



**Mateus Cavalcante Waga**

**Aversão a risco e política ótima de  
investimentos e financiamentos de uma  
corporação: uma abordagem via programação  
dinâmica estocástica**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Davi Michel Valladão  
Co-orientador: Prof. Thuener Armando da Silva

Rio de Janeiro  
Abril de 2018



**Mateus Cavalcante Waga**

**Aversão a risco e política ótima de  
investimentos e financiamentos de uma  
corporação: uma abordagem via programação  
dinâmica estocástica**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Davi Michel Valladão**

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

**Prof. Thuener Armando da Silva**

Co-orientador

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-RIO

**Prof. Alexandre Street de Aguiar**

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-RIO

**Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho**

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-RIO

**Prof. Bruno Fânzeres dos Santos**

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-RIO

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 5 de Abril de 2018

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### Mateus Cavalcante Waga

Mateus C. Waga é formado em Engenharia de Produção pela UFRJ, possui o certificado CFA (*Chartered Financial Analyst*). Trabalha há onze anos na Petrobras onde passou por diversas áreas ligadas a Finanças Corporativas sendo, atualmente, o gerente responsável pela gestão dos fluxos financeiros entre empresas do Sistema Petrobras. Além disso é CFO da Petrobras Global Trading.

#### Ficha Catalográfica

Waga, Mateus Cavalcante

Aversão a risco e política ótima de investimentos e financiamentos de uma corporação: uma abordagem via programação dinâmica estocástica / Mateus Cavalcante Waga; orientador: Davi Michel Valladão; co-orientador: Thuener Armando da Silva. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Engenharia Industrial, 2018.

v., 65 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Finanças Corporativas;. 3. estrutura de capital;. 4. modelos;. 5. medidas de risco;. 6. modelos de investimento em tempo discreto;. 7. programação dinâmica dual estocástica;. 8. aversão a risco.. I. Valladão, Davi Michel. II. da Silva, Thuener Armando. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. IV. Título.

CDD: 658.5

Para Ana, se não fosse por ela, nunca teria conseguido. Para Miguel, Caio e Beni, se não fosse por eles... teria terminado há algum tempo!

## Agradecimentos

À PUC e aos amigos que fiz durante este Mestrado. Meu orientador Davi por todo o caminho, pelo entusiasmo com os desafios e a originalidade nas soluções. Meu co-orientador Thuener, pelo apoio nas dificuldades, pelas ferramentas certas, pelas discussões sem fim. Alan, Andrew, Camillo, Lucas e Simone. Pelas trocas, dificuldades e risadas compartilhadas.

À Petrobras e aos amigos que fiz ao longo dos últimos 11 anos. Zacarias por ter me ajudado em todos os aspectos quando decidi fazer este mestrado. Ao André Campos pelo apoio fundamental no final do curso. Aos colegas de FINANÇAS/GCAIXA/GFE que me ajudaram em diversas fases desta jornada. A todo mundo que, de alguma forma, contribuiu com este trabalho.

À minha família pelo apoio incondicional.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida.

## Resumo

Waga, Mateus Cavalcante; Valladão, Davi Michel; da Silva, Thuener Armando. **Aversão a risco e política ótima de investimentos e financiamentos de uma corporação: uma abordagem via programação dinâmica estocástica**. Rio de Janeiro, 2018. 65p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Finanças Corporativas tem como objetivo encontrar a política de investimentos e financiamentos que maximize o valor para o acionista. Baseada no modelo estático de Modigliani e Miller, a literatura recente apresenta modelos dinâmicos que buscam maior aderência à realidade. No entanto, para obter uma metodologia de solução computacionalmente tratável, duas simplificações são usualmente adotadas: (i) agentes financeiros são neutros a risco; (ii) custo de financiamento são fixos e independentes da alavancagem da empresa. Neste trabalho, é proposto um modelo de programação dinâmica estocástica para a determinação da política ótima de investimentos e financiamentos considerando acionistas avessos a risco e empresas que enfrentam incerteza na receita e custos marginais de financiamentos não-decrescentes com o nível de alavancagem da empresa. O modelo proposto é resolvido de maneira eficiente utilizando o algoritmo de Programação Dinâmica Dual Estocástica. Ao final do trabalho, são realizados estudos empíricos e análises de sensibilidade para melhor compreensão das políticas de investimentos e financiamentos das corporações.

## Palavras-chave

Finanças Corporativas; estrutura de capital; modelos; medidas de risco; modelos de investimento em tempo discreto; programação dinâmica dual estocástica; aversão a risco.

## Abstract

Waga, Mateus Cavalcante; Valladão, Davi Michel (Advisor); da Silva, Thuener Armando (Co-Advisor). **Risk aversion and optimal investment and financing corporate policy: a stochastic dynamic programming approach**. Rio de Janeiro, 2018. 65p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Corporate Finance is the study of investment and financing policies in order to maximize shareholder value. Based on the static model of Modigliani and Miller, recent literature presents dynamic models that seek greater adherence to reality. However, to obtain a computationally treatable solution methodology, two simplifications are usually adopted: (i) financial agents are risk neutral; (ii) cost of financing is static and independent of the company's leverage. In this work, a dynamic stochastic programming model is proposed to determine the optimum investment and financing policy, considering risk-averse shareholders and companies that face uncertainty on income and non-decreasing marginal costs of financing. The proposed model is efficiently solved using the Stochastic Dual Dynamic Programming algorithm. At the end of the study, empirical studies and sensitivity analyzes are carried out to the better understanding of corporate investment and financing policies.

## Keywords

Corporate Finance; capital structure; models; risk measures; discrete-time investment models; stochastic dual dynamic programming; risk aversion.

# Sumário

1	Introdução	12
2	Revisão da Literatura	14
2.1	Finanças Corporativas e Estrutura Ótima de Capital	14
2.2	Modelos Dinâmicos em Finanças Corporativas	16
2.2.1	Modelos de Direitos Contingenciais em Tempo Contínuo (MDCTC)	16
2.2.2	Modelos de Investimento em Tempo Discreto (MITD)	17
3	Modelo Proposto	19
3.1	Modelo Simplificado	20
3.2	Dívidas	21
3.3	Emissão de Ações	23
3.4	Eventos de <i>Default</i>	24
3.5	Impostos	25
3.6	<i>End Effect</i>	27
3.7	Medidas dinâmicas e temporalmente consistentes de risco	28
4	Estudo de Caso	30
4.1	Premissas e Parâmetros	30
4.1.1	Resultado Operacional	31
4.1.2	Dívida	32
4.2	Resultados	33
4.3	Sensibilidades	43
4.3.1	Sensibilidade aos principais parâmetros do Modelo	43
4.3.2	Políticas de Dividendos Rígida	45
4.3.3	Políticas de Alavancagem Rígidas	48
5	Conclusão	51
	Referências bibliográficas	53
A	Conceitos Básicos de Programação Estocástica	58
B	Glossário	64

## Lista de figuras

Figura 3.1	Restrição de Balanço de Caixa	21
Figura 3.2	Custo de captação como uma função linear por partes	22
Figura 4.1	Dívida média para diferentes níveis de aversão a risco	31
Figura 4.2	Dívida para diferentes níveis de aversão a risco	34
Figura 4.3	Ativo para diferentes níveis de aversão a risco	35
Figura 4.4	Dividendos para diferentes níveis de aversão a risco	35
Figura 4.5	Alavancagem para diferentes níveis de aversão a risco	36
Figura 4.6	Custo de capital próprio em função do grau de aversão a risco	37
Figura 4.7	Fronteira eficiente para políticas financeiras	38
Figura 4.8	Principais variáveis do modelo para o cenário de alta	39
Figura 4.9	Principais variáveis do modelo para o cenário de baixa	39
Figura 4.10	Principais variáveis do modelo para o cenário de retomada	40
Figura 4.11	Receita e Dividendos	41
Figura 4.12	Dividendos e Dívidas	41
Figura 4.13	Investimentos e Dívidas	42
Figura 4.14	Função de Valor Futuro e Investimentos	43
Figura 4.15	Políticas de Dividendos	46
Figura 4.16	Dívida Média para diferentes níveis de alavancagem	48
Figura 4.17	$R_a$ , $R_e$ e $R_d$ em função da alavancagem (d/e)	50

## Lista de tabelas

Tabela 4.1	<i>Rating</i> e <i>Spread</i> Para cada nível de Dívida Líquida(DL)/EBITDA	32
Tabela 4.2	$\Delta$ , $\varphi$ e $\gamma$	33
Tabela 4.3	Dívida, ativo e alavancagem em função da depreciação	44
Tabela 4.4	Dívida, ativo e alavancagem em função de $r_f$	44
Tabela 4.5	Dívida, ativo e alavancagem em função da Alíquota de Imposto de Renda	45
Tabela 4.6	Dívida, ativo e alavancagem em função de $\Gamma$	45
Tabela 4.7	Intervalo de confiança para políticas de dividendos	47
Tabela 4.8	Intervalo de confiança para políticas de alavancagem	49

*“The greatest obstacle to discovery is not  
ignorance - it is the illusion of knowledge.”*

**Daniel J. Boorstin.**

# 1 Introdução

Hennessy e Whited [1], definem Finanças Corporativas como o estudo de custos transacionais inerentes à gestão de empresas. Lambrecht e Myers [2] defendem que Finanças Corporativas também é o estudo do comportamento e do conflito entre os agentes que atuam na tomada de decisões financeiras das corporações.

No contexto deste trabalho, abordamos Finanças Corporativas como o estudo das políticas de investimentos e financiamentos que maximizam o valor para o acionista. Em outras palavras, é o estudo de como as empresas devem alocar recursos escassos a fim de maximizar receitas e minimizar custos. Este objetivo é alcançado através de decisões de investimentos, pagamentos de dividendos e contratação de dívidas.

Entretanto, determinar estas políticas ótimas de financiamento e investimento não é uma tarefa trivial em função das incertezas que afetam o resultado da política ótima e o contexto dinâmico em que estas políticas estão inseridas. Além disso, custos transacionais podem afetar o resultado da empresa de maneira inesperada quando considerados de forma errônea [3].

Os modelos que tratam da determinação dessas políticas ótimas, têm, em geral, obtido relativo sucesso em medir a forma com que os custos transacionais afetam as decisões das empresas [4]. Entretanto, tais modelos distanciam-se da realidade ao assumir que agentes financeiros são neutros a risco e que o custo de financiamento fixo é independente da alavancagem da empresa são.

Neste contexto, este trabalho, propõe um modelo de programação dinâmica estocástica, para a determinação da política ótima de investimentos e financiamentos que pressupõe acionistas avessos a risco e empresas que enfrentam incerteza na receita e custos marginais de financiamentos não-decrescentes com o nível de alavancagem da empresa.

O modelo proposto é resolvido de maneira eficiente utilizando o algoritmo de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE). Ao final do trabalho são realizados estudos empíricos e análises de sensibilidade para melhor compreensão das políticas de investimentos e financiamentos das corporações.

Este trabalho traz as seguintes contribuições para a classe de Modelos de Investimento em Tempo Discreto (MITD):

- i Considera que os acionistas das empresas são avessos a risco;
- ii Considera o custo de captação crescente com o grau de alavancagem;
- iii Utilização da PDDE para resolução de um MITD;

A presente dissertação encontra-se dividida em 5 capítulos. Após a introdução (Capítulo 1), é feita uma revisão da literatura sobre os temas abordados nesta dissertação (Capítulo 2) e, em seguida, descrevemos o modelo utilizado para a resolução do problema (capítulo 3). No Capítulo 4, apresentaremos um estudo de caso para o modelo proposto e no Capítulo 5 a conclusão e eventuais direcionamentos para trabalhos futuros. Esta dissertação inclui ainda dois apêndices: o primeiro apresenta os conceitos básicos em Programação Estocástica e o segundo um glossário de variáveis que utilizamos ao longo do texto.

## 2

### Revisão da Literatura

O objetivo deste capítulo é realizar uma revisão bibliográfica sobre os temas relacionados a esta dissertação, apresentando a evolução destes conceitos ao longo do tempo. Para um maior aprofundamento em algum destes temas, sugerimos a bibliografia apresentada ao longo deste capítulo.

#### 2.1

##### Finanças Corporativas e Estrutura Ótima de Capital

A utilização de modelos que tentam representar a forma como as empresas tomam suas decisões financeiras possui extensa bibliografia. O primeiro trabalho relevante nesta área foi realizado por Modigliani e Miller [5], no qual os autores propuseram um modelo consistente para a definição da estrutura de capital de uma empresa. Neste contexto, estrutura de capital significa quanto do capital da empresa deve ser próprio (ações) e quanto deve ser de terceiros (dívida).

Na primeira parte do estudo, Modigliani e Miller provam que, em condições de mercado eficiente, ausência de impostos e custos de falência, a estrutura de capital é irrelevante. Esta conclusão é o resumo de duas proposições do estudo:

- i O valor da firma independe de sua estrutura de capital e;
- ii O custo de capital de uma firma é constante e independe de sua estrutura de capital

A intuição por trás destas proposições é que, em condições de mercado eficiente, na ausência de impostos e custos de falência, o acionista da empresa pode contratar, individualmente, dívidas e alavancar sua posição. Ou seja, não há vantagens que a empresa faça isso por ele.

Entretanto, as premissas que balizaram as conclusões acima são simplificações da realidade. Dessa forma, no mesmo estudo, Modigliani e Miller ampliam o escopo do modelo e passam a considerar também a existência de impostos e outros custos.

Quando incluímos, no modelo, a existência de impostos, o resultado das proposições (i) e (ii) se alteram substancialmente, especialmente considerando

que os juros pagos em um financiamento são dedutíveis de imposto de renda, vantagem não auferida pelo investidor individual. Assim, a estrutura de capital passa a ser relevante, entretanto, chegamos à conclusão ilógica de que as empresas deveriam ser sempre totalmente alavancadas, uma vez que quanto maior a alavancagem, menor o custo de capital da empresa.

Por fim, Modigliani e Miller sugerem a inclusão dos custos de falência da empresa, ou outros custos associados ao aumento da alavancagem (e.g., custos de agência ou custos de assimetria de informação).

Neste caso, passaria a existir uma estrutura de capital ótima, ou seja, haveria uma combinação entre dívida e capital próprio que maximizaria o valor da empresa. Nos termos da proposição (ii), existiria um valor mínimo para o custo de capital da firma. Esta teoria foi, posteriormente chamada por Myers [6] de *tradeoff* estático. Vale notar que cada firma teria sua estrutura de capital ótima, a depender dos seus riscos, regime fiscal, governança corporativa, entre outros fatores.

Myers [6] levantou novas alternativas na tentativa de explicar como as empresas tomam decisões acerca de suas estruturas de capital, organizando as teorias sobre estrutura de capital em duas correntes:

- i *tradeoff* estático, na qual, conforme descrito anteriormente, a firma pondera prós e contras de uma maior alavancagem (benefício fiscal da dívida versus custos de falência) e;
- ii *pecking order*, na qual a firma possui uma ordem de preferência na utilização de recursos: primeiro utiliza geração de caixa da empresa, depois emite dívidas e só então aporta capital próprio.

Ao longo da década de 90, vários trabalhos foram realizados sobre estrutura de capital, sendo as principais linhas teóricas resumidas por Barclay e Smith [7].

A primeira linha teórica, descrita por Barclay e Smith [7], tenta explicar as políticas financeiras das empresas do ponto de vista exclusivamente tributário. A ideia desta teoria é que, uma vez que as despesas de juros são dedutíveis de imposto de renda corporativo, as empresas buscarão aumentar o endividamento com o objetivo de minimizar o pagamento de impostos. O problema desta linha é que superestima o valor da dedução de impostos, dado que não considera o pagamento de imposto também pelos acionistas.

A segunda linha teórica é bastante similar ao *tradeoff* estático definido em [6], sendo aqui chamada de Custos Contratuais. Por esta teoria, gestores financeiros tendem a fixar metas de relação dívida/capital próprio até o ponto

em que o benefício marginal da dedução de impostos pela contratação de uma nova dívida é compensado pelo aumento dos custos esperados de falência.

A terceira linha teórica, aqui chamada de Custos de Informação defende que os gestores da empresa possuem melhores informações do valor de suas empresas do que agentes externos. O reconhecimento desta assimetria de informação levou à teoria da sinalização. Por esta teoria, o aumento na participação de dívidas na estrutura de capital da empresa pode ser entendido pelos agentes de mercado como um sinal de fluxos de caixa maiores no futuro.

Barclay e Smith [8], após nova revisão sobre a teoria considerando estudos empíricos, defendem que a decisão sobre estrutura de capital não pode ser analisada como um fator isolado e sim como consequência de um conjunto de modelos de decisão adotados pelas empresas.

Nos últimos anos, novas ferramentas foram desenvolvidas para tentar responder questões ainda em aberto sobre estrutura de capital, especialmente no campo dos modelos dinâmicos.

