4 – ALGUMAS OBJEÇÕES AO PROJETO NEO-FREGEANO E AS RESPOSTAS DE WRIGHT

O objetivo deste capítulo é apresentar e discutir três objeções feitas ao projeto Neo-Fregeano de Wright, a saber, o *Problema das Más Companhias*, o *Problema da Restrição* e o *Problema de Júlio César*, como também, as respostas de Wright a estas objeções.

4.1 – OS PROBLEMAS RELACIONADOS À FILOSOFIA NEO-FREGEANA DE WRIGHT

Frege's Conception of Numbers as Objects suscitou um amplo debate na filosofia analítica contemporânea, e inúmeras objeções foram levantadas ao projeto Neo-Fregeano de Wright. Podemos dividir estas objeções em três campos distintos: (1) objeções aos princípios de abstração, em geral e ao Princípio de Hume, em particular; (2) objeções à lógica empregada para derivar a matemática dos princípios de abstração conceituais; e (3) objeções à extensão do projeto Neo-Fregeano para outros campos da matemática. Apresentaremos nesta seção algumas dessas objeções, mas não as discutiremos profundamente.

As principais objeções aos princípios de abstração são:

(i) o *Problema da Definição Implícita*: a questão é, em que medida uma definição implícita é capaz de nos dar um conhecimento *a priori* de um determinado conceito. Além disso, em que medida os princípios de abstração e, em particular, o Princípio de Hume, podem ser considerados como definições implícitas e *a priori*[204].

(ii) o *Problema da Identidade de Conteúdo*: esse problema está relacionado com o que Frege afirma na §64 de *Grundlagen der Arithmetik*. Segundo ele, os dois lados dos princípios de abstração podem ser considerados como uma reformulação de um mesmo conteúdo conceitual. A questão é, qual é o conteúdo que está sendo reformulado? Outro problema é que Frege, depois de *Grundlagen der Arithmetik*, separou sua noção de conteúdo conceitual nas noções de sentido e referência. Assim, os dois lados dos princípios de abstração, pensados conforme a distinção entre sentido e referência, são reformulações de um mesmo

[204] O Princípio de Hume é uma definição implícita analítica (ver capítulo anterior). Nem todo princípio de abstração é considerado como uma definição implícita analítica. Por exemplo, o Princípio de Direção, apesar de ser considerado como uma definição implícita *a priori* por Wright, não é analítico. A discussão sobre estes tópicos é encontrada em Hale e Wright (2001b).

sentido ou de uma mesma referência? Ambas as hipóteses levam a situações problemáticas[205].

(iii) o *Problema de Júlio César* que já discutimos[206].

(iv) o *Problema da Plenitude*: esse é um problema que ocorre, principalmente, nos princípios de abstração objectuais. Considere o Princípio de Direção. Como afirmamos na introdução, este princípio implica a existência de um objeto abstrato, *a direção de uma reta* a, se existe tal reta a. Seguindo a linha do raciocínio expresso pela sentença anterior, a instância deste princípio teria de ser

se as retas *a* e *b* existem, então a direção da reta *a* = a direção da reta *b*↔a reta *a* é paralela à reta *b*.

Mas, como Wright escreve:

> Todavia, o conceito intuitivo de direção envolvido certamente é tal que nenhuma reta concreta real necessita ocupar uma direção particular. O problema da plenitude é assim o problema de como a ontologia e epistemologia de objetos abstratos fornecidos pelos princípios de abstração podem ser amplas o suficiente para combinar com os nossos preconceitos - como podemos alcançar o conceito de direção, ou de forma, ou de peso, ou de idade que nada acontece para exemplificar. (Hale e Wright, 2001a, pág. 422).

Esse problema está ligado, de certa forma, com a questão da impredicatividade ou não dos princípios de abstração. A maioria dos princípios de abstração objectuais não é impredicativo. Por exemplo, no Princípio de Direção, os objetos abstratos ligados intimamente às retas, direções, não são relevantes para a relação de equivalência *ser paralela a.* Assim, a existência de uma direção depende da existência de uma reta que tem esta direção. No caso do Princípio de Hume, a existência de um número n+1 depende da existência de um conceito instanciado por n+1 objetos. Se o Princípio de Hume não fosse impredicativo, então a existência de um tal conceito dependeria da existência de n+1 objetos no mundo e, assim, teríamos também o *Problema da Plenitude*. Contudo, uma vez que o Princípio de Hume é impredicativo, ou seja, uma vez que os termos formados a partir do operador numérico *Nx...x...* podem ser instâncias dos conceitos que são relevantes para a relação de equinumerosidade, então não é necessário assumir a existência de quaisquer outros objetos senão aqueles cuja existência é provada a partir do Princípio de Hume. Vale mencionar que o

[205] Veja Hale (1997).
[206] Veja Hale e Wright (2001c).

problema da Plenitude não é um problema que ocorre apenas nos princípios de abstração objectuais. Wright escreve:

> Note que seria um erro supor que isto é uma questão que surge somente para abstrações de primeira ordem [ou objectuais]. É uma questão simples reformular qualquer tal abstração em segunda ordem: por exemplo, se confinarmos o domínio das variáveis de segunda ordem F e G a propriedades para as quais paralelismo é uma congruência, a Equivalência de Direção pode ser formulada da seguinte como
> $D(F)=D(G)\leftrightarrow\forall x(Fx\leftrightarrow Gx)$
> - ou seja, ao invés de introduzir o operador de direção através de uma abstração de primeira ordem que denota uma função de primeiro nível dos objetos nos objetos, podemos introduzi-lo através de uma abstração de segunda ordem como uma função de segunda ordem das *propriedades* (propriedades para as quais paralelismo é uma congruência) nos objetos. E, quando a abstração é assim reformulada, a mesma ainda não gera qualquer direção não exemplificada. No caso da Equivalência de Direção de primeira ordem, a direção existe, somente se existe uma reta da qual é a direção. No caso de segunda ordem, a direção existe, somente se há uma propriedade (de retas) da qual é a direção. Na medida em que as propriedades são construídas, como Frege constrói conceitos, de uma maneira puramente extensional, as propriedades de retas – como propriedades em geral – podem ser distinguidas somente se uma delas é exemplificada. Portanto, não deveremos obter mais direções via a rota de segunda ordem do que obteríamos por uma abstração de primeira ordem. (Hale e Wright, 2001a, pág. 423)[207].

(v) *o Problema das Más Companhias*: o *Problema das Más Companhias* é uma objeção que põe em dúvida o caráter analítico do Princípio de Hume (e, em geral, põe em dúvida o caráter analítico dos princípios de abstração conceituais que utilizam apenas noções de lógica de segunda ordem no lado direito para explicar o operador formador de termos *Σ...x...* no lado esquerdo). Tal problema pode ser posto, grosso modo, da seguinte maneira, uma vez que há princípios de abstração inconsistentes quais são as garantias que temos para considerar o Princípio de Hume verdadeiro, e se ele for, analítico?[208]

(vi) *o Problema da Restrição*: o *Problema da Restrição* está ligado com a incompatibilidade entre a Aritmética de Frege e a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC). Uma vez que a Aritmética de Frege assume a existência do número que pertence ao conceito *ser diferente de si mesmo*, ela também poderia assumir a existência do número que pertence ao conceito *ser idêntico a si mesmo*.

[207] Como afirmamos no capítulo anterior, uma relação de equivalência é uma relação de congruência para algumas propriedades relevantes. Em particular, a relação de identidade é uma relação de congruência para toda propriedade. Assim, a relação de paralelismo é uma relação de congruência sobre propriedades que se aplicam a retas, de maneira que se uma reta *a* é um F e *a* é paralela a *b*, então a reta *b* é também um F, e vice versa. Em outras palavras, se paralelismo é uma relação de equivalência sobre retas, então para toda reta x e y, se x é paralela a y, então F(x) se e somente se F(y). E isto justifica o esquema: $D(F)=D(G)\leftrightarrow\forall x(Fx\leftrightarrow Gx)$.

[208] Na verdade, o problema é mais complexo. Mais adiante, discutiremos tal objeção.

Contudo, assumir a existência do número deste último conceito é assumir a existência do número de todas as coisas. Mas, a existência de tal número é negada em ZFC mais definições padrões. Assim, a questão seria, como restringir o escopo dos conceitos aos quais o operador numérico se aplica?

(vii) o *Problema da Impredicatividade*: o *Problema da Impredicatividade* ocorre nos princípios de abstração conceituais e, em particular, no Princípio de Hume. Como já afirmamos, a impredicatividade do Princípio de Hume é um ingrediente vital para a prova da existência de infinitos números naturais. Contudo, de certa forma, a impredicatividade do Princípio de Hume está intimamente ligada ao *Problema de Júlio César*. Uma vez que podemos formar os seguintes conceitos, a saber, $\xi=Nx(x\neq x)$, $\xi=Nx(x\neq x)v\xi=Ny(y=Nx(x\neq x))$ etc., então só poderíamos saber que sob o primeiro conceito cai um e somente um objeto, o número 0, se já sabemos que Júlio César (e qualquer outro objeto) não cai sob tal conceito. Da mesma maneira, só poderíamos saber que sob o segundo conceito caem dois objetos, os números 0 e 1, se já sabemos se Júlio César (e qualquer outro objeto) não cai sob este conceito. Agora, se a solução de Wright ao *Problema de Júlio César* fosse bem sucedida, então não haveria qualquer problema na impredicatividade do Princípio de Hume. Além disso, Dummett (1991, 1998) sustenta que a impredicatividade do Princípio de Hume já pressupõe que os números pertençam ao escopo dos quantificadores de primeira ordem da teoria e, portanto, já pressupõe a existência de infinitos objetos, os números naturais, de maneira que o Teorema de Frege é sem valor; e que o caráter impredicativo da Lei Básica V é o responsável pela inconsistência. Não discutiremos aqui as respostas de Wright a estas objeções, mas vale ressaltar que a impredicatividade sozinha não é a responsável pela inconsistência da Lei Básica V. Há outros fatores cruciais, entre eles que a relação de equivalência de tal lei (coextensividade) divide o domínio dos conceitos em classes de equivalência cuja cardinalidade é a mesma que a do domínio dos conceitos. Se impredicatividade sozinha fosse a responsável pela derivação da contradição da Lei Básica V, então o Princípio de Hume seria também inconsistente. Todavia, isso não é o caso[209].

A principal objeção à lógica empregada na derivação da aritmética em uma perspectiva Neo-Fregeana é:

[209] O leitor interessado pode ler Wright (1997), (1998), (1999) e Boolos (1993).

O Problema do *Status*: esse é um problema já enfatizado ao longo da dissertação, a saber, se a lógica de segunda ordem é, de fato, lógica e, conseqüentemente, analítica. Se ela não for analítica, então a reivindicação de Wright de que a aritmética é analítica, posto que a mesma é derivada de um princípio analítico (definido em termos de noções de segunda ordem) e lógica de segunda ordem, seria errada.

E, finalmente, o projeto Neo-Fregeano teria de estender os seus domínios, para ser bem-sucedido, para além da teoria dos números (pelo menos, provar teoremas da análise como queria Frege). O problema é que a partir do Princípio de Hume podemos provar somente teoremas da aritmética dos números naturais. Assim, é necessário pesquisar a introdução de outros princípios que nos capacitariam provar teoremas da análise. No que se segue, discutiremos três objeções feitas ao Princípio de Hume.

4.2 - O *PROBLEMA DE JÚLIO CÉSAR* REVISITADO

A solução ao *Problema de Júlio César* desempenha um papel central para os objetivos Neo-Fregeanos. Isso se deve a uma razão muito simples, a saber, o Princípio de Hume (assumindo que tal princípio é uma definição implícita e analítica do operador formador de termos *Nx...x...* e do conceito sortal de número cardinal) é somente uma definição parcial de tal conceito. Como já dissemos, o Princípio de Hume é incapaz de nos dar uma resposta afirmativa para a identidade *0=Júlio César* e, em geral, *NxFx=q* (onde *q* é uma variável objectual que é substituída por termos singulares que não são numerais, e que não têm a forma *Nx...x...*). E por que uma solução ao *Problema de César* é importante? Ora, como também dissemos, Frege prova a existência de infinitos números naturais assumindo que eles sejam objetos e possam ser contados. Frege obtém a existência de conceitos que são instanciados por n+1 objetos sem assumir quaisquer outros objetos que não sejam os números. Por exemplo, a partir do conceito lógico *ser diferente de si mesmo* ($\xi \neq \xi$) e do Princípio de Hume, é possível provar a existência do número 0:

(1) $Nx(x\neq x)= Nx(x\neq x)\leftrightarrow (\xi\neq\xi)1\text{-}1(\xi\neq\xi)$, instância do Princípio de Hume
(2) $(\xi\neq\xi)1\text{-}1(\xi\neq\xi)$, uma verdade lógica (segunda ordem)
(3) $Nx(x\neq x)= Nx(x\neq x)$, 1, 2 lógica proposicional
(4) $\exists x(x= Nx(x\neq x))$, 3, lógica de predicados e princípio do contexto.

