3
Índices de Deficiência

3.1
A Transformada de Cayley

Definição 3.1 *Sejam H um espaço de Hilbert, $A\colon H \supseteq \mathcal{D}(A) \to X$ e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$; a transformada de Cayley é a aplicação $U = (A-i)(A+i)^{-1}$, se existir.*

A transformada de Cayley é sugerida pela transformação de Möbius, isto é, a aplicação injetiva da reta real no círculo unitário(exceto o ponto $(1,0)$) dada por

$$t \mapsto \frac{t-i}{t+i} \ .$$

De fato, uma série de resultados em análise funcional nos permitem estabelecer uma analogia entre aplicações lineares e os números complexos $\mathbb{C}$. Com base em tal analogia, as aplicações auto-adjuntas e as aplicações unitárias se comportam, respectivamente, como números reais e como números complexos no círculo unitário(ver resultado abaixo) e as aplicações lineares positivas correspondem aos números reais não-negativos.

Proposição 3.2 *Dada uma aplicação simétrica A, definida como acima, então a transformada de Cayley existe e é uma isometria.*

Demonstração. Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, temos:

$$\begin{aligned} \| (A \pm i)x \|^2 &= \| Ax \|^2 \pm (Ax, ix) \pm (ix, Ax) + \| x \|^2 \\ &= \| Ax \|^2 + \| x \|^2 \geq \| x \|^2 \end{aligned}$$

Assim, $(A+i)x = 0$ implica em $x = 0$, donde concluímos que $(A+i)^{-1}$ existe. Logo, $U(Ax + ix) = Ax - ix$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, e, portanto, $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(A+i)$ e $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(A-i)$. Tomando $y = (A+i)x$, vem:

$$\begin{aligned} \| Uy \|^2 = \| (A-i)x \|^2 &= \| Ax \|^2 + \| x \|^2 \\ &= \| (A+i)x \|^2 \ = \ \| y \|^2 \end{aligned}$$

e a permanência da norma é demonstrada. □

Proposição 3.3 *Seja* $A\colon \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ *uma aplicação linear simétrica. Então*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(U)^{\perp} &= \{x|A^{*}x = ix\} \\ \mathcal{R}(U)^{\perp} &= \{x|A^{*}x = -ix\} \end{aligned}$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}(U)^{\perp} &\Leftrightarrow (x, Ay + iy) = 0,\ \forall y \in \mathcal{D}(A) \\ &\Leftrightarrow (x, iy) + (x, Ay) = 0,\ \forall y \in \mathcal{D}(A) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(A^{*}) \text{ e } (A^{*}x - ix, y) = 0, \forall y \in \mathcal{D}(A) \\ &\Leftrightarrow A^{*}x - ix = 0 \end{aligned}$$

A demonstração é semelhante para $\mathcal{R}(U)^{\perp}$. □

Definição 3.4 *Os subespaços* $\mathcal{D}(U)^{\perp}$ *e* $\mathcal{R}(U)^{\perp}$ *definidos acima são chamados de subespaços de deficiência de* A*, e suas dimensões de índices de deficiência.*

Proposição 3.5 *Seja* A *uma aplicação essencialmente auto-adjunta. Afirmamos que seus índices de deficiência são iguais a zero.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \| A^{*}x \pm ix \|^{2} &= \| A^{*}x \|^{2} + (A^{*}x, \pm ix) + (\pm ix, A^{*}x) + \| x \|^{2} \\ &= \| A^{*}x \|^{2} \mp i(A^{*}x, x) \pm i(x, A^{*}x) + \| x \|^{2} \\ &= \| A^{*}x \|^{2} \mp i(A^{*}x, x) \pm i(x, A^{**}x) + \| x \|^{2} \\ &= \| A^{*}x \|^{2} + \| x \|^{2}. \end{aligned}$$

Segue da definição da função norma que os conjuntos $\mathcal{D}(U)^{\perp}$ e $\mathcal{R}(U)^{\perp}$ são ambos iguais ao conjunto unitário $\{0\}$. □

Vamos provar um resultado que determina uma equivalência entre a igualdade dos índices de deficiência e a existência de extensão auto-adjunta para uma aplicação linear simétrica definida em um subconjunto de um espaço de Hilbert. Para tal, necessitamos da definição abaixo e de alguns resultados intermediários.

Definição 3.6 *Uma aplicação simétrica* $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ *é dita maximalmente simétrica se* A *não possui extensão simétrica própria, ou seja, se a hipótese*

$$A \subseteq T,\ T \text{ é uma aplicação simétrica}$$

implica $T = A$.

