2
Preliminares

2.1
Álgebra

Definição 2.1 *Seja X um espaço linear complexo. Uma aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi\colon X \times X &\rightarrow \mathbb{C} \\ \langle x, y\rangle &\mapsto \varphi(x,y) \end{aligned}$$

com as propriedades

i) $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$

ii) $\varphi(\alpha x_1, y) = \alpha\varphi(x_1, y)$

iii) $\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$

iv) $\varphi(x, \alpha y) = \bar{\alpha}\varphi(x, y)$.

é chamada um funcional sesquilinear.

Se $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$, para todo $x, y \in X$, então φ é dita um *funcional sesquilinear hermitiano*. Também, se $\varphi(x,x) \geq 0$ então φ é chamada um *funcional sesquilinear semi-definido*; se a desigualdade estrita ocorre para qualquer $0 \neq x \in X$ então dizemos que φ é *positivo definido*.

Chamaremos a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}\colon X &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \varphi(x,x) \end{aligned}$$

de forma quadrática associada ao funcional linear φ. Isto tornará mais concisa a apresentação do próximo resultado.

A igualdade

$$\varphi(x,y) = \hat{\varphi}(\frac{1}{2}(x+y)) - \hat{\varphi}(\frac{1}{2}(x-y)) + i\hat{\varphi}(\frac{1}{2}(x+iy)) - i\hat{\varphi}(\frac{1}{2}(x-iy)),$$

é de fácil verificação e é conhecida como *fórmula de polarização.* Com isso, podemos afirmar que a forma quadrática associada determina, de modo único, o funcional sesquilinear.

Proposição 2.2 *Sejam φ um funcional sesquilinear e $\hat{\varphi}$ a sua forma quadrática associada. Então φ é hermitiano se, e somente se, $\hat{\varphi}$ é uma aplicação real.*

Demonstração. Suponhamos que $\hat{\varphi}$ é real. Definimos o funcional sesquilinear

$$\eta(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}.$$

Então

$$\hat{\eta}(x) = \overline{\varphi(x,x)} = \overline{\hat{\varphi}(x)} = \hat{\varphi}(x),$$

o que implica, com base na discussão que antecedeu esta proposição, em $\eta = \varphi$. A recíproca é trivial. □

Definição 2.3 *Uma álgebra complexa, ou álgebra sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial complexo equipado com uma operação bilinear*

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

chamada operação de multiplicação. Usamos simplesmente ab para denotar o resultado da operação de multiplicação quando aplicada ao par $\langle a, b\rangle$. $\mathcal{A}$ é dita comutativa (ou abeliana) se a operação de multiplicação é comutativa, isto é, se para todo $a, b \in \mathcal{A}$ ocorrer $ab = ba$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ é dita uma álgebra com identidade se $\mathcal{A}$ contém um elemento 1 tal que para todo $a \in \mathcal{A}$ temos $1a = a1 = a$. Neste texto somente consideramos álgebras complexas associativas com identidade.

Definição 2.4 *Uma involução em uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma aplicação*

$$* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

tal que para todos $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos:

i) $(a+b)^* = a^* + b^*$

ii) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$

iii) $(ab)^* = b^* a^*$

iv) $(a^*)^* = a$

Neste caso dizemos que $\mathcal{A}$ é uma $*$-álgebra. O item (iii) acima e a unicidade da identidade nos dá que $1^* = 1$.

Definição 2.5 *Diremos que $\mathcal{A}(X)$ é uma álgebra livre com conjunto gerador X se satisfaz a seguinte propriedade universal: existe uma aplicação $Z\colon X \to \mathcal{A}(X)$ tal que toda aplicação $T\colon X \to \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é uma álgebra complexa, pode ser fatorada unicamente por Z, ou seja, existe um único homomorfismo $T' : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Z"] \arrow[dr, "T"'] & \mathcal{A}(X) \arrow[d, "T'"] \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $T' \circ Z = T$. Ainda, $\mathcal{A}(X)$ é única, a menos de isomorfismo.

Vamos provar a existência da álgebra livre denotada por $\mathcal{A}(X)$ tomando um conjunto arbitrário X. Consideremos o conjunto $\mathcal{S}_X$ cujos elementos são seqüências finitas de elementos de X, incluindo a seqüência vazia, denotada por 1. Dado um elemento arbitrário $s \in \mathcal{S}_X$ temos que $s = (x_1, x_2, ..., x_n)$, onde $x_1, ..., x_n \in X$.

Para facilitar a notação, não usaremos parênteses ou vírgulas para indicarmos uma seqüência finita, ou seja, usaremos a *concatenação*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Com isso, dados os elementos $s, t \in \mathcal{S}_X$, com $s = x_1 \cdots x_n$ e $t = y_1 \cdots y_m$, a seqüência finita $x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m$ será denotada por st.

