6 - BIBLIOGRAFIA

LIVROS

Aristóteles (1952a). *The Works of Aristotle*. Publicado por William Benton. (Encicoplaedia Britannica: University of Chicago).

_________ (1952b). *Topics*. Em Aristóteles (1952a), pp. 143-226.

__________. *Metafísica*. Traduzido por Leonel Vallandro. (Porto Alegre: Editora Globo, 1969).

Benacerraf, P. e Putnam, H. (eds.). (1983). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. (Cambridge University Press).

Boolos, George (1998). *Logic, Logic and Logic*. (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press).

Chateaubriand, Oswaldo (2001). *Logical Forms Part I: Truth and Description*. (Coleção CLE, Vol 34).

______________ (a ser publicado). *Logical Forms, Part II: Logic, Language, and Knowledge*.

Dedekind, Richard (1963). *Essays on theory of Numbers*. Editado e traduzido por W. Bemam. (New York: Dover Publications).

______________ (1969). *Gesammelte mathematische Werke dritter Band*. editado por Robert Fricke. (Bronx, New York: Chelsea Publishing Company).

Demopoulos, William (ed) (1995). *Frege´s Philosophy of Mathematics*. (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press).

Dummett, Michael (1973). *Frege: Philosophy of Language*. (London: Duckworth).

_____________ (1978). *Truth and Other Enigmas*. (London: Duckworth).

____________ (1991). *Frege: Philosophy of Mathematics*. (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press).

_________ (1993a). *The Seas of Language*. (Oxford: Clarendon Press).

Enderton, Herbert B.(1977). *Elements of Set Theory*. (San Diego, California: Academic Press).

Field, Hartry (1980). *Science without Numbers*. (Oxford: Basil Blackwell).

Fraenkel, Abraham A., Bar-Hillel Yehoshua e Levy Azriel (1973). *Foundations of Set Theory*. (Amsterdam, Holland: North-Holland Publishing Company).

Frege, Gottlob. (1879). *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. (Halle: Verlag von Louis Nebert). Reimpresso em *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. 2ª edição. Editado por Ignácio Angelelli. (Hildesheim: George Olms Verlag, 1998).

________ (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. (Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner). Reimpresso em *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Edição de centenário. Editado por Christian Thiel. (Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1988).

_________ (1893). *Grundgesetze der Arithmetik*. Vol I. (Jena: Pohle). Reimpresso. (Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1962).

_________ (1903). *Grundgesetze der Arithmetik*. Vol II. (Jena: Pohle). Reimpresso. (Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1962).

_________ (1964). *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*. Traduzido e editado por Montgomery Furth. (Berkeley e Los Angeles: University of California Press).

_________ (1972). *Conceptual Notation and Related Articles*. Traduzido e editado por Terrell Ward Bynum. (Oxford: Clarendon Press).

_________ (1976). *Wissenschafticher Briefwechsel*. Editado por Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart. (Hamburgo: Felix Meiner Verlag).

_________ (1979). *Posthumous Writings*. Editado por Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach. Traduzido por Peter Long e Roger White. (Oxford: Basil Blackwell).

_________ (1980). *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Editado por Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart. Resumido da edição alemã por Brian McGuinness e traduzido por Hans Kaal. (Chicago: Basil Blackwell).

_________ (1983). *Nachgelassene Schriften*. Editado por Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach, sob a supervisão de Gottfried Gabriel e Walburga Rödding. (Hamburg: Felix Meiner Verlag).

_________ (1984). *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*. Editado por Brian McGuinness e traduzido por Max Black, V. H. Dudman, Peter

Geach, Hans Kaal, E. H. W. Kluge, Brian McGuinness e R. H. Stoothoff. (Oxford: Basil Blackwell).

_________ (1986). *The Foundations of Arithmetik. A logico-mathematical enquiry into the concept of number*. 2ª edição revisada. Traduzido por J. L. Austin. (Oxford: Basil Blackwell).

_________ (1990). *Kleine Schriften*. 2ª edição. Editado por Ignácio Angelelli. (Hildesheim: George Olms Verlag).

Gabriel, Gottfried e Kiensler, Wolfgang (eds.) (1997). *Frege in Jena: Beiträge zur Spurensicherung*. (Würzburg: Königshausen & Neumann).

__________ e Dathe, Uwe (eds.) (2000). *Gottlob Frege: Werk und Wirkung*. (mentis, Paderborn: mentis Verlag).

Hale, Bob (1987). *Abstract Objects*. (Oxford: Basil Blackwell).

________ & Wright, Crispin (2001a). *The Reason´s Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. (New York: Oxford University Press).

Heck, Richard (ed.) (1997a). *Language, Thought and Logic*. (Oxford: Oxford University Press).

Jolley, Nicholas (ed.) (1995). *The Cambridge Companion to Leibniz*. (Cambridge: Cambridge University Press).

Kant, Immanuel (1ª edição – 1781; 2ª edição - 1787). *Crítica da Razão Pura*. Traduzido por Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. (Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1997).

____________ (1958). *Immanuel Kant Werke. Schriften zur Metaphysik und Logik, Dritter Band*. Editado por Wilhelm Weischedel. (Insel: Verlag Wiesbaden).

____________ (1800). *Logik*. Em Kant (1958), pp 417-582.

Leibniz, Gottfried W. (1703). *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano*. Traduzido por Adelino Cardoso. (Lisboa: Edições Colibri, 1993).

____________ (1989). *Philosophical Essays*. Editado e traduzido por Roger Ariew e Daniel Garber. (Indianapolis: Hackett Publishing Company).

Locke, John (1690). *A Essay Concerning Human Understanding*. Editado por Peter H. Nidditch. (Oxford, New York: Oxford University Press, 1975).

Quine, Willard van Orman (1970). *Philosophy of Logic*. (Englewood Cliffs, Nj: Prentice-Hall).

_______________ (1976). *The Ways of Paradox and Other Essays*. (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press).

______________ (1980). *From a Logical Point of View*. 2ª edição revisada. (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press).

Perry, John (1978). *A Dialogue on Personal Identity and Immortality*. (Indianapolis, Indiana: Hackett Publishing Company).

Ramsey, F. P. (1978). *Foundations: Essays in Philosophy, Logic, Mathematics and Economics*. Edição revisada e estendida. Editado por D. H. Mellor. (Atlantic Highlands, N. J.: Humanities Press Inc).

Reck, Erich (ed.) (2002). *From Frege to Wittgenstein: Perspective on Early Analytic Philosophy*. (New York: Oxford University Press).

Ruffino, Marco (1996). *Frege´s Notion of Logical Objects*. Dissertação de Ph.D, Universidade da Califórnia, Los Angeles. (Ann Arbor: University Microfilms).

Schirn, Mattias (ed) (1996a) *Frege: Importance and Legacy* (Berlin e New York: Walter de Gruyter).

