1
Introdução

Esta dissertação é um estudo do trabalho publicado por Alan D. Rendall intitulado “Unique determination of an inner product by adjointness relations in the algebra of quantum observables”, onde é demonstrado que dada uma representação de uma $*$-álgebra em um espaço pré-Hilbert V e uma $*$-representação irredutível com relação ao produto interno definido em V podemos, dadas algumas condições técnicas, garantir a unicidade do produto interno a menos de uma constante multiplicativa.

O estudo de $*$-representações aparece em teorias físicas, especialmente no processo de associar uma teoria quântica a uma teoria clássica, o que é conhecido como quantização.

Há várias maneiras de quantizar um sistema clássico. Muitas delas envolvem a definição de uma álgebra abstrata que possui várias propriedades algébricas de observáveis clássicas e, então, o estudo das observáveis é feito a partir da definição de um homomorfismo desta álgebra para a álgebra de aplicações lineares em um espaço vetorial. Assim, na primeira seção do Capítulo 2 são apresentados os conceitos de álgebra, álgebra livre e representação (nome dado ao homomorfismo citado acima), e demonstramos vários resultados a respeito. Na segunda seção, fazemos um pequeno estudo dos operadores lineares não limitados e os conceitos de adjunção, simetria e fecho de aplicações lineares são discutidos e alguns resultados importantes são demonstrados. Supondo que definimos uma álgebra abstrata $\mathcal{A}$ (a álgebra das observáveis) e que determinamos uma representação de $\mathcal{A}$ em um espaço vetorial complexo V, em geral, até essa etapa não podemos definir, dentre os produtos internos em V, aquele que seria o mais adequado. Mas se é possível identificar uma estrutura no sistema clássico que nos conduz de forma natural a uma involução na álgebra das observáveis então devemos voltar nossos interesses aos produtos internos que relacionam as operações de tomar a aplicação adjunta e a operação de involução, isto é, se ρ denota a representação de $\mathcal{A}$ em V então para todo $a \in \mathcal{A}$ a aplicação adjunta $\rho(a)$ deve ser igual a $\rho(a^*)$; assim, na última seção tratamos das representações em espaços pré-Hilbert.

No Capítulo 3 estudamos a Transformada de Cayley e os índices de deficiência de uma aplicação linear simétrica e apresentamos a relação deste último conceito com o fato de uma aplicação simétrica ser essencialmente auto-adjunta ou, no caso de aplicações fechadas, com o fato da aplicação ter extensão auto-adjunta.

No Capítulo 4 enunciamos e demonstramos a Construção de Gelfand-Naimark-Segal que diz que todo funcional positivo definido em uma $*$-álgebra determina um espaço de Hilbert e uma $*$-representação da álgebra por operadores lineares.

Apresentamos os Teoremas de Rendall no Capítulo 5. O primeiro teorema está relacionado com o caso em que todos os elementos da álgebra podem ser representados por aplicações lineares limitadas. O segundo teorema permite uma representação por operadores ilimitados, caso mais comum em problemas físicos, mas que requer hipóteses mais restritivas.

O produto interno é usado para o cálculo de probabilidades de resultado de medidas. A unicidade mostra que estas probabilidades já são determinadas pelas relações algébricas entre as observáveis.

Por fim, apresentamos duas questões em aberto que podem ser objeto de estudos futuros.