## 2.2

### Modelos Dinâmicos em Finanças Corporativas

Strebulaev e Whited [4], em uma revisão abrangente, dividem os modelos dinâmicos em finanças corporativas em, basicamente, dois grupos:

- i Modelos de Direitos Contingenciais em Tempo Contínuo (MDCTC) ou *Continuous Time Contingent Claim Models*;
- ii Modelos de Investimento em Tempo Discreto (MITD) .

Nesta seção faremos uma breve descrição deste tipos de modelo. Uma explanação detalhada sobre cada tipo de modelo pode ser encontrada em [4].

### 2.2.1

#### Modelos de Direitos Contingenciais em Tempo Contínuo (MDCTC)

Modelos de Direitos Contingenciais, buscam inspiração nas teorias de precificação de ativos (mercado de capitais). Basicamente, este tipo de modelo defende que qualquer direito sobre os fluxos de caixa futuro de uma empresa seriam derivativos sobre o valor da firma.

Dessa forma, é possível aplicar a teoria de precificação de opções para precificar esses direitos, assumindo inicialmente, que toda decisão de investimento tomada pelos agentes econômicos é fixa.

De maneira geral, a Função Objetivo (FO) destes modelos reflete o desejo de um ou mais agentes econômicos. A FO pode, inclusive, mudar com o tempo,

por exemplo os acionistas decidem a estrutura de capital inicial mas os credores decidem o que será feito no caso de um evento de *default*.

Estes modelos podem, assim, explorar diferenças entre os objetivos *ex ante* e *ex post* dos tomadores de decisão e, dessa forma, avaliar de forma realista conflitos de interesse.

Modelos desta natureza, a depender da complexidade e grau de realismo que se queira dar, podem ser computacionalmente desafiadores. E, por este motivo, soluções de programação dinâmica estocástica têm sido usadas. Alguns exemplos nesta linha podem ser encontrados em [9–11].

Leland [12] foi pioneiro neste tipo de modelo, sendo seu trabalho base para futuras contribuições. O modelo desenvolvido por Leland abordava o uso da precificação de opções no estudo de risco de crédito corporativo e na definição de estruturas de capital ótimas.

Trabalhos mais recentes incluem Strebulaev [13] e Ju et al [14]. Neste contexto, destaca-se também o trabalho de Bhamra et al [15] no qual é apresentado um modelo dinâmico que leva em consideração conflitos de agente/principal.

### 2.2.2

#### Modelos de Investimento em Tempo Discreto (MITD)

Conforme descrito em [4] MITD possuem as seguintes características :

- i Um conjunto de variáveis de estado exógenas ao modelo;
- ii Um conjunto de variáveis de estado endógenas ao modelo;
- iii Uma FO bem definida.

As variáveis de estado exógenas são, em geral, choques no lucro da firma. Estes choques podem ser modelados diretamente no lucro ou na produtividade da empresa. Riddick e Whited [16] incluíram choques nos custos de produção e Jermann e Quadrini [17] nos custos de financiamento. Já as variáveis endógenas são, em geral, o montante de capital investido, a emissão de ações/dividendos, dívidas, entre outros.

A FO, descrita na maioria destes modelos, busca maximizar o valor esperado do valor presente do fluxo de caixa para o acionista. Esta é uma limitação importante dos modelos desenvolvidos até então: não consideram que os agentes financeiros têm preferência por fluxos menos arriscados.

MITD podem se tornar extremamente complexos e de difícil resolução, além de muitas vezes serem caracterizados como problemas de tempo infinito. No entanto, esses problemas podem ser bastante simplificados assumindo que as variáveis de estado exógenas seguem processos de Markov [4].

Abaixo, apresentaremos o modelo básico para o valor da firma ( $V_t$ ), no instante  $t$ , conforme descrito em [4]. Os demais MITD, em geral, possuem, pelo menos, alguma das características apresentadas abaixo:

$$V_t = \max_{k_{t+j}|j=1,\dots,\infty} \mathbb{E}_t \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+r} \right)^j e(k_{t+j}, i_{t+j}, z_{t+j}) \right] \quad (2-1)$$

Onde  $\mathbb{E}_t$  é o valor esperado do fluxo de dividendos ( $e$ ) condicionado às informações disponíveis no período  $t$  e  $r$  é a taxa livre de risco,  $k_t$  é o ativo da empresa no instante  $t$ ,  $i_t$  é o montante investido no instante  $t$  e  $z_t$  uma variável aleatória que representa um choque na receita da empresa.

A restrição básica deste modelo é:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_{t+1}$$

Onde  $\delta$  é a taxa de depreciação dos ativos da empresa. Esta restrição garante que o capital no instante  $t + 1$  é o capital no instante  $t$ , depreciado por um período e acrescido do investimento para  $t + 1$ .

Um dos principais MITD foi desenvolvido por Gomes [18] que introduziu financiamentos externos em modelos dinâmicos. Entretanto, é o modelo desenvolvido por Hennessy e Whited [3] que tem sido usado como base para o desenvolvimento de novos modelos (o próprio modelo básico apresentado em [4] deriva deste). Evoluções deste modelo incluem Bolton et al [19] e Amaya et al [20], que inclui uma visão dos impactos da utilização de instrumentos de *hedge* pela firma.

Lambrecht e Myers [2], em um trabalho recente, propuseram um MITD que leva em consideração problemas do tipo agente-principal, no qual a FO é maximizar a utilidade dos gestores da firma.

Autores de outras linhas de pesquisa, especificamente de programação estocástica, também desenvolveram trabalhos importantes que se assemelham aos modelos MITD clássicos, sendo o modelo desenvolvido por Xu e Birge [21] para o problema de gerenciamento financeiro da produção o primeiro que, explicitamente, utiliza técnicas de programação estocástica. Nesta mesma linha, Valladão [22] propõem um modelo dinâmico para firma, no qual a FO é maximizar a utilidade para o acionista.

Por fim, conforme pode ser verificado acima, cada tipo de modelo possui suas vantagens e desvantagens. Se por um lado MDCTC permitem a precificação das dívidas e do capital próprio de maneira endógena, MITD permitem um conjunto mais rico de opções de financiamento.

### 3

## Modelo Proposto

Neste capítulo, o modelo proposto de programação dinâmica estocástica é desenvolvido. Inicialmente, apresentamos um modelo simplificado e, gradativamente, adicionamos complexidade. Utilizamos como base para a modelagem o MITD proposto por Hennessy e Whited [3]. O modelo proposto de programação dinâmica estocástica é representado de maneira genérica pela função valor

$$Q_t(c_{t-1}, k_{t-1}, d_{t-1}, z_t) = \max_{\substack{\{i_t, d_t, e_t\} \in \\ \mathcal{X}(c_{t-1}, k_{t-1}, d_{t-1}, z_t)}} e_t + R^{-1} \Phi_t \left[ Q_{t+1}(c_t, k_t, d_t, z_{t+1}) \right]. \quad (3-1)$$

Assumindo um problema com horizonte finito, a função valor é definida por (3-1) para  $t = 1, \dots, T$  e para  $t > T$  definimos um valor nulo, i.e.,  $Q_t(c_{t-1}, k_{t-1}, d_{t-1}, z_t) = 0$  para quaisquer valores de  $c_{t-1}, k_{t-1}, d_{t-1}, z_t$ . O caixa  $c_t = f_c(c_{t-1}, k_{t-1}, e_t, i_t, d_t, z_t)$  é definido como função do estado (caixa, capital e dívida) em  $t - 1$  e das decisões correntes de investimento ( $i_t$ ), financiamento ( $d_t$ ) e pagamento de dividendos ( $e_t$ ). O valor do ativo  $k_t = f_k(k_{t-1}, i_t)$  por sua vez é função do valor do ativo em  $t - 1$  e da decisão corrente de investimentos  $i_t$ .

No modelo (3-1),  $Q_t(c_{t-1}, k_{t-1}, d_{t-1}, z_t)$  é o valor ótimo para o acionista em função do estado anterior ( $c_{t-1}, k_{t-1}, d_{t-1}$ ) e de um choque aleatório ( $z_t$ ). Neste contexto, o modelo visa maximizar o valor da empresa para o acionista representado pelo do pagamento imediato de dividendos  $e_t$  e o valor presente ajustado ao risco do pagamento futuro de dividendos  $R^{-1} \Phi_t \left[ Q_{t+1}(c_t, k_t, d_t, z_{t+1}) \right]$ , onde  $r$  é a taxa livre de risco e  $R = 1 + r$ . O modelo obtém a política ótima de investimento ( $i_t$ ), financiamento ( $d_t$ ) e pagamento de dividendos ( $e_t$ ) considerando que o conjunto viável destas decisões  $\mathcal{X}(c_{t-1}, k_{t-1}, d_{t-1}, z_t)$  depende do estado anterior.

Além disso, vale ressaltar que as variáveis utilizadas ao longo deste capítulo compõem o glossário apresentado no Apêndice B.

### 3.1 Modelo Simplificado

Para fins didáticos, apresentamos nesta seção um modelo simplificado baseado nos trabalhos anteriores da literatura, em particular no trabalho de Hennessy e Whited [3]. Neste modelo, assumimos um custo de empréstimo linear e desconsideramos taxa de imposto, custo de emissão de novas ações e custo de falência. Apresentamos as equações dinâmicas para todo  $t = 1, \dots, T$ ,

$$Q_t(c_{t-1}, k_{t-1}, d_{t-1}, z_t) = \quad (3-2)$$

$$\max_{\substack{i_t, d_t, e_t \\ c_t, k_t, \pi_t}} e_t + R^{-1} \Phi_t \left[ Q_{t+1}(c_t, k_t, d_t, z_{t+1}) \right] \quad (3-3)$$

$$\text{s.a. } c_t + e_t - \pi_t + i_t - d_t = R_c c_{t-1} - R_d d_{t-1} \quad (3-4)$$

$$k_t - i_t = (1 - \delta) k_{t-1} \quad (3-5)$$

$$\pi_t - f_\pi(k_t, z_t) \leq 0 \quad (3-6)$$

$$c_t, k_t \geq 0 \quad (3-7)$$

onde o conjunto viável e as funções de atualização dos estados do sistema são formulados de maneira explícita através de restrições do modelo de otimização.

A definição de quanto pode ser pago de dividendos  $e_t$  depende, diretamente, de quanto a empresa possui em caixa  $c_{t-1}$  e quanto tem de dívida  $d_{t-1}$ . O caixa da empresa  $c_t$  deve ser maior ou igual a zero, caso contrário a empresa está em *default*. Segundo a restrição (3-4), o caixa ao final de um período  $c_t$  é definido pelo balanço entre entradas e saídas de recursos financeiros na empresa, conforme equação (3-4). Entradas de caixa contemplam o lucro operacional  $\pi_t$  e novos empréstimos  $d_t$  além do rendimento do caixa anterior  $R_c c_{t-1}$ . As saídas de caixa englobam novos investimentos  $i_t$ , pagamento de dividendos além do pagamento do serviço de dívidas antigas  $R_d d_{t-1}$ . Vale ressaltar que neste modelo simplificado ainda consideramos um custo marginal de financiamento constante  $R_d$  e um retorno constante do caixa  $R_c$ . A premissa sobre a função de custo de financiamento será revisitada na sessão 3.2.

A figura 3.1 ilustra a restrição 3-4.

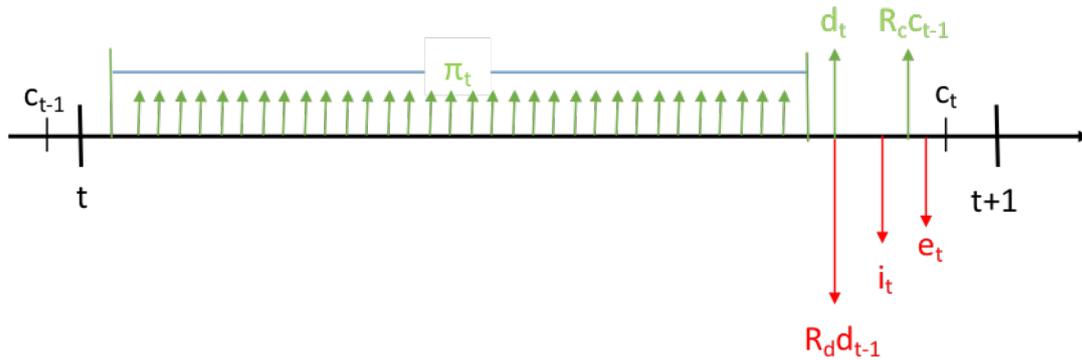


Figura 3.1: Restrição de Balanço de Caixa

Como pode ser observado na figura 3.1, o resultado operacional ( $\pi_t$ ) ocorre ao longo do período  $t$  enquanto, o pagamento da dívida ( $R_d d_{t-1}$ ) e o rendimento do caixa ( $R_c c_{t-1}$ ) dependem, exclusivamente, do estado anterior ( $t-1$ ). As variáveis investimento ( $i_t$ ), emissão de novas dívidas ( $d_t$ ) e dividendos ( $e_t$ ) são decididas no mesmo instante ao final do período, compondo o caixa em  $t$  ( $c_t$ ).

Já a restrição 3-5 estabelece a relação entre o valor do ativo e a política de investimento. Assumindo uma depreciação percentual constante  $\delta$ , o valor do ativo corrente  $k_t$  é igual ao valor do ativo anterior depreciado  $(1 - \delta) k_{t-1}$  acrescido dos investimentos correntes  $i_t$ .

A restrição (3-6) restringe o lucro operacional  $\pi_t$  à capacidade da empresa  $f_\pi(k_t, z_t)$ , definida como função do valor do ativo da empresa  $k_t$  e da realização do choque  $z_t$ . Assumimos que  $f_\pi(k_t, z_t)$  é estritamente crescente e côncava, ou seja, os ganhos incrementais de adicionar mais uma unidade de capital devem ser decrescentes. Como assumimos  $f_\pi(k_t, z_t)$  côncava, o conjunto de soluções viáveis para modelo (3-2)–(3-7) é convexo e, conseqüentemente, computacionalmente tratável.

### 3.2 Dívidas

O modelo descrito nas equações 3-3 a 3-7 parte do pressuposto que o custo de captação de dívidas é constante e independe do grau de alavancagem da empresa, premissa que, embora utilizada em diversos estudos [1–3, 18] não é condizente com a realidade. Nesta sessão apresentaremos como considerar custos marginais de captação crescentes.

Valladão et al [23], descreve a curva de custo de financiamento de uma empresa em função de sua alavancagem como uma função linear por partes, crescente, para o custo de captação na formação de portfólios. Neste conceito, a empresa poderia captar dívidas em determinadas faixas de custo. A Figura 3.2 ilustra este conceito, onde  $d_{t-1}$  é o total de dívida captada,  $\varphi_j$  é limite de captação para cada faixa de custo e  $f_d(d_{t-1})$  é o valor pago no período seguinte.

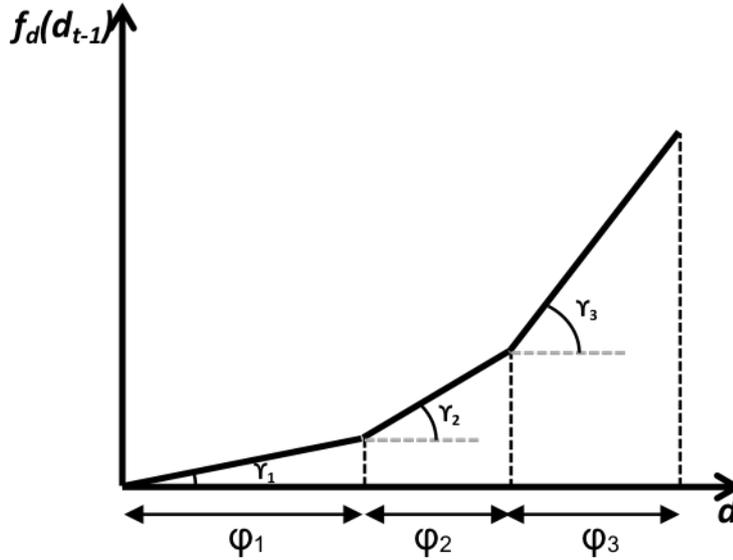


Figura 3.2: Custo de captação como uma função linear por partes

Valladão et al [23] propõem o modelo descrito nas equações 3-8 a 3-11 para obter os valores a serem pagos de dívida no período seguinte. Neste modelo,  $f_d(d_{t-1})$  é função de  $d_{t-1}$  e representa o valor a ser pago,  $\Delta_{t,j}$  é uma variável que representa o valor captado em cada nível de taxa de juros ( $\gamma_j$ ) e  $\varphi_j$  é o limite que pode ser captado a cada nível. O índice  $J$  representa o número de níveis de taxa de juros existentes para captação.

$$f_d(d_{t-1}) = \min_{\Delta_{t,j}} \sum_{j=1}^J (1 + \gamma_j) \Delta_{t,j} \quad (3-8)$$

$$\text{s. a } \Delta_{t,j} \leq \varphi_j, \quad \forall j = 1, \dots, J \quad (3-9)$$

$$\sum_{j=1}^J \Delta_{t,j} = d_{t-1} \quad (3-10)$$

$$\Delta_{t,j} \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, J \quad (3-11)$$

Ainda, conforme [23], a função acima pode ser inserida em um modelo

equivalente a 3-3 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 Q_t(c_{t-1}, k_{t-1}, d_{t-1}, z_t) = & \tag{3-12} \\
 & \max_{\substack{i_t, d_t, e_t \\ c_t, k_t, \pi_t, \Delta_{t,j}}} e_t + R^{-1} \Phi_t \left[ Q_{t+1}(c_t, k_t, d_t, z_{t+1}) \right] \\
 \text{s.a} \quad & c_t + e_t - \pi_t + i_t - d_t = R_c c_{t-1} - f_d(d_{t-1}) \\
 & k_t - i_t = (1 - \delta)k_{t-1} \\
 & \pi_t - f_\pi(k_t, z_t) \leq 0 \\
 & f_d(d_{t-1}) = \sum_{j=1}^J (1 + \gamma_j) \Delta_{t,j} \\
 & \Delta_{t,j} \leq \varphi_j \quad \forall j = 1, \dots, J \\
 & \sum_{j=1}^J \Delta_{t,j} = d_{t-1} \\
 & e_t, c_t, k_t, d_t, \Delta_{t,j} \geq 0
 \end{aligned}$$

No modelo 3-12, as restrições 3-8 e 3-10 podem ser reescritas como uma única restrição, conforme abaixo:

$$\sum_{j=1}^J \gamma_j \Delta_{t,j} = f_d(d_{t-1}) - d_{t-1} \tag{3-13}$$

A restrição 3-13, define quanto será pago de juros.