_________ (ed.) (1998) *Philosophy of Mathematics Today* (Oxford: Clarendon Press).

Shapiro, S (1991). *Foundations without Foundationalism: A Case for Second Order Logic*. (Oxford: Clarendon Press).

Sluga, Hans (1980). *Gottlob Frege*. (London: Routledge and Kegan Paul).

Strawson, P. F. (1952). *Introduction to Logical Theory*. (London, Methuen: University Paperbacks, 1963).

Tennant, Neil (1987). *Anti-Realism and Logic*. (Oxford: Oxford University Press).

Walker, Jeremy D. B. (1965). *A Study of Frege*. (Oxford: Basil Blackwell).

Wright, Crispin (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*. (Aberdeen University Press).

ARTIGOS

Alnes, Jan Harald (1999). "Sense and Basic Law in Frege´s Logicism". *Nordic Journal of Philosophical Logic* **4:1**, pp. 1-30.

Boolos, George (1985). "Reading the Begriffsschrift". Em Boolos (1998), pp. 155-70.

________ (1987a). “Saving Frege from Contradiction”. Em Boolos (1998), pp. 171-82.

_________ (1987b). “*The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic*”. Em Boolos (1998), pp. 183-201.

_________ (1989). “Iteration Again”. Em Boolos (1998), pp. 88-104.

_________ (1990). “The Standard of Equality of Numbers”. Em Boolos (1998), pp. 202-219.

_________ (1993). “Whence the Contradiction?”. Em Boolos (1998), pp. 220- 36.

_________ (1994). “The Advantages of Honest Toil over Theft”. Em Boolos (1998), pp. 255- 74.

_________ (1997). “Is Hume´s Principle Analytic?”. Em Boolos (1998), pp.301-314.

_______ e Heck, Richard (1997). “Die Grundlagen der Arithmetik, §§82-83”. Em Boolos (1998), pp. 315-333.

Bynum, Terrell Ward (1972). “On The Life and Work of Gottlob Frege”. Em Frege (1972), pp. 1-54.

Burgess, J. P. (1984). “Review of Wright (1983)”. *Philosophical review* **93**, pp. 638-40.

Coffa, Alberto (1882). “Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism”. Em Demopoulos (1995), pp. 29-40.

Dedekind, Richard (1872). "Continuity and Irrational Numbers". Em Dedekind (1963), pp. 1-27.

_______________ (1872). “Stetigkeit und irrationalen Zahlen”. Em Dedekind (1969), pp. 315-334.

______________ (1888). "The Nature and Meaning of Numbers". Em Dedekind (1963), pp. 31-115.

____________ (1888). "Was sind und was sollen die Zahlen?". Em Dedekind (1969), pp. 335-391.

Demopoulos, William (1994). “Frege and Rigorization of Analysis”. Em Demopoulos (1995), pp. 68-88.

__________ (1998). “The Philosophical Basis of Our Knowledge of Number”. *Noûs* **32:4**, pp. 481-503.

Duarte, Alessandro (2003). “A Aritmética de Frege é Analítica?”. Artigo escrito para ser apresentado no *Principia* (artigo não publicado).

Dummett, Michael (1963). “The Philosophical Significance of Gödel´s Theorem”. Em Dummett (1978), pp. 186- 202.

______________ (1993b). “What is Mathematics About?”. Em Dummett (1993a), pp. 428-45.

__________ (1998) “Neo-Fregeans: in Bad Company?”. Em Schirn (1998), pp. 369-87.

Fine, K. (1998) “The Limits of Abstraction”, em Schirn (1998), pp. 503-629.

Frege, Gottlob (1873). “Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene”. Em Frege (1990), pp. 1-49.

_____________ (1873). “On a Geometrical Representation of Imaginary Forms in the Plane”. Em Frege (1984), pp. 1-55.

____________ (1874). “Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Gröβenbegriffes gründen”. Em Frege (1990), pp. 59-84.

____________ (1874). “Methods of Calculation based on an Extension of the Concept of Quantity”. Em Frege (1984), pp. 56-92.

____________ (1880-1). “Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift”. Em Frege (1983), pp.9-53.

____________ (1880-1). “Boole´s logical Calculus and the Concept-script”. Em Frege (1979), pp. 9-46.

___________ (1882a). “Boole´s logical Formula-language and my Concept-script”. Em Frege (1979), pp. 47-52.

__________ (1882b). “On the Scientific Justification of a Conceptual Notation”. Em Frege (1872), pp. 83-9.

__________ (1882-3). “On the Aim of the Conceptual Notation”. Em Frege (1872), pp. 90-100.

_________ (1891). “Funktion und Begriff”. Em Frege (1990), pp. 125-142.

_________ (1891). “Function and Concept”. Em Frege (1984), pp. 137-156.

_________ (1892). “Über Sinn und Bedeutung”. Em Frege (1990), pp. 143-162.

_________ (1892). “On Sense and Meaning”. Em Frege (1984), pp. 157-177.

Gödel, Kurt (1944). "Russell's Mathematical Logic". Em Paul Benacerraf e Hilary Putnam (1983), pp. 447-69.

_________ (1947). "What is Cantor's Continuum Problem?". Em Paul Benacerraf e Hilary Putnam (1983), pp. 470-85.

Hale, Bob (1997). “Grundlagen §64”. Em Hale e Wright (2001a), pp. 91-116.

________ (2001a). “Singular Term I”. Em Hale e Wright (2001a), pp. 31-47.

________ (2001b). “Singular Term (2)”. Em Hale e Wright (2001a), pp. 48-71.

________ e Wright, Crispin (2001b). “Implicit Definition and the A Priori”. Em Hale e Wright (2001a), pp. 117-52.

________________ (2001c). “To Bury Caesar...”. Em Hale e Wright (2001a), pp. 335-96.

Heck, Richard (1992). “On the Consistency of Second-Order Contextual Definitions”. *Noûs* **64**, pp. 491-4.

_________ (1993). “The Development of Arithmetic in Frege´s Grundgesetze der Arithmetik”. Em Demopoulos (1995), pp. 257-94.

_________ (1997b). “The Julius Caesar Objection”. Em Heck (1997a), pp. 273-308.

_________ (1997c). “Finitude and Hume´s Principle”. *Journal of Philosophical Logic* **26**, pp. 589-617.

Horwich, Paul (1997). “Implicit Definition, Analytic Truth, and Apriori Knowledge”. *Noûs* **31:4**, pp. 423-40.

Leibniz Gottfried W (1678-9). “Preface to a Universal Characteristic”. Em Leibniz (1989), pp. 5-9.

___________ (1679). “Samples of the Numerical Characteristic”. Em Leibniz (1989), pp. 10-18.

Parsons, Charles (1964). “Frege´s Theory of Number”. Em Demopoulos (1995), pp. 182-210.

Quine, Willard van Orman (1936). “Truth by Convention”. Em Quine (1976), pp.77-106.