Considerando o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, definimos $\mathcal{A}(X)$ como o espaço vetorial dado por

$$\mathcal{A}(X) = \mathcal{F}_o(\mathcal{S}_X),$$

onde $\mathcal{F}_o(\mathcal{S}_X) = \{f\colon \mathcal{S}_X \to \mathbb{C};\ f \text{ tem suporte finito } \}$. A multiplicação em $\mathcal{A}(X)$ é definida da seguinte forma: dados $f, g \in \mathcal{A}(X)$ faremos

$$fg(s) = \sum_{\{tu=s\}} f(t)g(u).$$

Dos fatos expostos acima, podemos associar a cada elemento de $\mathcal{A}(X)$ uma expressão da forma $\sum\limits_{I\in\Lambda}\alpha_I s_I$, onde Λ é um conjunto finito de índices, pela relação:

$$f \mapsto \sum_{s\in supp(f)} f(s)s,$$

onde $supp(f)$ indica o suporte finito de f; e

$$\sum_{I\in\Lambda}\alpha_I s_I \mapsto f,$$

com $f(s) = \sum\limits_{\{s_I=s\}} \alpha_I$.

É fácil ver que a seqüência 1 é o elemento identidade da multiplicação em $\mathcal{A}(X)$.

Se $X = \emptyset$ ou se $X = \{x\}$ (conjunto unitário) então teremos $\mathcal{A}(X) = \{0\}$ ou $\mathcal{A}(X) = \mathbb{C}[x]$ (álgebra polinomial complexa na variável x), respectivamente. Cabe ressaltar que, a menos desses dois casos, a álgebra livre complexa $\mathcal{A}(X)$ é uma álgebra não-comutativa.

Para demonstrar que $\mathcal{A}(X)$ de fato satisfaz a definição de uma álgebra livre, dadas uma álgebra complexa $\mathcal{B}$ e uma aplicação $T\colon X \to \mathcal{B}$ definimos

$$T^{'} : f \mapsto \sum_{s\in supp(f)} f(s)T^{'}(s),$$

onde $s = x_1 \cdots x_n$ e $T^{'}(s) = T(x_1)\cdots T(x_n)$; é fácil ver que $T^{'}$ é um homomorfismo e que estende T.

A unicidade a menos de isomorfismo de uma álgebra livre segue da propriedade universal acima. De fato, dados os conjuntos equipotentes X e Y, a bijeção $\varphi\colon X \to Y$, as álgebras livres $\mathcal{A}(X)$ e $\mathcal{B}(Y)$ geradas por X e Y, respectivamente, as aplicações Z e H e os homomorfismos $T_1^{'}$ e $T_2^{'}$ como no diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Z"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{A}(X) \arrow[d, shift right, "T_2^{'}"'] \\
Y \arrow[r, "H"'] & \mathcal{B}(Y) \arrow[u, shift right, "T_1^{'}"']
\end{tikzcd}$$

temos que $T_2^{'} \circ Z = H \circ \varphi$ e $Z \circ \varphi^{-1} = T_1^{'} \circ H$ donde obtemos que $Z \circ \varphi^{-1} = T_1^{'} \circ T_2^{'} \circ Z \circ \varphi^{-1}$ e $T_2^{'} \circ T_1^{'} \circ H \circ \varphi = H \circ \varphi$ e, portanto, segue que $T_1^{'} \circ T_2^{'} = Id$ e $T_2^{'} \circ T_1^{'} = Id$. $\square$

Na categoria das $*$-álgebras, vamos definir o que vem a ser uma álgebra livre com involução. Continuaremos adotando a notação acima. Dado o conjunto gerador X, defina o conjunto $X^* = X \times \{0,1\}$, onde usaremos a notação

$$\begin{aligned} (x,0) &\leftrightarrow x \\ (x,1) &\leftrightarrow x^*. \end{aligned}$$

Com isso, tomando a álgebra livre $\mathcal{A}(X \times \{0,1\}) \simeq \mathcal{A}(X^*)$ definimos a involução em $\mathcal{A}(X^*)$ por

i) $1^* = 1$

ii) $[(x_1,i_1)...(x_n,i_n)]^* = (x_n, 1-i_n)...(x_1, 1-i_1)$, onde $i_1,...,i_n \in \{0,1\}$

iii) $f^* = \sum \overline{\alpha_I} s_I^*$, para todo $f \in \mathcal{A}(X)$ com $f = \sum \alpha_I s_I$.

Convém registrar que ao trabalhar com uma álgebra livre com involução é usual chamar de conjunto gerador o conjunto X e não X^*.

Definição 2.6 *Uma relação é uma expressão de igualdade entre dois elementos de uma álgebra livre.*

Sejam s,t elementos da álgebra livre $\mathcal{A}(X)$ e a relação $s = t$; associaremos a esta relação o elemento $s - t \in \mathcal{A}(X)$. Assim, dado um conjunto de relações denotaremos por $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}(X)$ o conjunto das diferenças $s-t$ correspondentes, por $\mathcal{I}(\mathcal{R})$ o ideal bilateral gerado por $\mathcal{R}$ e, ainda, definiremos *álgebra livre módulo as relações* $\mathcal{R}$ como o conjunto quociente $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}(\mathcal{R})$.