Conforme já mencionado, a modelagem apresentada acima difere substancialmente de outros MITD apresentados na literatura, nos quais o custo percentual de captação é fixo e, portanto, independente do nível de alavancagem.

A premissa por trás desta metodologia é: à medida que a alavancagem sobe e o risco de *default* aumenta, o credor exige uma remuneração maior. Além disso, as dívidas contraídas primeiro (quando a alavancagem é mais baixa) têm prioridade em relação às dívidas contraídas depois. Este conceito também é coerente com o trabalho de Kinsgen [24], no qual é mostrada a relação do custo de captação de uma empresa, sua estrutura de capital e seu *rating* por agências de risco.

### 3.3

#### Emissão de Ações

Neste modelo também incluímos a possibilidade de aporte pelos acionistas, que neste trabalho são realizados pela emissão de novas ações da empresa.

Conforme descrito em diversos trabalhos [3, 25–29] há diversos custos associados à decisão de emitir novas ações. Assim, este custo deve estar presente em nossa modelagem, conforme restrições 3-14 e 3-15.

$$u_t + \eta e_t \geq 0 \quad (3-14)$$

$$u_t \geq 0 \quad (3-15)$$

Nas equações acima,  $u_t$  é o custo total associado a emissão da empresa no período  $t$ . E  $\eta$  é o custo percentual a ser aplicado ao valor da emissão. Vale ressaltar que  $u_t$  só terá valores positivos quando  $e_t < 0$ , ou seja, a empresa não incorre nestes custos quando paga dividendos. Além disso, precisamos alterar a equação de balanço de caixa do modelo para refletir as alterações acima.

$$c_t + e_t - \pi_t + i_t - d_t + u_t = R_c c_{t-1} - f_d(d_{t-1}) \quad (3-16)$$

### 3.4

#### Eventos de *Default*

Conforme já dito anteriormente, em cenários de baixa geração operacional a empresa pode não ter recursos suficientes para o pagamento de suas obrigações. Nestes cenários, de maneira geral, as empresas passam por reestruturações que incluem a venda de parte de seus ativos.

Koh et al [30] apresentam, no contexto do ciclo de vida da empresa, as principais alternativas para lidar com eventos de *default*, sendo a reestruturação por venda de ativos, a mais comum. Vale ressaltar que há extensa bibliografia sobre reestruturação de empresas através da venda de ativos [31–33].

Conforme [4], vários MITD incluem a possibilidade de venda de ativos com desconto no caso de dificuldades financeiras. Consideramos a venda de ativos como investimentos negativos. Assim, a venda de ativos com descontos ocorre para valores negativos da variável  $i_t$ . O valor do desconto ( $n_t$ ) é definido como  $\max(0, -s i_t)$ , onde  $s$  é o percentual de desconto oferecido. Com esta formulação, o desconto só ocorre quando houver desinvestimentos. Para que isso seja refletido em nosso modelo linear fazemos a inclusão das restrições 3-17 e 3-18.

$$n_t + s i_t \geq 0 \quad (3-17)$$

$$n_t \geq 0 \quad (3-18)$$

Na equação acima,  $n_t$  é o valor do desconto (em relação ao seu valor de livro) oferecido na venda dos ativos da empresa. Vale ressaltar que  $n_t$  só terá valor quando  $i_t < 0$ . Por fim, precisamos alterar a equação 3-16 para refletir as alterações acima.

$$c_t + e_t - \pi_t + i_t - d_t + u_t + n_t = R_c c_{t-1} - f_d(d_{t-1}) \quad (3-19)$$

### 3.5

#### Impostos

Uma parte fundamental da teoria desenvolvida por Modigliani e Miller [5] descreve os efeitos dos impostos no resultado das empresas, especialmente a utilização da dedutibilidade dos juros pagos.

Dessa forma, consideraremos  $\tau$  como a alíquota de imposto de renda corporativa, incidente sobre o lucro operacional da empresa ( $y_t$ ). Neste contexto, lucro operacional é: o resultado operacional ( $\pi_t$ ), menos a depreciação ( $\delta k_t$ ), mais a receita financeira da aplicação do caixa  $R_c c_{t-1}$ , menos os juros pagos ( $\sum_{j=1}^J \gamma_j \Delta_{t,j}$ ), menos o valor do desconto aferido em um eventual desinvestimento ( $n_t$ ). A equação 3-20 define o lucro operacional.

$$y_t - \pi_t + \delta k_t + n_t + \sum_{j=1}^J \gamma_j \Delta_{t,j} = R_c c_{t-1} \quad (3-20)$$

Um ponto importante a ser levantado neste momento é que apesar de ser possível existirem valores negativos de  $y_t$ , não podemos supor que haveria um pagamento por parte dos governos para as empresas nestes casos. Por outro lado, não é razoável considerar que os prejuízos auferidos em um período não poderão ser compensados no futuro. Cada país possui uma legislação específica sobre a utilização de prejuízos fiscais em exercícios subsequentes. Graham [34] faz um trabalho detalhado sobre este assunto. Especificamente, nos Estados Unidos as empresas podem carregar seus prejuízos por até 20 anos. Entretanto, por simplificação, neste modelo não consideraremos que créditos fiscais expiram.

Portanto, consideraremos que o imposto a ser pago ( $g_t$ ) é o máximo entre 0 e a diferença entre o resultado operacional ( $y_t$ ) e os prejuízos fiscais acumulados até o período anterior ( $\psi_{t-1}$ ) multiplicados pela alíquota de imposto de renda corporativos ( $\tau$ ), conforme equação 3-21. Já o estoque de créditos fiscais ao final do período ( $\psi_t$ ) é simplesmente o estoque inicial ( $\psi_{t-1}$ ) menos a quantidade utilizada naquele período ( $\min(y_t, \psi_{t-1})$ ). Vale lembrar que, quando o resultado operacional da empresa for negativo ( $y < 0$ ) a empresa acumulará créditos, conforme 3-22.

$$g_t = \tau \max(0, y_t - \psi_{t-1}) \quad (3-21)$$

$$\psi_t = \psi_{t-1} - \min(y_t, \psi_{t-1}) \quad (3-22)$$

Para que as equações acima sejam refletidas em nosso modelo linear, substituímos as equações 3-21 e 3-22 pelas equações 3-23 a 3-27.

$$g_t - \tau (y_t - a_t) \geq 0 \quad (3-23)$$

$$g_t \geq 0 \quad (3-24)$$

$$a_t \leq \psi_{t-1} \quad (3-25)$$

$$a_t - y_t \leq 0 \quad (3-26)$$

$$\psi_t + a_t = \psi_{t-1} \quad (3-27)$$

Uma vez que o imposto pago ( $g_t$ ) é um custo para o sistema (quanto menor o valor da variável maior o valor da FO), a equação 3-21 pode ser substituída pelas inequações 3-23 e 3-24 quando o lucro tributável for negativo, o valor pago de impostos será igual a zero.

Em relação aos créditos fiscais, precisamos da variável auxiliar  $a_t$ , que representa o uso (valor positivo) ou o acúmulo (valores negativos) de créditos fiscais. Assim, uma vez que  $g_t$  é um custo na FO, quanto maior o valor de  $a_t$ , maior o valor da FO<sup>1</sup>. A inclusão das inequações 3-25, 3-26 e 3-27 garantem a correta modelagem da utilização dos créditos fiscais.

Importante reparar que, neste modelo, os créditos fiscais da empresa passam a ser um estado do problema. Em geral, MITD adotam premissas simplificadas para tratar deste tipo de situação, como por exemplo utilizar uma alíquota de imposto média [1]. Na pesquisa bibliográfica para esta dissertação não encontramos nenhum modelo que considerasse os créditos fiscais da maneira realista como tratamos aqui.

Abaixo o modelo considerando as alterações das seções, 3.3, 3.4 e 3.5:

<sup>1</sup> $a_t$  também aparece na equação 3-27, entretanto os créditos fiscais serão utilizados apenas no futuro, o que torna preferível utilizá-los o quanto antes, por isso, enquanto houver lucro, quanto maior o valor de  $a_t$ , maior o valor da FO.

$$Q_t(c_{t-1}, k_{t-1}, d_{t-1}, \psi_{t-1}, z_t) =$$

$$\max_{\substack{i_t, d_t, e_t, c_t, \\ k_t, \pi_t, \Delta_{t,j}, u_t, \\ n_t, g_t, y_t, a_t, \psi_t}} e_t + R^{-1} \Phi_t \left[ Q_{t+1}(c_t, k_t, d_t, \psi_t, z_{t+1}) \right]$$

$$\text{s.a. } c_t + e_t - \pi_t + i_t - d_t + u_t + n_t + g_t = R_c c_{t-1} - f_d(d_{t-1})$$

$$k_t - i_t = (1 - \delta)k_{t-1}$$

$$\pi_t - f_\pi(k_t, z_t) \leq 0$$

$$\sum_{j=1}^J \gamma_j \Delta_{t,j} = f_d(d_{t-1}) - d_{t-1}$$

$$\Delta_{t,j} \leq \varphi_j \quad \forall j = 1, \dots, J$$

$$u_t + \eta e_t \geq 0$$

$$n_t + s i_t \geq 0$$

$$y_t - \pi_t + \delta k_t + n_t + \sum_{j=1}^J \gamma_j \Delta_{t,j} = R_c c_{t-1}$$

$$g_t - \tau (y_t - a_t) \geq 0$$

$$a_t \leq \psi_{t-1}$$

$$a_t - y_t \leq 0$$

$$\psi_t + a_t = \psi_{t-1}$$

$$c_t, k_t, d_t, \Delta_{t,j}, u_t, n_t, g_t \geq 0$$

### 3.6

#### **End Effect**

Técnicas de programação dinâmica são utilizadas para resolver problemas com um número finito de estágios. Entretanto, para o problema da política de dividendos, esta não é uma hipótese razoável, uma vez que não há um prazo estipulado de existência de uma empresa. Dessa forma, precisamos definir uma metodologia para tratar deste problema.

Neste trabalho consideraremos que a empresa opera até o período T-1 a partir de quando não terá mais receita ( $\pi_T = 0$ ) e não terá a possibilidade de contrair dívidas ( $d_T = 0$ ). Neste estágio a empresa terá duas alternativas para fazer frente aos compromissos assumidos:

- i Vender seus ativos pelo preço de livro, deduzido do desconto  $n$ ;
- ii Emitir ações.

Desta forma, a equação de balanço de caixa para  $T$  é a seguinte:

$$c_T + e_T + i_T + u_T + n_T + g_T = R_c c_{T-1} - f_d(d_{T-1}) \quad (3-28)$$

### 3.7

#### Medidas dinâmicas e temporalmente consistentes de risco

Nesta sessão definiremos a medida de risco que compõe a medida de valor  $\Phi_t$ . Neste sentido é necessário definir as características de uma medida coerente de risco. Sejam  $X_1$  e  $X_2$ , ativos arriscados com retornos aleatórios:

- i Normalização:  $\Phi_t(0)=0$
- ii Monotonicidade: Se  $X_1 \leq X_2$  então  $\Phi_t(X_1) \leq \Phi_t(X_2)$ ,  $\forall X_1, X_2$
- iii Invariância por Translação:  $\Phi_t(X_1+a) = \Phi_t(X_1) + a$ ,  $\forall X_1$
- iv Subaditividade:  $\Phi_t(X_1+X_2) \leq \Phi_t(X_1) + \Phi_t(X_2)$ ,  $\forall X_1, X_2$
- v Homogeneidade Positiva:  $\Phi_t(CX_1) = C\Phi_t(X_1)$ ,  $\forall X_1$

Entretanto, além das características listadas acima, a medida de risco a ser utilizada em nosso modelo também deverá ser dinâmica e temporalmente consistente. Isto porque, conforme abordado por Rudloff et al [35], quando trabalhamos com modelos dinâmicos, especialmente quando tratamos de políticas ótimas, a utilização de uma medida coerente de risco na FO não é suficiente para garantir que a política escolhida seja ótima. É necessário que as medidas de risco utilizadas também tenham consistência temporal.

Vários autores já abordaram o conceito de consistência temporal através de medidas de risco dinâmicas [36–39]. Neste conceito, se um ativo  $X_1$  é mais arriscado que um ativo  $X_2$  em  $t+1$ , isso significa que  $X_1$  é mais arriscado que  $X_2$  em  $t$ . Isto é matematicamente definida como:

$$\Phi_{t+1}(X_1) \leq \Phi_{t+1}(X_2) \text{ então } \Phi_t(X_1) \leq \Phi_t(X_2), \forall X_1, X_2$$

Shapiro [40], por outro lado, defende que uma decisão possui consistência temporal se em cada estado de um sistema, decisões ótimas não dependem dos cenários que já sabemos que não irão ocorrer no futuro.

Shapiro et al [41] propuseram uma metodologia que possibilita a utilização de medidas de risco que possuem consistência temporal em modelos de programação estocástica com aversão a risco. Especificamente, utilizam uma formulação recursiva do CVaR que garante consistência temporal, desencorajando formulações inconsistentes que levam a políticas sub-ótimas. No modelo descrito neste trabalho, utilizaremos essa abordagem.

Assim, utilizaremos a combinação convexa entre CVaR e valor esperado como medida de valor na forma descrita na equação 3-29, podemos utilizar a combinação convexa entre o valor esperado e o CVaR, como medida de risco para o modelo desenvolvido neste capítulo uma vez que as duas medidas são medidas coerentes de risco.

$$\Phi_t \left[ Q_{t+1}(c_t, k_t, d_t, \psi_t, z_{t+1}) \right] = \quad (3-29)$$

$$(1 - \lambda) \mathbb{E}_t [Q_{t+1}(c_t, k_t, d_t, \psi_t, z_{t+1})] + \lambda \phi_t^\alpha [Q_{t+1}(c_t, k_t, d_t, \psi_t, z_{t+1})]$$

Onde  $\lambda$  é o coeficiente de aversão a risco.

A formulação acima permite que tenhamos uma medida dinâmica e temporalmente consistente de risco. Além disso, pela combinação convexa entre valor esperado e CVaR temos condições de avaliar o comportamento das políticas financeiras da empresa para diferentes graus de aversão a risco, a medida que varia-se o valor de  $\lambda$ .

É importante destacar também que este modelo, dado sua complexidade sofre da chamada “maldição da dimensionalidade” o que torna inviável a solução do problema por técnicas tradicionais. Por este motivo, adotaremos o PDDE como algoritmo de solução do problema. O apêndice A apresenta os conceitos básicos de programação estocástica.

## 4

### Estudo de Caso

Neste capítulo apresentamos um estudo de caso do modelo descrito no Capítulo 3. Primeiro são listadas as premissas e parâmetros utilizados na simulação. Em seguida apresentamos os resultados do caso base. Por fim, são realizadas análises de sensibilidade no intuito de verificar o impacto de alterações nos parâmetros definidos inicialmente.

#### 4.1

##### Premissas e Parâmetros

Utilizamos, de forma geral, os parâmetros sugeridos por Hennessy e Whited [3]. Os principais parâmetros do modelo são:

- Taxa livre de risco ( $r$ ): 2,5%
- Taxa de depreciação anual ( $\delta$ ): 14,55%
- Imposto sobre lucros corporativos ( $\tau$ ): 30%
- Desconto na venda de ativos ( $s$ ): 25%
- Custo para emissão de ações ( $\eta$ ) : 5%, baseado no estudo realizado por Butler et al [25].