___________________(1951). “Two Dogmas of Empiricism”. Em Quine (1980), pp. 20-46.

Ramsey, F. P. (1925). “Universals”. Em Ramsey (1978), pp. 17-39.

Ruffino, Marco (1997). “Wahrheitswerte als Gegenstände und die Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung”. Em Gabriel e Kienzler (1997), pp.139-148.

__________ (1998). “Logicism: Fregean and Neo-Fregean”. *Manuscrito* **21:1**, pp. 149-188.

__________ (2000). “Extension as Representative Objects in Frege´s Logic”. *Erkenntnis* **53:2**, pp. 239-52.

_________ (2002). “Logical Objects in Frege´s Grundgesetze, Section 10”. Em Reck (2002), pp. 125-48.

__________ (2003). “Why Frege would not be a Neo-Fregean”. *Mind* **112**, pp. 51-78.

Rumfitt, Ian (2001). “Hume´s Principle and the Number of all Objects”. *Noûs* **35:4**, pp. 515-41.

Rutherford, Donald (1995). “Philosophy and Language in Leibniz”. Em Jolley (1995), pp. 224-69.

Schirn, Mattias (1996b). “On Frege´s Introduction of Cardinal Numbers as Logical Objects”. Em Schirn (1996a), pp. 114-173.

Schröder, E. (1880). “Review of Frege´s Conception Notation”. Em Bynum (1972), pp. 218-232.

Shapiro,S. e Weir, A. (1999) “New V, ZF and Abstraction”. *Philosophia Mathematica* **(3) 7**, pp. 293-321.

___________________ (2000). “‘Neo-logicist’ Logic is not Epistemically Innocent”. *Philosophia Mathematica* **(3) 8**, pp. 163-189.

Stirton, W. R. (2000). “Hale´s ‘Weak Sense’ is just too Weak”. *Proceedings of the Aristotelian Society* **100**, pp. 209-13.

Stuhlmann-Laeisz, Rainer (2000). “Das Kontextprinzip”. Em Gabriel e Dathe (2000), pp. 91-102.

Sullivan, P. e Potter, M. (1997). “Hale on Caesar”. *Philosophia Mathematica* **5 (3)**, pp. 135-53.

Tabata, Hirotoshi (2000). “Frege´s Theorem and his Logic”. *History and Philosophy of Logic* **21**, pp. 265-95.

Tennant, Neil (1997). “On the Necessary Existence of Numbers”. *Noûs* **31:3**, pp. 301-36.

Vikko, Risto (1998). “The Reception of Frege´s Begriffsschrift”. *Historia Mathematica* **25**, 412-22.

Wright, Crispin. (1997). “On the Philosophical Significance of Frege’s Theorem”. Em Hale e Wright (2001a) 273-306.

________ (1998). “On the Harmless Impredicativity of $N^{=}$ (Hume´s Principle)”. Em Hale e Wright (2001a), pp. 229-255.

________ (1999). “Is Hume’s Principle Analytic?”. Em Hale e Wright (2001a), pp.307-32.

7 – APÊNDICE [268]

É nosso objetivo nesse apêndice mostrar a derivação dos axiomas de Dedekind-Peano a partir do Princípio de Hume na linguagem da lógica de segunda ordem (O Teorema de Frege). Começaremos, então, estabelecendo o sistema lógico no qual será feita tal derivação. O sistema terá três tipos de variáveis, a saber:

(1) variáveis objectuais (com ou sem subscrito) que percorrem os objetos do domínio: a, b, c, x, y, z,..., a_1, a_2, ... b_{10},...

(2) variáveis conceituais ou de predicados unários (com ou sem subscrito) que percorrem conceitos sob os quais caem os objetos do domínio (ou seja, conceitos de primeira ordem): F, G, H, F_1, G_{20}, ...

(3) variáveis relacionais binárias ou de predicados binários (com ou sem subscrito) que percorrem relações sob as quais caem pares de objetos do domínio (isto é, relações de primeira ordem): f, f_1, ...

Os axiomas e as regras de inferência são os axiomas e regras de inferência da lógica de segunda ordem, em particular, teremos o axioma da compreensão de segunda ordem (impredicativo):

$\exists R^n \forall x_1,..., x_n (R^n x_{1,...,} x_n \leftrightarrow A(x))$, onde A é qualquer fórmula e R não ocorre livre em A.

Mas, como precisamos somente de conceitos (ou predicados unários) e relações binárias (ou predicados binários), então precisamos somente desses dois esquemas de axiomas da compreensão:

(a) $\exists F \forall x(Fx \leftrightarrow A(x))$, onde F não ocorre livre em A

(b) $\exists f \forall x \forall y(xfy \leftrightarrow B(x,y))$, onde f não ocorre livre em B

Definições de Conceitos Aritméticos:

Definição do Número Zero: $0 =_{def.} Nx(x \neq x)$

Definição de Predecessor (ou Sucessor): $Pred(m,n) /_{def} \exists F \exists x[Fx \ \& \ n=Nz:Fz \ \& \ m=Nz:(Fz \ \& \ z \neq x)]$

Definição de Hereditariedade: $Her(F,f) =_{def.} \forall \mathfrak{b} \forall \mathfrak{a}(F\mathfrak{b} \ \& \mathfrak{b} f \mathfrak{a} \rightarrow F\mathfrak{a})$

Definição de Ancestral Forte: $xf^*y =_{def.} \forall \mathfrak{F}((Her(\mathfrak{F},f) \& \forall \mathfrak{a} \ (f(x,\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{a})) \rightarrow Fy)$

Definição de Ancestral Fraco: $xf^{*=}z =_{def.} (xf^*z \ v \ x=z)$

[268] Neste apêndice, seguimos as provas de Tabata (2000).

Definição de Função: $\mathbf{F}(f)=_{def.}\ \forall e\forall b\forall a(bfe\ \&bfa\rightarrow a=e)$

Definição de Número Natural: ù(n)$=_{def.}$ 0Pred$^{*=}$n.

Definição da Inversa de uma Relação: Invers(Rxy)$=_{def.}$ Ryx

O Princípio de Hume

∀F∀G(NxFx=NxGx↔F1-1G), ou seja, ∃R[∀x∀y∀z(Rxy&Rxz→y=z)&
∀x∀y∀z(Rxz&Ryz→x=y)&
∀x(Fx→∃y(Gy&Rxy))&
∀x(Gx→∃y(Fy&Ryx))].

Numbers

∀F∃!x∀G(Gηx↔F1-1G)

1- Prova do Princípio de Hume a partir de *Numbers*[269]

Como dissemos, *Numbers diz que para todo conceito F existe um único objeto x para todo conceito G tal que G está em x se e somente se G é equinumérico a F*. *Numbers* assume, como Frege assume em *Grundlagen der Arithmetik*, a existência e unicidade da extensão do conceito *ser equinumérico a F*, de maneira que um conceito G qualquer pertence a tal extensão se G é equinumérico a F[270] [271].