Proposição 2.7 *Sejam X, T, T', $\mathcal{A}(X)$ e $\mathcal{B}$ como na definição 2.5 e $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}(\mathcal{R})$ uma álgebra livre módulo relações como acima. Consideremos o diagrama abaixo, onde a aplicação π é dada por $\pi : f \mapsto [g]$, onde g é uma aplicação linear que representa a classe de equivalência da qual a aplicação f é um de seus elementos:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}(\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{B} \\
\mathcal{A}(X) \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "T'"] & X \arrow[l, "Z"] \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que T' fatora por π se, e somente se, $T'(\mathcal{I}(\mathcal{R})) = 0$.

Demonstração. Supondo $T^{'}(\mathcal{I}(\mathcal{R})) = 0$ segue de um resultado conhecido de álgebra elementar que $\varphi : [g] \mapsto T^{'}(g)$ é um homomorfismo bem definido e que $T^{'} = \varphi \circ \pi$. Reciprocamente, se podemos escrever $T^{'} = \varphi \circ \pi$ então do fato de $\pi(\mathcal{I}(\mathcal{R})) = 0$ segue que $T^{'}(\mathcal{I}(\mathcal{R})) = 0$. $\square$

Da definição dos elementos do conjunto $\mathcal{R}$ e do fato de que $T^{'}$ estende T vemos que quando a equivalência acima é aplicável podemos definir uma representação da álgebra $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}(\mathcal{R})$ somente definindo os valores assumidos por esta representação nos elementos que compõem o conjunto gerador da álgebra livre $\mathcal{A}(X)$, desde que as relações em $\mathcal{R}$ sejam satisfeitas.

Exemplo 1 *Tomemos o conjunto $X = \{p, q\}$ e o conjunto das relações $\mathcal{R} = \{[q, p] - i1, p^* - p, q^* - q\}$, onde a primeira das relações é conhecida pela sigla CCR(canonical comutation relation); a álgebra de Heisenberg, $\mathcal{H}$, será dada por $\mathcal{H} = \mathcal{A}(X)/\mathcal{I}(\mathcal{R})$.*

Não é difícil ver que o conjunto $\{[q^n p^m];\ n, m \in \mathbb{N}\}$ forma uma base linear para $\mathcal{H}$.

Alternativamente, a álgebra de Heisenberg pode ser dada por uma outra construção. Para tal, vamos tomar a $*$-álgebra livre $\mathcal{C}$ dada pelo conjunto gerador $X = \{a\}$ módulo a relação(CCR) $aa^* - a^*a = 1$ e definir o isomorfismo de $*$-álgebras

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\leftrightarrows}} \cong & \mathcal{H} \\
a & \leftrightarrow & \dfrac{p - iq}{\sqrt{2}} \\
a^* & \leftrightarrow & \dfrac{p + iq}{\sqrt{2}}.
\end{array}
$$

com

$$
\begin{aligned}
\varphi(a) = \frac{p - iq}{\sqrt{2}} \quad &e \quad \varphi(a^*) = \frac{p + iq}{\sqrt{2}} \\
\psi(p) = \frac{a + a^*}{\sqrt{2}} \quad &e \quad \psi(q) = \frac{a^* - a}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 *Sejam o conjunto gerador $X = \{a\}$ e o conjunto de relações $\{a^*a + aa^* - 1, (a^*)^2, a^2\}$; usamos idêntica construção àquela do exemplo acima para obter a $*$-álgebra livre que denotaremos por $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}$, cujo elemento arbitrário $[x]$ é dado por $x = \alpha + \beta a + \gamma a^* + \delta aa^*$. As relações acima são denotadas pela sigla CAR (canonical anticomutation relation).*

Os exemplos acima nos serão útil adiante.

Definição 2.8 *Uma representação ρ da álgebra $\mathcal{A}$ no espaço vetorial complexo V é um homomorfismo de álgebras*

$$\rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(V),$$

onde $\mathcal{L}(V)$ é a álgebra das aplicações lineares de V em V. Se ρ é um homomorfismo injetivo então ρ é dita uma representação fiel.

Vamos definir uma representação ρ da álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, o espaço das funções C^∞ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e com suporte compacto. Usando a notação já adotada para $\mathcal{H}$, dado $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definimos

$$\begin{aligned} \rho(q)f(x) &= xf(x) \text{ e} \\ \rho(p)f(x) &= -if^{'}(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\rho([p,q])f(x) = -if(x) = \rho(-i1)f(x).$$

A representação acima é chamada de Representação de Schrödinger.

Definição 2.9 *Uma representação ρ, como em 2.8, é dita irredutível quando não ocorre $\rho(a)(L) \subseteq L, \forall a \in \mathcal{A}$, onde L é um subespaço próprio, não nulo, de V. Se tal espaço existe a representação é dita redutível.*

Dadas duas representações quaisquer ρ_1, ρ_2 da álgebra $\mathcal{A}$ nos espaços pré-Hilbert V_1 e V_2, obtemos uma representação em $V_1 \oplus V_2$ se definirmos $(\rho_1 \oplus \rho_2)(a)(x_1, x_2) = (\rho_1(a)x_1, \rho_2(a)x_2),$ para quaisquer $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2$.