Os estados iniciais (para  $t = 0$ ) das variáveis de estado são apresentados abaixo:

- Caixa Inicial ( $c_0$ ): \$0
- Ativo Inicial ( $k_0$ ): \$0
- Dívida Inicial ( $d_0$ ): \$0
- Dividendo Inicial ( $e_0$ ): \$0
- Crédito Fiscal Inicial ( $\psi_0$ ): \$0

Algumas outras premissas foram adotadas para tornar o estudo de casos mais próximo da realidade:

- Custo de Carrego: foi considerado que o caixa aplicado na empresa rende 1% a menos que a taxa livre de riscos

- Imposto sobre dividendos: foi considerado que há retenção de impostos em 12% sobre os dividendos pagos.
- Imposto sobre ganhos dos investidores: foi considerado que os ganhos em renda fixa dos investidores é tributado em 25 %. De maneira prática esta premissa apenas reduz em 25 % a taxa livre de risco.

### 4.1.1

#### Resultado Operacional

No modelo simplificado, descrevemos o resultado operacional  $h^{\pi_t}(k_t, z_t)$  como função do valor de  $k_t$  e de  $z_t$ . Abaixo a equação utilizada para o resultado operacional que passa a fazer parte do modelo.

$$f_{\pi}(k_t, z_t) = z_t k_t^{\Gamma} \tag{4-1}$$

Neste contexto,  $\Gamma$  é o fator de produtividade da empresa. Valores de  $\alpha < 1$  representam retornos decrescentes de escala e formam funções côncavas e crescentes. Assim, considerando que esta função descreve a receita da empresa, ou seja, seu valor é somado na FO, a função pode ser aproximada por uma função linear por partes construída por diversos segmentos de reta, obtidos pela derivada da função em diversos pontos. A figura 4.1 ilustra este conceito, para  $\Gamma = 0.2$ , sendo d1 a d5 as retas tangentes à função original nos pontos  $k=3, 5, 10, 20$  e  $30$ , respectivamente.

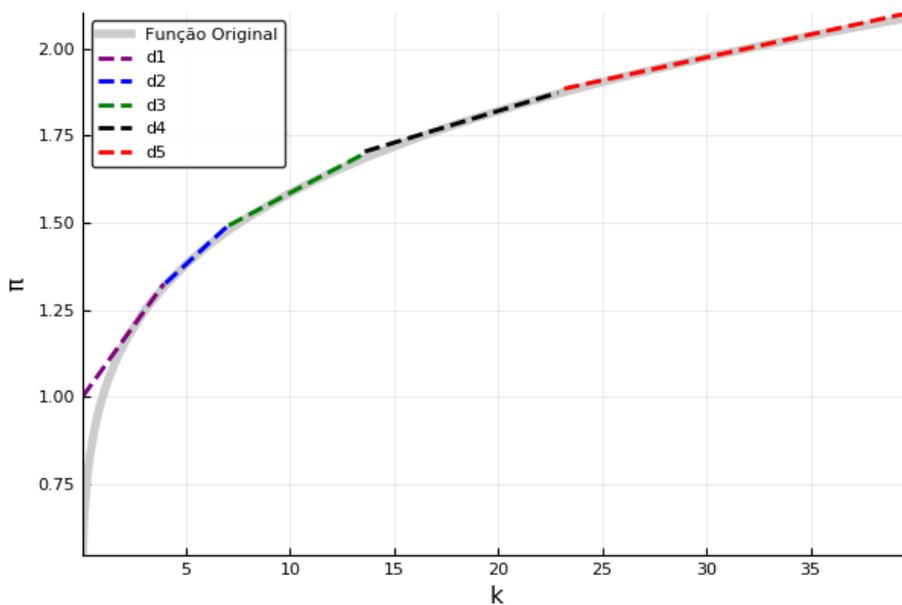


Figura 4.1: Dívida média para diferentes níveis de aversão a risco

Como pode ser visto na figura 4.1 para valores de  $\Gamma < 1$ , a aproximação linear é feita por cima da função original. Assim podemos substituir a equação 4-1 pelo conjunto de restrições abaixo:

$$\pi_t \leq z_t(A_l + B_l k_t), \quad l = 1, \dots, L$$

Seguindo Hennessy e Whited [3], utilizamos  $\Gamma = 0.689$  e a variável aleatória  $z$ , segue um processo AR(1) em log:

$$\ln(z_{t+1}) = \rho \ln(z_t) + \epsilon_{t+1}$$

Onde  $\epsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$ .

Conforme método apresentado por Tauchen [42], este processo pode ser descrito como uma cadeia de Markov de estado-discreto, sendo dependente apenas de  $\rho$ ,  $\sigma_\epsilon$  e da quantidade de estados que desejamos simular. Em nosso trabalho utilizamos os mesmos parâmetros descritos em [3],  $\rho=0,62$ ,  $\sigma_\epsilon=0,15$  e dividimos o espaço amostral em 20 estados.

#### 4.1.2 Dívida

Para definirmos os níveis de captação, tomamos como referência a metodologia desenvolvida pela agência Standard & Poor's [43]. O principal critério para a definição do *rating* de uma empresa é a relação Dívida Líquida(DL)/EBITDA (*Earnings Before Income Tax, Depreciation and Amortization* - Lucro Antes do Imposto de Renda, Depreciação e Amortização). A tabela 4.1, vincula cada nível de *rating* a um limite da relação Dívida Líquida/EBITDA. Também incluímos o *spread* em relação a taxa livre de riscos vinculado a cada nível de *rating*. Para estes *spread* utilizamos os valores fornecidos por Damodaram [44].

Rating	Média (DL/EBITDA)	Spread
AAA/AA	<1.5	0,7%
A	<2.0	1,1%
BBB	<3.0	1,6%
BB	<4.0	3,0%
B	<5.0	4,5%
Default	>5.0	15,0%

Tabela 4.1: *Rating* e *Spread* Para cada nível de Dívida Líquida(DL)/EBITDA

A tabela 4.1, é dividida em seis grupos de *rating*: AAA/AA, A, BBB, BB, B e *Default*. Estes *ratings* são função da relação DL/EBITDA. Por exemplo, para

que uma empresa tenha seu *rating* AAA/AA, sua relação DL/EBITDA precisa ser menor do que 1.5. Ou seja, ela precisa gerar caixa suficiente para pagar toda a dívida em 1,5 anos. O EBITDA em nosso modelo é representado pela variável  $\pi$  e a relação DL/EBITDA para cada nível de *rating* é dada pelo parâmetro  $\varphi_j$ . Assim,  $\Delta_{t,j}$ , o montante efetivamente captado a um determinado nível de *rating*  $j$  em um determinado estágio  $t$  deverá ser menor do que o produto de  $\pi_t$  e  $\varphi_j$ . Portanto, as equações 3-8 a 3-11 passam a ter o seguinte formato:

$$f_d(d_{t-1}) - \sum_{j=1}^6 \gamma_j \Delta_{t,j} = d_{t-1} \quad (4-2)$$

$$\Delta_{t,j} \leq \pi_t \varphi_j \quad \forall j = 1, \dots, 6$$

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{t,j} = d_{t-1}$$

A tabela 4.2 apresenta os intervalos que serão considerados na análise.

$\Delta_{t,j}$	$\varphi_j$	$\gamma_j$
$\Delta_{t,1}$	1.5	0,7%
$\Delta_{t,2}$	0.5	1,1%
$\Delta_{t,3}$	1	1,6%
$\Delta_{t,4}$	1	3,0%
$\Delta_{t,5}$	1	4,5%
$\Delta_{t,6}$	>	15,0%

Tabela 4.2:  $\Delta$ ,  $\varphi$  e  $\gamma$

## 4.2 Resultados

Nesta seção descreveremos os resultados da simulação do modelo descrito no Capítulo 3 e as premissas descritas na seção 4.1. Para a resolução e simulação dos modelos PDDE utilizamos o *Framework* desenvolvido por Dowson e Kapelevich [45] para a linguagem de programação Julia. O *solver* utilizado foi o Gurobi, versão 7.5.2. Para cada modelo as respectivas políticas ótimas foram simulados 1000 cenários. O problema do caso base para  $\lambda = 0.5$  foi resolvido em 187 segundos utilizando um MacBook Pro com processador Intel Core i7 de 2.7 Ghz e 16 GB de memória. O modelo foi simulado em 50 estágios nas instâncias padrão do *Framework* desenvolvido por Dowson e Kapelevich [45].

Em relação aos resultados obtidos, é importante destacar que os primeiros estágios refletem o início da empresa sendo que a mesma entra em regime a partir do décimo estágio, aproximadamente. Outro ponto importante de nota é o *end effect*. Uma vez que os ativos da empresa serão vendidos ao final de 50 períodos, a partir de um determinado momento, o montante ótimo de capital (ativos) decai, afetando todas as demais variáveis.

As figuras 4.2 - 4.5 apresentam os resultados médios, o P10 e o P90 das simulações das políticas ótimas por estágio para diferentes valores de aversão a risco, aqui parametrizados por  $\lambda$ , no formato definido na equação 3-29. Estes resultados são importantes para entendermos o impacto da aversão a risco na política ótima definida para a empresa.

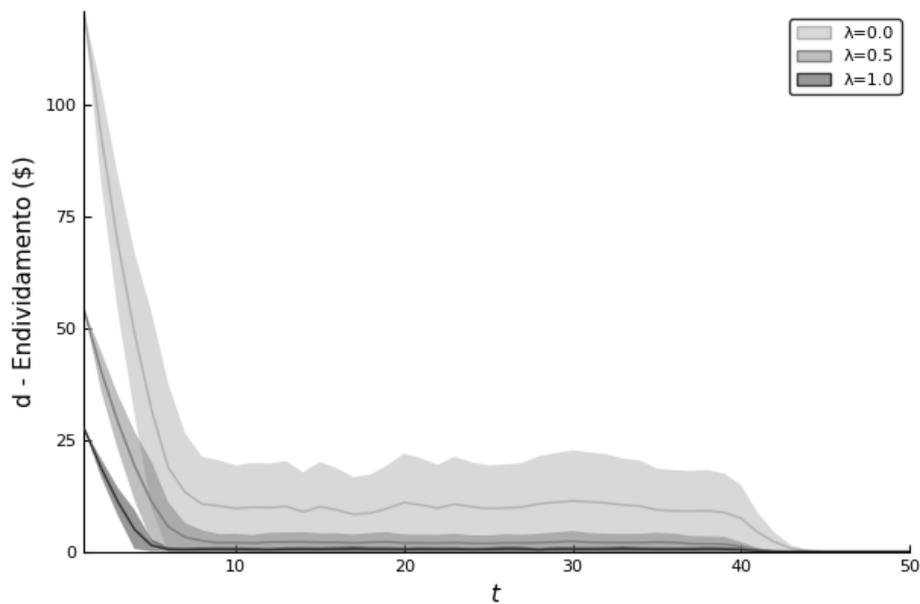


Figura 4.2: Dívida para diferentes níveis de aversão a risco

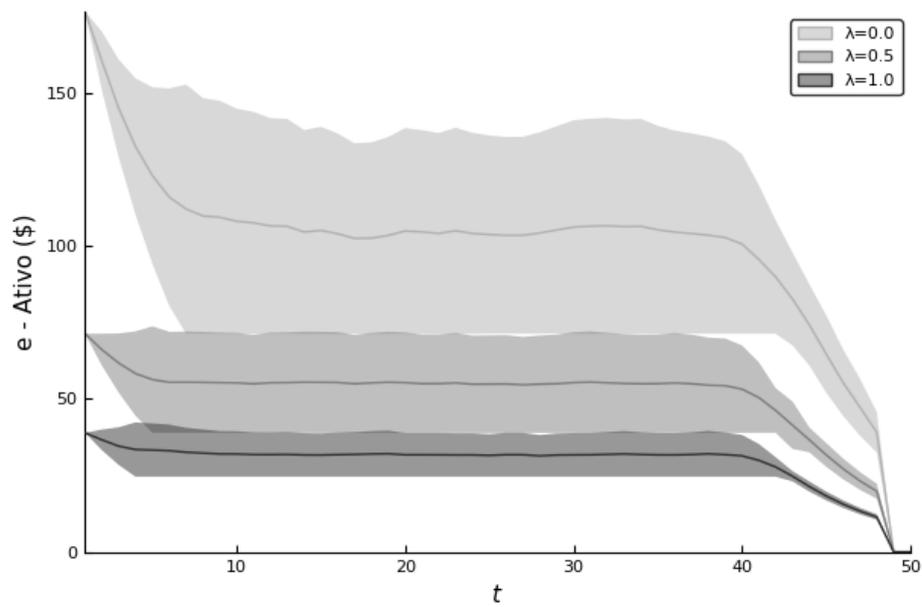


Figura 4.3: Ativo para diferentes níveis de aversão a risco

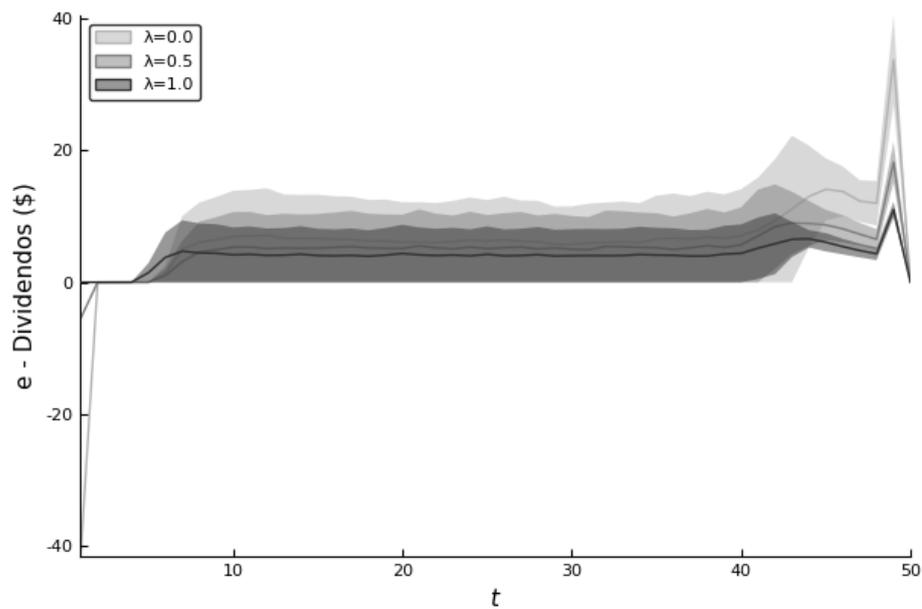


Figura 4.4: Dividendos para diferentes níveis de aversão a risco

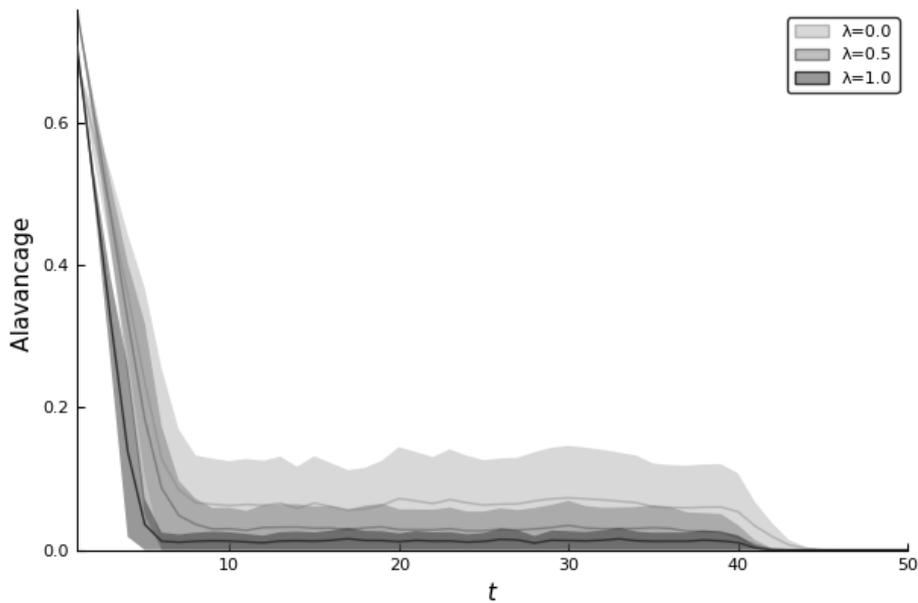


Figura 4.5: Alavancagem para diferentes níveis de aversão a risco

A partir da análise dos gráficos acima é possível perceber que, na média, quanto maior a aversão a risco, menor a captação de recursos por dívidas, menor o nível de investimento e, conseqüentemente, menor o nível de dividendos e de alavancagem. Também é possível verificar que, na média, há estabilidade nestes resultados.

Um ponto interessante é que, mesmo sendo possível para a empresa financiar todas as suas atividades por meio de emissão de capital próprio, em geral, é ótimo que a empresa financie parte de suas atividades por meio de dívidas, mantendo alguma alavancagem por quase todo o período analisado.