Proposição 3.7 *Aplicações auto-adjuntas são maximalmente simétricas.*

Demonstração. Suponha A auto-adjunta, T simétrica (isto é, $T \subseteq T^*$) e $A \subseteq T$. A última inclusão nos dá que $T^* \subseteq A^*$ e, portanto,

$$T \subseteq T^* \subseteq A^* = A \subseteq T,$$

o que demonstra que $T = A$. $\square$

Proposição 3.8 *Se* $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ *é uma aplicação simétrica definida em um espaço de Hilbert* H *(não necessariamente densamente definida), então* A *é uma aplicação fechada se, e somente se,* $\mathcal{R}(A+iI)$ *é um conjunto fechado.*

Demonstração. Da demonstração de 3.2 temos $\| (A+i)x \|^2 = \| Ax \|^2 + \| x \|^2$; assim, podemos definir uma isometria entre a imagem de $A+iI$ e o gráfico de A, dada por

$$(A+iI)x \leftrightarrow \langle x, Ax \rangle.$$

$\square$

Proposição 3.9 *Suponha que* $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ *é uma aplicação isométrica. Afirmamos que*

i) Se $\mathcal{R}(I-A)$ *é denso em* H*, então* $I-A$ *é injetiva; e*

ii) Se um dos espaços $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{R}(A)$ *e* $\Gamma(A)$ *é fechado então os outros dois também o são.*

Demonstração.

i) Suponhamos $x \in \mathcal{D}(A)$ e $(I - A)x = 0$, isto é, $x = Ax$. Então

$$(x, (I - A)y) = (x, y) - (x, Ay) = (Ax, Ay) - (x, Ay) = 0$$

para todo $y \in \mathcal{D}$. Assim, $x \perp \mathcal{R}(I - A)$ e, portanto, $x = 0$; e

ii) De fato, basta notar que a aplicação inversa de uma isometria é, também, uma isometria. □

Definição 3.10 *Seja X um espaço normado; se $A \colon X \to X$ é uma aplicação linear isométrica e sobrejetora então A é chamada de aplicação unitária.*

Vamos determinar uma relação entre as noções de aplicações isométricas e aplicações unitárias. Para tal, sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert complexos e T uma aplicação linear tal que $T \colon H_1 \to H_2$.

Proposição 3.11 *T é uma isometria se, e somente se, $T^*T = I$.*

Demonstração. Se T é uma isometria, então

$$\begin{aligned}
(Tx, Ty) &= (x, y) \text{ (para todo } x, y \in H_1) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Ty \in \mathcal{D}_{T^*},\ T^*(Ty) = y \text{ (para todo } y \in H_1) \\
&\Leftrightarrow T^*T = 1.
\end{aligned}$$

□

Dado que T é uma aplicação limitada, definida e tomando valores em espaços de Hilbert complexos afirmamos que (ver [BN]) T^* existe e é definida em todo H_2.

Suponhamos que

$$T^*T = 1 \tag{3-1}$$

$$TT^* = 1 \tag{3-2}$$

Com base na proposição acima, a equação 3-1 nos dá que T é uma isometria, enquanto que a equação 3-2 implica que T é sobrejetora, porque $TT^*z = z$, para todo $z \in H_2$. Como uma isometria é sempre uma aplicação injetiva, acabamos de demonstrar a

Proposição 3.12 *T é uma aplicação isométrica sobrejetora se, e somente se,*

$$TT^* = I \text{ e } T^*T = 1.$$

Com os resultados acima, a relação desejada entre aplicações unitárias e aplicações isométricas é dada pela

Proposição 3.13 *Se $H_1 = H_2$, T é unitária se, e somente se, $T^*T = TT^* = I$*

Proposição 3.14 *Se $T \in \mathcal{B}(H)$, onde H é um espaço de Hilbert, então*

$$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp \text{ e } \mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp.$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} T^*y = 0 &\Leftrightarrow (x, T^*y) = 0 \text{ para todo } x \in H \\ &\Leftrightarrow (Tx, y) = 0 \text{ para todo } x \in H \\ &\Leftrightarrow y \in \mathcal{R}(T)^\perp, \end{aligned}$$

logo, $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$. Como $T^{**} = T$, o ítem (ii) segue do ítem (i) se trocarmos T por T^*.