Definição 2.10 *Dados a álgebra $\mathcal{A}$ e os espaços vetoriais V_1 e V_2, dizemos que as representações $\rho_1\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(V_1)$ e $\rho_2\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(V_2)$ são equivalentes, $\rho_1 \sim \rho_2$, se, e somente se, existe uma aplicação linear bijetora $T\colon V_1 \to V_2$ tal que $T\rho_1(x) = \rho_2(x)T$, isto é, $\rho_1(x) = T^{-1}\rho_2(x)T$, para todo $x \in \mathcal{A}$.*

Definição 2.11 *Uma representação é chamada totalmente redutível se é equivalente a uma soma direta não-trivial de representações.*

2.2
Operadores Não Limitados

Sejam X e Y espaços pré-Hilbert e A uma aplicação linear arbitrária definida como se segue:

$$A\colon X \supseteq \mathcal{D}(A) \to \mathcal{R}(A) \subseteq Y,$$

onde $\mathcal{D}(A)$ representa o domínio de A e $\mathcal{R}(A)$ o seu conjunto imagem; assumimos também que

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = X,$$

isto é, A é densamente definida em X. Denotemos por $\mathcal{D}^*$ o conjunto de todos os elementos $y \in Y$ para os quais existe um certo $z \in X$ tal que

$$(Ax, y) = (x, z), \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A).$$

Definição 2.12 *Nas condições acima, definimos a aplicação A^* tal que*

$$\begin{array}{rcl} A^*\colon Y \supseteq \mathcal{D}^* = \mathcal{D}(A^*) & \to & X \\ y & \mapsto & z, \end{array}$$

chamada de aplicação adjunta de A.

Vamos mostrar que a aplicação A^* é bem definida. Sejam y, z como em 2.12 e suponhamos que

$$(Ax, y) = (x, w) \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A).$$

Se isso fosse verdade, teríamos

$$(x, z) = (x, w) \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A),$$

o que implica $(x, z-w) = 0$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. A igualdade $w = z$ segue do fato de $\mathcal{D}(A)$ ser denso em X. Vamos mostrar que A^* é uma transformação linear. Para tal, vamos provar que $\mathcal{D}_{A^*}$ é um subespaço e que A^* preserva combinações lineares.

De fato, sejam $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(A)$ e $A^*y_1 = z_1$, $A^*y_2 = z_2$. Agora, para escalares α e β, consideremos a soma de

$$(Ax, \alpha y_1) = \bar{\alpha}(Ax, y_1) = \bar{\alpha}(x, A^*y_1) = (x, \alpha z_1)$$

e

$$(Ax, \alpha y_2) = \bar{\beta}(Ax, y_2) = \bar{\beta}(x, A^* y_2) = (x, \beta z_2);$$

isto nos dá

$$(Ax, \alpha x_1 + \beta y_2) = (x, \alpha z_1 + \beta z_2) \text{ (para todo } x \in \mathcal{D}(A))$$

portanto

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{D}(A^*)$$

e

$$A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2.$$

Definição 2.13 *Dada a aplicação linear arbitrária $A\colon X \supseteq \mathcal{D}(A) \to Y$, onde X e Y são espaços vetoriais complexos, dizemos que a aplicação $\tilde{A}$ é uma extensão de A, $A \subseteq \tilde{A}$, se existe um subespaço $Z \supseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\tilde{A}\colon Z \to Y$ e $\tilde{A}x = Ax$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Proposição 2.14 *Seja a aplicação linear $X \supseteq \mathcal{D}_A \xrightarrow{A} Y$, onde X e Y são espaços pré-Hilbert. Além disso, suponhamos que A^{-1} existe e que $\mathcal{D}_{A^{-1}}$ é denso em Y. Então*

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Demonstração. Para mostrar a igualdade acima, vamos provar que as aplicações $(A^{-1})^*$ e $(A^*)^{-1}$ possuem o mesmo domínio e assumem igual valor em cada elemento do domínio. Primeiro, suponhamos que $x \in \mathcal{D}_A$ e que $y \in \mathcal{D}_{(A^{-1})^*}$. Temos

$$(x, y) = (A^{-1}Ax, y) = (Ax, (A^{-1})^* y)$$

Como x é um elemento arbitrário de $\mathcal{D}_A$, temos

$$(A^{-1})^* y \in \mathcal{D}_{A^*}$$

e

$$A^*(A^{-1})^* y = y \tag{2-1}$$

Por outro lado, suponhamos $x \in \mathcal{D}_{A^{-1}}$ e $y \in \mathcal{D}_{A^*}$. Neste caso temos

$$(x, y) = (AA^{-1}x, y) = (A^{-1}x, A^* y),$$

o que implica em

$$A^* y \in \mathcal{D}_{(A^{-1})^*}$$

e

$$(A^{-1})^* A^* y = y. \tag{2-2}$$

A equação 2-2 nos garante que $(A^*)^{-1}$ existe, porque $A^*y = 0 \Rightarrow y = 0$, e que a restrição de $(A^{-1})^*$ a $\mathcal{R}(A^*)$ é justamente $(A^*)^{-1}$, ou seja