Os valores médios apresentados acima, permitem a verificação do efeito de considerarmos aversão a risco em MITD. Os resultados encontrados para o caso neutro a risco ( $\lambda = 0$ ) são coerentes com outros estudos [3, 18] que adotam premissas semelhantes às adotadas neste trabalho. Entretanto a alavancagem média, para níveis altos de aversão a risco é próxima de zero, conforme Figura 4.5. Este resultado pode ser uma explicação para fatos estilizados levantados em [46] e ajudam a ilustrar porque algumas firmas possuem níveis de alavancagem inferiores ao que seria esperado pelos modelos de estrutura de capital tradicionais.

A equação 4-3 apresenta a relação entre a função de valor futuro do modelo analisado ( $Q_0$ ), o valor esperado do pagamento ótimo de dividendos ( $\mathbb{E}[e_t^*]$ ) e o custo de capital próprio para a empresa ( $R_e$ ).

$$Q_0 = \sum_{t=1}^T \left( \frac{\mathbb{E}[e_t^*]}{(1 + R_e)^t} \right) \quad (4-3)$$

Assim, uma vez que  $Q_0$  e  $\mathbb{E}[e_t^*]$  são conhecidos, utilizando um procedimento de busca não linear, podemos calcular o custo de capital próprio da empresa ( $R_e$ ). A figura 4.6 apresenta os resultados para diferentes valores de  $\lambda$ . Podemos verificar que para  $\lambda = 0$ , o valor de  $R_e$  é exatamente a taxa livre de riscos ( $r$ ) líquida de impostos.

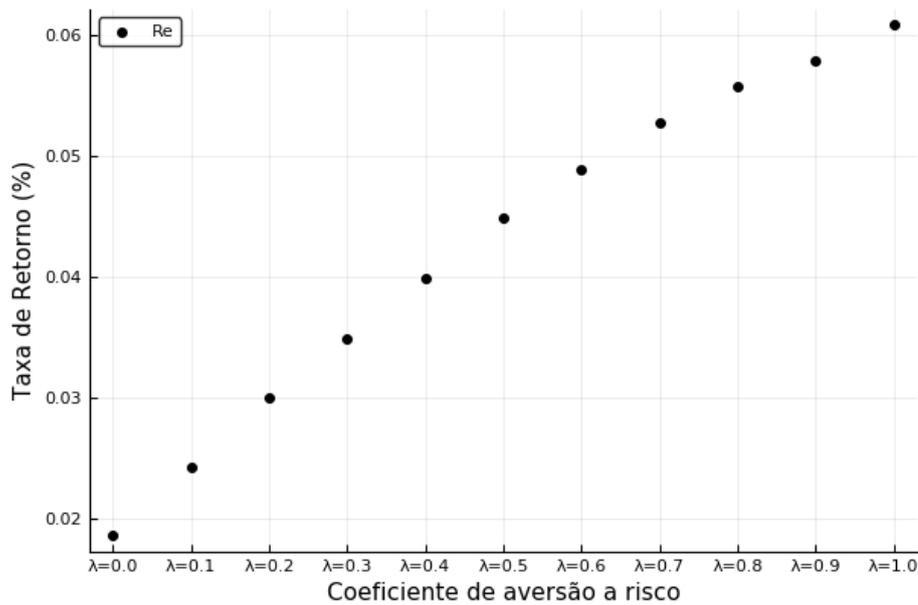


Figura 4.6: Custo de capital próprio em função do grau de aversão a risco

O modelo descrito neste trabalho também nos permite verificar a relação risco retorno entre as diferentes políticas financeiras para os diferentes níveis de aversão a risco. Para este fim adotaremos o seguinte procedimento:

- i simulação de 1000 cenários, aplicados para políticas com  $\lambda$  variando em 0 e 1.0 ;
- ii cálculo do valor presente dos dividendos para cada cenário em cada política, utilizando como taxa de desconto a taxa livre de risco ( $r$ ) ;
- iii cálculo da média e desvio padrão dos valores presentes mencionados no item acima;

A partir do procedimento acima é possível apresentar uma "fronteira eficiente" para diferentes políticas de investimento, considerando diferentes

níveis de aversão a risco. A Figura 4.7 apresenta estes resultados. Conforme podemos reparar, as políticas formuladas para alguns valores de  $\lambda$  não são eficientes. Isto pode ser explicado pelo fato das políticas terem sido formuladas para maximização da combinação convexa entre valor esperado e CVAR e não para a minimização do desvio padrão do valor da empresa.

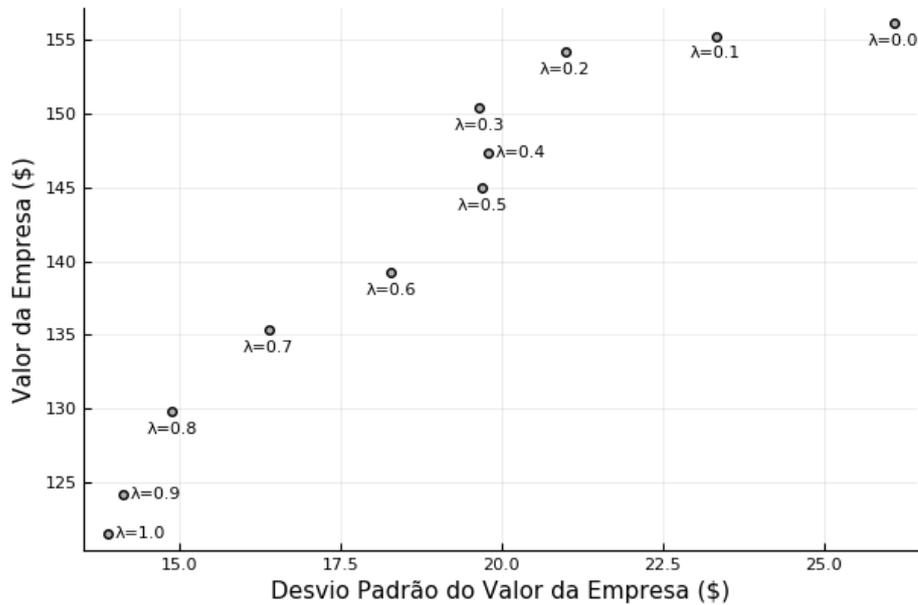


Figura 4.7: Fronteira eficiente para políticas financeiras

Os efeitos da inclusão de medidas de risco que levam em consideração a aversão a risco, apesar de fornecerem intuições importantes sobre o funcionamento dos modelos não são suficientes para entendermos as políticas ótimas para a firma em nosso estudo de caso. Dessa forma, é importante buscar uma melhor intuição sobre o que define a política ótima. As Figuras 4.8, 4.9, 4.10 apresentam, para diferentes valores de  $\lambda$ , o comportamento das principais variáveis do modelo entre os estágios 20 e 30 para três cenários selecionados. Para definirmos a cor de cada marcador dividimos os 20 estados da cadeia de Markov do nosso modelo em quatro grupos. A cor verde representa os estados "altos", ou seja aqueles estados nos quais a variável  $z_t$  possui os maiores valores, a cor amarelo representa os estados "médio altos", o laranja os estados "médio baixos" e o vermelho os estados "baixos".

Pelos gráficos da figura 4.8 é possível verificar que, de forma geral, a empresa emite dívida em cenários altos, o que está associado a investimentos (aumento do ativo). Também é possível verificar que não há pagamento de dividendos enquanto a empresa possui dívidas e que o grau de aversão a risco influi diretamente na política da empresa.

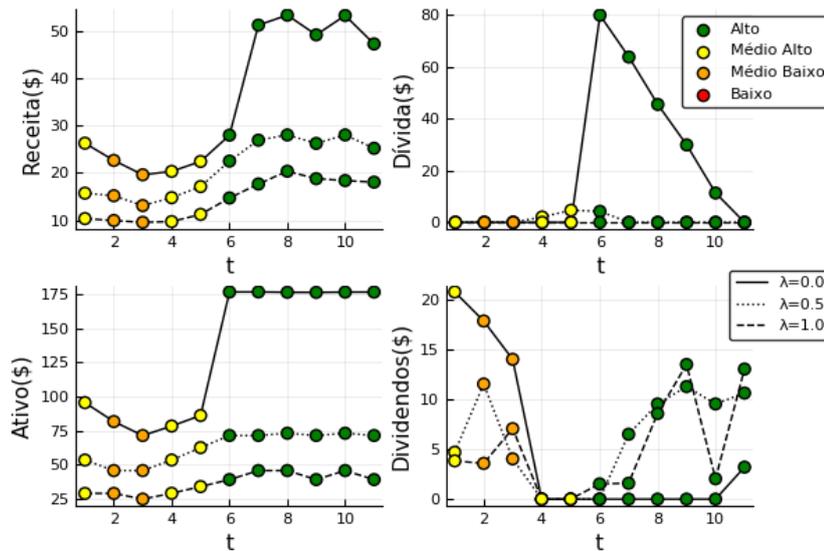


Figura 4.8: Principais variáveis do modelo para o cenário de alta

Quando o cenário é de baixa, como o apresentado na figura 4.9 verificamos que os níveis de investimentos e dívidas se mantêm baixos. Eventualmente, em cenários médios a empresa pode fazer uma captação no intuito de aumentar o patamar de investimentos.

Já a figura 4.10, apresenta um cenário de retomada, no qual, após alguns períodos de baixa a empresa, rapidamente, tem uma melhora de receita. Neste cenário, independente da aversão a riscos, haverá alguma captação para subir o nível de investimentos e aproveitar a melhora de cenário.

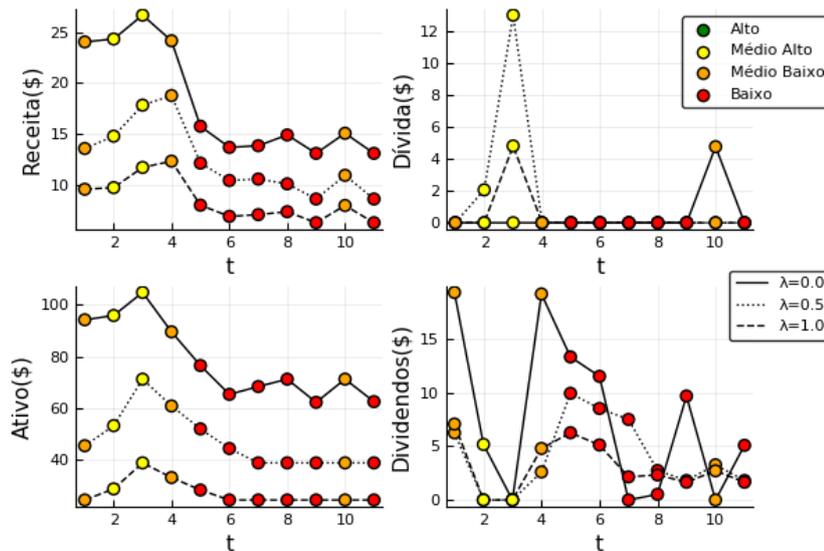


Figura 4.9: Principais variáveis do modelo para o cenário de baixa

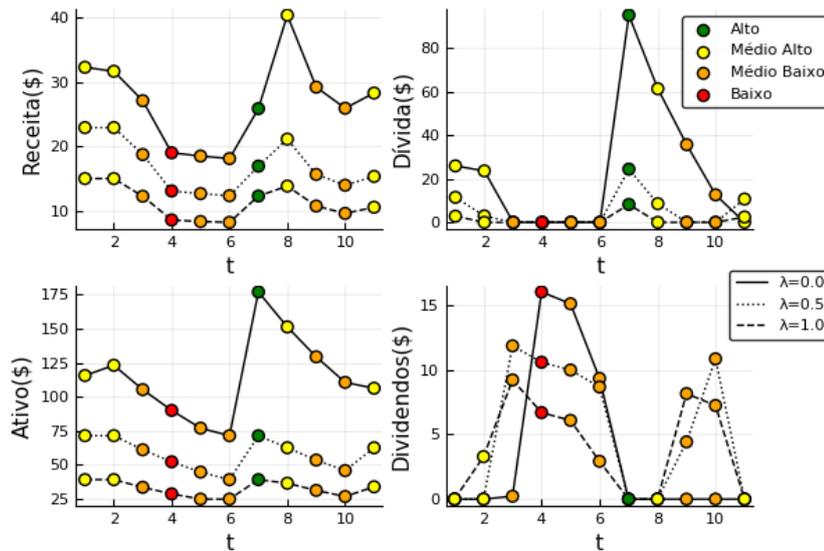


Figura 4.10: Principais variáveis do modelo para o cenário de retomada

Ainda no intuito de entender o funcionamento da política ótima, apresentamos as Figuras 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14, nas quais buscamos verificar possíveis relações entre as variáveis do modelo. Na Figura 4.11 pretendemos analisar se uma receita mais alta da empresa acarreta em maior pagamento de dividendos. A figura 4.12 mostra a relação entre os dividendos e a aquisição de novas dívidas na tentativa de verificar se o modelo, em alguma situação aumenta a alavancagem da empresa para retornar recursos para o acionista. A figura 4.13 tem como objetivo avaliar se a emissão de dívidas está relacionada a necessidade da empresa investir e a figura 4.14 tenta explicar o que levaria a empresa a aumentar o seu nível de ativos. As análises abaixo foram feitas em um único estágio mas representam o comportamento das variáveis para todo o período que o modelo está em regime.

Na Figura 4.11 temos 1000 cenários de Receita (eixo x) e Dividendos (eixo y) simulados para o estágio 20. A cor do marcador representa o nível de investimento para aquele cenário. Assim, marcadores verdes são cenários nos quais os investimentos superam o valor da depreciação do ativo, marcadores laranja são cenários nos quais o valor do investimento está entre 0 e o valor da depreciação, marcadores amarelos representam os cenários em que não houve investimentos e marcadores vermelhos cenários em que houve venda de ativos.

Conforme pode ser observado, quando não ocorrem investimentos, há uma relação positiva entre os dividendos pagos e a receita da empresa. Na maioria dos cenários em que o investimento é maior do que a depreciação, não há pagamento de dividendos.

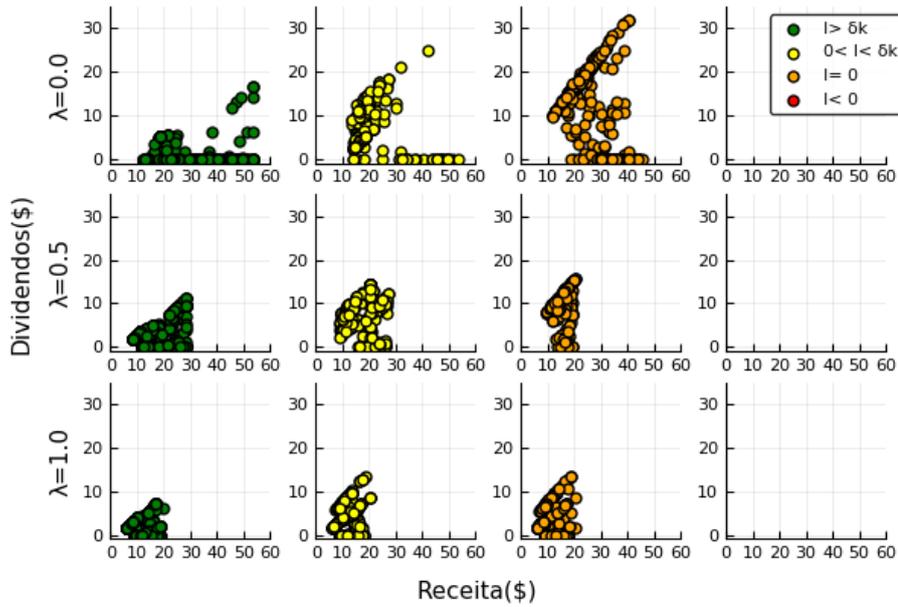


Figura 4.11: Receita e Dividendos

Na Figura 4.12 temos 1000 cenários de Dividendos (eixo x) e Dívidas (eixo y) simulados para o estágio 20. Como pode ser verificado, não há pagamento de dividendos em cenários nos quais há dívidas. Neste caso há uma política clara: a empresa não paga dividendos enquanto tiver dívidas. Como sensibilidade, na seção 4.3.2 verificaremos o comportamento do modelo a diferentes políticas de dividendos.

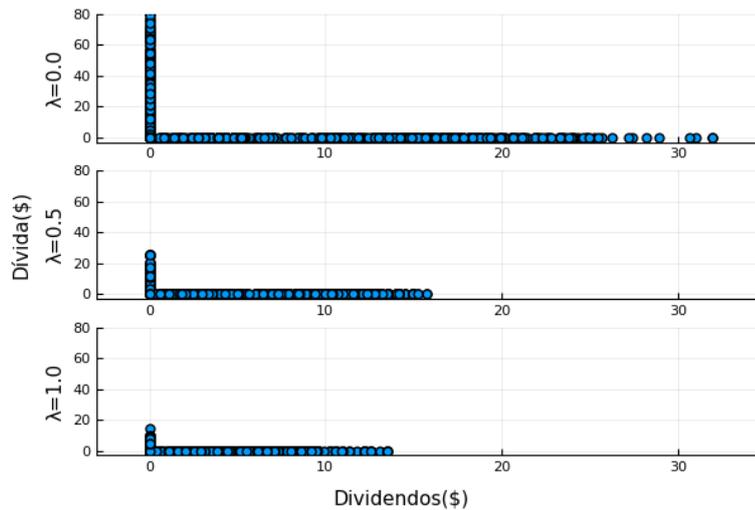


Figura 4.12: Dividendos e Dívidas

Na Figura 4.13 temos 1000 cenários de Investimentos (eixo x) e Dívidas (eixo y) simulados para o estágio 20. A cor do marcador representa se a empresa já tinha dívida no período anterior ou não, sendo que o marcador azul

representa que a empresa não tinha dívidas no período anterior e o marcador vermelho representa que a empresa tinha dívida no período anterior. Pelo gráfico fica claro que a empresa passa a captar novas dívidas a partir de algum patamar de investimentos (para  $\lambda = 0.0$ , por exemplo, um pouco antes de \$25).

