4
A Construção de Gelfand-Naimark-Segal

Definição 4.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra. Uma aplicação linear $\omega\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é chamada de funcional positivo se para todo $a \in \mathcal{A}$ temos*

$$\omega(a^*a) \geq 0.$$

Dado uma $*$-representação sempre podemos definir um funcional positivo. De fato, dada uma $*$-representação ρ em um espaço pré-Hilbert V e um vetor arbitrário $v \in V$ podemos definir o funcional positivo ω em $\mathcal{A}$ com $\omega(a) = (v, \rho(a)v)$, pois teremos $\omega(a^*a) = ||\rho(a)v||^2$.

Reciprocamente, a construção abaixo nos afirma que dado um funcional positivo podemos construir uma $*$-representação.

Teorema 4.2 (***Construção de Gelfand-Naimark-Segal***) *Todo funcional positivo ω em uma $*$-álgebra $\mathcal{A}$ define um espaço de Hilbert H_ω e uma $*$-representação ρ_ω de $\mathcal{A}$ por operadores lineares que agem em H_ω.*

Demonstração. Inicialmente, afirmamos que ω define o funcional sesquilinear hermitiano semi-definido

$$\begin{array}{rcl} \vartheta\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \to & \mathbb{C} \\ \langle a, b \rangle & \mapsto & \omega(a^*b). \end{array}$$

De fato, é fácil ver que ϑ é um funcional sesquilinear. Da positividade de ω e da proposição 2.2 segue que ϑ é um funcional sesquilinear hermitiano semi-definido.

Afirmamos que ϑ satisfaz a Desigualdade de Schwarz, isto é,

$$||\vartheta(a, b)||^2 \leq ||\vartheta(a, a)||\ ||\vartheta(b, b)||, \text{ para todo } a, b \in \mathcal{A}.$$

De fato, ϑ satisfaz todas as propriedades do produto interno, exceto possivelmente o axioma de “não-degenerescência”, isto é, o axioma segundo o qual $\vartheta(a,a) \neq 0$ para $a \neq 0$. Como a demonstração da Desigualdade de Schwarz não envolve tal axioma, o resultado segue.

Da Desigualdade de Schwarz segue que o subconjunto $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ de todos os elementos de $a \in \mathcal{A}$ com $\omega(a^*a) = 0$ é um ideal à esquerda, isto é, um subespaço de $\mathcal{A}$ que é fechado para multiplicação à esquerda por elementos arbitrários de $\mathcal{A}$. De fato, sejam $a \in \mathcal{A}$ com $\omega(a^*a) = 0$ e um elemento arbitrário $b \in \mathcal{A}$; temos

$$\begin{aligned} ||\omega(a^*b^*ba)||^2 &= ||\vartheta(a, b^*ba)||^2 \leq ||\vartheta(a,a)||\ ||\vartheta(b^*ba, b^*ba)|| \\ &= ||\omega(a^*a)||\ ||\vartheta(b^*ba, b^*ba)|| = 0. \end{aligned}$$

O ideal $\mathcal{I}$ é conhecido como *o ideal de Gelfand de* ω.

É sabido que o conjunto das classes $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ forma um espaço vetorial, onde cada vetor ψ neste espaço corresponde a uma classe de equivalência módulo $\mathcal{I}$, isto é,

$$\psi = \{a + \mathcal{I}\}, \text{ onde } a \in \mathcal{A}.$$

Como de costume, denotaremos a classe definida pelo elemento a por $[a]$.