Definamos agora: o número cardinal que pertence a F é x se e somente se para todo conceito H, H está em x se e somente se H é equinumérico a F. Em símbolos:

(1) NxFx=x↔∀H(Hηx↔H1-1F)[272]

Provemos agora o Princípio de Hume: NxFx=NxGx↔F1-1G.

A prova é dada em duas etapas. Primeiro, assumiremos que NxFx=NxGx, e mostraremos que F1-1G. Assim, seja NxFx=NxGx. Mas, é uma verdade lógica que NxFx=x↔NxFx=x. Como, NxFx=NxGx, segue-se por identidade que NxFx=x↔NxGx=x. Pela definição acima (1), temos que ∀H(Hηx↔H1-1F)↔

---

[269] Seguimos a derivação dada por Boolos (1987b) e Tabata (2000).

[270] *Numbers* é consistente. Para a prova da consistência de *Numbers*, leia Boolos (1987b) e Tabata (2000).

[271] Como afirmamos, Frege define o número cardinal que pertence a um conceito F como sendo a extensão do conceito *equinumérico a F*.

[272] Tabata escreve o seguinte: "Esta fórmula desempenha o papel de uma ponte que conecta #F [*NxFx*] ao número cardinal x de F, que é o número tal que Fηx, e a existência do qual é assegurada pelo axioma *Numbers*". (Tabata, 2000, pág. 268).

$\forall H(H\eta x \leftrightarrow H1\text{-}1G)$. Da lei lógica, $NxFx=NxFx$[273] e definição (1), obtemos que $\forall H(H\eta NxFx \leftrightarrow H1\text{-}1F)$. Mas, como $\forall H(H\eta x \leftrightarrow H1\text{-}1F) \leftrightarrow \forall H(H\eta x \leftrightarrow H1\text{-}1G)$, então $\forall H(H\eta NxFx \leftrightarrow H1\text{-}1G)$. Agora, de $\forall H(H\eta NxFx \leftrightarrow H1\text{-}1F)$, instanciando universalmente, obtemos $F\eta NxFx \leftrightarrow F1\text{-}1F$. Como $F1\text{-}1F$ (verdade lógica de segunda ordem), obtemos $F\eta NxFx$. De $\forall H(H\eta NxFx \leftrightarrow H1\text{-}1G)$, instanciando universalmente, obtemos $F\eta NxFx \leftrightarrow F1\text{-}1G$. Como, $F\eta NxFx$, obtemos $F1\text{-}1G$. QED.

Assumamos agora que $F1\text{-}1G$, pretendemos provar que $NxFx=NxGx$. A relação de equinumerosidade ($\Phi 1\text{-}1\Psi$) é uma relação de equivalência, de maneira que se $F1\text{-}1G$, então $\forall H(F1\text{-}1H \leftrightarrow G1\text{-}1H)$. Instanciando universalmente, $F1\text{-}1H \leftrightarrow F1\text{-}1G$. Por lógica proposicional $(P \leftrightarrow Q \rightarrow ((R \leftrightarrow P) \leftrightarrow (R \leftrightarrow Q)))$, obtemos que $(H\eta x \leftrightarrow H1\text{-}1F) \leftrightarrow (H\eta x \leftrightarrow H1\text{-}1G)$. Generalizando universalmente, chegamos a $\forall H((H\eta x \leftrightarrow H1\text{-}1F) \leftrightarrow (H\eta x \leftrightarrow H1\text{-}1G))$. Segundo nossa definição (1), temos que $NxFx=x \leftrightarrow \forall H(H\eta x \leftrightarrow H1\text{-}1F)$ e $NxGx=x \leftrightarrow \forall H(H\eta x \leftrightarrow H1\text{-}1G)$. Assim, $NxFx=x \leftrightarrow NxGx=x$. Da lei lógica, $NxFx=NxFx$ (assegurada pelo axioma *Numbers*), obtemos que $NxFx=NxFx \leftrightarrow NxFx=NxGx$, e assim obtemos, por lógica proposicional, $NxFx=NxGx$. QED. Assim, a partir de *Numbers* e a definição (1), intimamente ligada ao axioma *Numbers*, provamos o Princípio de Hume. A partir do Princípio de Hume é possível provar *Numbers*, basta definir a relação η como sendo $F\eta x \leftrightarrow NxFx=x$. Deixamos ao leitor a prova.

2- A Prova do Teorema de Frege

O Teorema de Frege é, como já dissemos, a derivação dos axiomas da aritmética de segunda ordem de Dedekind-Peano. Estes axiomas são:

(1) Zero é um número natural: ù0

(2) Todo número natural tem um único sucessor que também é um número natural: ∀x (ùx→∃y(ùy & Pred(x,y) & ∀z(Pred(x,z)→z=y)))

(3) Zero não é um sucessor de nenhum número natural: ∀x(ùx→5Pred(x,0))

(4) Para todo número natural x e y, se o sucessor de x é o mesmo que o sucessor de y, então x e y são iguais (ou seja, a inversa da relação *sucessor* é uma função): ∀x∀y∀z(ùx & ùy & ùz & Pred(x,z) & Pred (y,z)→x=y).

[273] *Numbers* assegura a existência de *NxFx*.

(5) Indução matemática: Para toda propriedade F, se zero é F e se todo sucessor de um número natural que é F também é F, então todo número natural é F. ∀F[(F0 & ∀x∀y(Fx & Pred (x,y)→Fy))→∀x(ùx→Fx)].

Antes de começarmos as provas, vale mencionar o seguinte fato básico: Se dois conceitos são coextensionais, então eles são equinuméricos.

∀x(Fx↔Gx)→(F1-1G)[274]

Método de Indução

Seguiremos a sugestão de Tabata e utilizaremos o seguinte método de indução. Para provarmos algum teorema da forma xf*y→...y..., escolheremos uma propriedade F=[z:...z...], assumiremos ∀**b**∀**a**(**b** V F**b**)&**b**f**a** e deduziremos F**a** [275]. E, conseqüentemente, obtemos Fy (a partir da definição de ancestral forte). Note que a definição de ancestral forte no nosso método de indução é diferente, mas é possível mostrar que (∀**b**∀**a**((F**b** & **b**f**a**)→F**a**) & ∀**a** (xf**a**→F**a**)) é equivalente a (∀**b**∀**a**((x=**b** v F**b**) & **b**f**a**)→F**a**). Prova:

Assuma (∀**b**∀**a**((x=**b** V F**b**) & **b**f**a**)→F**a**). Provaremos (∀**b**∀**a**((F**b** & **b**f**a**)→F**a**) & ∀**a** (xf**a**→F**a**)). Instancie universalmente (duas vezes), (((x=x v Fx) & xfy)→Fy). Por lógica proposicional (A & (B v C)↔(A & B) v (A & C)), temos que ((x=x & xfy) v (Fx & xfy)→Fy). Por lógica proposicional (((P v Q)→R)↔((P→R) & (Q→R))), temos que ((x=x & xfy)→Fy) & ((Fx & xfy)→Fy). Por cancelamento, ((xfy→Fy) & ((Fx & xfy)→Fy)). Generalize universalmente, então temos (∀**b**∀**a**((F**b** & **b**f**a**)→F**a**) & ∀**a** (xf**a**→F**a**)), QED. A inversa, não mostraremos. Basta assumir (∀**b**∀**a**((F**b** & **b**f**a**)→F**a**) & ∀**a** (xf**a**→F**a**)) e provar (∀**b**∀**a**((x=**b** v F**b**) & **b**f**a**)→F**a**).