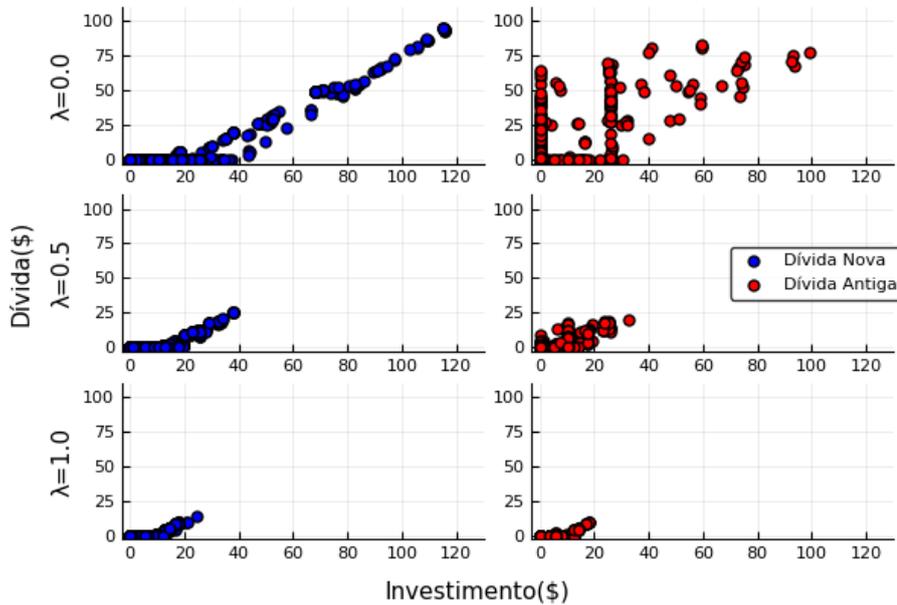


Figura 4.13: Investimentos e Dívidas

As Figuras 4.11 e 4.13 apontam o nível de investimento como um fator determinante tanto para a definição do pagamento de dividendos quanto para a política de captação de dívidas. Entretanto, não é possível precisar o que define a política de investimentos da empresa.

Na Figura 4.14 temos 1000 cenários da função de valor futuro (eixo x) e investimentos (eixo y) simulados para o estágio 20. A cor do marcador representa o valor do ativo. Assim, marcadores verdes são cenários nos quais o ativo está no primeiro quartil (maiores valores), marcadores laranja são cenários nos quais o valor do ativo está no segundo quartil, marcadores amarelos representam os cenários nos quais os ativos estão no terceiro quartil e marcadores vermelhos cenários nos quais os ativos estão no quarto quartil. Conforme pode ser observado, a relação entre investimentos e a função de valor futuro é positiva.

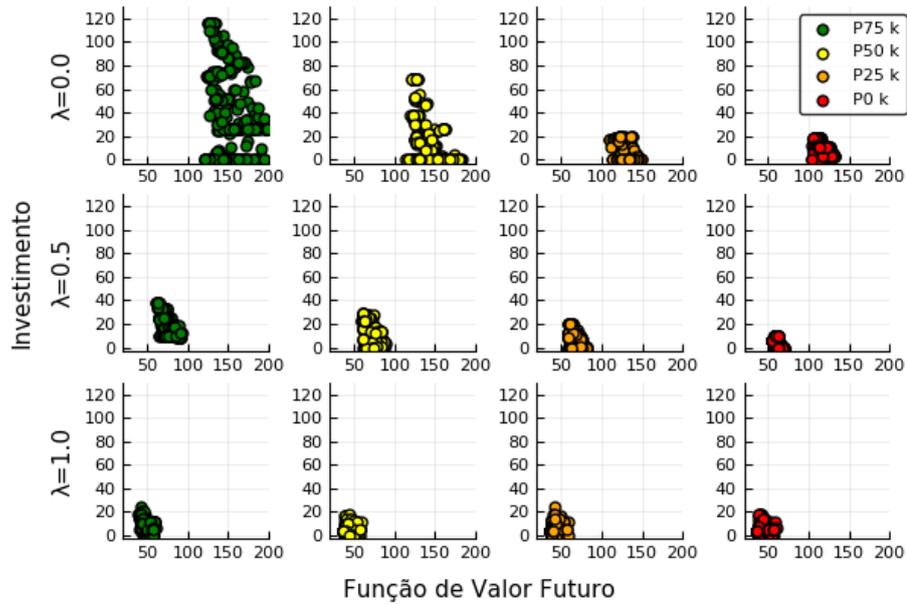


Figura 4.14: Função de Valor Futuro e Investimentos

### 4.3 Sensibilidades

Esta seção está dividida em três partes: (i) sensibilidade do modelo a variações em seus principais parâmetros; (ii) avaliação de políticas de dividendos rígidas, em que verificamos os efeitos de uma política de dividendos regularizada ao longo do tempo e (iii) avaliação de políticas de alavancagem fixa, em que verificamos os efeitos de uma política rígida da relação entre dívida e capital, em diferentes níveis.

#### 4.3.1 Sensibilidade aos principais parâmetros do Modelo

Nesta seção apresentaremos como as principais variáveis se comportam quando alteramos os principais parâmetros do modelo. Os valores de  $d$ ,  $k$  e  $d/k$  são apresentados em seus valores médios.

A tabela 4.3 apresenta os valores de  $d$ ,  $k$  e  $d/k$  para diferentes níveis de  $\delta$ . A taxa de depreciação afeta diretamente o nível de investimentos, uma vez que o custo de reposição é menor tornando o ativo mais rentável. Entretanto, para valores menores de  $\delta$ , a alavancagem é menor. Isso ocorre uma vez que o ativo deprecia mais devagar, assim, menos recursos são necessários para compensar o custo de depreciação.

$\lambda$	$\delta = 0,05$			$\delta = 0,15$			$\delta = 0,25$		
	d	k	d/k	d	k	d/k	d	k	d/k
0,0	62,2	1,7m	0,03	11,8	88,5	0,09	2,5	20,2	0,09
0,2	26,2	702,0	0,03	5,9	63,6	0,08	1,2	15,8	0,06
0,4	18,2	609,3	0,03	5,0	51,6	0,08	0,8	12,8	0,05
0,6	22,3	467,1	0,04	3,4	41,3	0,06	0,4	10,2	0,03
0,8	10,5	353,8	0,03	2,1	33,1	0,05	0,1	8,2	0,01
1,0	8,8	321,3	0,02	1,4	27,0	0,04	0,1	7,4	0,00

Tabela 4.3: Dívida, ativo e alavancagem em função da depreciação

A tabela 4.4 apresenta os valores de  $d$ ,  $k$  e  $d/k$  para diferentes níveis de  $r_f$ . À medida que a taxa livre de risco aumenta, o investimento cai, em função do aumento dos custos da empresa (no caso, custo financeiro). Por outro lado, a alavancagem aumenta uma vez que, proporcionalmente, o *spread* de captação cai.

$\lambda$	$r_f = 0,5\%$			$r_f = 2,5\%$			$r_f = 4,5\%$		
	d	k	d/k	d	k	d/k	d	k	d/k
0,00	9,6	151,4	0,06	14,7	99,5	0,10	7,4	61,2	0,10
0,25	12,7	108,6	0,08	5,7	64,2	0,08	5,4	46,6	0,09
0,50	4,0	71,9	0,04	4,5	50,3	0,07	2,4	33,7	0,06
0,75	4,1	57,9	0,06	2,4	38,1	0,05	1,5	26,9	0,04
1,00	2,3	42,5	0,04	1,6	28,9	0,04	0,7	20,3	0,03

Tabela 4.4: Dívida, ativo e alavancagem em função de  $r_f$ 

A tabela 4.5 apresenta os valores de  $d$ ,  $k$  e  $d/k$  para diferentes níveis de  $\tau$ . A alíquota de imposto de renda afeta a política de investimentos e de endividamento. Se por um lado, a medida que a alíquota de imposto de renda sobe, os ativos se tornam menos rentáveis, por outro há mais vantagem na emissão de dívidas, em função do *Tax shield* (abatimento fiscal dos juros). Uma alíquota de imposto de renda de 45 % leva a uma alavancagem de aproximadamente 0,4.

A tabela 4.6 apresenta os valores de  $d$ ,  $k$  e  $d/k$  para diferentes níveis de produtividade da empresa ( $\Gamma$ ). Conforme pode ser verificado, apesar da política de investimentos variar substancialmente com o aumento de  $\Gamma$ , a alavancagem da empresa não se altera muito.

$\lambda$	$\tau = 0\%$			$\tau = 15\%$			$\tau = 30\%$			$\tau = 45\%$		
	d	k	d/k	d	k	d/k	d	k	d/k	d	k	d/k
0,00	7,3	124,1	0,04	8,8	111,9	0,05	15,3	100,0	0,10	37,8	83,9	0,40
0,25	2,3	75,0	0,02	2,8	69,9	0,03	5,8	64,0	0,08	25,7	58,0	0,41
0,50	1,7	58,3	0,02	2,7	55,0	0,04	4,6	50,4	0,07	18,7	45,6	0,38
0,75	1,1	44,0	0,02	1,6	41,2	0,03	2,4	38,1	0,05	13,8	33,4	0,38
1,00	0,9	34,6	0,02	1,2	31,7	0,03	1,6	28,9	0,04	11,1	26,0	0,40

Tabela 4.5: Dívida, ativo e alavancagem em função da Alíquota de Imposto de Renda

$\lambda$	$\alpha = 0,589$			$\Gamma = 0,689$			$\Gamma = 0,789$			$\Gamma = 0,889$		
	d	k	d/k	d	k	d/k	d	k	d/k	d	k	d/k
0,0	0,6	21,5	0,03	8,4	86,6	0,07	194,8	1,9m	0,08	431,7m	2,54M	0,1
0,2	0,6	21,2	0,03	7,2	66,7	0,08	218,2	1,3m	0,11	130,2m	1,69M	0,06
0,4	0,6	20,7	0,03	6,1	46,8	0,1	75,8	685,2	0,08	177,2m	1,18M	0,11
0,6	0,9	19,1	0,04	2,4	30,4	0,05	47,1	502,3	0,07	33,9m	262,9m	0,08
0,8	1,0	13,5	0,05	0,8	24,1	0,03	33,3	354,2	0,07	9,6m	187,m	0,04
1,0	0,1	8,0	0,01	0,5	22,5	0,02	18,1	253,8	0,05	4,8m	167,9m	0,02

Tabela 4.6: Dívida, ativo e alavancagem em função de  $\Gamma$ 

### 4.3.2 Políticas de Dividendos Rígida

Para esta sensibilidade, tomamos como parâmetro  $\lambda = 0.5$ . A ideia é verificar como o modelo se comporta para diferentes políticas de dividendos. A primeira política (Política 1) é aquela avaliada no caso base, ou seja, não há restrições impostas para a distribuição de dividendos. A segunda política (Política 2) assegura que os dividendos em  $t$  sejam maiores ou iguais a 90% dos dividendos de  $t - 1$ , assim é possível reduzir gradativamente os níveis de dividendos.

Já a terceira política (Política 3), estipula aos dividendos em  $t$  sejam maiores ou iguais que os dividendos de  $t - 1$ , ou seja, devem ser constantes ou crescentes, entretanto, esta política foi implementada de maneira escalonada. No estágio  $t = 10$  os dividendos em  $t$  deveriam ser maiores 20% dos dividendos de  $t = 9$ , em  $t = 11$ , maiores ou iguais que 40% dos dividendos de  $t = 10$  e assim por diante até o período  $t = 14$ , a partir do qual deverá ser maior ou igual que 100% dos dividendos de  $t = 13$ .

A última política de dividendos estudada (Política 4), estipula que os dividendos do estágio  $t$  deverão ser maiores ou iguais que 25% do resultado operacional no estágio  $t$  ( $\pi_t$ ). O modelo foi simulado considerando as restrições 4-4, 4-5 e 4-6, entre os estágios 10 e 40, para as políticas 2, 3 e 4, respectivamente.

$$e_t \geq 0,9e_{t-1} \tag{4-4}$$

$$e_t \geq \min\{1, (t - 9)0,2\}e_{t-1} \tag{4-5}$$

$$e_t \geq 0,25\pi_t \tag{4-6}$$

A figura 4.15 apresenta o impacto das diferentes políticas de dividendos. Conforme pode ser visto, as políticas de dividendos 2, 3 e 4 levam a empresa a aumentar sua alavancagem. No caso da política 3 há mudanças, inclusive, na política de investimentos. De forma geral, caso a empresa adote a política 3, é ótimo que, antes da entrada em vigor desta política (a partir do estágio 10), a empresa faça a emissão de uma dívida para pagamento de dividendos. Após a entrada em vigor da política, os dividendos crescem, em média, ao longo dos anos.

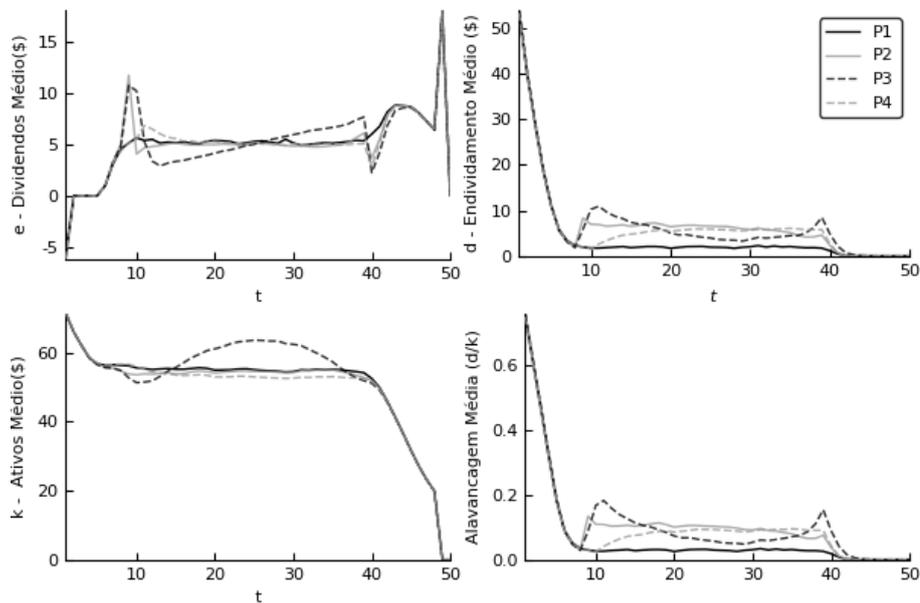


Figura 4.15: Políticas de Dividendos

Para verificar o impacto que estas políticas de dividendos têm sobre o valor da empresa adotamos o seguinte procedimento:

- i Cálculo do  $R_e$ , para cada política utilizando a equação 4-3;

- ii simulação de 1000 cenários, aplicados a cada uma das três políticas ;
- iii cálculo do valor presente dos dividendos para cada cenário em cada política, utilizando como taxa de desconto o  $R_e$  do item (i), acima;
- iv para cada política, foi feito o cálculo de um estimador de média amostral dos dividendos descontados;
- v cálculo do intervalo de confiança de 95% para a média da diferença entre o valor da empresa para o acionista (valor de mercado do capital próprio) na política irrestrita (Política 1) e o valor da empresa na política restrita (Políticas 2, 3 e 4).

A tabela 4.7 apresenta o resultado do procedimento acima em valor absoluto e relativo para a política 2 (P2 - dividendos maiores ou iguais a 90% dos dividendos do período anterior, para política 3 (P3 - dividendos maiores ou iguais aos dividendos do período anterior) e para a política 4 (P4 - dividendos maiores ou iguais que 25% do resultado operacional).

Alavancagem (d/k)	Intervalo de Confiança	Intervalo de Confiança (%)
P2	[0,04 ; 0,08 ]	[0,06% ; 0,11% ]
P3	[0,04 ; 0,10 ]	[0,05% ; 0,13% ]
P4	[0,08 ; 0,11 ]	[0,11% ; 0,15% ]

Valor da Empresa no Caso Base (P1) : 73,92

Tabela 4.7: Intervalo de confiança para políticas de dividendos

Assim, apesar de haver diferenças significativas nas políticas ótimas de investimento e alavancagem para cada tipo de política, não há uma diferença relevante no valor da empresa para as diferentes políticas de dividendos. Este resultado difere, em parte, do que é proposto na teoria clássica de estrutura de capital e políticas de dividendos estabelecida por Modigliani e Miller [5, 47]. Se por um lado a política de dividendos não afeta o valor da empresa (conforme proposto por Modigliani e Miller) ela afeta a política de investimentos da empresa <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Em [47], Miller e Modigliani defendem a irrelevância de política de dividendos de uma empresa. Neste trabalho concluímos que embora não afete o valor da empresa, a política de dividendos não pode ser considerada irrelevante uma vez que afeta a política de investimentos da empresa.