A partir da existência do número 0, obtemos um conceito que é instanciado por um único objeto, a saber, o conceito *ser igual a zero* ($\xi=0$, ou $\xi=Nx(x\neq x)$). Assim, 1 é definido como sendo o número que pertence ao conceito $\xi=0$ ou $\xi=Nx(x\neq x)$. E a partir de 0 e 1[210], obtemos um conceito instanciado por dois objetos, a saber, o conceito *ser igual a 0 ou ser igual a* 1 ($\xi=Nx(x\neq x)v\xi=Ny(y=Nx(x\neq x))$) do qual extraímos o número 2 e assim por diante. Contudo, dado que não temos uma solução geral ao *Problema de Júlio César*, não podemos sustentar que um único objeto caia sob o conceito $\xi=Nx(x\neq x)$ ou que apenas dois objetos caiam sob o conceito $\xi=Nx(x\neq x)v\xi=Ny(y=Nx(x\neq x))$. Em geral, não podemos afirmar, se não há uma solução ao *Problema de Júlio César*, que sob o conceito $\xi=Nx(Pred^{*=}(x,n))$ [211] caiam n+1 objetos e que, portanto, o número que pertence a tal conceito é n+1. Uma conseqüência da impossibilidade de solucionar o *Problema de Júlio César* é que o Princípio de Hume não poderia ser uma definição implícita analítica do conceito de número cardinal, uma vez que nosso conhecimento de que Júlio César não é um número não se baseia em noções lógica (conseqüentemente, PA2 não seria analítica).

Wright assume que o Princípio de Hume é uma definição parcial do conceito de número cardinal, mas, como apresentamos no capítulo anterior, o Princípio de Hume e **SI** nos dão, ele sustenta, um relato total do conceito de número cardinal (obtemos do Princípio de Hume + **SI** um critério de aplicação deste conceito). Mas, a solução de Wright ao *Problema de Júlio César* é satisfatória?

Após a publicação de *Frege's Conception of Numbers as Objects*, uma série de objeções foram feitas à tentativa de solução de Wright ao problema em questão. Uma primeira crítica estaria ligada com o que Frege diz em *Grundlagen der Arithmetik*:

> Se tentássemos dizer: q é uma direção se q é introduzido por meio da definição estabelecida acima, então deveríamos tratar a maneira na qual o objeto q é introduzido como uma propriedade de q, o que não é. A definição de um objeto não afirma nada sobre o objeto, mas somente estabelece o significado de um símbolo. Depois que isto é feito, a definição se transforma em um juízo que afirma algo sobre o objeto. (Frege, 1884, §67).

O crítico diria que Wright resolve o *Problema de Júlio César*, porque ele assume que um termo singular se refere a um número se este termo é introduzido

---

[210] Podemos provar a existência do número 1 de maneira análoga à do número 0.

pelo Princípio de Hume[212]. Contudo, essa crítica não é, segundo Wright, correta. Ele, como dissemos (pp. 80-3), propõe como solução ao *Problema de Júlio César* o critério N^d que é uma conseqüência do Princípio de Hume mais **SI**. Agora, **SI** é obtido a partir da análise da noção de conceito sortal em geral. E a solução ao problema em questão é dada, principalmente, via **SI**.

Há, no entanto, outras objeções. Uma delas afirma que o critério N^d não é satisfatório, porque não é capaz de banir Júlio César do domínio dos números, isto é, o critério N^d é muito generoso. Uma outra afirma que o critério **SI** é muito forte, uma vez que "impõe resoluções não garantidas *a priori* de uma larga classe de questões de taxonomia sortal" (Hale e Wright, 2001c, pág.371).

Dummett é um dos proponentes da primeira objeção. Ele escreve:

> Este argumento é invalido [a solução ao Problema de Júlio César proposta por Wright] por uma idéia muito simples do que seja um critério de identidade. A determinação do valor de verdade de uma proposição de identidade entre números pode muito bem se tornar um critério de identidade para seres humanos; *o número de primas de Dr. Jekyll coincide com o número de primas de Sr. Hyde porque Dr Jekyll e Sr. Hyde são uma e a mesma pessoa*. (Dummett, 1991, pág. 161)[213].

A crítica de Dummett é, portanto, que o critério N^d não exclui a possibilidade de que números e pessoas compartilhem as mesmas condições de identidade. Podemos, pelo exemplo de Dummett, mostrar que os conceitos *ser prima de Dr. Jekyll* e *ser prima do Sr. Hyde* têm o mesmo número cardinal, mostrando que Dr. Jekyll e Sr. Hyde são a mesma pessoa, ou seja, podemos mostrar que questões de identidade de números podem ser resolvidas por questões de identidade pessoal. Assim, os conceitos *número cardinal* e *pessoa* seriam coincidentes e novamente teríamos o *Problema de Júlio César*. Mas, a objeção de Dummett, segundo Wright e Hale, não é letal. Vamos recapitular o que foi dito na seção **3.6**. Lá, dissemos que Wright propõe o critério **SI** ao analisar a noção de conceito sortal. Tal critério afirma o seguinte: dados dois conceitos sortais F e G que são coincidentes, as condições de verdade de certas proposições de identidade entre objetos que instanciam os conceitos F e G deveriam ser as mesmas. O problema do exemplo acima é que é suposto que Dr. Jekyll e Sr. Hyde são a mesma pessoa, então, dado que a relação de identidade é uma relação de

---

[211] Na verdade, é necessário assumir que n é número natural para mostrar que o conceito [x:Pred*$^=$(x,n)] caem n+1 objetos. Veja apêndice.

[212] Esta crítica é colocada por Dummett (1991, pp. 160-1).

[213] O itálico na passagem acima é nosso.

congruência para todo conceito e, de uma maneira mais geral, para toda função, o número de primas do Dr. Jekyll e do Sr. Hyde é sempre o mesmo. Em geral, dado que Dr. Jekyll=Sr. Hyde, então f(Jekyll)= f(Hyde), para toda função f. Agora, a inversa nem sempre é verdadeira. Não se segue da proposição *o número de primas de* a=*o número de primas de* b que a=b. Por exemplo, assuma que João e André são primos e filhos únicos cujos pais também são filhos únicos. Portanto, o número de primos de João é igual ao número de primos de André, mas não podemos inferir disso que João é o mesmo que André. Todavia, como afirmamos acima, as condições de verdade de certas proposições de identidade entre conceitos sortais coincidentes deveriam ser as mesmas, o que não ocorre no exemplo acima. Wright e Hale sugerem então que a implicação mútua poderia ser uma condição necessária para noção de mesmidade de condições de verdade de proposições de identidade de conceitos sortais coincidentes. Assim, segundo Wright e Hale, a objeção de Dummett de que o critério N^d é generoso não é válida.

Porém, segundo Wright e Hale, a objeção de Dummett indica uma dificuldade potencial à solução do problema discutido. Eles escrevem:

> Se a função expressa por 'o número de xs tal que Rx...' em um domínio de não números fosse necessariamente 1-1 – que no caso de 'Rxy'='x é prima de y' não é – então a implicação ocorreria em ambas as direções. E, neste caso, as proposições de identidade sobre os elementos deste domínio compartilhariam suas condições de verdade com - pelo menos no sentido de ser necessariamente equivalente a - certas proposições de identidade numérica. (Hale e Wright, 2001c, pp. 371-2).

A objeção acima é simples. Tomando o exemplo de Wright e Hale, suponhamos um domínio que consiste dos imperadores romanos de Júlio César a Constantino. Além disso, assumamos uma relação *Pxy* que significa *x é o predecessor imperial de y*. Assumamos também que nenhum imperador pode governar mais de uma vez e que dois imperadores não podem governar ao mesmo tempo. Assim, podemos afirmar que se o número de predecessores imperiais de *a* é igual ao número de predecessores imperiais de *b*, então *a*=*b*. Como também podemos afirmar que se *a*=*b*, então o número de predecessores imperiais de *a* é igual ao número de predecessores imperiais de *b*. As hipóteses estipuladas acima implicam que cada imperador romano, exceto o primeiro que não tem predecessor, tenha apenas um único predecessor. Portanto, cada imperador tem um número diferente de predecessores em relação aos outros. Por exemplo, seja o conjunto de imperadores romanos já ordenado pela relação de *predecessor imperial* {Vespasiano, Tito, Domiciano, Nerva}[214]. Note que o número de predecessores de Vespasiano é 0, o de Tito é 1, o de Domiciano é 2 e, enfim, o de Nerva é 3. Assim, cada imperador pode ser identificado com o número de seus predecessores. E, assim, a condição necessária para noção de mesmidade de condições de verdade de proposições de identidade de conceitos sortais coincidentes, a saber, implicação mútua, é satisfeita. Novamente, temos o *Problema de Júlio César*.

Mas, Hale e Wright apresentam a seguinte solução para esta objeção:

> A resposta imediata deveria ser que a impressão de implicação mútua aqui é apenas uma ilusão, elaborada meramente pelas hipóteses anteriormente estipuladas: não é parte do sentido de qualquer um de seus nomes ou da essência dos imperadores justamente citados que eles fossem imperadores. Assim, a distinção entre Tibério e Galba, por exemplo, é totalmente consistente com os números de seus predecessores ser o mesmo, a saber, 0. (Hale e Wright, 2001c, pp. 372).

Não está muito claro qual é o ponto de Wright e Hale nesta passagem. A crítica à objeção, parece, encontra-se no caráter contingente das estipulações feitas acima. Não é necessário que Galba e Tibério sejam imperadores, e assim, dado que as pessoas representadas por tais nomes não são, nem foram imperadores, segue-se que o número de predecessores imperiais de Galba é igual ao número de predecessores imperiais de Tibério, a saber, 0, mas Galba não é o mesmo que Tibério[215]. Novamente, segundo Wright e Hale, uma vez que a condição necessária (implicação mútua) não é satisfeita, o critério N^d continua sendo válido[216].

Há ainda uma outra objeção similar à anterior sustentada por Stirton (2000). Assumamos que $a=b$ e que $Nx(x=a)=Nx(x=a \vee x=b)$. Novamente, a condição necessária (implicação mútua) é satisfeita. Se $a=b$, então $Nx(x=a)=Nx(x=a \vee x=b)$. Isto por uma razão simples, se $a=b$, então sob os conceitos $\xi=a$ e $\xi=a \vee \xi=b$ cai um único objeto *a* ou *b*, portanto o número que

[214] Assuma que Vespasiano é o primeiro imperador e que Nerva é o último.

[215] Tibério foi precedido, pelo menos, por Augusto (Otávio), de maneira que o número de predecessores imperiais de Tibério não seria 0. Galba foi precedido, pelo menos, por Nero, Cláudio, Calígula, Tibério e Augusto (Otávio), de maneira que o número de seus predecessores imperiais também não é zero. Portanto, a única explicação para a resposta de Wright e Hale para tal objeção é que é apenas contingente que Galba e Tibério sejam imperadores. Portanto, seria consistente que eles sejam distintos, embora tenham o mesmo número de predecessores imperais, a saber, 0 (assumindo que eles não sejam imperadores).

pertence a ambos os conceitos é um e o mesmo. Da mesma maneira, a inversa ocorre, isto é, se *Nx(x=a)=Nx(x=a v x=b)*, então *a=b*[217]. Assim, o conceito de *número cardinal* seria coincidente com qualquer conceito sortal F, uma vez que não é especificado que tipo de objetos são *a* e *b*. Novamente, o *Problema de Júlio César*.

A resposta de Wright e Hale, em parte, é a mesma que a da objeção anterior: não há implicação mútua, pois pode acontecer de *a* e *b* serem apenas contingentemente existentes. Assim, assumindo um mundo no qual *a* existe e *b* não, então teremos que o *Nx(x=a)=Nx(x=a v x=b)*, pois somente *a* cai sob os dois conceitos, todavia $a \neq b$, uma vez que *b* não existe[218].

