

Aldo Ferreira da Silva

**Teoremas de Rendall e a
Unicidade do Produto Interno
em
Representações de Álgebras**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em
Matemática

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Aldo Ferreira da Silva

**Teoremas de Rendall e a Unicidade do
Produto Interno em
Representações de Álgebras**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de
Pós-Graduação em Matemática do Departamento de
Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. George Svetlichny

Rio de Janeiro
Maio de 2004



Aldo Ferreira da Silva

**Teoremas de Rendall e a Unicidade do
Produto Interno em
Representações de Álgebras**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. George Svetlichny

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Carlos Tomei

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Sérgio Bernardo Volchan

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Octávio Manoel Bessada Lion

Banco Central do Brasil

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico
Científico-PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de Maio de 2004

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Aldo Ferreira da Silva

Graduou-se em Ciências Navais (Escola Naval, Organização Militar subordinada à Secretaria da Marinha do Ministério da Defesa), e em Licenciatura em Matemática pela PUC-Rio em 2000. Atualmente exerce o cargo de Analista do Banco Central do Brasil.

Ficha Catalográfica

Silva, Aldo

Teoremas de Rendall e a Unicidade do Produto Interno em Representações de Álgebras / Aldo Ferreira da Silva; orientador: George Svetlichny. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2004.

v., 59 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

I. Svetlichny, George. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

Aos meus pais Maria de Lourdes e Alberto, à minha esposa Ana Lucia
e aos meus filhos Ana Carolina e Aldo.

Agradecimentos

Ao professor George George Svetlichny pela orientação, seriedade, dedicação e compreensão.

À minha esposa Ana Lucia, cujo apoio, amor e dedicação tornaram possível a realização deste Curso. Aos meus filhos Ana Carolina e Aldo, objetivo final de todos os esforços.

Aos meus pais Alberto e Maria de Lourdes, pontos de referência para a minha vida. Aos meus irmãos e irmãs pelo apoio e carinho.

A Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) pela bolsa de isenção concedida.

Aos professores do Departamento de Matemática da PUC-Rio pelo valioso apoio.

Ao professor Carlos Tomei que indicou "o caminho" para o ingresso no Mestrado.

Aos meus amigos Adriana Regina Oliveira, Bernardo K. Pagnoncelli, Cynthia Oliveira L. Ferreira, Ila Maria L. Fernandes, João Domingos G.S. Júnior, José Barbosa Gomes, Marcus Oliveira L. Ferreira, Renato Alencar A. da Costa, Sérgio Almaraz e Tania Vieira pela ajuda, incentivo e companheirismo nesta jornada. Aos amigos Cláudio S. Barbedo, Edílio R. Quintino e Júlio César Cavalcanti pela amizade de longos anos.

Às Secretárias e aos Auxiliares Administrativos do Departamento de Matemática da PUC-Rio pela prestatividade de sempre.

Aos Servidores do Departamento do Meio Circulante do Banco Central que me deram total apoio nesta jornada, em especial a Maria Elisabeth Reimão Nogueira e aos meus "Chefes" Cláudio Eliseu da Costa Lagoeiro e José Maria de Faria Chaves, que não mediram esforços para que obtivesse as condições necessárias para a realização do Curso.

Ao meu Orientador Técnico no Banco Central do Brasil, Doutor Octávio Manoel Bessada Lion, pela competência, amizade, alegria e simpatia.

A Maria Angela de Oliveira Musiello pelo carinho demonstrado e pela orientação segura e inteligente no processo administrativo que culminou na minha liberação para a realização do Mestrado.

Resumo

Silva, Aldo; Svetlichny, George. **Teoremas de Rendall e a Unicidade do Produto Interno em Representações de Álgebras**. Rio de Janeiro, 2004. 59p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Trata-se de uma exposição do trabalho publicado por Alan D. Rendall intitulado "Unique determination of an inner product by adjointness relations in the algebra of quantum observables", onde é demonstrado que dada uma representação de uma $*$ -álgebra em um espaço pré-Hilbert V que é uma $*$ -representação irredutível com relação ao produto interno definido em V podemos garantir, dadas algumas condições técnicas, a unicidade do produto interno a menos de uma constante multiplicativa. É feito um breve estudo sobre representações de álgebras e a Construção de Gelfand-Naimark-Segal é apresentada.

Palavras-chave

$*$ -Álgebra; Representação; Álgebra de Heisenberg; Representação de Schrödinger; Aplicações Lineares Ilimitadas; Aplicações Simétricas; Índice de Deficiência; Transformada de Cayley; Construção de Gelfand-Naimark-Segal; Teorema de Rendall.

Abstract

Silva, Aldo; Svetlichny, George. **Rendall's Theorems and the Unique Determination of the Inner Product in Representation of Algebras** .. Rio de Janeiro, 2004. 59p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This thesis is concerned with a paper from Alan D. Rendall named "Unique determination of an inner product by adjointness relations in the algebra of quantum observables", in which is proved that given a $*$ -representation of a $*$ -algebra in a pre-Hilbert space V irreducible with regard to the inner product defined in V we can assure the uniqueness of the inner product up to a multiplicative constant subject to some technical conditions. We also make a brief study about algebra representations and the Gelfand-Naimark-Segal Construction is presented.

Keywords

$*$ -Algebra; Representation; Heisenberg Algebra; Schrödinger Representation; Unbounded Operators; Symmetric Operators; Deficiency Index; Cayley Transform; Gelfand-Naimark-Segal Construction; Rendall's Theorem .

Conteúdo

1	Introdução	9
2	Preliminares	11
2.1	Álgebra	11
2.2	Operadores Não Limitados	18
2.3	Representações em espaços pré-Hilbert	26
3	Índices de Deficiência	29
3.1	A Transformada de Cayley	29
4	A Construção de Gelfand-Naimark-Segal	38
5	Os Teoremas de Rendall	46
5.1	Teorema de Rendall para Aplicações Lineares Limitadas	46
5.2	Teorema de Rendall para Aplicações Lineares Ilimitadas	51
6	Considerações adicionais	57
	Referências Bibliográficas	58