$$\mathcal{D}_{(A^*)^{-1}} \subseteq \mathcal{D}_{(A^{-1})^*}. \tag{2-3}$$

Por 2-1 segue que se $y \in \mathcal{D}_{(A^{-1})^*}$ então $y \in \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{D}_{(A^*)^{-1}}$, o que nos dá que

$$\mathcal{D}_{(A^{-1})^*} \subseteq \mathcal{D}_{(A^*)^{-1}}. \tag{2-4}$$

As conclusões 2-3 e 2-4 nos garantem a igualdade dos domínios; com isso, o resultado segue de 2-1, juntamente com a existência de $(A^*)^{-1}$. □

Dada uma aplicação linear A de $\mathcal{D}$ em H, com $\mathcal{D} \subseteq H$, onde H é um espaço de Hilbert, seu gráfico, Γ_A, é o subconjunto de $H \times H$ formado pelos pares ordenados da forma $\langle x, Ax \rangle$ com $x \in \mathcal{D}$. Uma aplicação linear é dita fechada se seu gráfico é um subconjunto fechado de $H \times H$.

No caso da aplicação linear A não ser fechada, se existir uma aplicação linear, digamos $\bar{A}$, cujo gráfico $\Gamma_{\bar{A}}$ é tal que $\Gamma_{\bar{A}} = \overline{\Gamma_A}$ dizemos que a aplicação A é *fechável*, ou que A *admite um fecho*, e chamamos $\bar{A}$ de *fecho* de A. É fácil ver a unicidade do fecho de uma aplicação.

A proposição abaixo, de demonstração direta, nos assegura a existência ou não do fecho de uma aplicação linear.

Proposição 2.15 *Seja a aplicação linear A como acima. Afirmamos que A admite um fecho $\bar{A}$ se, e somente se,*

$$x_n \in \mathcal{D},\ x_n \to 0 \ \textit{e}\ Ax_n \to y \ \Rightarrow\ y = 0.$$

Assim, caso a aplicação A admita um fecho o domínio de $\bar{A}$ é dado por

$$\mathcal{D}_{\bar{A}} = \{x \in H;\, x_n \in \mathcal{D},\, x_n \to x \text{ e } \lim Ax_n \text{ existe}\},$$

e, então, temos

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_{\bar{A}} \subseteq \overline{\mathcal{D}}.$$

Em particular, tomando a seqüência constante igual a zero, notemos que a aplicação linear A admite um fecho se, e somente se, $\langle 0, y \rangle \in \overline{\Gamma_A}$ então $y = 0$.

Definição 2.16 *Sejam X um espaço complexo pré-Hilbert e A uma aplicação linear tal que $A\colon X \supseteq \mathcal{D}(A) \to X$. Dizemos que A é simétrica se é densamente definida e*

$$(Ax, y) = (x, Ay) \text{ para todo } x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Se ocorrer a igualdade $A = A^*$ então A é dita uma aplicação linear auto-adjunta.

É fácil ver que afirmar que um operador A é simétrico é equivalente a afirmar que $A \subseteq A^*$, ou seja, A^* estende A.

Para demonstrar o próximo resultado definiremos duas aplicações que têm dentre suas propriedades o fato de serem isometrias em espaços normados. Vamos discutir esse conceito. Para um espaço métrico arbitrário, sabemos que uma isometria é uma aplicação que preserva distâncias. Para um espaço normado, ser uma aplicação isométrica é equivalente a preservar normas. Mais especificamente, se X e Y são espaços pré-Hilbert, e

$$\begin{aligned} A\colon X \supseteq \mathcal{D}(A) &\to Y \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

queremos que

$$\| Ax \| = \| x \| \quad (\text{para todo } x \in \mathcal{D}(A)).$$

A fórmula da polarização nos dá que uma aplicação A é uma isometria se, e somente se,

$$(Ax, Ay) = (x, y) \text{ para todo } x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Proposição 2.17 *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert complexos, $\mathcal{D}_A$ um subespaço denso de H_1 e A uma aplicação linear*

$$H_1 \supseteq \mathcal{D}_A \xrightarrow{A} H_2.$$

Suponha que A admite um fecho $\bar{A}$. Então

i) $\bar{A}^* = A^*$

ii) $\bar{A} = A^{**}$

Na demonstração desta proposição utilizaremos os fatos abaixo listados:

1º) Podemos definir um produto interno no produto cartesiano $H_1 \times H_2$ tomando

$$(\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle) = (x_1, y_1)_1 + (x_2, y_2)_2,$$

onde $(\cdot,\cdot)_1$ e $(\cdot,\cdot)_2$ são os produtos internos em H_1 e H_2, respectivamente. De maneira idêntica, podemos definir um produto interno em $H_2 \times H_1$. Com base nesses produtos internos, podemos definir as aplicações U_1 e U_2 com

$$\begin{array}{rcl} U_1\colon H_1 \times H_2 & \to & H_2 \times H_1 \\ \langle x, y\rangle & \mapsto & \langle iy, -ix\rangle \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} U_2\colon H_2 \times H_1 & \to & H_1 \times H_2 \\ \langle y, x\rangle & \mapsto & \langle ix, -iy\rangle \end{array}$$

que estabelecem entre $H_1 \times H_2$ e $H_2 \times H_1$ um isomorfismo isométrico. É fácil verificar que

$$U_1U_2 = U_2U_1 = 1$$

2º) Dados $B \subseteq H_1 \times H_2$ e $C \subseteq H_2 \times H_1$, afirmamos que

$$U_1(B^{\perp}) = U_1(B)^{\perp} \text{ e } U_2(C^{\perp}) = U_2(C)^{\perp}. \tag{2-5}$$

Para tornar a notação mais simples, usaremos uma única letra para denotarmos os pares ordenados de $H_1 \times H_2$ e $H_2 \times H_1$. Um resultado de verificação direta é que

$$(U_1x, U_1y) = (x, y), \text{ com } x, y \in H_1 \times H_2.$$

Vamos usá-lo para obter o resultado desejado. Dado $z \in U_1(B^{\perp})$ existe $x_z \in B^{\perp}$ tal que $U_1(x_z) = z$; como $(x_z, b) = 0$, para todo $b \in B$, temos:

$$0 = (x_z, b) = (U_1x_z, U_1b) = (z, U_1b)$$

donde concluímos que $z \in U_1(B)^{\perp}$. Para provar que $U_1(B)^{\perp} \subseteq U_1(B^{\perp})$ seja $z \in U_1(B)^{\perp}$; então $(z, U_1x) = 0$, $\forall x \in B$. Dado que U_1 é sobrejetora existe $x_z \in H_1 \times H_2$ tal que $U_1x_z = z$; assim, $x_z \in U_1(B^{\perp})$ porque dado arbitrariamente $y \in B$ temos $(y, x_z) = (U_1y, z) = 0$.

Idêntico raciocínio pode ser utilizado para U_2.

3º) Afirmamos que

$$U_1(\Gamma_A)^{\perp} = \Gamma_{A^*}. \tag{2-6}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle y, z\rangle \in U_1(\Gamma_A)^{\perp} &\Leftrightarrow (\langle y, z\rangle, \langle iAx, -ix\rangle) = 0 \text{ (para todo } x \in \mathcal{D}_A),\\
&\Leftrightarrow (y, iAx) + (z, -ix) = 0 \text{ (para todo } x \in \mathcal{D}_A),\\
&\Leftrightarrow i(Ax, y) - i(x, z) = 0 \text{ (para todo } x \in \mathcal{D}_A),\\
&\Leftrightarrow (Ax, y) = (x, z) \text{ (para todo } x \in \mathcal{D}_A),\\
&\Leftrightarrow y \in \mathcal{D}_{A^*} \text{ e } A^*y = z\\
&\Leftrightarrow \langle y, z\rangle \in \Gamma_{A^*}.
\end{aligned}$$

4º) A^{**} existe.

Queremos provar que o domínio de A^* é denso em H_2. Suponhamos que $\bar{\mathcal{D}}_{A^*} \neq H_2$. Como H_2 é um espaço de Hilbert, temos a seguinte decomposição em soma direta:

$$H_2 = \bar{\mathcal{D}}_{A^*} \oplus \bar{\mathcal{D}}_{A^*}^{\perp}.$$

Por conseqüência, existe um vetor não-nulo w em H_2 tal que $w \perp \mathcal{D}_{A^*}$, isto é, $w \perp y$ para todo $y \in \mathcal{D}_{A^*}$. Isso implica que

$$\langle 0, w\rangle \perp \langle iA^*y, -iy\rangle \text{ para todo } y \in \mathcal{D}_{A*},$$

ou de forma equivalente,

$$\langle 0, w\rangle \in U_2(\Gamma_{A^*})^{\perp}. \tag{2-7}$$

Porém a equação 2-6 implica que

$$\Gamma_{A^*}{}^{\perp} = U_1(\Gamma_A)^{\perp\perp} = \overline{U_1(\Gamma_A)}.$$

Como U_2 preserva o fecho, pois é um homeomorfismo, segue da equação acima que

$$U_2(\Gamma_{A^*}{}^{\perp}) = U_2\overline{(U_1(\Gamma_A)} = \overline{U_2(U_1(\Gamma_A))};$$

como $U_2U_1 = 1$, vem que

$$U_2(\Gamma_{A^*}{}^{\perp}) = \overline{\Gamma_A} = \Gamma_{\bar{A}}. \tag{2-8}$$

Portanto, usando 2-7 e 2-5 temos:

$$\langle 0, w\rangle \in \Gamma_{\bar{A}};$$

o que é uma contradição dada a proposição 2.15.

5º) Afirmamos que

$$U_2(\Gamma_{A^*})^{\perp} = \Gamma_{A^{**}}. \tag{2-9}$$

Demonstração similar àquela usada em 2-6.