A resposta acima de Wright e Hale, se ela for bem-sucedida, não é suficiente pela seguinte razão: os objetos *a* e *b* podem ser objetos de qualquer tipo. Assim, pode ser que a identidade entre *a* e *b* não seja apenas contingente. Portanto, se *a* é necessariamente igual a *b*, então necessariamente *Nx(x=a)=Nx(x=a v x=b)*, e vice-versa. Novamente, o *Problema de Júlio César*. Contudo, Wright e Hale acreditam que é possível ainda responder a tal objeção. Eles escrevem:

> Mas, um proponente da aproximação de *Frege's Conception* ainda tem uma resposta decisiva. Mesmo se mera implicação mútua constitui o sentido relevante de mesmidade de condições de verdade, há uma restrição mais forte do que aquelas formuladas em N^d e sua generalização, **SI**. Estes princípios meramente exigem que quando o conceito de número coincide [*overlaps*] com outro sortal, ou quando quaisquer dois sortais coincidem, algumas proposições de identidade dadas segundo um sortal tenham as mesmas condições de verdade que as de algumas proposições de identidade dadas segundo o outro sortal. Mas há, claramente, uma restrição motivada mais forte – se a aproximação geral for motivada. O que é exigido não é meramente que haja algumas proposições de identidade dadas segundo os respectivos sortais com as mesmas condições de verdade, mas que a identificação e distinção objectuais respectivamente afetadas pelas verdades entre estes conjuntos de proposições sejam isomórficas. (Hale e Wright, 2001c, pp. 373).

No capítulo anterior (seção **3.6**), afirmamos que "se dois conceitos sortais F e G são coincidentes ou um está incluído no outro, então as condições de verdade de certas proposições de identidade entre os objetos que instanciam os conceitos F e G deveria ser as mesmas". (pág. 82). Em outras palavras, se os

[216] Na verdade, este argumento não é muito convincente. Todavia, não o discutiremos em maiores detalhes aqui, uma vez que há uma objeção mais eficiente.
[217] Da mesma maneira, se $a \neq b$, então $Nx(x=a) \neq Nx(x=a \vee x=b)$, e vice-versa.
[218] Novamente, o argumento não é muito convincente. Mas, seguiremos o procedimento sugerido na nota 217.

conceitos sortais F e G são coincidentes ou um está incluído no outro, então algumas identidades que ocorrem entre os objetos que instanciam F, a saber, $a=_F b$, $c=_F d$, $e=_F f$ etc compartilhariam as mesmas condições de verdade com algumas identidades que ocorrem entre os objetos que instanciam o conceito G, a saber, $a'=_G b'$, $c'=_G d'$, $e'=_G f'$ etc. Agora, na passagem de Wright e Hale citada acima, é afirmado que é uma idéia bastante motivada que, na verdade, dois conceitos sortais F e G coincidentes (ou subordinados) compartilham as mesmas condições de verdade em relação a toda proposição de identidade que ocorra entre os objetos que instanciam F e a toda proposição de identidade que ocorra entre os objetos que instanciam G. Em outras palavras, toda proposição da forma $x=_F y$ (que ocorre entre os Fs) tem de compartilhar as mesmas condições de verdade que toda a proposição da forma $w=_G z$ e vice-versa.

Segundo Wright e Hale, o exemplo de Stirton não satisfaz tal restrição. Seguindo o exemplo deles, assumamos as seguintes desigualdades:

$$\text{Júlio}\neq\text{Tibério}$$
$$\text{Tibério}\neq\text{Domiciano}$$
$$\text{Júlio}\neq\text{Domiciano}$$

Segundo o esquema de Stirton apresentado acima, teremos as seguintes desigualdades (aqui, é claro, Wright e Hale supõem que as desigualdades acima são necessárias (isto é, não são contingentes), caso contrário, o exemplo já não satisfaria a primeira resposta à objeção apresentada acima):

$$Nx(x=\text{Júlio})\neq Nx(x=\text{Júlio } v\ x=\text{Tibério})$$
$$Nx(x=\text{Tibério})\neq Nx(x=\text{Tibério } v\ x=\text{Domiciano})$$
$$Nx(x=\text{Júlio})\neq Nx(x=\text{Júlio } v\ x=\text{Domiciano})$$

É interessante notar que *Nx(x=Júlio)=Nx(x=Tibério)=1*. Portanto, podemos identificar ou Júlio ou Tibério com o número 1. Se identificarmos Júlio com o número 1, então excluímos a possibilidade de identificarmos Tibério com o mesmo número, uma vez que se isto fosse o caso Júlio=Tibério contrariando a hipótese inicial, a saber, que *Júlio≠Tibério*, e vice-versa. Poderíamos, segundo Wright e Hale, identificar Tibério com *Nx(x=Tibério v x=Domiciano),* ou seja, com o número 2. Todavia, *Nx(x=Tibério v x=Domiciano)=Nx(x=Júlio v x=Domiciano)*. Assim, identificar Tibério com *Nx(x=Tibério v x=Domiciano)* exclui a possibilidade de identificar Domiciano com *Nx(x=Tibério v x=Domiciano)*, ou mesmo, com *Nx(x=Júlio v x=Domiciano)*, uma vez que tal fato implicaria que *Tibério=Domiciano*, contrariando a hipótese inicial. Assim, Wright e Hale escrevem:

> Todas as três distinções numéricas se tornam *de re* equivalente à primeira distinção imperial, e nenhuma referência a Domiciano é efetuada dentro delas. Assim, a restrição do isomorfismo é violada – e necessariamente assim, é claro, uma vez que o esquema de Stirton somente dá, no máximo, dois objetos para funcionar, enquanto temos três imperadores para localizar no reino dos números. (Hale e Wright, 2001c, pp. 373-4)[219].

Voltemos agora para a segunda classe de objeções à solução do *Problema de Júlio César* elaborada em *Frege's Conception of Numbers as Objects*, a saber, que o critério geral de inclusão sortal (**SI**) é muito forte, assumindo que alguns conceitos sortais que são claramente coincidentes (ou subordinados) não compartilham as mesmas condições de verdade e, portanto, segundo **SI**, assumindo que os mesmos não sejam coincidentes. Dummett é também um dos proponentes dessa objeção. Ele escreve:

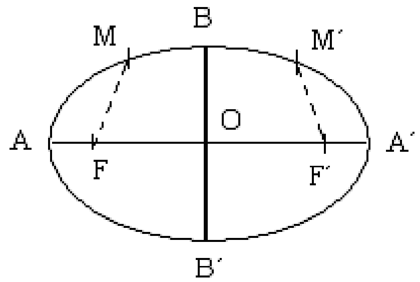
> A excentricidade [*oddity*] da posição de Wright é que a legitimidade de uma estipulação depende de se ela se segue ou precede uma outra. A excentricidade [*eccentricity*] de uma elipse coincide com a de uma outra no caso em que elas sejam similares. Isto se segue da definição de excentricidade como a razão entre a distância entre os focos e o comprimento do eixo maior; mas, na visão de Wright, esta definição seria ilegítima se primeiro estipulássemos a condição para excentricidade de duas elipses como sendo a mesma: o critério geométrico excluiria a identificação da excentricidade com um número real com o qual é associado um critério totalmente diferente de identidade. (Dummett, 1991, pp. 161-2).

Para entendermos melhor a objeção de Dummett, vamos ver o que é uma elipse e o que é a excentricidade de uma elipse (segundo a sua visão). A definição padrão de uma elipse é:

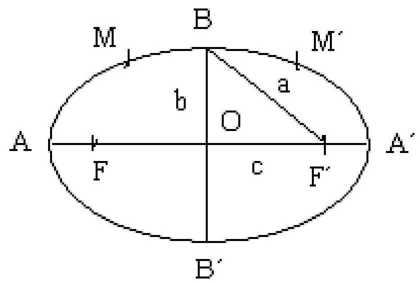
Elipse é uma curva plana fechada, lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, que são chamados de focos, é constante e igual ao eixo maior da curva.

Veja a figura abaixo

[219] Há uma outra objeção, no que diz respeito à "generosidade" do esquema N^d, mas que não trataremos aqui, porque exige a noção de implicação compacta que está diretamente ligada ao problema (ii) da seção anterior. Somente para resumir, a restrição do isomorfismo não exclui o seguinte esquema, a saber, a=b e {x:x=a}={x:x=b}. Ou seja, se a restrição do isomorfismo parece ser suficiente para o caso dos números, ela não parece ser suficiente para outros casos, por exemplo, para conjuntos. Agora, a solução ao *Problema de Júlio César* tem de ser válida em geral. Para maiores detalhes, veja Hale (1997), Sulivan e Potter (1997) e Hale e Wright (1997c).



onde A, A´, B, B´são os vértices da elipse; F, F´ são os focos da elipse; o segmento de reta FF´ é a distância focal; o segmento de reta AA´ é o eixo maior; e o segmento de reta BB´ é o eixo menor; O é o centro da elipse (o ponto de interseção dos eixos maior e menor que são perpendiculares); M e M´ são pontos quaisquer de uma elipse. Note o triângulo BOF´ (triângulo reto) de lados a, b e c



Assim, teremos as seguintes propriedades: seja M um ponto qualquer de uma elipse cujos focos são F e F´ (como na primeira figura), e cuja constante da definição seja 2a e cuja distância focal seja 2c. Temos então que o segmento de reta OF é igual ao segmento de reta OF´ que é igual a c e, portanto, o segmento de reta FF´ é igual a 2c. O eixo menor (o segmento de reta BB´) é igual a 2b; e o eixo maior (o segmento de reta AA´) é igual a 2a [220]. E a equação natural da elipse é: o segmento de reta MF+MF´é igual ao segmento de reta AA´ ou o segmento de reta M´F+M´F´ é igual ao segmento de reta AA´. E, finalmente, a excentricidade da elipse é a relação *e=c/a*[221]. Note que *a* é maior que *c* e, portanto, a excentricidade de uma elipse é menor que 1.

Mas, qual é o ponto da crítica de Dummett? Ora, uma vez que a excentricidade é dada pela razão *e=c/a*, então a excentricidade de uma elipse será um número real x<1 e, assim, duas elipses terão a mesma excentricidade se o

[220] Tais propriedades são provadas a partir da definição da elipse. Não deveremos mostrar como são deduzidas tais propriedades.

número real *e* (de ambas as elipses), dado pela razão *e=c/a*, for o mesmo. Agora, seja a noção de excentricidade via o Princípio da Excentricidade (um critério geométrico)

$\forall e \forall e'(\tilde{o}(e)=\tilde{o}(e') \leftrightarrow \text{Similar}(e,e'))$, onde $\tilde{o}$ significa o operador formador de termos *a excentricidade de x* e *similar* é uma relação de equivalência que ocorre entre figuras.

Dado o critério **SI** e o critério de identidade estipulado no Princípio da Excentricidade, podemos excluir a possibilidade de que os conceitos de *excentricidade de uma elipse* e *número real* sejam coincidentes, uma vez que a identidade entre os números reais não é dada via relação de similaridade (a inversa também ocorre). O problema é que Dummett sustenta que a excentricidade de uma elipse é (ou tem de ser) identificada com algum número real, como vimos acima, e que, portanto, os conceitos de excentricidade de uma elipse e o conceito de número real deveriam ser coincidentes. Assim, o critério **SI** é, segundo Dummett, muito forte. Agora, uma vez que **SI** é um critério forte o suficiente para afirmar que conceitos evidentemente coincidentes como os conceitos de *excentricidade de uma elipse* e de *número real* sejam não-coincidentes (ou disjuntos), essa parece ser a objeção de Dummett, quem garante que não ocorre o mesmo no caso dos conceitos de *número cardinal* e de *pessoa* e, em geral, no caso do conceito de *número cardinal* com outros conceitos sortais. A solução ao *Problema de Júlio César*, via **SI**, não é satisfatória.