Preferimos usar a versão de Tabata, pois facilitará nossas provas.

Teorema 1 - xfy→xf*y

O teorema 1 é o teorema 91 que foi provado por Frege em *Begriffsschrift*.

Prova do teorema 1: xfy→xf*y

[274] Tal fato pode ser provado, mas deixaremos isto para o leitor.

[275] Heck e Boolos (1997) propõem três métodos de indução. O primeiro é justamente este que estamos utilizando. Eles chamaram de indução 1. A indução 2 é usada quando temos de provar uma proposição que tem o ancestral fraco, xf*⁼y. Como Boolos e Heck mostram, a indução 2 é derivada da indução 1 (proposição 144 de *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege). A indução 3 é a proposição 152 de *Grundgesetze der Arithmetik*. Vale a pena ler este artigo.

Assumiremos que xfy. Como temos de mostrar que xf*y, assumiremos que para toda propriedade F, (∀$\mathfrak{b}$∀$\mathfrak{a}$((x=$\mathfrak{b}$ v F$\mathfrak{b}$) & $\mathfrak{b}$f$\mathfrak{a}$)→F$\mathfrak{a}$). Devemos provar que Fy. Instancie universalmente, ((x=x v Fx) & xfy)→Fy. Como x=x, é uma lei lógica, então (x=x v P) é uma lei lógica, em particular, (x=x v Fx) também é uma lei lógica. Como assumimos xfy, então ((x=x v Fx) & xfy). Por *modus ponens*, obtemos Fy. Agora condicionalizando, temos que (∀$\mathfrak{b}$∀$\mathfrak{a}$((x=$\mathfrak{b}$ v F$\mathfrak{b}$) & $\mathfrak{b}$f$\mathfrak{a}$)→F$\mathfrak{a}$)→Fy. Generalizando universalmente (segunda ordem), ∀$\mathfrak{F}$((∀$\mathfrak{b}$∀$\mathfrak{a}$((x=$\mathfrak{b}$ v F$\mathfrak{b}$) & $\mathfrak{b}$f$\mathfrak{a}$)→F$\mathfrak{a}$)→Fy), ou seja, temos xf*y. Como derivamos xf*y de nossa hipótese, então, condicionalizando, xfy→xf*y. QED.

Teorema 2 – xf*y & yf*z→xf*z (transitividade do ancestral forte). O teorema 2 é o teorema 98 de *Begriffsschrift*.

Prova do teorema 2 – xf*y & yf*z→xf*z

Assumiremos xf*y, yf*z. Também assumiremos que para toda propriedade F, (∀$\mathfrak{b}$∀$\mathfrak{a}$((x=$\mathfrak{b}$ v F$\mathfrak{b}$) & $\mathfrak{b}$f$\mathfrak{a}$)→F$\mathfrak{a}$). Temos de provar Fz. Como assumimos yf*z, então temos, pela definição de ancestral forte, que ∀$\mathfrak{F}$((∀$\mathfrak{b}$∀$\mathfrak{a}$((y=$\mathfrak{b}$ v $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$) & $\mathfrak{b}$f$\mathfrak{a}$)→$\mathfrak{F}\mathfrak{a}$)→$\mathfrak{F}$z)[276]. Portanto, temos de provar que (∀$\mathfrak{b}$∀$\mathfrak{a}$((y=$\mathfrak{b}$ v F$\mathfrak{b}$) & $\mathfrak{b}$f$\mathfrak{a}$)→F$\mathfrak{a}$), e por *modus ponens*, obter Fz. Assumamos então para quaisquer objetos a e b, ((y=a v Fa) & afb). Nosso objetivo é provar então que Fb. Como, por hipótese, xf*y, então, segundo a definição de ancestral forte, ((∀$\mathfrak{b}$∀$\mathfrak{a}$((x=$\mathfrak{b}$ v F$\mathfrak{x}$) & $\mathfrak{b}$f$\mathfrak{a}$)→F$\mathfrak{a}$)→Fy). Ora, como supomos que (∀$\mathfrak{b}$∀$\mathfrak{a}$((x=$\mathfrak{b}$ v F$\mathfrak{b}$) & $\mathfrak{b}$f$\mathfrak{a}$)→F$\mathfrak{a}$) (método indutivo), então, por *modus ponens*, Fy. Mas, como supusemos (a=y v Fa) & afb, então se segue, por lógica proposicional (A & B→A), (a=y v Fa). Aqui, então, temos dois casos: (1) a=y. Neste caso, segue-se que Fa, uma vez que Fy. (2) Fa. Neste caso, segue-se Fa, trivialmente. Portanto, de (1) e (2) temos Fa. Uma vez que Fa, por lógica proposicional (B→B v A), temos (x=a v Fa). Mas, segue-se de ((y=a v Fa) & afb), por lógica proposicional (A & B→B), afb. Mas, como (x=a v Fa), temos que ((x=a v Fa) & afb), por lógica proposicional (lei da conjunção: A, B ˆ A & B). De (∀$\mathfrak{b}$∀$\mathfrak{a}$((x=$\mathfrak{b}$ v F$\mathfrak{b}$) & $\mathfrak{b}$f$\mathfrak{a}$)→F$\mathfrak{a}$), instanciando universalmente, obtemos (((x=a v Fa) & afb)→Fb). Desta proposição e ((x=a v Fa) & afb), por *modus ponens*, obtemos Fb. Portanto, uma vez que obtemos Fb de nossa hipótese ((a=y v Fa) & afb), condicionalizando (A|Bˆ|A→B), obtemos que ((a=y v Fa) &

afb)→Fb. Generalizando universalmente, (∀**b**∀**a**((y=**b** v F**b**) & **b**f**a**)→F**a**). Mas, pela hipótese yf*z, temos, segundo a definição de ancestral forte, ((∀**b**∀**a**((y=**b** v F**x**) & **b**f**a**)→F**a**)→Fz). Portanto, por *modus ponens*, Fz. Uma vez que derivamos esta proposição de nossa hipótese indutiva, a saber, (∀**b**∀**a**((x=**b** v F**b**) & **b**f**a**)→F**a**), podemos condicionalizar e, assim, obtemos (∀**b**∀**a**((x=**b** v F**b**) & **b**f**a**)→F**a**)→Fz. Ora, esta última proposição é nossa definição de ancestral forte, portanto xf*z [277]. QED.