### 4.3.3 Políticas de Alavancagem Rígidas

Para esta sensibilidade, tomaremos como parâmetro  $\lambda = 0.5$ . Neste caso, simulamos modelos nos quais a restrição de alavancagem mínima ( $\frac{d_t}{k_t}$ ) varia entre 0% e 100%. Também é simulado um caso no qual não há a possibilidade de captar dívida ( $d_t = 0$ ). A ideia é verificar como o modelo se comporta na presença de uma restrição de alavancagem mínima. A sensibilidade foi feita considerando a restrição de alavancagem até o estágio 40. Importante destacar que  $k$  é o valor de livro dos ativos, ou seja, esta restrição não leva em consideração o valor de mercado da empresa.

A figura 4.16 mostra que a dívida é proporcional à restrição de alavancagem, ou seja, quanto maior a necessidade de alavancagem, maior a dívida. Por outro lado, o valor dos ativos diminui, à medida que a necessidade de alavancagem aumenta. Este resultado, contraria o que foi proposto em [5] uma vez que, no caso simulado, a política financeira da empresa (relação dívida-capital próprio) influencia as decisões de investimento.

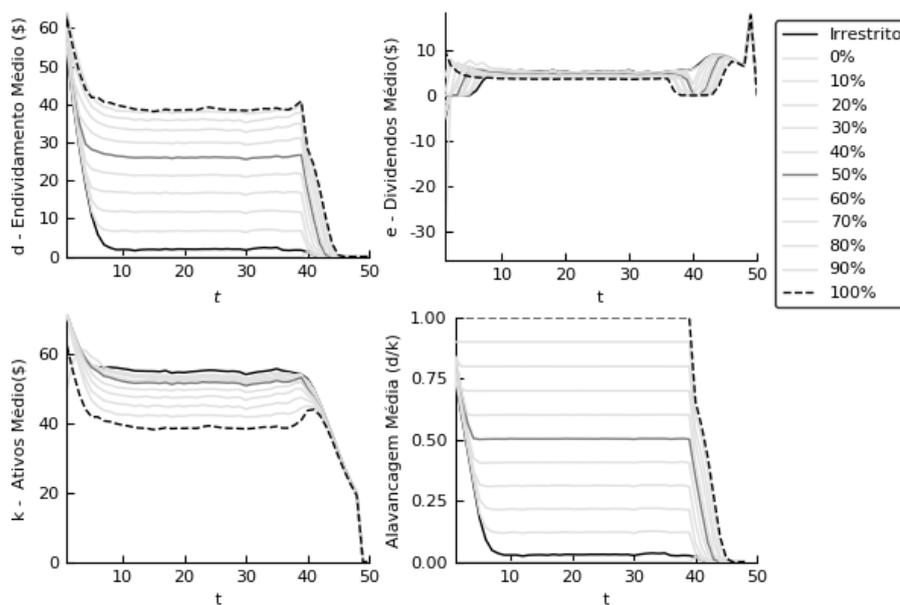


Figura 4.16: Dívida Média para diferentes níveis de alavancagem

A figura 4.16, também apresenta a evolução dos dividendos para as diferentes políticas de alavancagem. Como pode ser visto, a política de alavancagem máxima propõe, em média, dividendos maiores no início e menores ao longo da vida da empresa.

Para verificar o impacto que estas políticas de alavancagem rígidas têm sobre o valor da empresa adotamos o seguinte procedimento:

- i Cálculo do  $R_e$ , para cada política utilizando a equação 4-3;
- ii simulação de 1000 cenários, aplicados a cada uma das políticas de alavancagem;
- iii cálculo do valor presente dos dividendos para cada cenário em cada política, utilizando como taxa de desconto o  $R_e$  do item (i), acima;
- iv para cada política, foi feito o cálculo de um estimador de média amostral dos dividendos descontados;
- v cálculo do intervalo de confiança de 95% para a média da diferença entre o valor da empresa para o acionista (valor de mercado do capital próprio) na política irrestrita (sem restrição de alavancagem) e o valor da empresa na política restrita (com restrição de alavancagem).

A tabela 4.8 apresenta o intervalo de confiança mencionado no parágrafo acima em valor absoluto e relativo.

Alavancagem (d/k)	Intervalo de Confiança	Intervalo de Confiança (%)
= 0%	[1,37 ; 1,47 ]	[1,85% ; 1,99% ]
≥ 10%	[0,26 ; 0,29 ]	[0,35% ; 0,39% ]
≥ 20%	[0,55 ; 0,59 ]	[0,74% ; 0,8% ]
≥ 30%	[0,85 ; 0,92 ]	[1,16% ; 1,24% ]
≥ 40%	[1,28 ; 1,37 ]	[1,73% ; 1,85% ]
≥ 50%	[1,92 ; 2,04 ]	[2,59% ; 2,76% ]
≥ 60%	[2,72 ; 2,88 ]	[3,68% ; 3,90% ]
≥ 70%	[3,65 ; 3,86 ]	[4,94% ; 5,22% ]
≥ 80%	[4,92 ; 5,18 ]	[6,66% ; 7,00% ]
≥ 90%	[6,43 ; 6,75 ]	[8,70% ; 9,13% ]
≥ 100%	[8,11 ; 8,50 ]	[10,97% ; 11,50% ]

Valor da Empresa no Caso Base : 73,92

Tabela 4.8: Intervalo de confiança para políticas de alavancagem

A partir da tabela 4.8 e da figura 4.16, podemos concluir que uma política de alavancagem rígida impacta a política de investimentos, a política de dividendos e o próprio valor para o acionista. De maneira geral, quanto maior a alavancagem, menor o valor da empresa para o acionista.

Os resultados da tabela 4.8 também nos permitem calcular o valor esperado do valor de mercado do capital próprio da empresa ( $E$ ) para diferentes

valores de alavancagem mínima. A figura 4.16 nos permite verificar que, no período em regime, a dívida da empresa é, em média, constante nos permitindo calcular o valor de mercado da dívida da empresa ( $D$ ). Além disso, uma vez que as dívidas modeladas são válidas por apenas um período, podemos garantir que as mesmas estão a valor de mercado e sua taxa de juros ( $R_d$ ) pode ser calculada simplesmente dividindo  $f_t$  (valor pago) por  $d_{t-1}$  (valor captado).

Com as informações mencionadas no parágrafo acima, é possível calcular o custo médio ponderado de capital da empresa ( $R_a$ ) a partir da equação abaixo, proposta por Modigliani e Miller [5]:

$$R_a = (E/V)R_e + (D/V)R_d(1 - \tau) \quad (4-7)$$

A partir da equação 4-7 e dos valores de  $E$  e  $D$  e  $V^2$  mencionados acima, podemos construir o gráfico a seguir utilizando dados simulados e a metodologia e parâmetros estabelecidos neste trabalho.

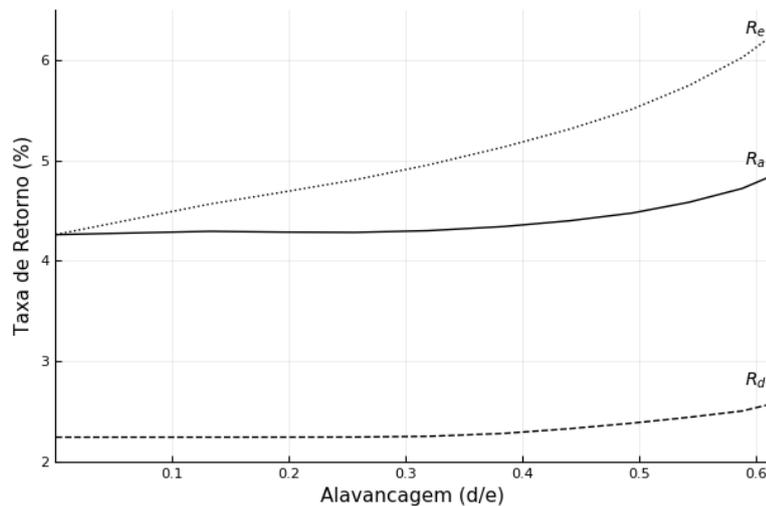


Figura 4.17:  $R_a$ ,  $R_e$  e  $R_d$  em função da alavancagem (d/e)

Na figura 4.17 a alavancagem apresentada no eixo  $x$  foi calculada da forma proposta por Modigliani e Miller [5], ou seja, considera os valores de mercado do capital próprio e da dívida. Este resultado só é possível pela utilização da modelagem descrita na equação 4-2, que permite custos crescentes de endividamento à medida que a alavancagem sobe.

<sup>2</sup>  $V = E + D$

## 5 Conclusão

O objetivo desta dissertação foi contribuir com a literatura de Finanças Corporativas utilizando técnicas avançadas de programação estocástica no intuito de aproximar os modelos teóricos da forma como os agentes financeiros, de fato, tomam decisões.

Neste trabalho, foi proposto um modelo de programação dinâmica estocástica, para a determinação da política ótima de investimentos e financiamentos considerando acionistas avessos a risco que enfrentam incerteza na receita sob o capital investido e custos marginais de financiamentos não-decrescentes com o nível de alavancagem da empresa.

O estudo de caso permitiu verificar como a aversão a risco dos agentes financeiros afeta as políticas de investimento e financiamento. Foi possível verificar também que, em contextos dinâmicos, decisões financeiras impactam nas decisões de investimento.

As sensibilidades aos principais parâmetros do modelo mostraram que a alíquota de imposto de renda é um fator relevante na definição da política de alavancagem e a taxa de depreciação é determinante na definição da política de investimentos. Também foi possível verificar, para políticas fixas de pagamento de dividendos, como as políticas de investimento e endividamento são alteradas sem que a empresa perca valor.

Por fim, conseguimos verificar como a empresa se comporta à medida que a alavancagem sobe em um contexto de taxas de captações crescentes com o nível de alavancagem, sendo possível, inclusive, verificar as proposições teóricas levantadas por Modigliani e Miller. Esta análise não é possível de ser reproduzida pelos modelos tradicionais que abordam a taxa de captação como fixa.

O modelo utilizado nesta dissertação pode ser adaptado para tratar de questões que fogem do escopo deste trabalho. Uma aplicação possível seria utilizar a metodologia apresentada nesta dissertação para explicar a manutenção excessiva de recursos em caixa que algumas empresas possuem. A expectativa de mudança tributária, ou eventuais oportunidades de aquisição poderiam ser temas estudados com pequenas adaptações na modelagem apresentada.

Outra aplicação interessante seria verificar os resultados dessa metodologia para empresas multinacionais, expostas a diferentes regimes tributários

e a riscos cambiais, por exemplo.

Modelos desta natureza também podem ser aplicados a outros campos de Finanças Corporativas, como Governança Corporativa. Poderiam ser tratados, por exemplo, problemas de agente principal, assimetria de informação, entre outros. É possível propor um modelo no qual a taxa de captação é definida a partir das sinalizações que a empresa passa ao mercado.

Uma outra proposta para trabalhos futuros está no aprofundamento do estudo de medidas de risco para o modelo, em especial, o comportamento de medidas de probabilidade neutra a risco.

## Referências bibliográficas

- [1] HENNESSY, C. A.; WHITED, T. M.. **How costly is external financing? evidence from a structural estimation.** The Journal of Finance, 62(4):1705–1745, 2007.
- [2] LAMBRECHT, B. M.; MYERS, S. C.. **The dynamics of investment, payout and debt.** The Review of Financial Studies, 30(11):3759–3800, 2017.
- [3] HENNESSY, C. A.; WHITED, T. M.. **Debt dynamics.** The Journal of Finance, 60(3):1129–1165, 2005.
- [4] STREBULAEV, I. A.; WHITED, T. M. ; OTHERS. **Dynamic models and structural estimation in corporate finance.** Foundations and Trends® in Finance, 6(1–2):1–163, 2012.
- [5] MODIGLIANI, F.; MILLER, M. H.. **The cost of capital, corporation finance and the theory of investment.** The American economic review, 48(3):261–297, 1958.
- [6] MYERS, S. C.. **The capital structure puzzle.** The journal of finance, 39(3):574–592, 1984.
- [7] BARCLAY, M. J.; SMITH, C. W.. **The capital structure puzzle: another look at the evidence.** Journal of Applied Corporate Finance, 12(1):8–20, 1999.
- [8] BARCLAY, M. J.; SMITH, C. W.. **The capital structure puzzle: The evidence revisited.** Journal of Applied Corporate Finance, 17(1):8–17, 2005.
- [9] DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S.. **Investment under uncertainty.** Princeton university press, 1994.
- [10] DUMAS, B.. **Super contact and related optimality conditions.** Journal of Economic Dynamics and Control, 15(4):675–685, 1991.
- [11] STOKEY, N. L.. **The Economics of Inaction: Stochastic Control models with fixed costs.** Princeton University Press, 2008.

- [12] LELAND, H. E.. **Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure.** The journal of finance, 49(4):1213–1252, 1994.
- [13] STREBULAEV, I. A.. **Do tests of capital structure theory mean what they say?** The Journal of Finance, 62(4):1747–1787, 2007.
- [14] JU, N.; PARRINO, R.; POTESHMAN, A. M. ; WEISBACH, M. S.. **Horses and rabbits? trade-off theory and optimal capital structure.** Journal of Financial and Quantitative analysis, 40(2):259–281, 2005.
- [15] BHAMRA, H. S.; KUEHN, L.-A. ; STREBULAEV, I. A.. **The aggregate dynamics of capital structure and macroeconomic risk.** The Review of Financial Studies, 23(12):4187–4241, 2010.
- [16] RIDDICK, L. A.; WHITED, T. M.. **The corporate propensity to save.** The Journal of Finance, 64(4):1729–1766, 2009.
- [17] JERMANN, U.; QUADRINI, V.. **Macroeconomic effects of financial shocks.** The American Economic Review, 102(1):238–271, 2012.
- [18] GOMES, J. F.. **Financing investment.** American Economic Review, p. 1263–1285, 2001.
- [19] BOLTON, P.; CHEN, H. ; WANG, N.. **A unified theory of tobin’s q, corporate investment, financing, and risk management.** The journal of Finance, 66(5):1545–1578, 2011.
- [20] AMAYA, D.; GAUTHIER, G. ; LÉAUTIER, T.-O.. **Dynamic risk management: investment, capital structure, and hedging in the presence of financial frictions.** Journal of Risk and Insurance, 82(2):359–399, 2015.
- [21] XU, X.; BIRGE, J. R.. **Equity valuation, production, and financial planning: A stochastic programming approach.** Naval Research Logistics (NRL), 53(7):641–655, 2006.
- [22] VALLADÃO, D. M.. **Risk averse stochastic programming models: Practical consequences of theoretical concepts.** PhD thesis, PUC-Rio, 2012.
- [23] VALLADÃO, D. M.; VEIGA, Á. ; STREET, A.. **A linear stochastic programming model for optimal leveraged portfolio selection.** Computational Economics, p. 1–12, 2017.