Contudo, Wright e Hale respondem o seguinte:

> Assim, a questão real colocada pelo exemplo é somente se a estipulação da Equivalência da Excentricidade, propriamente assim considerada, anteciparia, de fato, na luz da proposta de *Frege's Conception*, a identificação da excentricidade com números reais, o que seria uma séria objeção a tal proposta. A resposta é que ela não anteciparia. Se estabelecermos a Equivalência da Excentricidade como uma abstração Fregeana, explicamos as condições de verdade de proposições de identidade de excentricidade como um caso especial das condições de verdade de proposições de identidade de forma para figuras planas. Mas, formas não são números reais. Se elas fossem, então formas diferentes seriam identificadas. Por exemplo, sejam t e t′ triângulos isósceles. Poderíamos identificar a "agudeza" [*sharpness*] de t com a razão entre o comprimento da altura de t e a sua base. Mas, "agudeza" também, se introduzida por uma abstração apropriada no que diz respeito à similaridade, seria um tipo de forma. Se então ocorrer, depois de assim introduzi-las, de identificarmo-las com números reais apropriados, seríamos, dessa maneira, forçados a identificá-las de uma maneira cruzada [*cross-identify*]

[221] Na verdade, como Dummett afirma, a excentricidade é a razão entre a distância entre os focos, que é igual a 2c, e a distância entre o comprimento do eixo maior, que é igual a 2a. Portanto, *e=2c/2a* e, assim, *e=c/a*.

com excentricidades apropriadas e, assim, de uma maneira absurda, identificar as formas de figuras com coisas tão dissimilares quanto elipses e triângulos. (Hale e Wright, 1997c, pág. 377).

A resposta de Wright e Hale é a seguinte: Dummett tem de decidir qual é o tipo de noção de excentricidade que ele deseja usar, se a noção aritmética segundo a qual a excentricidade é um número real dado pela razão entre a distância focal e o eixo maior, ou se a noção geométrica segundo a qual excentricidade é um objeto abstrato que duas formas (de figuras) têm quando são similares. Agora, se a noção de excentricidade é estipulada via Princípio da Excentricidade (a noção geométrica), então parece razoável, esta é afirmação de Wright e Hale, supor que as excentricidades não sejam números reais. Como a passagem acima mostra, se identificarmos a excentricidade de uma elipse (que é uma forma de uma figura) com um determinado número real, e se da mesma maneira identificarmos a "agudeza" de um triângulo (que também é a forma de uma figura) com um número real, e se o número real atribuído à excentricidade de tal elipse é igual ao número real atribuído à "agudeza" de tal triângulo, então concluiríamos que as figuras deste triângulo e desta elipse têm a mesma forma. Isto quer dizer que tais figuras são congruentes, ou seja, que elas são geometricamente iguais, o que não é o caso [222]. Portanto, segundo Wright e Hale, se a noção de excentricidade é dada via princípio de abstração (no caso, via Princípio da Excentricidade), então parece consistente sustentar que a excentricidade de uma elipse não é um número real e, assim, **SI** não seria um princípio forte.

Uma outra objeção seguindo as linhas de Dummett é a de Peter Sullivan e Michael Potter (1997). Segundo eles, podemos estipular o seguinte princípio de abstração, a saber, o Princípio de Membro do Parlamento (MP):

O membro do parlamento de x é igual ao membro do parlamento de y se e somente se x e y são co-constituintes (em símbolos, $\forall x \forall y\ (MP(x)=MP(y) \leftrightarrow Co(x,y))$, onde *MP* significa o operador formador de termos *o membro do parlamento de...* e *Co* a relação de "co-constituição")[223].

---

[222] A idéia de Wright e Hale, parece, está ligada com a seguinte questão: é possível interpretar dentro da análise a geometria. Os pontos poderiam ser interpretados como sendo números reais, as retas como determinadas relações entre dois números reais, e assim por diante. Mas, a questão é, a geometria é análise?

[223] Aqui há uma questão. Em inglês, tal princípio é *The MP of x = the MP of y iff x and y are co-constituents*. *Constituent* pode ser considerado eleitor. Por exemplo, no dicionário da Oxford, temos: *Constituent: a person who lives, and can vote in a constituency.* E esse parece ser o significado desta palavra no princípio acima. Mantivemos, na nossa tradução, constituinte porque no dicionário português temos: Constituinte - pessoa que faz de outra seu procurador ou representante.

A princípio, um membro de um parlamento é uma pessoa que é escolhida através do voto de outras pessoas e, portanto, um membro do parlamento é uma pessoa. O problema é que, queixam-se Sullivan e Potter, a identidade entre dois membros do parlamento é dada segundo o critério de “co-constituição” que é um critério de identidade totalmente diferente do critério de identidade pessoal. Assim, segundo **SI** e critério de identidade estipulado por MP, os conceitos de membro do parlamento e de pessoa são não-coincidentes e, portanto, os membros do parlamento não são pessoas, o que parece ser absurdo para Sullivan e Potter.

A resposta de Wright e Hale aqui é dada nos termos da resposta dada a Dummett. Sullivan e Potter têm de decidir qual é a noção de membro do parlamento que eles estão introduzindo. Se os membros do parlamento são pessoas de carne e osso, então o conceito *ser membro do parlamento* não é um conceito sortal, mas sim um conceito funcional, ou seja, *ser um membro do parlamento* é uma determinada função desempenhada por uma determinada pessoa em um determinado espaço de tempo. Ora, afirmam Wright e Hale, o critério **SI** é válido apenas para conceitos sortais. Uma vez que o conceito de *membro do parlamento* não é sortal, então **SI** não se aplica a tal conceito. E também não é valido considerar MP, como Sullivan e Potter queriam, como sendo um princípio de abstração.

Por outro lado, se MP é (considerado como) realmente um princípio de abstração, então os MPs são objetos abstratos e, conseqüentemente, segundo Wright e Hale, não são pessoas[224] [225]. E assim, Wright e Hale escrevem:

> Resumindo, a objeção é fundada em um dilema. Se *Membros do Parlamento* é pretensamente uma abstração genuína, introduzindo um conceito sortal e totalmente comparável, em todos os aspectos, com a Equivalência de Direção [Princípio de Direção] etc., então não é paradoxical negar que MPs são pessoas e nenhuma objeção é oferecida a *Frege’s Conception*, se tal livro leva a esta conseqüência. Por outro lado [no caso em que Membros do Parlamento não é uma abstração genuína],... se ser um MP não é ser um certo tipo básico de objeto, mas, preferivelmente, é ocupar um certo tipo de papel funcional... Mas se *Membros do Parlamento* não introduz um conceito sortal (no sentido relevante),

---

[224] A idéia básica é a seguinte: os princípios de abstração servem para introduzir novos objetos (abstratos) no domínio dos objetos. E em decorrência disto, tais princípios estipulam, posto que eles têm um “bom” critério de identidade para os objetos assim introduzidos, um determinado conceito sortal. Ora, pessoas não são objetos abstratos, portanto pessoas não são membros do parlamento.

[225] “Assim, se, em particular, introduzimos um conceito, Membro do Parlamento, pela estipulação sugerida, não temos direito de nos queixar que, na luz do critério **SI**, o membro do parlamento de Jones não pode ser Smith, ou qualquer outra pessoa – pois MPs assim introduzidos são *abstracta*, enquanto pessoas, presumivelmente não são”. (Hale e Wright, 2001c, pp. 379-80).

> então tal conceito não está sujeito propriamente aos princípios de restrição entre conceitos coincidentes e inclusivos. (Hale e Wright, 2001c, pág. 380).

As respostas às objeções de Dummett e de Sullivan e Potter, assumiremos, são satisfatórias. Contudo, há uma questão subjacente nestas objeções, a saber, que o critério **SI** impõe resoluções não garantidas *a priori* de uma larga classe de questões de taxonomia sortal. A idéia básica é a seguinte: segundo **SI**, sabemos *a priori*, que os objetos que caem sob um conceito F são G, dados os critérios de identidade que ocorrem entre os Fs e os Gs. E temos de saber isto *a priori*, pois, se o critério de identidade e distinção entre números e outros objetos não fosse *a priori*, Wright (e Hale) não poderia (m) reivindicar que a aritmética derivada do Princípio de Hume é analítica. O problema é que muitos conceitos genuinamente sortais e coincidentes têm seus critérios de identidade somente estabelecidos *a posteriori*. Não podemos saber *a priori* se baleias são ou não peixes, se gatos são ou não cães etc. Wright e Hale tentam responder esta objeção, contudo reconhecem que sua resposta não é suficiente[226]. Eles escrevem:

> Neste ponto, pode parecer que a solução de *Frege's Conception* ao problema de César está intacta. Infelizmente, pensamos que isto não é assim: há uma melhor objeção do que até agora foi considerado – uma que mostra que a condição de coincidência sortal imposta por **SI** é, de fato, insatisfatória para certos casos genuínos de inclusão sortal. (Hale e Wright, 2001c, 383).

Wright e Hale admitem que o critério **SI** não é um critério suficiente para determinar (*a priori*) a inclusão (ou coincidência) ou não entre conceitos sortais. E, é claro, se **SI** não é suficiente, então não temos uma solução ao *Problema de Júlio César* e, portanto, como dissemos acima, a prova do Teorema de Frege é posta em xeque. E qual é o problema de **SI**? Segundo Wright e Hale, tal critério é, realmente, muito forte. Assumindo o exemplo análogo ao deles, sejam os conceitos *cavalo*, C, e *mamífero*, D. Vamos supor que João comprou um cavalo por 1000 reais na feira de agropecuária de Campo Grande ocorrida em novembro de 2003 e que tal cavalo está agora na sua fazenda. Ora, cavalos são mamíferos, o conceito *cavalo* é subordinado ao conceito *mamífero*. O critério de inclusão sortal sustenta que se dois conceitos F e G são coincidentes ou inclusivos, então as condições de verdade do critério de identidade entre os objetos que caem sob F são as mesmas que as do critério de identidade entre os objetos que caem sob G.

[226] Não entraremos nos detalhes aqui, mas o leitor interessado pode ler Hale e Wright (2001c, pp. 380-3).

Suponha que escolhemos os seguintes termos singulares que caem sob o conceito *mamífero* (D-termos), a saber, 'o mamífero que está na fazenda do João' e ' o mamífero que João comprou por 1000 reais na feira de agropecuária de Campo Grande em novembro de 2003'. Ora, dado que cavalo e mamíferos são conceitos inclusivos, então quem conhece a identidade

(1) o mamífero que está na fazenda do João= o mamífero que João comprou por 1000 reais na feira de agropecuária de Campo Grande em novembro de 2003

teria de saber *a priori* que a identidade (segundo **SI**)

(2) o cavalo que está na fazenda do João= o cavalo que João comprou por 1000 reais na feira de agropecuária de Campo Grande em novembro de 2003

compartilha as mesmas condições de verdade com (1) e vice-versa. Mas, isto não é possível por um simples fato, sob o conceito mamífero caem outros animais que não são cavalos, ou seja, outros conceitos, diferentes do conceito *cavalo*, são subordinados ao conceito *mamífero*. Portanto, dada a identidade (1), não podemos saber *a priori* que tal mamífero é um cavalo, ele poderia ser um gato ou um cão ou um boi etc. Portanto, **SI** impõe resoluções não garantidas *a priori* entre inúmeros conceitos sortais.

Assim, Wright e Hale chegam no seguinte veredicto: "**SI** e afins devem ser abandonados" (Hale e Wright, 2001c, pág. 385). Agora, se **SI** tem de ser abandonado, temos de solucionar o problema em questão de alguma outra forma, uma vez que tal solução é vital para o projeto Neo-Fregeano. Wright e Hale, no fim do artigo citado, apresentam algumas novas idéias (de maneira sucinta) para uma outra possível tentativa de solução ao *Problema de Júlio César*, mas não discutiremos tais idéias na presente dissertação[227].

4.3 – *O PROBLEMA DA RESTRIÇÃO*

O *Problema da Restrição* está ligado, até onde sabemos, com os comprometimentos ontológicos do Princípio de Hume. Como já dissemos acima, é possível provar a partir do princípio supracitado a existência do número zero:

[227] Uma primeira solução seria manter **SI** e dizer que tal critério é valido para os conceitos introduzidos via princípios de abstração. Todavia, neste caso, a primeira objeção apresentada nesta seção – a objeção de Frege em *Grundlagen der Arithmetik* (§67) – seria válida. Outra solução seria excluir conceitos como mamífero, animal, vegetal etc. do domínio dos conceitos sortais. Um conceito seria sortal, talvez, se sob o mesmo caísse somente um tipo básico de objeto. Neste caso, os conceitos mencionados não seriam sortais (poderíamos chamá-los de conceitos categoriais cuja

(1) $Nx(x\neq x)= Nx(x\neq x)\leftrightarrow (\xi\neq\xi)1\text{-}1(\xi\neq\xi)$, instância do Princípio de Hume
(2) $(\xi\neq\xi)1\text{-}1(\xi\neq\xi)$, uma verdade lógica (segunda ordem)
(3) $Nx(x\neq x)= Nx(x\neq x)$, 1, 2 lógica proposicional
(4) $\exists x(x= Nx(x\neq x))$, 3, lógica de predicados e princípio do contexto.