Finalmente, estamos em condições de demonstrarmos o resultado objeto do nosso interesse.

Demonstração. Antes de provarmos o ítem (i), notemos que se o gráfico de duas aplicações são iguais então as aplicações são idênticas. Com isso em mente, vamos mostrar que $\Gamma_{\bar{A}^*} = \Gamma_{A^*}$ para provar a igualdade de $\bar{A}^*$ e A^*. Como $\bar{A}$ é o fecho de A, temos que

$$\Gamma_{\bar{A}} = \overline{\Gamma_A},$$

o que implica

$$U_1(\Gamma_{\bar{A}}) = U_1(\overline{\Gamma_A}).$$

Da equação 2-6, vemos que

$$U_1(\Gamma_{\bar{A}})^{\perp} = \Gamma_{\bar{A}^*}.$$

Como U_1 é uma isometria, temos

$$U_1(\overline{\Gamma_A}) = \overline{U_1(\Gamma_A)},$$

e, usando 2-6 novamente, segue que

$$U_1(\Gamma_{\bar{A}})^{\perp} = \overline{U_1(\Gamma_A)}^{\perp} = U_1(\Gamma_A)^{\perp} = \Gamma_{A^*};$$

então,

$$\Gamma_{\bar{A}^*} = \Gamma_{A^*},$$

donde segue a igualdade desejada.

Para provarmos o ítem(ii), notemos que de 2-5 temos

$$U_2({\Gamma_{A^*}}^{\perp}) = U_2(\Gamma_{A^*})^{\perp}.$$

Usando a igualdade acima, 2-8 e 2-9, temos

$$\Gamma_{\bar{A}} = U_2(\Gamma_{A^*})^{\perp} = \Gamma_{A^{**}},$$

o que implica $\bar{A} = A^{**}$. □

Se A é uma aplicação auto-adjunta teremos que $U_1(\Gamma_A)$ é um conjunto fechado, o que como sabemos, implica que $U_1(\Gamma_A)^{\perp\perp} = U_1(\Gamma_A)$ e, assim, ${\Gamma_A}^{\perp} = U_1(\Gamma_A)$. Desse fato segue a

Proposição 2.18 *Seja a aplicação auto-adjunta $H \supseteq \mathcal{D}_A \xrightarrow{A} H$, onde H é um espaço de Hilbert. Então, $H \oplus H = \Gamma_A \oplus U_1(\Gamma_A)$.*

Proposição 2.19 *Seja A um operador auto-adjunto densamente definido em um espaço de Hilbert H, então $\mathcal{R}(I + A^2) = H$.*

Demonstração. Tomemos $x \in H$; do resultado acima, temos que

$$\langle 0, x\rangle = \langle x_1, Ax_1\rangle + \langle -Ax_2, x_2\rangle, \text{ onde } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A);$$

assim, $Ax_2 = x_1$ e $x = x_2 + Ax_1 = x_2 + A^2x_2 = (I + A^2)x_2$. □

Definição 2.20 *Seja $A\colon \mathcal{D}(A) \to X$ uma aplicação linear simétrica. Se $A^* = A^{**}$ então A é dita essencialmente auto-adjunta.*

Proposição 2.21 *Seja $A\colon \mathcal{D} \subseteq H \to H$ uma aplicação linear essencialmente auto-adjunta, onde H é um espaço de Hilbert. Afirmamos que A é fechável e seu fecho é a aplicação auto-adjunta A^*.*

Demonstração. Do fato de A ser essencialmente auto-adjunta segue que A^{**} estende A; além disso, sabemos que A^{**} é fechada e, portanto, $\overline{\Gamma_A} \subseteq \Gamma_{A^{**}}$. Assim,

$$\langle 0, y\rangle \in \overline{\Gamma_A} \Rightarrow \langle 0, y\rangle \in \Gamma_{A^{**}} \Rightarrow y = 0,$$

e o fato de A ser fechável segue de 2.15. O ítem (ii) de 2.17 e o fato de A ser essencialmente auto-adjunta nos dá que $\bar{A} = A^*$. □

2.3 Representações em espaços pré-Hilbert

Definição 2.22 *Seja V um espaço vetorial pré-Hilbert, com o produto interno notado por $(\cdot,\cdot)$. A representação ρ de uma $*$-álgebra definida como em 2.8 é dita uma $*$-representação se*

$$(\rho(a)x, y) = (x, \rho(a^*)y) \text{ para todo } a \in \mathcal{A} \text{ e } x, y \in V.$$

Se ρ é, também, uma aplicação injetiva então temos uma $*$-representação fiel.

Cabe ressaltar que se quiséssemos tornar a definição anterior mais abrangente, no lugar de um espaço pré-Hilbert deveríamos exigir que V fosse um espaço vetorial munido de um funcional sesquilinear γ não-degenerado, isto é,

$$\forall x \ \gamma(x,y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\forall y \ \gamma(x,y) = 0 \Rightarrow x = 0$$

e, então, γ seria uma $*$-representação se

$$\gamma(\rho(a)x, y) = \gamma(x, \rho(a^*)y),$$

$\forall a \in \mathcal{A}$ e $x, y \in V$.