- [24] KISGEN, D. J.. **Credit ratings and capital structure**. *The Journal of Finance*, 61(3):1035–1072, 2006.
- [25] BUTLER, A. W.; GRULLON, G. ; WESTON, J. P.. **Stock market liquidity and the cost of issuing equity**. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 40(2):331–348, 2005.
- [26] JAMES, C.; WIER, P.. **Borrowing relationships, intermediation, and the cost of issuing public securities**. *Journal of Financial Economics*, 28(1-2):149–171, 1990.
- [27] BETHEL, J. E.; KRIGMAN, L.. **Managing the costs of issuing common equity: The role of registration choice**. In: *BANKING AND CAPITAL MARKETS: NEW INTERNATIONAL PERSPECTIVES*, p. 223–264. World Scientific, 2010.
- [28] DÉCAMPS, J.-P.; MARIOTTI, T.; ROCHET, J.-C. ; VILLENEUVE, S.. **Free cash flow, issuance costs, and stock prices**. *The Journal of Finance*, 66(5):1501–1544, 2011.
- [29] LEE, I.; LOCHHEAD, S.; RITTER, J. ; ZHAO, Q.. **The costs of raising capital**. *Journal of Financial Research*, 19(1):59–74, 1996.
- [30] KOH, S.; DURAND, R. B.; DAI, L. ; CHANG, M.. **Financial distress: Lifecycle and corporate restructuring**. *Journal of Corporate Finance*, 33:19–33, 2015.
- [31] JOHN, K.; LANG, L. H. ; NETTER, J.. **The voluntary restructuring of large firms in response to performance decline**. *The Journal of Finance*, 47(3):891–917, 1992.
- [32] KANG, J.-K.; SHIVDASANI, A.. **Corporate restructuring during performance declines in japan**. *Journal of Financial Economics*, 46(1):29–65, 1997.
- [33] ATANASSOV, J.; KIM, E.. **Labor and corporate governance: International evidence from restructuring decisions**. *The Journal of Finance*, 64(1):341–374, 2009.
- [34] GRAHAM, J. R.; OTHERS. **Proxies for the corporate marginal tax rate**. *Journal of Financial Economics*, 42(2):187–221, 1996.
- [35] RUDLOFF, B.; STREET, A. ; VALLADÃO, D. M.. **Time consistency and risk averse dynamic decision models: Definition, interpretation**

- and practical consequences. *European Journal of Operational Research*, 234(3):743–750, 2014.
- [36] ACCIAIO, B.; PENNER, I.. **Dynamic risk measures**. In: *ADVANCED MATHEMATICAL METHODS FOR FINANCE*, p. 1–34. Springer, 2011.
- [37] BION-NADAL, J.. **Dynamic risk measures: time consistency and risk measures from bmo martingales**. *Finance and Stochastics*, 12(2):219–244, 2008.
- [38] CHERIDITO, P.; DELBAEN, F. ; KUPPER, M.. **Coherent and convex monetary risk measures for bounded cadlag processes**. *Stochastic Processes and their Applications*, 112(1):1–22, 2004.
- [39] DETLEFSEN, K.; SCANDOLO, G.. **Conditional and dynamic convex risk measures**. *Finance and Stochastics*, 9(4):539–561, 2005.
- [40] SHAPIRO, A.. **On a time consistency concept in risk averse multistage stochastic programming**. *Operations Research Letters*, 37(3):143–147, 2009.
- [41] SHAPIRO, A.; TEKAYA, W.; DA COSTA, J. P. ; SOARES, M. P.. **Risk neutral and risk averse stochastic dual dynamic programming method**. *European journal of operational research*, 224(2):375–391, 2013.
- [42] TAUCHEN, G.. **Finite state markov-chain approximations to univariate and vector autoregressions**. *Economics letters*, 20(2):177–181, 1986.
- [43] **Corporate methodology - global ratings**. Standard and Poor's, 2013.
- [44] DAMODARAM, A.. **Ratings, interest coverage ratios and default spread**, 2018.
- [45] DOWSON, O.; KAPELEVICH, L.. **SDDP.jl: a Julia package for Stochastic Dual Dynamic Programming**. *Optimization Online*, 2017.
- [46] STREBULAIEV, I. A.; YANG, B.. **The mystery of zero-leverage firms**. *Journal of Financial Economics*, 109(1):1–23, 2013.
- [47] MILLER, M. H.; MODIGLIANI, F.. **Dividend policy, growth, and the valuation of shares**. *the Journal of Business*, 34(4):411–433, 1961.
- [48] PEREIRA, M. V.; PINTO, L. M.. **Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning**. *Mathematical programming*, 52(1-3):359–375, 1991.

- [49] SHAPIRO, A.; DENTCHEVA, D. ; RUSZCZYŃSKI, A.. **Lectures on stochastic programming: modeling and theory**. SIAM, 2009.
- [50] BELLMAN, R.. **The theory of dynamic programming**. Technical report, RAND CORP SANTA MONICA CA, 1954.
- [51] DA SILVA, T. A.. **Optimization Under Uncertainty for Asset Allocation**. PhD thesis, PUC-Rio, 2015.
- [52] MATOS, V. L. D.; OTHERS. **Um modelo para o planejamento anual da operação energética considerando técnicas avançadas de otimização estocástica**. PhD thesis, UFSC, 2012.
- [53] INFANGER, G.; MORTON, D. P.. **Cut sharing for multistage stochastic linear programs with interstage dependency**. *Mathematical Programming*, 75(2):241–256, 1996.
- [54] VALLADAO, D.; SILVA, T. ; POGGI, M.. **High-dimensional risk-constrained dynamic asset allocation via markov stochastic dual dynamic programming**. 2017.

# A

## Conceitos Básicos de Programação Estocástica

### Modelos de Programação Linear Estocástica

Nesta apêndice vamos apresentar uma abordagem bastante resumida de metodologias descritas em detalhes nos trabalhos de Pereira e Pinto [48] e Shapiro et al [49].

Problemas de Programação Linear podem ser divididos em: determinísticos ou estocásticos. Problemas de natureza determinística são aqueles em que os parâmetros da FO e das restrições são conhecidos. Por outro lado, problemas estocásticos consideram incertezas em sua modelagem a medida que incorporam variáveis aleatórias (de distribuição de probabilidade conhecida) na FO e/ou nas restrições.

Problemas de natureza estocástica, por sua vez, podem ser divididos entre problemas de dois estágios, e problemas multi-estágio descritos, descritos abaixo.

### Programação linear estocástica em dois estágios

Um modelo de programação estocástica em dois estágios é caracterizado pela existência de um primeiro estágio no qual as decisões devem ocorrer antes da realização dos parâmetros de riscos e um segundo estágio no qual as escolhas (decisões de recurso) são tomadas com todos os cenários revelados. Neste caso adotaremos a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + Q(\mathbf{x}) \\ \text{s. a} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Onde  $\mathbf{x}$  é o vetor contendo as decisões de primeiro estágio, a matriz  $A$

representa os coeficientes determinísticos do problema e  $Q(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}, \xi)]$ , ou seja, é o valor esperado da função de segundo estágio  $Q(\mathbf{x}, \xi)$ :

$$\begin{aligned} Q(x, \xi) = \min_{\mathbf{y}} \mathbf{q}^\top \mathbf{y}(\xi) \\ \text{s. a } W(\xi)\mathbf{y}(\xi) + T(\xi)\mathbf{x} = \mathbf{h}(\xi) \\ \mathbf{y}(\xi) \geq 0 \end{aligned}$$

Onde  $\mathbf{y}(\xi)$  é um vetor de variáveis dependentes dos valores de  $\xi$  e  $W(\xi)$  e  $T(\xi)$  são matrizes de coeficientes estocásticos dependentes de  $\xi$ . Adicionalmente, assumindo uma distribuição de probabilidade discreta, é possível escrever o problema acima em um único programa linear que inclui todas suas realizações:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \sum_{i=1}^N p_i (\mathbf{q}_i^\top \mathbf{y}_i) \\ \text{s. a } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ T\mathbf{x} + W\mathbf{y} = \mathbf{h} \\ x, y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Onde  $p_i$  é a probabilidade de ocorrência do cenário  $i$ . O Problema escrito desta forma é um problema de otimização linear, uma vez que, sua FO e suas restrições são funções lineares das variáveis do problema e, por isso, pode ser resolvido utilizando algoritmos para a resolução de problemas de programação linear.

### Programação linear estocástica em multiestágios

Muitas vezes uma abordagem de dois estágios não é suficiente para representar adequadamente problemas que envolvem tomadas de decisão recorrentes ao longo do tempo. Os problemas reais, particularmente os tratados neste estudo, têm natureza multiestágios, ou seja, as decisões tomadas hoje afetam as tomadas de decisões por vários períodos à frente. Nestes modelos as incertezas do processo estocástico são reveladas e cada decisão depende de todos os dados já revelados e independe das realizações futuras.

decisão( $x_1$ ) → observação( $\xi_2$ ) → decisão( $x_2$ ) → ... → observação( $\xi_N$ ) → decisão( $x_N$ )

A definição matemática deste problema é a extensão do modelo de dois estágios, conforme apresentado abaixo.

$$\max_{\substack{\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x}_1 \geq 0}} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \mathbb{E}_t \left[ \max_{\substack{\mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \geq 0}} \mathbf{c}_2^\top \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbb{E}_T \left[ \max_{\substack{\mathbf{A}_T \mathbf{x}_T = \mathbf{b}_T - \mathbf{B}_T \mathbf{x}_{T-1} \\ \mathbf{x}_T \geq 0}} \mathbf{c}_T^\top \mathbf{x}_T \right] \right]$$

O problema multiestágio, em sua forma dinâmica, pode ser representado da seguinte maneira:

$$Q_{t+1}(x_t) = \mathbb{E}_t[Q_{t+1}(\mathbf{x}_t, \xi_{t+1})] \tag{A-1}$$

$$\begin{aligned} Q_t(x_{t-1}, \xi_t) &= \min_{\mathbf{x}_t} \mathbf{c}_t^\top \mathbf{x}_t + Q_{t+1}(x_t) \\ &\text{s. a } B_t \mathbf{x}_{t-1} + A_t \mathbf{x}_t = \mathbf{b}_t \\ &\mathbf{x}_t \geq 0 \end{aligned}$$

Onde  $x_0$  é conhecido e  $Q_{T+1}(\mathbf{x}_T) = 0$ .

### Programação Dinâmica (PD)

A PD é uma abordagem de otimização que transforma um problema complexo (em geral de natureza multiestágio) em uma sequência de problemas mais simples. Problemas de PD possuem três características fundamentais que os descrevem: (i) estágios, (ii) estados e (iii) otimização recursiva.

Uma característica dos problemas de PD é a sua divisão por estágios, os quais são otimizados sequencialmente. Embora seja resolvido um problema para cada estágio, sua solução contribui para a definição das características do problema do estágio anterior. Em geral os estágios de um problema de programação dinâmica representam diferentes períodos de tempo.

A cada estágio do problema de otimização estão associados estados do sistema. Os estados refletem as informações necessárias para avaliar as consequências que a decisão atual tem sobre os estágios futuros e devem conter informações suficientes para que decisões futuras sejam tomadas independente

de como o sistema chegou àquele estado.

A ideia de otimização recursiva é alcançar a solução do problema multi-estágio resolvendo, sequencialmente, problemas de um estágio. De maneira geral, o primeiro estágio a ser analisado é o último, seguido do penúltimo e assim sucessivamente até o primeiro estágio através de um procedimento conhecido como indução regressiva (*backward recursion*).

A base do procedimento de otimização recursiva é o chamado princípio da otimalidade definido por Bellman [50]: “*para um dado estado do sistema, a política ótima para os estados remanescentes é independente da política de decisão adotada em estados anteriores*”.

### Programação Dinâmica Estocástica (PDE)

Quando tratamos de um problema de PDE, a decisão em um determinado estado ou estágio do sistema não determina, por si só, o estado do sistema no próximo estágio. Não há, como no caso determinístico, uma trajetória única. A solução será representada por um conjunto de decisões ótimas com cada uma delas associada a um estado do estágio correspondente. Ao conjunto de todas as decisões ótimas denominamos política ótima.

Para tal, utilizamos um procedimento chamado indução regressiva, uma vez que os estados do último estágio são avaliados primeiro e, em seguida, os estágios anteriores são avaliados calculando o valor esperado de qualquer decisão. O processo de indução regressiva é dado da seguinte forma:

- i Calcula-se a função de valor ótimo no estágio  $t = T$ , este é diretamente o valor esperado de cada estado em  $t = T$ ;
- ii Em seguida, calculamos a função recursiva de otimalidade para o estágio anterior ( $t = T - 1$ ), isto é feito resolvendo um problema de otimização de um estágio, avaliando as incertezas consideradas no problema e a utilização da função de custo futuro de  $t + 1$ ;
- iii Para cada estado do estágio anterior, selecionamos a decisão que tem o máximo (ou mínimo) valor esperado. Uma vez que a função de valor ótimo para o estágio  $t = T - 1$  foi determinada, continuamos de forma análoga para determinar as funções de valor ótimo em estágios anteriores ( $t = T - 2, \dots, 1$ ).

Entretanto, conforme descrito por Bellman [50], a PDE sofre do “mal da dimensionalidade”. Isto ocorre pois seu algoritmo, inclui a enumeração de

todas as possíveis soluções o que em casos mais complexos torna inviável a solução do problema.

### Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE)

Em função da "maldição da dimensionalidade", descrito anteriormente, em alguns casos é recomendável a utilização da PDDE que supera este problema uma vez que assume que as variáveis são independentes no tempo. Dessa forma, é feita uma aproximação linear para a função de custo futuro em cada estágio, utilizando amostras aleatórias e independentes dos cenários e utilizando a técnica de decomposição de Benders, proposta por [48] para compartilhar cortes entre cenários.

Conforme mencionado por Silva [51] e Matos[52], de maneira sucinta, para ser possível compartilhar o corte de um cenário com os demais cenários é necessário que:

- o corte seja válido para todos os nós do estágio em que o corte está sendo adicionado, ou seja, a solução dual utilizada para determinar o corte deve ser uma solução viável do problema dual dos nós descendentes, conforme [53] e;
- a função de custo futuro seja única para cada estágio  $t$ . Assim, considerando independência temporal do processo estocástico e convexidade, aproximações da função de  $t$  obtidas em determinado estado do sistema são válidas para outros estados.

O algoritmo do PDDE é dividido em três partes: (i) escolha aleatória e independente dos cenários a serem considerados (ii) recursão progressiva no tempo e (iii) recursão regressiva no tempo.

A recursão progressiva consiste em resolver o problema de cada nó em ordem cronológica ( $t=1, 2, \dots, T$ ) considerando apenas os cenários sorteados. Para cada cenário e estágio o algoritmo avalia a solução ótima usando a aproximação atual da função de custo futuro.

A recursão regressiva segue ordem inversa ( $t=T, T-1, \dots, 1$ ). Nesta etapa são adicionados os cortes de Benders e são consideradas todas as realizações obtidas naquele estágio.

O método descrito acima é largamente utilizado em problemas de planejamento energético, [52] e apresenta uma bibliografia extensa da aplicação do PDDE neste campo. Em relação a aplicação desta técnica em finanças,

pode-se citar o trabalho de Valladão et al [54] que utiliza o PDDE na alocação ótima de carteira. Entretanto, não foi encontrado, na literatura, uso de técnicas de PDDE para problemas de gestão de fluxo de caixa. Mais detalhes sobre a técnica podem ser encontrados em [48] e [49].

## B Glossário

Neste apêndice faremos um glossário de todas as variáveis que aparecem ao longo do texto.

- $R_a$ : Retorno esperado sobre os ativos da firma
- $R_e$ : Custo de Capital Próprio ou custo de *equity*
- $R_d$ : Custo de dívida
- $V$ : Valor da Firma
- $E$ : Valor do Capital Próprio (*equity*)
- $D$ : Valor da dívida
- $V_t$ : Valor da firma no modelo MITD em  $t$

### Programação Dinâmica

Variáveis de estado:

- $k_t$ : total do ativo em  $t$
- $c_t$ : caixa em  $t$
- $d_t$ : dívida captada em  $t$
- $\psi_t$ : estoque de créditos fiscais em  $t$

Variáveis de decisão:

- $e_t$ : dividendos pagos (positivo) ou aportes (negativo) em  $t$
- $\pi_t$ : resultado operacional da empresa em  $t$
- $y_t$ : lucro operacional em  $t$
- $\Delta_{t,j}$ : valor Captado a cada nível  $j$  de taxa de juros em  $t$
- $u_t$ : custo transacional da emissão de ações (aporte) em  $t$
- $n_t$ : valor do desconto oferecido na venda de ativos em  $t$
- $s$ : percentual de desconto aplicado na venda dos ativos
- $g_t$ : imposto pago em  $t$
- $a_t$ : uso dos créditos fiscais em  $t$
- $i_t$ : investimento (positivo) ou da venda de ativos (negativo) em  $t$

Parâmetros:

$r$ : taxa livre de risco

$R_c$ : taxa de aplicação do caixa da empresa

$\delta$ : taxa de depreciação

$\gamma_j$ : taxa de juros a cada nível  $j$  de captação

$\varphi_j$ : limite a ser captado a cada nível  $j$

$\Lambda$ : custo de carregamento

$\eta$ : custo percentual associado à emissão de ações

$\tau$ : alíquota de imposto de renda corporativa

$\lambda$ : coeficiente de aversão a risco

$\alpha$ : nível de confiança

$\Gamma$ : fator de produtividade da empresa

$A_l$ : intercepto da reta tangente  $l$  da função de produtividade da empresa

$B_l$ : coeficiente angular da reta tangente  $l$  da função de produtividade da

empresa

$\rho$ : correlação entre  $\ln(z_t)$  e  $\ln(z_{t+1})$  para o modelo AR(1)

$\epsilon_{t+1}$ : ruído do modelo AR(1)

Variáveis aleatórias:

$z_t$ : variável aleatória que representa choque na receita

Funções

$f_\pi(k_t, z_t)$ : capacidade operacional da empresa, definida em função do ativo da empresa ( $k_t$ ) e do choque aleatório ( $z_t$ )

$f_d(d_{t-1})$ : pagamento da dívida e juros em função da dívida no período anterior

Outras definições:

$Q_{t+1}$ : função de valor futuro

$\Phi_t$ : medida de valor em  $t$

$\phi_t^\alpha$ : CVaR ao nível de confiança  $\alpha$  em  $t$

$T$ : Quantidade de períodos considerados no modelo.

$J$ : Número de níveis de taxa de juros existentes para captação

$L$ : Quantidade de segmentos de retas utilizadas na aproximação linear da função de Cobb-Douglas.