Definição 3.15 *Dado um espaço de Hilbert H dizemos que $T \in \mathcal{B}(H)$ é uma aplicação normal se $TT^* = T^*T$.*

Proposição 3.16 *Suponha a aplicação $T \in \mathcal{B}(H)$.*

i) T é uma aplicação normal se, e somente se, $||Tx|| = ||T^*x||$ para todo $x \in H$; e

ii) Se T é normal então $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$, onde $\mathcal{N}$ representa o núcleo de uma aplicação.

Demonstração.

i) Basta combinar as igualdades

$$\begin{aligned} ||Tx||^2 &= (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \\ ||T^*x||^2 &= (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x) \end{aligned}$$

onde x é um elemento arbitrário de H; e

ii) Segue de ítem (i) e da proposição 3.14.

Proposição 3.17 *Suponha que U é uma transformada de Cayley associada a um operador simétrico $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$, onde H é um espaço de Hilbert. Afirmamos que:*

i) *U é fechado se, e somente se, A é fechada;*

ii) *$\mathcal{R}(I-U) = \mathcal{D}(A)$, $I-U$ é injetiva e A pode ser obtida de U através da fórmula*

$$A = i(I+U)(I-U)^{-1};$$

iii) *U é unitária se, e somente se, A é auto-adjunta; e*

iv) *Reciprocamente, se V é uma aplicação isométrica em H e se $I-V$ é injetiva então V é uma transformação de Cayley de um operador simétrico definido em H.*

Demonstração.

i) Da proposição 3.8, A é fechada se, e somente se, $\mathcal{R}(A+iI)$ é fechada. Da proposição 3.9 ítem(ii), U é fechado se, e somente se, $\mathcal{D}(U)$ é fechado. Como $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(A+iI)$, conforme a definição da transformada de Cayley, obtemos o resultado desejado;

ii) Dados $z \in \mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(A+iI)$ e $x \in \mathcal{D}(A)$ podemos estabelecer relações injetivas entre estes conjuntos dadas por

$$z = Ax + ix \text{ e } Uz = Ax - ix$$

que podem ser reescritas na forma

$$(I-U)z = 2ix \text{ e } (I+U)z = 2Ax.$$

Com isso, concluímos que $I-U$ é uma aplicação injetiva, que $\mathcal{R}(I-U) = \mathcal{D}(A)$, que $(I-U)^{-1}$ é uma bijeção de $\mathcal{D}(A)$ em $\mathcal{D}(U)$ e que

$$2Ax = (I+U)z = (I+U)(I-U)^{-1}(2ix) \text{ note que } x \in \mathcal{D}(A);$$

iii) Suponha A uma aplicação auto-adjunta; a proposição 2.19 nos dá que

$$\mathcal{R}(I+A^2) = H. \tag{3-3}$$

Como

$$(A+iI)(A-iI) = I + A^2 = (A-iI)(A+iI),$$

onde $\mathcal{D}(A^2) \subseteq \mathcal{D}(A)$ é o domínio destas três aplicações, segue de 3-3 que

$$\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(A + iI) = H \text{ e } \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(A - iI) = H.$$

Afirmamos que a aplicação isométrica U é unitária.

De fato, temos $(U^*Ux, x) = (Ux, Ux) = \| Ux\|^2 = \| x\|^2 = (x, x)$ para todo $x \in H$, portanto $U^*U = 1$; como U é uma bijeção de H em H, temos que U é inversível; logo, $U^{-1} = U^*$.

Suponhamos agora que U é unitário. Então

$$\{0\} = \mathcal{N}(I - U) = [\mathcal{R}(I - U)]^{\perp} = \mathcal{D}(A)^{\perp},$$

resultado que segue do ítem(ii) acima, da normalidade de $I - U$ e da proposição 3.16, ítem (ii). Assim, $\mathcal{D}(A)$ é denso em H. Portanto A^* é definido e, por hipótese, $A \subseteq A^*$. Fixemos $y \in \mathcal{D}(A^*)$. Como $\mathcal{R}(A + iI) = \mathcal{D}(U) = H$, existe $y_0 \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$(A^* + iI)y = (A + iI)y_0 = (A^* + iI)y_0.$$

A última igualdade da simetria de A. Se $y_1 = y - y_0$, então $y_1 \in \mathcal{D}^*$ e, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$((A - iI)x, y_1) = (x, (A^* + iI)y_1) = (x, 0) = 0.$$

