax$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Vamos usar indução. A afirmação é verdadeira para o caso $k = 1$. Seja $B = F_1(a_0)F_1(a_1)\cdots F_1(a_k)$, isto é, $B = F_1(a_0)A$; $\mathcal{D}(B) = \{x \in \mathcal{D}(A);\, Ax \in \mathcal{D}(F_1(a_0))\}$; assim, se $x \in \mathcal{D}(B)$ então $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax \in \mathcal{D}(F_1(a_0))$. Por hipótese de indução, dado $y \in \mathcal{D}(A)$ temos:

i) $P_K y \in \mathcal{D}(A)$; e

ii) $P_K Ay = AP_K y$.

Assim, dado $x \in \mathcal{D}(B)$ então $Ax \in \mathcal{D}(F_1(a_0))$, portanto, $P_K Ax \in \mathcal{D}(F_1(a_0))$ e $F_1(a_0)P_K Ax = P_K F_1(a_0)Ax$, porque a conclusão é válida para o caso

$k = 1$; da hipótese de indução segue que

$$F_1(a_0)AP_Kx = F_1(a_0)P_KAx = P_KF_1(a_0)Ax, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(B),$$

ou seja,

$$BP_K = P_KB, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(B).$$

Logo, $P_K(V) \subseteq V$, donde segue que $I - P_K = P_{K^\perp} : (V) \subseteq V$.

Podemos escrever $V = (V \cap K) \oplus (V \cap K^\perp)$, onde ambos os subespaços componentes da soma direta são invariante por $\rho(a)$ porque $P_K\rho(a)x = \rho(a)P_Kx$, para todo $x \in V$; porém, ρ não é totalmente redutível e, então, devemos ter que $V \cap K = \{0\}$ ou $\{V \cap K\} = V$. Mas, dado que K é um subespaço fechado de $\hat{V}_1$, teríamos no primeiro caso que $K = \hat{V}_1$; no segundo, teríamos $V \cap K^\perp = V$, o que implica que $K^\perp = \hat{V}_1$, donde segue que $K = \{0\}$. Assim, obtemos contradição nos dois casos.

Assim, mostramos que o produto interno $(\cdot, \cdot)_1$ é fortemente admissível para a representação σ_1, e idêntico argumento pode ser usado para $(\cdot, \cdot)_2$ e σ_2. Com isso, o resultado segue do teorema de Rendall para Aplicações Lineares Limitadas. $\square$