Afirmamos que o conjunto das classes $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ define, na verdade, um espaço pré-Hilbert. Para tal vamos definir em $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ um funcional sesquilinear e mostrar, na verdade, que se trata de um produto interno. Para evitarmos uma notação por demais carregada, chamaremos também de ϑ o funcional

$$\begin{aligned} \vartheta \colon \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}/\mathcal{I} &\to \mathbb{C} \\ \langle \psi, \phi \rangle &\mapsto \omega(a^*b), \end{aligned}$$

onde $\psi = [a]$ e $\phi = [b]$. Observe que o valor de ϑ independe da escolha do representante de uma determinada classe. De fato, dados $x, y \in \mathcal{I}$ temos

$$\begin{aligned} \omega((a+x)^*(b+y)) &= \omega((a^* + x^*)(b+y)) \\ &= \omega(a^*b) + \omega(a^*y) + \omega(x^*b) + \omega(x^*y) \\ &\overset{(1)}{=} \omega(a^*b) + \omega(x^*b) \\ &\overset{(2)}{=} \omega(a^*b); \end{aligned}$$

onde a igualdade (1) segue do fato de $\mathcal{I}$ ser um ideal à esquerda e (2) é verdadeira porque $\omega(x^*b) = \vartheta(x,b)$ e a desigualdade de Schwarz nos dá que $||\vartheta(x,b)||^2 \leq ||\vartheta(x,x)||\ ||\vartheta(b,b)|| = 0$ porque $\vartheta(x,x) = \omega(x^*x) = 0$ e, assim, demonstramos a afirmação.

Além disso, se tomarmos um elemento não-nulo de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, digamos $\varphi = [a] \notin \{\mathcal{I}\}$ teremos que $\vartheta(\varphi,\varphi) = \omega(a^*a) > 0$, o que nos garante que o funcional sesquilinear ϑ define um produto interno em $\mathcal{A}/\mathcal{I}$.

H_ω é obtido pela completeza de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ na topologia da norma definida pelo produto interno dado acima.

O produto em $\mathcal{A}$ define uma ação de $\mathcal{A}$ nos vetores de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$; tal ação associa a cada $a \in \mathcal{A}$ uma aplicação linear $\rho_\omega(a)$, definida em $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, que é denso em H, tal que

$$\rho_\omega(a)\psi = [ab] \text{ se } \psi = [b].$$

□

Como exemplificação da construção-GNS, construiremos uma $*$-representação para a $*$-álgebra definida no exemplo 2. Todo elemento $x \in \mathcal{A}(X)$ tem a forma

$$x = \alpha 1 + \beta a + \gamma a^* + \delta a a^* \text{ ,onde } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in C. \tag{4-1}$$

Precisamos obter um funcional positivo ω; observemos que

$$\begin{aligned}
x^* x &= (\bar{\alpha}1 + \bar{\beta}a + \bar{\gamma}a^* + \bar{\delta})aa^*)(\alpha 1 + \beta a + \gamma a^* + \delta a a^*) \\
&= \bar{\alpha}\alpha 1 + \bar{\alpha}\beta a + \bar{\alpha}\gamma a^* + \bar{\alpha}\delta a a^* + \bar{\beta}\alpha a^* + \bar{\beta}\beta a^* a + \bar{\beta}\gamma a^* a^* + \bar{\beta}\delta a^* a a^* + \\
&\quad \bar{\gamma}\alpha a + \bar{\gamma}\beta a a + \bar{\gamma}\gamma a a^* + \bar{\gamma}\delta a a a^* + \bar{\delta}\alpha a a^* + \bar{\delta}\beta a a^* a + \bar{\delta}\gamma a a^* a^* + \bar{\delta}\delta a a^* a a^* \\
&= (\bar{\alpha}\alpha + \bar{\beta}\beta)1 + (\bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\alpha + \bar{\delta}\beta)a + (\bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\alpha + \bar{\beta}\delta)a^* + \\
&\quad (\bar{\alpha}\delta - \bar{\beta}\beta + \bar{\gamma}\gamma + \bar{\delta}\alpha + \bar{\delta}\delta)aa^*.
\end{aligned}$$