Teorema 3 – NxFx=0↔∀x5Fx. Este teorema é citado por Frege em *Grundlagen der Arithmetik*, §75[278].

Prova do teorema 3 - NxFx=0↔∀x5Fx

A prova se dará em duas etapas. Primeiro, assumiremos que NxFx=0 e provaremos que ∀x5Fx. Pela definição do número zero, temos que NxFx=Nx(x≠x). A partir do Princípio de Hume, temos, então, que F1-1[x:x≠x], por lógica proposicional. Como, ∀x5(x≠x), ou seja, o conceito *ser diferente de si mesmo* é vazio, então F também é vazio, uma vez que é equinumérico a [x:x≠x][279]. Isto quer dizer que ∀x5Fx. QED.

Agora, assumamos que ∀x5Fx. Teremos de provar que NxFx=0. Da lei lógica, A→(5A)→B, temos que x=x→(x≠x→Fx). Como, x=x, temos, por *modus ponens*, (x≠x→Fx). Da lei lógica 5A→(A→B), temos que 5Fx→(Fx→x≠x). Como ∀x5Fx, instanciando universalmente, obtemos que 5Fx. Por *modus ponens*, obtemos (Fx→x≠x). Desta proposição e de (x≠x→Fx), por lógica proposicional, obtemos que (Fx↔ x≠x). Generalizando universalmente, temos que ∀x(Fx↔ x≠x). Do fato básico que mencionamos acima, a saber, ∀x(Fx↔Gx)→F1-1G, obtemos que F1-1[x:x≠x]. Pelo Princípio de Hume, então, segue-se que NxFx=Nx(x≠x). Pela definição do número zero, então NxFx=0. QED.

---

276 Temos, é claro, que instanciar universalmente (segunda ordem). Partiremos, para facilitar as provas, desse fato.

277 Na verdade, teríamos ainda que generalizar universalmente (segunda ordem).

278 "Agora, deve ser possível provar, por meio do que já foi estabelecido, que todo conceito sob o qual não cai nenhum objeto é equinumérico a qualquer outro conceito sob o qual não cai nenhum objeto, e é equinumérico somente a tais conceitos; a partir disto, segue-se que 0 é o número cardinal que pertence a qualquer tal conceito e que nenhum objeto cai sob qualquer conceito se o número que pertence a este conceito é 0". (Frege, 1884, §75).

279 Tabata escreve o seguinte: "Se para qualquer objeto x, é verdadeiro que Fx, então, pela definição de ≈ [a relação de equinumerosidade], há alguma relação ϕ e um único objeto y tal que xϕy ∧ y≠y; mas, isto contradiz a lei lógica y=y". (Tabata, 2000, 271).

Teorema 4 – $Pred(m,n)\ \&\ Pred(m',n') \rightarrow (m=m' \leftrightarrow n=n')$. Esse teorema mostra que a relação de sucessor é uma relação 1-1. Na §78, proposição 5 de *Grundlagen der Arithmetik*, Frege diz que "a relação de m a n que é estabelecida pela proposição: 'n se segue diretamente após m na série natural dos números' é uma relação 1-1" (Frege, 1884, §78).

Prova do teorema 4 - $Pred(m,n)\ \&\ Pred(m',n') \rightarrow (m=m' \leftrightarrow n=n')$

Temos de assumir o conseqüente da proposição acima, ou seja, temos de assumir que $Pred(m,n)\ \&\ Pred(m',n')$. Para provarmos que $(m=m' \leftrightarrow n=n')$, temos de assumir que $m=m'$ e provar $n=n'$. E também assumir $n=n'$ e provar $m=m'$. Portanto, assumamos que $m=m'$. Pela definição de sucessor, temos que para algum objeto a e algum conceito F, $n=NxFx\ \&\ Fa$ e $m=Nx(Fx\ \&\ x\neq a)$. Da mesma maneira, pela relação de sucessor, temos que para algum objeto b e algum conceito G, $n'= Nx\ Gx\ \&\ Fb\ \&\ m'=Nx(Gx\ \&\ x\neq b)$. Como, $m=m'$, então $Nx(Fx\ \&\ x\neq a)=Nx(Gx\ \&\ x\neq b)$. Aplicando o Princípio de Hume, $[x:Fx\ \&\ x\neq a]1\text{-}1[x:Gx\ \&\ x\neq b]$, ou seja, existe uma relação R que coordena 1-1 os objetos que caem sob o conceito $[x:Fx\ \&\ x\neq a]$ e os objetos que caem sob o conceito $[x:Gx\ \&\ x\neq b]$. Agora, se assumirmos a relação $R\cup\{\langle a,b\rangle\}$ (R'), podemos mostrar R' coordena 1-1 os Fs e os Gs (ou seja, temos de mostrar que R'é 1-1 e também correlaciona os Fs e os Gs). Deixaremos ao leitor esta prova [280]. Agora, se F1-1G, então aplicando o Princípio de Hume, obtemos que $NxFx=NxGx$. Mas, $NxFx$ é n e $NxGx$ é n'. Portanto $n=n'$. QED.

Assumamos agora que $n=n'$. Temos de mostrar que $m=m'$. Ora, sabemos, pela definição de sucessor, que n é $NxFx$ e n' é $NxGx$, ou seja, $NxFx=NxGx$. Aplicando o Princípio de Hume, temos que F1-1G, ou seja, existe uma relação R que coordenada 1-1 os Fs e os Gs. Assuma, então, a relação $R'=[Rxy\ \&\ (x\neq a\ \&\ y\neq b)]\ v\ [x=a\ \&\ y=b]$. R' coordena 1-1 os Fs diferentes de a e os Gs diferentes de b, ou seja, $[x:Fx\ \&\ x\neq a]\ 1\text{-}1[x:Gx\ \&\ x\neq b]$ (não mostraremos a prova)[281]. Aplican-

[280] Outra maneira é definir a relação R'da seguinte maneira: $[Rxy\ \&\ (x\neq a\ \&\ y\neq b)]\ v\ [x=a\ \&\ y=b]$. R' coordena 1-1 os Fs e os Gs. Para provar que R'é uma função 1-1, temos de provar que R'é uma função, isto é, se $R'xy\ \&\ R'xz$, então $y=z$. E temos de provar que a inversa de R'é uma função, ou seja, se $R'xz\ \&\ R'yz$, então $x=y$. Para mostrar que os Fs e os Gs estão correlacionados, temos de supor Fx e mostrar que há um objeto y que é G e $R'xy$. E também temos de supor Gy, e mostrar que existe um x que é F e $R'xy$.