Em geral, podemos provar, como também dissemos, que todo conceito tem um número cardinal:

(1) $NxFx=NxFx\leftrightarrow F1\text{-}1F$ (instância do Princípio de Hume)
(2) $F1\text{-}1F$, uma verdade lógica (segunda ordem)
(3) $NxFx=NxFx$, lógica proposicional
(4) $\exists x(x=NxFx)$, lógica de predicados e princípio do contexto

E, também, podemos provar que existe o número que pertence ao conceito $\xi=\xi$ (*ser idêntico a si mesmo*):

(1) $Nx(x=x)=Nx(x=x)\leftrightarrow \xi=\xi 1\text{-}1\xi=\xi$ (instância do Princípio de Hume)
(2) $\xi=\xi 1\text{-}1\xi=\xi$, lei lógica (segunda ordem)
(3) $Nx(x=x)=Nx(x=x)$, lógica proposicional
(4) $\exists x(x=N(x=x))$

Segundo Boolos (1990, 1997), o problema é que a existência do número do conceito *ser igual a si mesmo* (o número de todas as coisas ou o número de tudo que existe) é negada na teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC) mais definições padrões. Ou seja, a Aritmética de Frege é incompatível com a teoria mais amplamente aceita e estabelecida sobre os fundamentos da matemática em nosso tempo.

O objetivo de Boolos ao fazer esta objeção é o seguinte: se a Aritmética de Frege for analítica, então ZFC seria analiticamente falsa, uma vez que aquela é incompatível com esta, o que para Boolos é improvável. É claro que mesmo se não considerarmos a Aritmética de Frege analítica, mas ainda a considerarmos verdadeira, isso também seria problemático, pois teríamos duas teorias consistentes sobre os fundamentos da aritmética dos números naturais que são incompatíveis entre si. Boolos, é claro, considera ZFC como suficiente para esta tarefa e acredita que uma teoria que tente fundamentar a aritmética (dos números naturais) tenha de ser compatível com ZFC. O ponto de Boolos, pelo menos em 1990, é afirmar que o Princípio de Hume não só não é uma verdade lógica ou uma definição implícita analítica do conceito de número cardinal, mas também que tal

distinção entre os objetos que caem sob eles se dá via critério de aplicação) e o problema mencionado por Wright e Hale não ocorreria. Mas, isto é apenas uma especulação.

princípio não é nem mesmo verdadeiro, porque ele faz asserções ontológicas incompatíveis com as asserções ontológicas de ZFC. Assim, Boolos escreve:

> Assim, não só não temos razão para considerar o princípio de Hume como uma verdade da lógica, é duvidoso se ele é uma verdade. Como a existência de um número, 0, que pertence ao conceito *não ser idêntico a si mesmo* é uma conseqüência do princípio de Hume, também se segue que há um número que pertence ao conceito *ser idêntico a si mesmo*, um número que é o número de todas as coisas que existem. O princípio de Hume não é menos duvidoso do que qualquer uma de suas conseqüências, uma das quais é a reivindicação, na melhor das hipóteses incerta, que há um tal número. (Boolos, 1990, pág. 216).[228]

Para entendermos um pouco melhor as dúvidas de Boolos, vamos examinar de mais perto a teoria ZFC mais definições padrões. Em ZFC, o número cardinal de um conjunto F é definido como o menor ordinal cujos membros podem ser colocados em uma correspondência 1-1 com os membros do conjunto F. Interpretando isto em termos de conceitos, o número cardinal dos Fs (ou de um conceito F) é o menor número ordinal cujos membros são equinumérico aos Fs. Mas, temos também em ZFC o axioma da substituição que diz que dada uma função $f:A\rightarrow B$ (uma função é um conjunto de pares ordenados), se o domínio da função é um conjunto, então o contra-domínio (*range*) da função também é um conjunto. Agora, da definição acima de número cardinal dos Fs junto com axioma da substituição se segue que existe um conjunto dos Fs. Isto por uma razão muito simples: o número cardinal dos Fs é um ordinal cujos membros são equinuméricos aos Fs. Ora, os ordinais são uma espécie de conjuntos, portanto os Fs, posto que existe uma função dos membros de tal número ordinal nos Fs, são, segundo o axioma da substituição, elementos de um conjunto. Agora, se F é o conceito *ser idêntico a si mesmo*, então teria de existir o conjunto de tal conceito, o conjunto de todas as coisas. Aqui, podemos deduzir alguns resultados incompatíveis com ZFC. Se assumirmos a existência do número cardinal do conceito *ser idêntico a si mesmo*, temos, segundo a definição em ZFC, que os objetos (Fs) que caem sob tal

---

[228] Boolos (1997) também escreve: "Uma preocupação final, talvez a mais séria de todas, embora à primeira vista possa parecer descartável como boba ou trivial: como há um número, zero, de coisas que são diferentes de si mesmas, então, segundo o relato de número que estamos considerando, tem de existir um número de coisas que são idênticas a si mesmas, ou seja, o número de todas as coisas que existem. Wright apelidou este número, $\#[x:x=x]$, de *antizero*. Na definição de $\leq$, segundo a qual $m\leq n$ sse $\exists F\exists G(m=\#F\wedge n=\#G\wedge$ há um mapa 1-1 de F em G), antizero seria um número maior que qualquer outro. Agora, a preocupação é esta: há um tal número como antizero? Segundo a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, não há um número cardinal que seja o número de todos os conjuntos que existem. A preocupação é que a teoria de números que estamos considerando, a Aritmética de Frege, é incompatível com a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel mais definições padrões, nas leituras usuais e naturais das expressões não-lógicas de ambas as teorias". (Boolos, 1997, pág. 313-4).

conceito estão correlacionados 1-1 com os membros de um determinado número ordinal. Na verdade, os Fs estão correlacionados 1-1 com o conjunto de todos os números ordinais, mas, em ZFC, a existência de tal conjunto é negada. Além disso, se assumirmos a existência do conjunto de todas as coisas, pelo axioma da separação[229], obtemos a existência do conjunto de todos os ordinais[230] (que é negada em ZFC, como já dissemos); a existência do conjunto de todos os cardinais[231], o que também é negada em ZFC; e, também, a existência do conjunto de todos os conjuntos[232], a partir do qual, novamente aplicando o teorema da separação, obtemos a existência de todos os conjuntos que não são membros de si mesmos[233], asserção que também é negada em ZFC[234].

O *Problema da Restrição* é uma séria objeção aos anseios Neo-Fregeanos que reivindicam a analiticidade da aritmética dos números naturais (no caso, de PA2), a partir da prova dos axiomas de Dedekind-Peano via Princípio de Hume. Como já dito, se este princípio for uma definição implícita e analítica do conceito de número cardinal, e se lógica de segunda ordem preservar a analiticidade, então a Aritmética de Frege será analítica. Ora, se a Aritmética de Frege (**FA**) e ZFC são incompatíveis, e **FA** é analítica, então, como dissemos e parece ser o argumento de Boolos, ZFC é analiticamente falsa, ou seja, inconsistente. O ponto de Boolos é que ZFC é a melhor teoria disponível que temos atualmente e, portanto, dada a incompatibilidade entre **FA** e ZFC, **FA** não pode ser analítica e, portanto, o Princípio de Hume não pode ser nem uma verdade lógica nem uma definição implícita analítica do conceito de número cardinal. Como também afirmamos, Boolos afirma algo mais forte, que o Princípio de Hume não é nem mesmo verdadeiro, dada a sua incompatibilidade com ZFC. E aqui poderia ser colocada a primeira resposta à objeção de Boolos. Ele reivindica a não-analiticidade de **FA,**

---

[229] Grosso modo, o axioma da separação diz que se existe um conjunto A, então todos os seus subconjuntos definíveis existem. Por exemplo, seja o conjunto A={1, 2} e sejam as seguintes propriedades (válidas para os membros de A) *ser distinto de si mesmo*, *ser idêntico a si mesmo*, *ser idêntico a 1*, *ser idêntico a 2, ser idêntico a 1 e 2*. Obtemos os subconjuntos de A, a saber, o conjunto vazio, o próprio conjunto A, o conjunto unitário {1}, o conjunto unitário {2}, o conjunto {1, 2}, respectivamente.

[230] Os ordinais são objetos em ZFC, de maneira que se existe o conjunto de todas as coisas, então existirá o conjunto de todos os ordinais que é um subconjunto daquele conjunto. Dado o conjunto de todas as coisas e a propriedade *ser um número ordinal*, extraímos o conjunto de todos os ordinais.

[231] O mesmo raciocínio da nota anterior.

[232] Ver nota 231.

[233] Ver nota 231.

porque tal teoria é incompatível com ZFC que é nossa melhor teoria sobre os fundamentos da aritmética dos números naturais[235]. Ora, poderíamos perguntar, quais garantias que temos de que ZFC seja consistente ou, realmente, verdadeira? Um Neo-Fregeano poderia afirmar justamente o oposto de Boolos: "Ora Boolos, uma vez que o Princípio de Hume é dado por uma análise de nossos conhecimentos pré-analíticos do conceito de número cardinal, então é razoável que **FA** tenha uma prioridade epistemológica em relação a ZFC e, portanto, a incompatibilidade entre estas duas teorias mostra que ZFC é falsa" (e, no caso, analiticamente falsa). Contudo, essa resposta não nos parece convincente. Abandonar uma teoria como ZFC, que pode servir de fundamentos para toda a matemática, em prol de uma teoria que, no máximo, serve de fundamento para teoria dos números naturais, é uma inconseqüência[236]. Além disso, como veremos, Wright toma seriamente a objeção de Boolos.

Uma outra resposta que um Neo-Fregeano poderia considerar é a seguinte: em ZFC, os números (cardinais) são identificados por conjuntos. Também em ZFC, os quantificadores objectuais percorrem apenas conjuntos, assim somente conjuntos podem ter números (cardinais). Por outro lado, no caso de **FA**, são os conceitos que têm um número cardinal, ou seja, o operador numérico *Nx...x...* anexa-se a um determinado conceito e assim lhe é atribuído um certo número. Em outras palavras, em **FA** não há qualquer menção a conjuntos, de maneira que a incompatibilidade entre **FA** e ZFC é apenas aparente. Para tornar mais clara a idéia, tome o seguinte exemplo: podemos falar sem qualquer contradição sobre o conceito *não ser uma baleia*. Ora, sabemos que o livro que está em cima da minha mesa não é uma baleia, sabemos que o João inúmeras vezes citado na presente dissertação não é uma baleia, enfim tal conceito não parece ser tão problemático (ou, pelo menos, assumamos que não seja). O que podemos dizer da sua extensão ou do conjunto das coisas que não são baleias? Ora, o próprio conjunto não é uma baleia, de maneira que tal conjunto cai sob o conceito *não ser uma baleia* e, portanto, o conjunto das coisas que não são baleias pertence a si mesmo, o que é

[234] Na verdade, a não-existência do conjunto de todos os conjuntos também pode ser um teorema de ZFC.

[235] Na verdade, a teoria de conjuntos ZFC pode ser vista como um fundamento de toda a matemática.

[236] É claro que está aberta a possibilidade de fundamentar os outros campos da matemática via princípios de abstração. Se isso for possível, poderíamos abandonar ZFC.

negado pelo axioma do fundamento ou da regularidade [237] [238]. A questão central da resposta acima seria: é possível falar do número de um conceito F cuja extensão (ou cujo conjunto das coisas que são F) não existe ou é contraditória (o). Não avançaremos as questões postas neste parágrafo, uma vez que, como já dissemos, Wright toma seriamente a objeção de Boolos, mas esta idéia poderia ser desenvolvida[239].

Voltemos-nos agora à resposta de Wright à objeção de Boolos. A sua idéia é restringir os quantificadores de segunda ordem do Princípio de Hume, de maneira que seja possível evitar o número de todas as coisas que existe ou, como Boolos chama, o antizero (ou seja, o número do conceito *ser idêntico a si mesmo*). Wright escreve:

> A primeira linha [de argumentação] é dirigida especificamente ao antizero. Aceitar o *insight* de Frege de que proposições de números são de nível superior (*higher-level*) – que elas afirmam coisas dos conceitos – é totalmente consistente com a observação familiar que uma restrição é necessária, embora ele não tenha a esboçado. O caso básico em que a questão , 'Quantos Fs existem?', faça sentido – ou, pelo menos tenha uma resposta determinada – é a de uma classe especial de substituição para 'F': o que são chamados de 'nomes contáveis' (*count nouns*), ou expressões para 'conceitos sortais'. (Wright, 1999, pág. 314).