Assim, se considerarmos uma aplicação linear $\omega\colon \mathcal{A}(X) \to \mathbb{C}$ teremos:

$$\begin{aligned}
\omega(x^* x) &= (\bar{\alpha}\alpha + \bar{\beta}\beta)\omega(1) + (\bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\alpha + \bar{\delta}\beta)\omega(a) + \\
&\quad (\bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\alpha + \bar{\beta}\delta)\omega(a^*) + (\bar{\alpha}\delta - \bar{\beta}\beta + \bar{\gamma}\gamma + \bar{\delta}\alpha + \bar{\delta}\delta)\omega(aa^*);
\end{aligned}$$

escrevendo a equação acima na forma matricial, obtemos que ω será um funcional positivo sempre que os valores determinados para $\omega(1), \omega(a), \omega(a^*)$ e $\omega(aa^*)$ tornarem os auto-valores da matriz

$$\begin{pmatrix}
\omega(1) & \omega(a) & \omega(a^*) & \omega(aa^*) \\
\omega(a^*) & \omega(1) - \omega(aa^*) & 0 & \omega(a^*) \\
\omega(a) & 0 & \omega(aa^*) & 0 \\
\omega(aa^*) & \omega(a) & 0 & \omega(aa^*)
\end{pmatrix}$$

positivos.

É fácil ver que obter todos os funcionais positivos possíveis não é tarefa simples. Porém, se tomarmos $\omega(1) = \omega(aa^*) = 1$ e $\omega(a) = \omega(a^*) = 0$ temos o exemplo de um funcional positivo que pode ser obtido, porque

$$\begin{aligned} \omega(x^*x) &= \bar{\alpha}\alpha + \bar{\alpha}\delta + \bar{\delta}\alpha + \bar{\delta}\delta + \bar{\gamma}\gamma \\ &= \overline{(\alpha+\delta)}(\alpha+\delta) + \parallel \gamma \parallel^2 \\ &= \parallel \alpha+\delta \parallel^2 + \parallel \gamma \parallel^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Com base na equação acima, o ideal de Gelfand $\mathcal{I}$ será dado pelo conjunto $\{\sigma 1 + \tau a - \sigma aa^*;\ \sigma, \tau \in \mathbb{C}\}$. De fato, dado $x \in \mathcal{A}$, como em 4-1, temos:

$$\begin{aligned} & (\alpha 1 + \beta a + \gamma a^* + \delta aa^*)(\sigma 1 + \tau a - \sigma aa^*) = \alpha\sigma 1 + \alpha\tau a - \alpha\sigma aa^* + \beta\sigma a + \\ + \quad & \beta\tau aa - \beta\sigma aaa^* + \gamma\sigma a^* + \gamma\tau a^*a - \gamma\sigma a^*aa^* + \delta\sigma aa^* + \delta\tau aa^*a - \delta\sigma aa^*aa^* \\ = \quad & (\alpha\sigma + \gamma\tau)1 + (\alpha\tau + \beta\sigma + \delta\tau)a + (\gamma\sigma - \gamma\sigma)a^* + (-\alpha\sigma - \gamma\tau)aa^*, \end{aligned}$$

que é um elemento do ideal $\mathcal{I}$. Com isso, as classes de equivalência que compõem $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}$ são da forma $[\gamma a^* + \delta aa^*]$, onde $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Observemos que ϑ, definido em $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}$ como na demonstração do teorema anterior, é de fato um funcional sesquilinear positivo definido porque

$$\begin{aligned} & \vartheta([\gamma a^* + \delta aa^*], [\gamma a^* + \delta aa^*]) = \omega((\bar{\gamma}a + \bar{\delta}aa^*)(\gamma a^* + \delta aa^*)) \\ = \quad & \omega(\bar{\gamma}\gamma aa^* + \delta\bar{\delta}(aa^*)^2) = \parallel \gamma \parallel^2 + \parallel \delta \parallel^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}$ é um espaço bidimensional e no qual podemos definir um produto interno então temos um espaço de Hilbert.