[281] Ver nota anterior.

do o Princípio de Hume, temos que Nx (x:Fx & x≠a)=Nx(x:Gx & x≠b). Ora, mas Nx (x:Fx & x≠a) é m e Nx(x:Gx & x≠b) é m´. Assim, m=m´. QED.

Axioma 4 da Aritmética de Dedekind-Peano - ∀x∀y∀z((ùx & ùy & ùz & Pred(x,z) & Pred (y,z))→x=y).

Prova do Axioma 4 da Aritmética de Dedekind-Peano - ∀x∀y∀z(ùx & ùy & ùz & Pred(x,z) & Pred (y,z)→x=y).

O axioma 4 é uma conseqüência do teorema 4. Assumamos o teorema 4, Pred(m,n) & Pred(m´,n´)→(m=m´↔n=n´). Por lógica proposicional, ((P→(Q↔R))→((P & R)→Q)), obtemos, então, (Pred(m,n) & Pred(m´,n´) & n=n´→m=m´). Generalizando universalmente (e trocando m por x, m´ por y e n por z) obtemos ∀w(Pred(x,z) & Pred(y,w) & z=w→x=y). Por lógica de predicados, (∀x(Fx→P)↔(∃xFx→P)), obtemos ∀w(Pred(x,z) & Pred(y,w) & z=w→x=y)↔(∃w(Pred(x,z) & Pred(y,w) & z=w)→x=y). Por lógica proposicional, ((P↔Q)→(P→Q)), ∀w(Pred(x,z) & Pred(y,w) & z=w→x=y)→(∃w(Pred(x,z) & Pred(y,w) & z=w)→x=y). Como ∀w(Pred(x,z) & Pred(y,w) & z=w→x=y), aplicando *modus ponens*, obtemos ∃w(Pred(x,z) & Pred(y,w) & z=w)→x=y. Agora, por lógica de predicados, temos que (∃w(Pred(x,z) & Pred(y,w) & z=w)↔Pred(x,z) & Pred(y,z)), portanto, por lógica proposicional, obtemos Pred(x,z) & P(y,z)→x=y. Desta proposição, por lógica proposicional, ((P→Q)→(R & P→Q)), obtemos (ùx & ùy & ùz & Pred(x,z) & Pred(y,z)→x=y). Generalizando universalmente, obtemos ∀x∀y∀z((ùx & ùy & ùz & Pred(x,z) & Pred(y,z))→x=y). QED.

Teorema 5 - 5Pred(m,0), ou seja, zero não é um sucessor.

Prova do teorema 5 - 5Pred(m,0)

A prova é por redução ao absurdo, ou seja, assumiremos que Pred(m,0). Pela definição de sucessor, temos que para algum objeto a e algum conceito F, n=NxFx & Fa & m=Nx(Fx & x≠a). Assim, 0=NxFx & Fa & m=Nx(Fx & x≠a). Pelo teorema 3, temos que NxFx=0↔∀x5Fx. Ora, como 0=NxFx, então ∀x5Fx. Instanciando universalmente, 5Fa. Mas, isto contradiz a proposição acima que Fa. Portanto, 5Pred(m,0).

Axioma 3 da aritmética de Dedekind-Peano - ∀x(ùx→5Pred(x,0))

Prova do Axioma 3 da aritmética de Dedekind-Peano - ∀x(ùx→5Pred(x,0))

O axioma 3 é uma conseqüência do teorema 5. Assuma que 5Pred(x,0). Por lógica proposicional (Q ˆ P→Q), obtemos que ùx→5Pred(x,0). Generalizando universalmente, temos ∀x(ùx→5Pred(x,0)). QED.

Axioma 1 da aritmética de Dedekind-Peano - ù0

O axioma 1 é uma conseqüência trivial da definição de número natural.

Prova do Axioma 1 da aritmética de Dedekind-Peano - ù0

Uma vez que 0=0, então se segue, por lógica proposicional (A→B v A), 0P*0 v 0=0. Pela definição de número cardinal, ù0.

Axioma 5 da aritmética de Dedekind-Peano - ∀F[(F0 & ∀x∀y(Fx & Pred (x,y)→Fy))→∀x(ùx→Fx)] (a indução matemática).

Prova do axioma 5 da aritmética de Dedekind-Peano

A idéia é supor qualquer propriedade F. Também temos de supor que zero é F, F0, e também temos de supor que o sucessor de um número que é F é também F, ∀x∀y(Fx & Pred(x,y)→Fy), passo indutivo. Temos de provar que para qualquer objeto z, se z é um número natural, então z é F, (ùz→Fz), de onde provaremos que ∀x(ùx→Fx). Pela definição de número natural, temos que ùz é Pred*$^{=}$(0,z). Mas, pela definição de ancestral fraco, Pred*$^{=}$(0,z) é (Pred*(0,z) v z=0). Portanto, temos de supor que (Pred*(0,z) v z=0). Temos dois casos. (1) Assuma Pred*(0,z). Temos de mostrar então que Fz. Note que temos de usar nosso método indutivo (uma vez que temos a relação de ancestral forte, Pred*(0,z)). Assim, pelo axioma da compreensão, coloque F=[z:Fz]. Assumamos que (a=0 v Fa) & Pred(a,b). Devemos derivar Fb. De (a=0 v Fa) & Pred(a,b), por lógica proposicional (A & B→A), obtemos (a=0 v Fa). Novamente, temos aqui dois casos. (1´) se a=0, então, como F0 (nossa hipótese), Fa. (2´) se Fa, então Fa. De ambos os disjuntos, obtemos Fa. Mas, também de (a=0 v Fa) & Pred(a,b), obtemos por lógica proposicional, (A&B→B), que Pred(a,b). Como Fa, então, por lógica proposicional, Fa & Pred(a,b). Mas, segundo o nosso passo indutivo, ∀x∀y(Fx & Pred(x,y)→Fy). Instanciando universalmente, temos que (Fa & Pred(a,b))→Fb. Aplicando *modus ponens* entre esta última proposição e Fa & Pred(a,b), então Fb. Portanto, ((a=0 v Fa) & Pred(a,b))→Fb (condicionalizando). Pela definição de ancestral forte, a saber, (((a=0 v Fa) & Pred(a,b))→Fb)→Fz, então, por *modus* *ponens*, Fz. Assim, a partir do nosso primeiro disjunto (1) Pred*(0,z), então Fz. Agora, assumamos o segundo disjunto 0=z. Ora, uma vez que F0, então, Fz. Portanto de ambos os disjuntos Pred*(0,z) e z=0, obtemos Fz. Portanto, (Pred*(0,z) v z=0)→Fz. Por definição de número natural, (ùz→Fz). Generalizando universalmente, ∀x(ùx→Fx). QED.

Falta provar o axioma 2 de Dedekind-Peano. Infelizmente, a prova deste axioma é muito longa e, por isso, não a daremos aqui. Todavia, mencionaremos os teoremas necessários para sua derivação.