---

[237] Fraenkel e Bar-Hillel e Levy (1973) apresentam tal axioma da seguinte maneira: "se há algum elemento x que satisfaça $\$(x)$, então há um elemento mínimo u que satisfaça $\$(x)$, isto é, u satisfaz $\$(x)$, mas nenhum de seus membros satisfaz $\$(x)$. Em símbolos $\forall z_1 ... \forall z_2[\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow 5\varphi(y)))]$". (Fraenkel e Bar-Hillel e Levy, 1973, pág. 88). A idéia básica do axioma é impedir que um conjunto x pertença a si mesmo.

[238] Na verdade, o exemplo acima não é muito bom, pois ZFC admite apenas a existência de conjuntos, mas ele serve como uma ilustração. Contudo, é possível dar um exemplo parecido com este acima considerando apenas conjuntos: seja o conjunto de todos os conjuntos diferentes do conjunto vazio. Este suposto conjunto não é, na verdade, um conjunto. Assuma que tal conjunto é um conjunto. Ora, o conjunto vazio é também um conjunto (sua existência pode ser provada via axioma da separação ou então introduzida, como Enderton (1977) faz, via axioma). Segundo o axioma da união, a união de dois conjuntos é também um conjunto, portanto a união entre conjunto de todos os conjuntos diferentes do conjunto vazio e o conjunto vazio é um conjunto. Mas, a união destes dois conjuntos é o conjunto de todos os conjuntos. Por separação, obtemos o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmos, o que é negado em ZFC. Além disso, o próprio conjunto de todos os conjuntos diferentes do conjunto vazio é diferente do conjunto vazio e, assim, ele pertence a si mesmo, o que é negado pelo axioma do fundamento ou regularidade. Agora, parece ser bastante intuitivo falar da propriedade *ser um conjunto diferente do conjunto vazio*.

[239] Muitos filósofos e lógicos afirmam que lógica de segunda ordem é uma teoria de conjuntos disfarçada (por exemplo, Quine (1970)). Contudo, parece que há, na nossa visão, uma diferença razoável entre uma propriedade e um conjunto. Podemos falar da propriedade (lógica) *auto-identidade*, mas não podemos falar do conjunto das coisas que são idênticas a si mesmas. Isso nos leva a supor que todo conjunto pode ser representado por uma propriedade, mas nem toda propriedade pode ser representada por um conjunto. Não estamos afirmando que isso é uma visão correta, mas parece ser bastante intuitível. Enfim, é necessário ver até onde tal visão poderia levar-nos.

Como a passagem acima sugere, o escopo dos quantificadores de segunda ordem do Princípio de Hume não percorreria todos os conceitos de primeira ordem, mas somente conceitos sortais (de primeira ordem), ou seja, conceitos que dão uma resposta exata para a questão *quantos objetos existem que caem sob um determinado conceito?* Segundo Wright, tal restrição é consistente com a idéia Fregeana de que uma asserção numérica é uma predicação de um conceito. Wright afirma que Frege não fizera tal restrição, contudo em *Grundlagen der Arithmetik*, § 54, este último escreve:

> Nem todos os conceitos possuem esta qualidade [isolar, de maneira definida, os objetos que caem sob eles]. Por exemplo, podemos dividir as coisas que caem sob o conceito "vermelho" em partes em uma variedade de maneiras, sem que estas partes deixem de cair sob o mesmo conceito "vermelho". A um conceito deste tipo não pertence nenhum número [*Zahl*] finito. A proposição que afirma que as unidades são isoladas e indivisíveis podem ser formuladas, de acordo com o que foi dito, como se segue: somente um conceito que isola o que cai sob ele em uma maneira definida e que não permita qualquer divisão arbitrária dele em partes pode ser uma unidade relativa a um número cardinal finito [Anzahl]. (Frege, 1884, §54).

Na passagem acima, Frege diz que um conceito como vermelho não tem nenhum número (*Zahl*) finito. E somente conceitos que isolam de maneira definida os objetos que caem sob eles podem ter um número cardinal (Anzahl) finito. Ora, Frege utiliza a palavra *Zahl* para denominar número em geral e *Anzahl* para denominar número cardinal. Por que então ele não disse que não pertence ao conceito "vermelho" nenhum número cardinal (*Anzahl*) finito, mas sim número (Zahl) finito? Uma interpretação poderia ser que tal conceito não é capaz de ter uma única resposta para a pergunta *quantos objetos vermelhos existem?* e, portanto, tal conceito não tem número cardinal (*Anzahl*), mas somente um número (*Zahl*). Mas, se esta interpretação estiver correta, então Frege já previra a restrição do escopo dos quantificadores de segunda ordem que Wright defende.

Bem, assumindo, então, a proposta de Wright, resta-nos verificar se a mesma é capaz de excluir a possibilidade de **FA** assumir a existência do número de todas as coisas. Ora, uma vez que o escopo dos quantificadores de segunda ordem do Princípio de Hume percorre somente conceitos sortais, uma possibilidade de excluir a existência do número de todas as coisas é mostrar que o conceito *ser idêntico a si mesmo* não é um conceito sortal. E é justamente isto que Wright faz. Lembre-se que um conceito sortal, como dissemos em **3**, é um conceito que tem um critério de aplicação para todos os objetos e um critério de identidade para os objetos que caem sob ele. Também dissemos que um conceito como *azul* não é sortal (azul, segundo Wright, é um mero predicável), uma vez que antes de um dado objeto ser azul, ele é um objeto de certo tipo básico, de maneira que a igualdade e distinguibilidade entre objetos que caem sob o conceito mencionado são dadas, novamente, segundo o critério de aplicação e não segundo um critério de identidade. E ainda afirmamos que quando um conceito sortal restringe o escopo de um mero predicável, o conceito amalgamado é também sortal. Por exemplo, se restringirmos o escopo do conceito *azul* com o conceito sortal, digamos, *livro*, então o conceito (amalgamado) *livro azul* também é sortal. Ora, se o conceito *ser idêntico a si mesmo* for sortal, então ele terá de satisfazer estes requerimentos. Logo vemos que um critério de identidade e distinguibilidade entre os objetos que caem sob o conceito *ser idêntico a si mesmo* não pode ser dado segundo um critério de identidade, uma vez que tal conceito engloba vários tipos de objetos, mas sim, novamente, segundo um critério de aplicação. Assim, sabemos que o livro que está em cima da minha mesa que é idêntico a si mesmo é distinto do lápis que está em cima da minha mesa que também é idêntico a si mesmo segundo um critério de aplicação. O livro não é um lápis e o lápis não é um livro. Ora, se não há um critério de identidade entre os objetos que caem sob o conceito *ser idêntico a si mesmo*, ou seja, se a identidade e distinguibilidade entre os objetos que caem sob tal conceito não é dada segundo um critério de identidade, então este conceito não é sortal.

Além disso, como Wright afirma, se tentarmos restringir o escopo de meros predicáveis, por exemplo, *azul*, com o conceito *ser idêntico a si mesmo*, se este conceito for sortal, então o conceito amalgamado *coisas idênticas a si mesmas e azuis* terá de ser um conceito sortal. Contudo, tal fato não ocorrerá. Na verdade, o escopo do conceito *azul* continua sendo o mesmo quando restringido pelo conceito $\xi=\xi$. Todas as coisas que caem sob o conceito *azul* são idênticas a si mesmas, de maneira que a igualdade e distinguibilidade entre os objetos que caem sob o conceito *coisa azul e idêntica a si mesma* dependem novamente de um critério de aplicação. O livro azul que é idêntico a si mesmo (em cima da minha mesa) é distinto do lápis azul que também é idêntico a si mesmo (em cima da minha mesa), porque o livro não é um lápis e o lápis não é um livro. Novamente, o conceito *ser idêntico a si mesmo* não satisfaz o requerimento acima e, portanto, não é sortal[240]. Agora, uma vez que *ser idêntico a si mesmo* não é sortal e que o escopo dos quantificadores de segunda ordem do Princípio de Hume percorre apenas conceitos sortais, segundo a restrição proposta por Wright, então não há o número de todas as coisas.

Todavia, mesmo que aceitemos a solução engenhosa de Wright para mostrar que o número de todas as coisas não é provável em **FA** (não é uma conseqüência do Princípio de Hume), ela não é totalmente satisfatória e o próprio Wright reconhece isto. Ele escreve:

> Certamente, esta primeira consideração [de que o conceito *auto-idêntico* não é sortal] não envolve a questão se podemos propriamente conceber um número de todos os ordinais ou de todos os cardinais ou de todos os conjuntos – em geral, casos nos quais estamos preocupados com os resultados de aplicar o operador numérico a conceitos que *são* (presumivelmente) sortais, mas 'perigosamente' grandes. (Wright, 1999, pág. 315).

A restrição de Wright sobre o escopo dos quantificadores de segunda ordem do Princípio de Hume exclui a possibilidade do conceito *ser idêntico a si mesmo*, como afirmamos acima, ter um número cardinal, posto que o mesmo não é sortal. Entretanto, como Wright diz na última citação, conceitos como *número cardinal*, *número ordinal* e *conjunto* são sortais (ou presumivelmente são). Agora, a existência do número de tais conceitos é também incompatível com as asserções ontológicas de ZFC. Seguindo o que foi dito anteriormente, é fácil ver que admitir, em ZFC, o número destes conceitos, é admitir a existência do conjunto de todos os ordinais, o conjunto de todos os cardinais e o conjunto de todos os conjuntos, asserções existenciais negadas em ZFC. Duas possíveis respostas são aquelas duas primeiras já mencionadas. Porém, como dissemos, Wright realmente leva em conta à objeção de Boolos. Mas, então, qual seria uma possível resposta? Wright propõe uma outra restrição sobre os quantificadores de segunda ordem do Princípio de Hume, a saber, que conceitos indefinidamente extensíveis não têm um número cardinal definido e, portanto, têm de ser excluídos de tal escopo.

[240] Wright (1999) escreve: "É fácil ver que 'é auto-idêntico' é um mero predicável. Pois, reflita que, não obstante – prescindindo de qualquer caso de vagueza – meros predicáveis são submetidos (*subserve*) a questões determinadas de número cardinal quando seu escopo é restringido ao de um conceito sortal: assim, pode existir um número determinado de *maçãs vermelhas na cesta*, de *anéis de ouro na vitrine da joalheria*, e de *mulher alta na recepção*. Dessa maneira, se 'auto-idêntico' fosse sortal, seguir-se-ia que podem existir números determinados de vermelhos auto-idênticos na cesta, ouros auto-idênticos na vitrine da joalheria e altos auto-idênticos na recepção. Entretanto, uma vez que 'F e auto-idêntico' é equivalente a 'F', segue-se que não pode existir tal número determinado sempre que não há um número determinado de Fs. Logo, auto-idêntico não é um conceito sortal". (Wright, 1999, pág. 315).

Agora, o que é um conceito indefinidamente extensível? A noção *conceito indefinidamente extensível*, até onde sabemos, foi bastante trabalhada (e cunhada) por Dummett (1963, 1978, 1991 e 1993b). Ele (1993b), por exemplo, escreve:

> Um conceito indefinidamente extensível é aquele tal que se podemos formar uma concepção definitiva de uma totalidade cujos todos os membros caem sob tal conceito, então podemos, referindo-se a esta totalidade, caracterizar uma totalidade maior cujos membros caem sob ele. (Dummett, 1993, pá. 441).

Podemos exemplificar a idéia de Dummett da seguinte maneira: Seja o conjunto A o conjunto de todos os conjuntos. Ora, dado o axioma do conjunto potência[241], -A (conjunto de todos os subconjuntos de A) é também um conjunto e, segundo o teorema de Cantor, -A é maior que A. Ora, se -A é um conjunto, então ele está incluído no conjunto de todos os conjuntos A. Mas, -A é uma totalidade maior que A, portanto A é indefinidamente extensível. Os conceitos *número cardinal*, *número ordinal*, *conjunto* serão todos, segundo Wright, indefinidamente extensíveis e, assim, devem ser excluídos do escopo dos quantificadores de segunda ordem do Princípio de Hume[242].