Vamos mostrar que $\{\psi_o, \psi_1\}$, onde $\psi_o = [1]$ e $\psi_1 = [a^*]$, forma uma base ortogonal de $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}$. De fato, temos:

i) $[aa^*] = [1 - (1 - aa^*)] = [1]$;

ii) $\parallel \psi_o \parallel^2 = \vartheta([1], [1]) = \omega(1) = 1$; e

iii) $\parallel \psi_1 \parallel^2 = \vartheta([a^*], [a^*]) = \omega(aa^*) = 1$.

Sabemos que ω determina uma ação que associa a cada elemento de $x \in \mathcal{A}$ uma aplicação linear $\rho_\omega(x)$, definida em $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}$ tal que

$$\rho_\omega(x)([\gamma a^* + \delta aa^*]) = [x(\gamma a^* + \delta aa^*)].$$

Assim, $\rho_\omega(a)\psi_o = [a] = 0$, $\rho_\omega(a)\psi_1 = [aa^*] = \psi_o \neq 0$, $\rho_\omega(a^*)\psi_o = [a^*] = \psi_1 \neq 0$, e $\rho_\omega(a^*)\psi_1 = [a^{*2}] = 0$. Na verdade, estes resultados são esperados com base na construção feita em 2.23, onde mostramos que uma $*$-representação fiel irredutível da álgebra $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}$ em um espaço bidimensional é única.

Desde que definido o funcional positivo ω, a aplicação da construção-GNS nos dá uma $*$-representação da álgebra $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}$. Cabe ressaltar que nem sempre é simples a determinação de um funcional positivo como fizemos acima para a álgebra CAR do exemplo 2, como podemos ver se tomarmos a álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}$ que tem no conjunto $\{[q^n p^m];\ m, n \in \mathbb{N}\}$ sua base linear. De fato, se tomarmos um elemento $[x] \in \mathcal{A}(X)/\mathcal{I}$, da forma $x = q^n p^m$, usamos a representação de Schrödinger, descrita após a definição 2.8, para obter a igualdade

$$\begin{aligned}
\rho(p^m q^n) f(x) &= (i\frac{d}{dx})^m (x^n f(x)), \text{ onde } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\
&= \sum_{a=0}^{\min\{m,n\}} (i)^a a! \binom{n}{a} \binom{m}{a} \rho(q^{n-a} p^{m-a}) f(x),
\end{aligned}$$

que pode ser verificada através de indução dupla, para reescrever o produto $x^* x$ como combinação linear dos elementos básicos:

$$x^* x = p^m q^{2n} p^m = \sum_{a=0}^{\min\{m,2n\}} (i)^a a! \binom{2n}{a} \binom{m}{a} q^{2n-a} p^{2m-a}.$$

Assim, para definirmos um funcional positivo ω é preciso determinar condições sobre o valor assumido pela aplicação em cada um dos termos componentes do somatório acima, dificuldade que cresce vertiginosamente se tomarmos elementos da álgebra que são combinações lineares de um número elevado de elementos básicos.

Mas, podemos construir uma $*$-representação para a álgebra de Heisenberg desde que tomemos a álgebra gerada por $\{a\}$ módulo CCR - módulo a relação $aa^* - a^*a - 1 = 0$ - e seja dada uma $*$-representação ρ desta álgebra em um espaço pré-Hilbert V do qual podemos extrair um vetor não-nulo ψ_o tal que

$$\rho(a)\psi_o = 0.$$

Nosso primeiro passo nesta construção será obter um conjunto de vetores ortonormais em V. Então, mostraremos que a restrição de ρ ao subespaço V_1, gerado por esses vetores, é uma $*$-representação irredutível de $\mathcal{H}$ em V_1. Passemos aos detalhes. Inicialmente, vamos definir os vetores

$$\psi_1 = \rho(a^*)\psi_o \text{ e } \psi_k = \rho(a^*)\psi_{k-1}.$$

Faremos uso dos seguintes resultados:

i) $\psi_k = \rho(a^*)^k \psi_o$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Com esse resultado, podemos ver que

$$\rho(a^*)\psi_k = \psi_{k+1}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