Teorema 6 – Pred*(x,n)→∃m(Pred(m,n)) & ∀m[Pred(m,n)→(Pred*(x,m) v x=m)]

Este teorema diz que se n se segue após a x na relação de sucessor, então existe um m tal que m precede n e para todo objeto m, se m precede n, então x precede m ou x=m. A prova deste teorema é dada via o método indutivo. Note que o antecedente do teorema 6 é uma relação de ancestral forte. Assim, defina uma propriedade F=[z: ∃mPred(m,z) & ∀m(Pred(m,z→Pred*$^{=}$(x,m)))]. Derive Fb. E assim, Fz.

Teorema 7 – Pred*(0,n)→5Pred*(n,n)

O teorema 7 afirma que se n se segue após 0 na relação de sucessor, então n não se segue após a si mesmo na relação de sucessor. O antecedente é necessário, pois não é possível provar diretamente que ∀x5Pred*(x,x), uma vez que se x é um número cardinal de um conceito infinito, então Pred*(x,x). Isso também está conectado com o que dissemos em **3**, nota 132. O teorema 7 é provado via método indutivo, tomando F=[z:5Pred*(z,z)]. Também é usado na prova o teorema 6.

Teorema 8 – Pred(m,n) & Pred*(0,n)→∀x(Pred*$^{=}$(x,m)↔(Pred*$^{=}$(x,n) & x≠n))

Este teorema diz que se m precede n e n se segue após 0 na relação de sucessor, então os conceitos [x:Pred*$^{=}$(x,m)] e [x:Pred*$^{=}$(x,n) & x≠n] são coextensionais. Note que deste teorema é possível provar, pelo fato básico, que [x:Pred*$^{=}$(x,m)]1-1[x:Pred*$^{=}$(x,n) & x≠n] e, portanto, aplicando o Princípio de Hume, que Nx(Pred*$^{=}$(x,m))= Nx(Pred*$^{=}$(x,n) & x≠n). Também utilizamos na prova do teorema 8, os teoremas 6 e 7.

Teorema 9 – Pred(m,n) & P*(0,n)→ Pred (Nx(Pred*$^{=}$(x,m)), Nx(Pred*$^{=}$(x,n)))

O teorema 9 diz que se m precede n e n se segue após 0 na relação de sucessor, então o número que pertence ao conceito [x:$Pred^{*=}(x,m)$] precede o número que pertence o conceito [x:$Pred^{*=}(x,n)$]. Pelo teorema 8, temos que $Pred(m,n)$ & $Pred^{*}(0,n) \rightarrow \forall x(Pred^{*=}(x,m) \leftrightarrow (Pred^{*=}(x,n)$ & $x \neq n))$. Suponha o antecedente do teorema 9, obtemos então $\forall x(Pred^{*=}(x,m) \leftrightarrow (Pred^{*=}(x,n)$ & $x \neq n))$. Pelo fato básico e Princípio de Hume, temos que $Nx(Pred^{*=}(x,m)) = Nx(Pred^{*=}(x,n)$ & $x \neq n)$. Ora, é possível provar que o número do conceito [x:$Pred^{*=}(x,n)$ & $x \neq n$] precede o número que pertence ao conceito [x:$Pred^{*=}(x,n)$]. Mas, como $Nx(Pred^{*=}(x,m)) = Nx(Pred^{*=}(x,n)$ & $x \neq n)$, então $Pred(Nx(Pred^{*=}(x,m)), Nx(Pred^{*=}(x,n)))$.

Teorema 10 – $Pred(m,n) \rightarrow (Pred^{*=}(0,m)$ & $Pred(m, Nx(Pred^{*=}(x,m))) \rightarrow Pred^{*=}(0,n)$ & $Pred(n, Nx(Pred^{*=}(x,n))))$.

O teorema 10 afirma que se m precede n, então se m é número natural e m precede o número que pertence ao conceito *ser predecessor de m ou igual a m*, então n é número natural[282] e n precede o número que pertence ao conceito *ser predecessor de n ou igual a n*. Para provar o teorema 10, precisamos dos teoremas 1, 2, 4, e 9.

Teorema 11 – $Pred(0,Nx(Pred^{*=}0))$

O teorema 11 diz que o número zero precede o número do conceito *ser o* predecessor *de zero ou igual a zero*. Para provar o teorema 11, necessitamos dos teoremas 3, 5, 6.

Teorema 12 – $Pred^{*=}(0,n) \rightarrow Pred^{*=}(0,n)$ & $Pred(n,Nx(Pred^{*=}(x,n)))$

O teorema 12 afirma que n número natural se e somente se n é número natural e n precede o número que pertence ao conceito *ser predecessor de n ou igual a n*. Para provar o teorema 12, são necessários os teoremas 10, 11. A prova também utiliza o método indutivo.

Teorema 13 - ùn$\rightarrow Pred(n, Nx(Pred^{*=}(x,n)))$

O teorema 13 afirma que se n é número natural, então n precede o número que pertence ao conceito *ser predecessor de n ou igual a n*. Provamos utilizando o teorema 12. Assuma que $Pred^{*=}(0,n) \rightarrow Pred^{*=}(0,n)$ & $Pred(n,Nx(Pred^{*=}(x,n)))$. Assuma ùn. Pela definição de número natural, $Pred^{*=}(0,n)$. Por lógica proposicional, (P, P→Q&RˆR), do teorema 12 e Pred*$^{=}$(0,n), obtemos Nx(Pred*$^{=}$(x,n)). Uma vez que derivamos Nx(Pred*$^{=}$(x,n)) de nossa hipótese de que n é número natural, então ùn→Pred(n, Nx(Pred*$^{=}$(x,n))). QED. Tabata propõe provar o teorema 13 via axioma 5 (indução matemática). Neste caso, precisaríamos dos teoremas 10 e 11.

Axioma 2 de Dedekind-Peano - ∀x (x→∃y (ùy & Pred(x,y) & ∀z (Pred(x,z) → z=y)))

O axioma 2 afirma que para todo número natural existe um único sucessor que também é um número natural. A prova utiliza os teoremas 1, 2, 4 e 13.

Como já falamos em **2**, os axiomas 2, 3 e 4 [283] implicam a existência de infinitos números naturais. Este é o teorema de Frege.

[282] Na verdade, Pred*$^{=}$(0,m), ao pé da letra, significa, nesta proposição, que m pertence à série formada pela relação sucessor, ou seja, m se segue após x na relação de sucessor ou m é igual a x. Mas, pela definição de número natural, Pred*$^{=}$(0,m) significa que ùm.

[283] Na verdade, em **2**, dissemos que os axiomas (1) todo número natural tem um sucessor; (2) a relação de sucessor é uma função 1-1; (3) zero não é um sucessor, implicam que existem infinitos números. Agora, note que os axiomas 2 e 4 expressam tudo que é dito por (1) e (2).