Infelizmente, não poderemos avaliar nesta dissertação se esta restrição de Wright está em ordem. Mas, vale ressaltar a seguinte questão: como podemos saber quais são os conceitos sortais indefinidamente extensíveis? A solução para esta questão parece ser totalmente *ad hoc* e dependente de um conhecimento prévio de teoria de conjuntos. Ora, isso não vai de encontro com o que foi dito na nota 203? Descobrir quais conceitos são indefinidamente extensíveis não seria um trabalho epistêmico colateral? Neste caso, a reivindicação de que o Princípio de Hume é uma definição implícita analítica não seria falsa?[243].

---

[241] Grosso modo, este axioma diz que se A é um conjunto, então há um conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A.

[242] A idéia que está por trás desta restrição de Wright parece ser a seguinte: uma vez que a noção de número cardinal é dada quando respondemos com exatidão à questão *quantos Fs existem?*, então o conceito F tem de ser exemplificado por um número determinado de indivíduos, o que não acontece com os conceitos *número cardinal*, *número ordinal* e *conjunto*.

[243] Há ainda outras soluções possíveis ao *Problema da Restrição*. Uma delas é admitir o Princípio de Hume Finito (FHP). Como dissemos em **3** é possível provar PA2 a partir de tal princípio. O problema é que não teremos o número do conceito *número natural*, uma vez que tal conceito não é finito e, portanto, é excluído do escopo dos quantificadores de segunda ordem de FHP. O leitor também pode ver a solução de Ian Rumfitt (2001). Também pode ler Neil Tennant (1987 e 1997).

4.4 - O *PROBLEMA DAS MÁS COMPANHIAS*

Como já dissemos, o *Problema das Más Companhias* pode ser posto nos seguintes termos: uma vez que existem princípios de abstração inconsistentes que garantias temos para considerarmos o Princípio de Hume verdadeiro, e se ele for, analítico? Deveria existir, ou então, dever-se-ia elaborar algum mecanismo para separar os princípios de abstração "bons" dos "maus". Dummett é um dos proponentes de tal objeção. Ele (1991) escreve:

> Portanto, neste caso, temos três opções: rejeitar o princípio do contexto completamente; mantê-lo, mas declarando que o mesmo não justifica o procedimento que Wright tem em mente; ou formular uma restrição sobre ele, de maneira que distingue o operador de cardinalidade do operador de abstração. Wright não faz nenhuma destas três coisas: ele mantém o princípio do contexto na sua generalidade completa, entendido como ele o interpreta, e defende o apelo ao mesmo para justificar a atribuição de uma referência aos termos numéricos, considerados como introduzidos na maneira anterior, sem parar para explicar porque uma maneira aparentemente similar de introdução de termos para percurso de valores levaria à contradição. Ele nos deve uma tal explicação; a reivindicação de que o método de introduzir o operador de cardinalidade que ele imagina remove todo uso da noção de classe não é uma desculpa para sua falha em fornecer esta explicação. (Dummett, 1991, pág. 189).

A posição de Dummett é bastante clara, a saber, a existência do número cardinal de um determinado conceito depende do princípio do contexto. Como já dissemos, provamos que todo conceito tem um número cardinal da seguinte maneira:

(1) $NxFx=NxFx \leftrightarrow F1\text{-}1F$ (instância do Princípio de Hume)
(2) $F1\text{-}1F$, uma verdade lógica (segunda ordem)
(3) $NxFx=NxFx$, lógica proposicional
(4) $\exists x(x=NxFx)$, lógica de predicados e princípio do contexto

Note que o princípio do contexto desempenha um papel central em (4). Agora, se tal procedimento de Wright tem de ser sustentado, então ele deveria ser sustentado em geral, de maneira que, na Lei Básica V, teríamos também de ter a prova de que todo conceito tem uma extensão, da seguinte maneira:

(1) $\{x:Fx\}=\{x:Fx\} \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Fx)$ (instância da Lei Básica V)
(2) $\forall x(Fx \leftrightarrow Fx)$, uma verdade lógica (segunda ordem)
(3) $\{x:Fx\}=\{x:Fx\}$, lógica proposicional
(4) $\exists x(x=\{x:Fx\})$, lógica de predicados e princípio do contexto

Como dissemos na introdução, a derivação da contradição da Lei Básica V nos mostra que nem todo conceito tem uma extensão (nem sempre o operador formador de termos *{x:...x...}* tem uma referência quando anexado a um conceito de primeira ordem). Ou seja, o princípio do contexto falha no caso da Lei Básica V. O que Dummett está exigindo de Wright é, então, algum critério que possa separar o Princípio de Hume, como sendo um princípio de abstração que pode legitimamente introduzir objetos abstratos (no caso, número cardinal), da Lei Básica V.

Boolos (1990) também faz esta mesma objeção:

> É claro que um relato de verdade lógica que tente distinguir o princípio de Hume como uma verdade lógica terá a difícil tarefa de explicar porque o princípio de Hume é uma verdade lógica, embora dois outros princípios similares não são. Estes são os princípios sobre extensões incorporadas na Regra (V) de Frege e um princípio sobre o número de relações que é notavelmente análogo ao princípio de Hume. Lemo-los: as Extensões de conceito são idênticas se e somente se estes conceitos são coextensivos; e, o número de relações de relações são idênticas se e somente se estas relações são isomórficas. Russell mostrou a inconsistência da primeira; Harold Hodes [1984] observou astutamente que a última leva ao paradoxo de Burali-Forti. (Boolos, 1990, pág. 214).

Wright acredita que é possível formular alguma restrição para considerar quais princípios de abstração são "bons", ou seja, podem ser considerados como legítimos para introduzir objetos abstratos e quais são "maus". E o primeiro critério é a consistência. Wright poderia responder o seguinte para Boolos: "Ora Boolos, como você mesmo sabe, a Lei Básica V é inconsistente, mas o Princípio de Hume não. E foi você mesmo que provou sua consistência. Aí está o motivo pelo qual sou levado a aceitar o Princípio de Hume como legítimo para introdução de objetos abstratos, e a não aceitar a Lei Básica V".

Mas, Boolos não está totalmente satisfeito com esta resposta. Mesmo que consistência seja um critério para distinguir princípios de abstração "bons" dos "maus", não se segue, segundo ele, que a consistência do Princípio de Hume implique que o mesmo seja analítico. Assumamos que o Princípio de Hume seja analítico (isto é, que tal princípio seja uma definição implícita e analítica). Como já dissemos, o Princípio de Hume é verdadeiro somente em domínios infinitos. Entretanto, como Boolos mostra, há outros princípios de abstração que podem ser considerados como definições implícitas e analíticas e que são verdadeiros somente em domínios finitos. Assim, a objeção de Boolos é a seguinte: se assumirmos que o Princípio de Hume é analiticamente verdadeiro (ou uma definição implícita analítica do conceito de número cardinal), então princípios de abstração verdadeiros somente em domínios finitos seriam analiticamente falsos. O dilema é, qual (is) razão (ões) Wright tem para aceitar a analiticidade do

Princípio de Hume em detrimento dos outros princípios de abstração consistentes? É novamente o *Problema das Más Companhias*, ou seja, Wright deveria ter algum mecanismo para separar os princípios de abstração consistentes "bons" dos princípios de abstração consistentes "maus".

Para deixar mais clara a objeção de Boolos, vamos fazer a seguinte distinção entre os princípios de abstração conceituais:

(I) princípios de abstração universalmente inflacionários, isto é, princípios de abstração que não são verdadeiros em nenhum domínio (finito ou infinito). Exemplo: a Lei Básica V.
(II) princípios de abstração *fin-inflacionários*, ou seja, princípios de abstração que são falsos em domínios finitos. Exemplo, Princípio de Hume.
(III) princípios de abstração *inf-inflacionários*, ou seja, princípios de abstração que são falsos em domínios infinitos. Exemplos, Princípio da *Nuisance* e Princípio da Paridade.

Boolos (1990) propõe o seguinte princípio de abstração, o Princípio da Paridade:

Para todo conceito F e G, a paridade de F é igual à paridade de G se e somente se F e G diferem de maneira uniforme. (onde, *F e G diferem de maneira uniforme* significa que *o número de objetos que são F e não são G ou o número dos objetos que são G e não são F é par*[244]).

Este princípio, como afirmamos acima, é *inf-inflacionário*. Para mostrar isso, trabalharemos com um princípio análogo ao Princípio da Paridade, a saber, o Princípio da *Nuisance* que foi elaborado por Wright:

Para todo conceito F e G, a Nuisance de F é igual a Nuisance de G se e somente se as coisas que são F e não são G ou as coisas que são G e não são F são finitas (em símbolos, $\forall F \forall G(nF=nG \leftrightarrow ((Fx \& 5Gx)v(Gx \& 5Fx))$ é finito), onde *n...x...* é o operador formador de termos, *a Nuisance de*).

A noção de finito pode ser decodificada em termos puramente lógicos (lógica de segunda ordem). Um conceito F é finito se o mesmo não é infinito, ou seja, $Fin(F)=_{def.}\ 5Infin(F)$. E a noção de infinito pode ser decodificada (em lógica de segunda ordem) da seguinte maneira: $Infin(G)=_{def.}\ \exists R\ [\forall x \forall y \forall z\ (xRy \& xRz \rightarrow y=z) \&\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (xRz\ \&\ yRz \rightarrow x=y)\ \&\ \forall x\ \forall y\ (Gx\ \&\ xRy \rightarrow Gy)\ \&\ \exists y(Gy \& \forall x(Gx \rightarrow 5xRy))]$, ou seja, existe uma relação R que é uma função 1-1 e fechada sobre G (se um objeto y está na relação R com um objeto x que é G,

[244] Se o número das coisas que são F e não são G ou das coisas que são G e não são F é par, então, conseqüentemente, tal número é finito.

então y é G) e existe um objeto x que é G que não está na relação R com qualquer outro objeto que é também um G.

O Princípio da *Nuisance* se diferencia do Princípio da Paridade, porque neste último é exigido que o número das coisas que são F e não são G ou que são G e não são F seja par. Contudo, tal diferença não é tão drástica. O Princípio da *Nuisance*, como o Princípio da Paridade, é verdadeiro apenas em domínios finitos. Agora, o Princípio da *Nuisance* pode ser considerado como um princípio de abstração legítimo? Ora, o primeiro passo é saber se a relação do lado direito de tal princípio é uma relação de equivalência, ou seja, uma relação que é simétrica, reflexiva e transitiva. A simetria e a reflexividade são triviais. Resta-nos mostrar que tal relação é transitiva da seguinte maneira:

Assuma que ((Fx&5Gx)V(Gx&5Fx)) é finito e ((Gx&5Hx)V(Hx&5Gx)) é finito. Por redução ao absurdo, assuma que ((Fx&5Hx)V(Hx&5Fx)) é infinito. Os disjuntos de ((Fx&5Gx)V(Gx&5Fx)) devem ser ambos finitos, ((Gx&5Hx) V(Hx&5Gx)) também devem ser ambos finitos, mas um dos disjuntos de ((Fx&5Hx)V(Hx&5Fx)) deve ser infinito. Assuma (Fx&5Hx) é infinito. Como (Fx&5Gx) é finito, então apenas finitos (Fx&5Hx) podem ser 5Gx. Portanto, infinitos (Fx&5Gx) devem ser Gx. Assim teríamos infinitos (Gx&5Hx). Contradição. Agora, temos de assumir que o outro disjunto é infinito, ou seja, (Hx&5Fx) é infinito. O argumento se segue de maneira análoga ao anterior.

Uma vez que no lado direito do Princípio da *Nuisance* temos uma relação de equivalência, tal princípio pode ser considerado como um princípio de abstração (Fregeano). Além disso, a relação de equivalência que ocorre em tal princípio utiliza somente vocabulário lógico (lógica de segunda ordem), de maneira que, semelhante ao Princípio de Hume, poderíamos considerar o Princípio da *Nuisance* uma definição implícita e analítica do conceito de *nuisance*. O problema é que, como afirmamos, tal princípio é somente verdadeiro em domínios finitos. Para ver isto, precisamos dos dois seguintes lemas:

O primeiro é que todo domínio de objetos de cardinalidade k igual ou maior que $\aleph_0$ irá gerar exatamente k Conceitos finitos[245]. Em particular, teremos, k Conceitos finitos da forma (Fx&5Gx)V(Gx&5Fx). O segundo lema diz que dado um Fx particular, existem no máximo k conceitos da forma (Fx&5Gx)V(Gx&5Fx) finitos e nenhum par de conceitos coincide a menos que os valores de Gx coincidem (ou seja, se todo objeto cai sob (Fx&5Gx)V(Gx&5Fx) cai sob (Fx&5Hx)V(Hx&5Fx) e vice-versa então Gx e

245 Tal prova é dada assumindo um princípio de indução. Mostramos primeiro que há exatamente k Conceitos sob os quais cai um único objeto. Depois, assumimos que há exatamente k Conceitos sob os quais caem n objetos e mostramos que há exatamente k Conceitos sob os quais caem n+1 objetos (passo indutivo). Assim, teremos k+k+k...= ω.k. Mas, como k $\geq\aleph_0$, então ω.k=k.