ii) $\rho(a)\psi_k = \lambda_k \psi_{k-1}$, onde λ_k é um número complexo e $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Por indução, temos que a sentença é verdadeira para $k = 1$, com $\lambda_1 = 1$ porque $\rho(a)\psi_1 = \rho(a)\rho(a^*)\psi_o = \rho(a^*)\rho(a)\psi_o + \psi_o = \psi_o$; supondo verdadeiro que $\rho(a)\psi_{k-1} = \lambda_{k-1}\psi_{k-2}$, para $k \geq 2$, onde λ_{k-1} é um número complexo, temos

$$\begin{aligned}
\rho(a)\psi_k &= \rho(a)\rho(a^*)\psi_{k-1} \\
&\overset{CCR}{=} \rho(a^*)\rho(a)\psi_{k-1} + \psi_{k-1} \\
&= \rho(a^*)(\lambda_{k-1})\psi_{k-2} + \psi_{k-1} \\
&= \lambda_{k-1}\rho(a^*)\psi_{k-2} + \psi_{k-1} \\
&= \lambda_{k-1}\psi_{k-1} + \psi_{k-1} \\
&= (\lambda_{k-1} + 1)\psi_{k-1}, \text{ como queríamos.}
\end{aligned}$$

Assim temos

$$\lambda_{k-1} + 1 = \lambda_k \text{ e } \lambda_1 = 1,$$

portanto, $\lambda_k = k$. Esse fato, juntamente com o resultado acima nos dá que

$$\rho(a)\psi_k = k\psi_{k-1}, \ k = 1, 2, 3, \ldots .$$

iii) $\psi_k \neq 0$, para todo $k = 1, 2, \ldots$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\| \psi_k \|^2 &= (\rho(a^*)\psi_{k-1}, \rho(a^*)\psi_{k-1}) = (\psi_{k-1}, \rho(a)\rho(a^*)\psi_{k-1}) \\
&= (\psi_{k-1}, \rho(a^*)\rho(a)\psi_{k-1}) + \| \psi_{k-1} \|^2 \\
&= (\psi_{k-1}, \rho(a^*)(k-1)\psi_{k-2}) + \| \psi_{k-1} \|^2 \\
&= (k-1)(\psi_{k-1}, \psi_{k-1}) + \| \psi_{k-1} \|^2 \\
&= k \| \psi_{k-1} \|^2 \text{ repetindo } k-1 \text{ vezes esse resultado, vem} \\
&= k! \| \psi_o \|^2 .
\end{aligned}$$

iv) $[\rho(a), \rho(a^*)^l] = l\rho(a^*)^{l-1}$, para $l = 1, 2, 3, \ldots$, onde definimos $\rho(a^*)^0 = 1$.

Por indução, temos que o resultado acima é verdadeiro para $l = 1$ porque $[\rho(a), \rho(a^*)] = 1$ (CCR); supondo, por hipótese de indução, que para $l \geq 2$ é verdadeiro que $[\rho(a), \rho(a^*)^{l-1}] = (l-1)\rho(a^*)^{l-2}$, temos:

$$\begin{aligned}
[\rho(a), \rho(a^*)^l] &= \rho(a)\rho(a^*)^l - \rho(a^*)^l\rho(a) \\
&= [1 + \rho(a^*)\rho(a)]\rho(a^*)^{l-1} - \rho(a^*)^l\rho(a) \\
&= \rho(a^*)^{l-1} + \rho(a^*)[\rho(a)\rho(a^*)^{l-1}] - \rho(a^*)^l\rho(a) \\
&= \rho(a^*)^{l-1} + \rho(a^*)[(l-1)\rho(a^*)^{l-2} + \rho(a^*)^{l-1}\rho(a)] - \rho(a^*)^l\rho(a) \\
&= \rho(a^*)^{l-1} + (l-1)\rho(a^*)^{l-1} + \rho(a^*)^l\rho(a) - \rho(a^*)^l\rho(a) \\
&= l\rho(a^*)^{l-1}, \text{ como queríamos.}
\end{aligned}$$