Logo, $y_1 \perp \mathcal{R}(A - iI) = \mathcal{R}(U) = H$. Donde concluímos que $y_1 = 0$, o que nos leva a afirmar que $y = y_0 \in \mathcal{D}(A)$. Assim, $A^* \subseteq A$ e o resultado segue; e

iv) Podemos definir uma correspondência injetiva entre $\mathcal{D}(V)$ e $\mathcal{R}(I - V)$ por

$$x = z - Vz.$$

Ainda, definimos a aplicação S em $\mathcal{D}(S) = \mathcal{R}(I - V)$ por

$$Sx = i(z + Vz) \text{ se } x = z - Vz \tag{3-4}$$

Se $x, y \in \mathcal{D}(S)$ então $x = z - Vz$ e $y = u - Vu$, onde $z, u \in \mathcal{D}(V)$. Como V é uma isometria, segue que

$$\begin{aligned}
(Sx, y) = i(z + Vz, u - Vu) &= i(Vz, u) - i(z, Vu) \\
&= (z - Vz, iu + iVu) \\
&= (x, Sy)
\end{aligned}$$

e, portanto, S é uma aplicação linear simétrica. Como 3-4 pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} 2iVz &= 2Sx - 2iz \\ &= Sx + Sx - 2iz \\ &= Sx - ix \text{ onde } 2iz = Sx + ix,\ z \in \mathcal{D}(S), \end{aligned}$$

vemos que

$$V(Sx + ix) = Sx - ix,\ \ x \in \mathcal{D}(S),$$

e que $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(S + iI)$. Portanto V é uma transformação de Cayley de S.

□

Cabe ressaltar que o ítem(ii) acima nos garante que as transformadas de Cayley associadas a operadores simétricos distintos são distintas.

Um resultado de fácil demonstração é dado pela

Proposição 3.18 *Se U_1 e U_2 são as transformadas de Cayley dos operadores simétricos A_1 e A_2 então $A_1 \subseteq A_2$ se, e somente se, $U_1 \subseteq U_2$.*

Finalmente, temos a

Proposição 3.19 *Seja $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ um operador linear simétrico, fechado. Afirmamos que A tem uma extensão auto-adjunta se, e somente se, seus índices de deficiência são iguais.*

Demonstração. Seja U a transformada de Cayley associada a A; do resultado anterior, ítem(i), segue que U é fechada; da proposição 3.9, ítem (ii), segue que isto é equivalente a afirmar que $\mathcal{R}(A + iI)$ e $\mathcal{R}(A - iI)$ são conjuntos fechados, o que nos permite escrever $\mathcal{R}(A + iI) \oplus \mathcal{R}(A + iI)^{\perp} = H = \mathcal{R}(A - iI) \oplus \mathcal{R}(A - iI)^{\perp}$.

Suponhamos que A admita extensão auto-adjunta A_1 e que U_1 seja a transformada de Cayley associada a A_1; assim, $U \subseteq U_1$. Da proposição anterior, ítem(iii), segue que U_1 é unitária e, portanto, $\mathcal{D}(U_1) = H = \mathcal{R}(U_1)$; como U_1 estende U, segue que a restrição de U_1 a $\mathcal{R}(A + iI)^{\perp} = \mathcal{D}(U)^{\perp}$ é uma isometria sobrejetora em $\mathcal{R}(A - iI)^{\perp} = \mathcal{R}(U)^{\perp}$, donde concluímos a igualdade dos índices de deficiência de A.

Reciprocamente, suponhamos que os índices de deficiência de A sejam iguais. Então as dimensões dos espaços $\overline{\mathcal{R}(A + iI)}$ e $\overline{\mathcal{R}(A - iI)}$ são iguais. É de fácil demonstração que U pode ser unicamente estendida a uma isometria U_1, com $U_1 \colon \overline{\mathcal{R}(A+iI)} \to \overline{\mathcal{R}(A-iI)}$, que é unitária com base na definição 3.10. Se provarmos que U_1 é uma transformada de Cayley obteremos o resultado desejado, dada a proposição 3.17, ítem (iii) e a observação feita logo acima desta proposição. De fato, da proposição 3.9, ítem (i) segue $I - U_1$ é injetiva porque $\mathcal{R}(I - U_1)$ é denso em H dado que A é densamente definida e $\mathcal{R}(I - U) = \mathcal{D}(A)$ (proposição 3.17, ítem(ii)); com isso, a proposição 3.9, ítem (i), afirma que $I - U_1$ é injetiva. $\square$