Proposição 2.23 *Afirmamos que a álgebra definida no exemplo 2 tem $*$-representação fiel irredutível ρ única.*

Demonstração. Suponhamos que tal $*$-representação fiel em um espaço pré-Hilbert V exista. Com isso, temos que $\rho(a) \neq 0$ e, portanto, existe $\phi \in V$ tal que $\rho(a)\phi \neq 0$. Seja $\psi_o \in V$ com $\psi_o = \rho(a)\phi$; temos:

$$a^2 = 0 \Rightarrow \rho(a)\rho(a)\phi = 0, \text{ ou seja, } \rho(a)\psi_o = 0.$$

Vamos considerar o vetor $\rho(a^*)\psi_o$; temos:

$$\begin{aligned}
\| \rho(a^*)\psi_o \|^2 &= (\rho(a^*)\psi_o, \rho(a^*)\psi_o) \\
&= (\psi_o, \rho(a)\rho(a^*)\psi_0) \\
&= \| \psi_o \|^2 - (\psi_o, \rho(a^*a)\psi_o) \\
&= \| \psi_o \|^2 - (\psi_o, \rho(a^*)\rho(a)\psi_o) \\
&= \| \psi_o \|^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Façamos $\psi_1 = \rho(a^*)\psi_o$; assim, $\rho(a^*)\psi_1 = \rho(a^{*2})\psi_o = 0$. Afirmamos que $\psi_o \neq \psi_1$. De fato,

$$\rho(a)\psi_1 = \rho(aa^*)\psi_o = \psi_o - \rho(a^*a)\psi_o = \psi_o - \rho(a^*)\rho(a)\psi_o = \psi_o \neq 0 \text{ e } \rho(a)\psi_o = 0.$$

Além disso, $\psi_o \perp \psi_1$ porque

$$(\psi_1, \psi_o) = (\rho(a^*)\psi_o), \psi_o) = (\psi_o, \rho(a)\psi_0) = 0.$$

Com isso, podemos tomar $\{\psi_o, \psi_1\}$ como uma base ortonormal do subespaço bidimensional $V_1 \subseteq V$ (tomando as normalizações de ψ_o e ψ_1, respectivamente). Podemos concluir da proposição 2.7 e dos valores assumidos pelas aplicações $\rho(a)$ e $\rho(a^*)$ nos vetores ψ_o e ψ_1 que V_1 é um subespaço invariante por ρ.

Do exposto acima, podemos obter as seguintes representações matriciais para $\rho(a)$ e $\rho(a^*)$:

$$\rho(a) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \rho(a^*) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como esperado, temos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, as representações matriciais de $\rho(a)$ e de $\rho(a^*)$, juntamente com 2.7 definem, de fato, uma $*$-representação da álgebra $\mathcal{A}(X)/\mathcal{I}$. A unicidade segue da construção acima. □

Definição 2.24 *Seja V um espaço vetorial pré-Hilbert. Uma representação é dita topologicamente irredutível (na topologia definida pelo produto interno) quando não existe um subespaço próprio L de V, fechado em V, tal que* $\rho(a)(L) \subseteq L, \forall a \in \mathcal{A}$.

Sejam H um espaço de Hilbert e U um conjunto de operadores limitados de H em H tal que

$$A \in U \Rightarrow A^* \in U.$$

Proposição 2.25 *Sejam H e U como acima. Se existe um subespaço não-vazio $K \subseteq H$ tal que para todo $A \in U$ temos*

$$A(K) \subseteq K$$

então

$$A(K^{\perp}) \subseteq K^{\perp} \text{ para todo } A \in U.$$

Demonstração. Sejam $x \in K$ e $y \in K^{\perp}$; temos que

$$(x, Ay) = (A^* x, y) = 0$$

porque da limitação de A segue que $A = A^{**}$ e $A^*(K) \subseteq K$ por hipótese. $\square$

Com base na proposição acima, vamos provar que, no caso de uma $*$-representação ρ de uma $*$-álgebra $\mathcal{A}$ por operadores limitados em um espaço de Hilbert H, o fato da representação não ser totalmente redutível é equivalente topologicamente irredutível. Por absurdo, suponhamos que exista um subespaço fechado não-vazio $L \subseteq H$, que nos dá decomposição em soma direta

$$H = L \oplus L^{\perp}$$

e que faz de ρ uma representação não topologicamente irredutível, isto é, $\rho(a)(L) \subseteq L$, $\forall a \in \mathcal{A}$. De 2.25, temos

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H),$$

com $\rho_1 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(L)$ e $\rho_2 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(L^{\perp})$; assim,

$$\rho(a)h = (\rho_1 \oplus \rho_2)(a)(h_1, h_2) = (\rho_1(a)h_1, \rho_2(a)h_2),$$

para $h_1 + h_2 = h$, $h_1 \in L$ e $h_2 \in L^{\perp}$. A recíproca é trivial, porque supondo a representação ρ topologicamente irredutível não podemos escrevê-la como uma soma não-trivial de representações.