Como estamos interessados na determinação de um conjunto de vetores ortonormais de V, tomemos ψ_o com norma igual a 1 e façamos $\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{k!}}\psi_k$, para $k = 0, 1, 2, ...$.

v) $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$ para todos os números $k \neq l$, com $k, l \in \{0, 1, 2, ...\}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
(\varphi_k, \varphi_l) &= \frac{1}{\sqrt{k!l!}}(\psi_k, \psi_l) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!l!}}(\rho(a^*)^k\psi_o, \rho(a^*)^l\psi_o) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!l!}}(\psi_o, \rho(a)^k\rho(a^*)^l\psi_o) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!l!}}(\psi_o, \rho(a)^{k-1}\rho(a)\rho(a^*)^l\psi_o) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!l!}}(\psi_o, \rho(a)^{k-1}[l\rho(a^*)^{l-1} + \rho(a^*)^l\rho(a)]\psi_o) \\
&= \frac{l}{\sqrt{k!l!}}(\psi_o, \rho(a)^{k-1}\rho(a^*)^{l-1}\psi_o)
\end{aligned}$$

Se $k > l$, repetimos o processo acima $l-1$ vezes para obtermos

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \frac{l!}{\sqrt{k!l!}}(\psi_0, \rho(a)^{k-l}\psi_o) = 0.$$

Se $k < l$, faríamos

$$\overline{(\varphi_k, \varphi_l)} = \frac{1}{\sqrt{k!l!}}(\psi_o, \rho(a)^l\rho(a^*)^k\psi_o)$$

vi) A restrição $\rho|_{V_1}$ é uma $*$-representação irredutível.

De fato, suponhamos que existisse um subespaço $W \subseteq V_1$ invariante não trivial. Tomemos em W um vetor $\psi \neq 0$, descrito pela combinação linear $\psi = \alpha_0\psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \cdots + \alpha_k\psi_k$, onde k é o maior índice para o qual temos $\alpha_j \neq 0$; aplicando $\rho(a)$ a esta igualdade, obtemos (ver ítem (ii) acima):

$$\rho(a)\psi = \alpha_1\psi_0 + 2\alpha_2\psi_1 + k\alpha_k\psi_{k-1};$$

repetindo este processo $(k-1)$-vezes, temos:

$$\rho(a)^k\psi = k!\alpha_k\psi_0,$$

portanto, ψ_0 é um elemento de W, o que é uma contradição porque aplicando toda a construção acima descrita obteríamos todos os ψ_k, ou seja, obteríamos que $W = V_1$.

Assim, tomando a definição da álgebra de Heisenberg a partir da álgebra gerada pelo conjunto $\{a\}$ módulo CCR, apresentada após o exemplo 1, temos que a $*$-representação que $\rho|_{V_1}$ é a $*$-álgebra que procuramos, onde

$$\rho|_{V_1}(a^*)\varphi_k = \sqrt{k+1}\varphi_{k+1} \text{ e } \rho|_{V_1}(a)\varphi_k = \sqrt{k}\varphi_{k-1}.$$

Porque

$$\begin{aligned}\rho|_{V_1}(a^*)\varphi_k = \rho|_{V_1}(a^*)\frac{1}{\sqrt{k!}}\psi_k = \frac{1}{\sqrt{k!}}\psi_{k+1} & \\ &= \frac{\sqrt{(k+1)!}}{\sqrt{k!}}\varphi_{k+1} \\ &= \sqrt{k+1}\varphi_{k+1}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\rho|_{V_1}(a)\varphi_k = \rho|_{V_1}(a)\frac{1}{\sqrt{k!}}\psi_k = \frac{k}{\sqrt{k!}}\psi_{k-1} & \\ &= \frac{k\sqrt{(k-1)!}}{\sqrt{k!}}\varphi_{k-1} \\ &= \sqrt{k}\varphi_{k-1}\end{aligned}$$