Hx são coextensionais). Assim, em um domínio infinito k, teremos no máximo k *Nuisances*. E cada uma das *nuisances* é a *nuisance* de no máximo k Conceitos[246]. Mas, como todo Conceito tem de ter sua *nuisance*, e uma vez que há 2^k Conceitos, o Princípio da *Nuisance* não é verdadeiro em domínios infinitos[247].

O Princípio da *Nuisance* é consistente (como o Princípio de Hume), contudo o mesmo é verdadeiro somente em domínios finitos. O Princípio da *Nuisance* e o Princípio de Hume, embora sejam consistentes, são inconsistentes entre si e o conjunto {Princípio da *Nuisance*, Princípio de Hume} não é verdadeiro em nenhum domínio, ou seja, o conjunto dos princípios de abstração consistentes é universalmente inflacionário. O que Boolos exige, como já falamos, é o seguinte: no Princípio da *Nuisance* (na verdade, no caso de Boolos, o Princípio da Paridade), a relação de equivalência é decodificada em termos de lógica de segunda ordem, assim o Princípio da *Nuisance* poderia ser considerado como uma definição implícita e analítica de tal conceito. Todavia, se o Princípio de Hume for uma definição implícita e analítica, então o Princípio da *Nuisance* deveria ser analiticamente falso, posto que faz asserções ontológicas inconsistentes com as asserções ontológicas do Princípio de Hume. Agora, por que a inversa não é também correta, ou seja, por que o Princípio de Hume não é analiticamente falso, posto que é incompatível com o Princípio da *Nuisance* que poderia ser considerado como uma definição implícita e analítica do conceito de *nuisance*? Wright tem de dar alguma razão para aceitarmos a analiticidade do Princípio de Hume em detrimento dos demais princípios de abstração consistentes, mas verdadeiros somente em domínios finitos, como no caso do Princípio da *Nuisance*. O critério de consistência, apesar de ser necessário, principalmente para excluir a Lei Básica V, não é suficiente para estabelecer a distinção entre os princípios de abstração consistentes "bons" e "maus".

A opção de Wright (1997) é, então, formular um outro critério. Segundo ele, há uma maneira de separar os princípios de abstração consistentes "bons", como o Princípio de Hume, dos princípios de abstração consistentes "maus", como o Princípio da Paridade e Princípio da *Nuisance*, impondo a seguinte restrição: os princípios de abstração consistentes "bons" têm de ser princípios

[246] Na verdade, como Wright coloca, temos, no máximo, k.k Conceitos que são atribuídas nuisances. Porém, como k é um cardinal transfinito, então k.k=k. A prova disso depende do axioma da escolha.

[247] Isso exigiria uma função 1-1 do domínio de cardinalidade 2^k em um domínio de cardinalidade k, o que é impossível segundo o teorema de Cantor.

conservativos (no sentido de Hartry Field (1980))[248] [249]. Como Wright defende, todos princípios de abstração que exigem que o domínio do universo seja finito serão princípios não conservativos. Nas suas palavras (1997):

> O interesse de Field nesta noção, é claro, não tem nada a ver com o *status* das definições mencionadas ou outras formas de explicação conceitual. Mas, tudo que é meramente uma definição ou outro tipo de formação de conceito tem de ser conservativo, justamente neste sentido intuitivo, no que diz respeito a qualquer teoria para a qual tal definição é adicionada. E, é claro, uma vez que tal definição poderia ser adicionada a teorias que são anteriormente neutras sobre a questão da finitude de certos conceitos que elas tratam, o Princípio da Nuisance não passa no teste. (Wright, 1997, pp. 296-7).

Chegamos a um ponto interessante. Como dissemos no capítulo anterior, na seção **3.7,** o Princípio de Hume não é não-criativo. Isto significa que dada uma teoria T qualquer que tem somente modelos finitos, e seja A uma sentença que ocorre em modelos infinitos, T + Princípio de Hume implica A, mas T somente não implica A. Ou seja, o Princípio de Hume não é conservativo. Entretanto, a noção de conservatividade, dada segundo o critério acima (em termos de não-criatividade), é muito forte. Wright, então, tem de enfraquecer tal noção, de maneira que o Princípio de Hume seja conservativo e o Princípio da *Nuisance* (e o princípio da Paridade), não. A idéia de Wright é a seguinte: um princípio de abstração é conservativo se ele, quando adicionado a uma teoria T, não faz nenhuma nova asserção sobre os objetos de tal teoria. Formulemos isto de uma maneira mais exata (formulação de Wright (1997)):

Seja *Px* um predicado *verdadeiro exatamente dos referentes dos novos termos introduzidos*. No que diz respeito ao Princípio de Hume, *Px* seria *x é um número cardinal*. Agora, assumamos uma sentença Φ na nova linguagem e definamos a P-

[248] Segundo Field, uma teoria matemática M é conservativa porque quando M é adicionada a uma teoria qualquer N (nominalisticamente aceitável), M+N não faz nenhuma reivindicação sobre os objetos que compreendem o domínio de N que N somente não o faça. É interessante notar o seguinte: Field acredita que toda a teoria matemática é falsa, pois faz asserções existenciais sobre objetos abstratos que, na sua visão, não existem. A questão é: como uma teoria falsa adicionada a uma teoria nominalisticamente aceitável N resulta em uma teoria verdadeira? Ora, afirma Field, porque a matemática é conservativa. Vale também notar o seguinte: Wright não adere à posição da não-existência de objetos abstratos, ao contrário. Então se deve manter bem claro que mesmo Wright defendendo a noção de conservatividade da matemática, em hipótese nenhuma ele aceita o nominalismo.

[249] Field, no capítulo 1 de (1980), sugere que toda a matemática é suposta ser (ou é considerada) conservativa, uma vez que ela é suposta ser (ou é considerada) verdadeira em todos os mundos possíveis. É claro que isto não significa muita coisa, talvez ainda sejamos dogmáticos e aceitamos a opinião expressa por inúmeros filósofos, dentre eles, Leibniz. Não obstante, Field prova uma conjetura bastante forte: se ZFC é consistente, então ZFC é conservativo. Assim é possível mostrar que se ZFC é conservativo, então o Princípio de Hume é conservativo. Ainda não tenho totalmente claro como seria esta prova, mas um caminho seria: ao invés de falar de *NxFx* poderíamos falar de Nx{x:Fx}. O problema é que, como já comentamos, há uma incompatibilidade entre **FA** e ZFC. Teríamos de restringir o Princípio de Hume de maneira que fosse possível falar de *Nx{x:Fx}*.

restrição de Φ (Φ^P) como sendo o resultado de restringir o escopo dos quantificadores em Φ a *não-Px*, ou seja, no caso em questão, Φ^P afirma que Φ é válido para as coisas que não são números. Admitamos agora uma teoria T qualquer. Um princípio de abstração é conservativo se, para qualquer sentença Φ da linguagem de T, T + este princípio de abstração implica Φ^P, somente se T implica Φ.

Entretanto, como Shapiro e Weir (1999) observaram, a formulação acima não totalmente é correta. Segundo eles:

> Seja Φ a sentença "Clinton está sob juramento" e seja *T* a teoria com o único axioma: "Se o universo for infinito, então Clinton está sob juramento". Então, *T* mais princípio de Hume implica Φ e Φ^Σ [nosso Φ^P] é justamente Φ. Portanto, *T* mais princípio de Hume implica Φ^Σ. Entretanto, *T* somente não implica Φ. Assim, o princípio de Hume não satisfaz , ao pé da letra, o requerimento da conservatividade de Wright. (Shapiro e Weir, 1999, pp. 300-1).

Contudo, Shapiro e Weir (1999) propõem uma nova versão do requerimento de conservatividade que eles chamaram de *requerimento da conservatividade emendada* e que o Princípio de Hume satisfaz:

> A idéia subjacente do requerimento de Wright é que os princípios de abstração não deveriam ter conseqüências sobre os não-abstratos, os não números, neste caso [Princípio de Hume]. Para elaborar isto, precisamos explicitamente restringir os quantificadores da velha teoria a não-abstratos. O que se segue é, dessa maneira, uma proposta simpática que parece nos dar o que Wright tem em mente. Seja *T* qualquer teoria. O requerimento da conservatividade emendada é que para qualquer sentença Φ na linguagem de *T*, T^Σ mais o princípio de abstração implica Φ^Σ somente se *T* implica Φ.
> Se "implicação" é formulado em termos de conseqüências modelo-teoréticas, então o princípio de Hume satisfaz o requerimento da conservatividade emendada. (Shapiro e Weir, 1999, pág. 301).

Assumindo que o critério de conservatividade de Wright (melhor elaborado por Shapiro e Weir como critério da conservatividade emendada) está em ordem, podemos ver que o Princípio da *Nuisance* não satisfaz tal critério. Se assumirmos uma teoria T sobre gatos, então T+Princípio da *Nuisance* derivaria (ou poderia derivar), a sentença *existem finitos gatos*. E isto ocorre por uma razão muito simples, se houvesse infinitos gatos, então o Princípio da *Nuisance* seria falso, posto que ele é verdadeiro apenas em domínios finitos. Mas, o mesmo não ocorreria com o Princípio de Hume? Não. Independente da cardinalidade do conjunto de gatos no universo (finito ou infinito), o Princípio de Hume implicaria ainda a existência de infinitos objetos abstratos, os números. É irrelevante para o Princípio de Hume, se há finitos ou infinitos gatos. A diferença entre o Princípio de Hume e o Princípio de *Nuisance* é que o primeiro implica a existência de, pelo menos, k coisas (k sendo um número cardinal qualquer) e o segundo implica a existência de, no máximo, k coisas[250].

Porém, o critério de conservatividade, embora seja necessário para excluir princípios de abstração inf-inflacionários, ele não é suficiente para distinguir os princípios de abstração "bons" dos "maus". Shapiro e Weir (2000) elaboraram princípios de abstração conservativos, mas ainda inconsistentes entre si. Tome o seguinte esquema de abstração:

(A) $\forall F \forall G\ (\S F=\S G \leftrightarrow ((\Phi F \& \Phi G)\ V\ \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)))$[251 252]

Se tomarmos Φ como sendo "ser o tamanho do universo cuja cardinalidade é algum limite inacessível" e "ser o tamanho do universo cuja cardinalidade é algum sucessor inacessível" respectivamente[253], então os princípios de abstração resultantes serão conservativos (no sentido dado por Wright), mas ainda serão inconsistentes um com o outro. Vejamos porquê. Sejam (A´) *∀F∀G (§F=§G↔((F tem a cardinalidade de algum sucessor inacessível & G tem a cardinalidade de algum sucessor inacessível) V ∀x(Fx↔Gx)))* e (A´´) *∀F∀G (§F=§G↔((F tem a cardinalidade de algum limite inacessível & G tem a cardinalidade de algum limite inacessível) V ∀x(Fx↔Gx)))*[254]. Uma vez que é possível estabelecer em lógica de segunda ordem as propriedades *ser o tamanho do universo cuja cardinalidade é algum limite inacessível* e *ser o tamanho do universo cuja cardinalidade é algum sucessor inacessível*, as relações de equivalência que ocorre em (A´) e (A´´) seriam lógicas e, portanto, (A´) e (A´´) poderiam ser considerados como definições implícitas e analíticas de um certo conceito, respectivamente. Agora, se (A´) é analiticamente verdadeiro, então (A´´) é analiticamente falso e vice-versa[255]. É novamente o *Problema das Más*

[250] Essa sugestão, bastante interessante, é dada por Shapiro e Weir (1999). Eles afirmam que esta é a motivação de Wright ao elaborar o critério de conservatividade, mas até onde sabemos, Wright não afirma isto explicitamente.
[251] É possível mostrar que $((\Phi F \& \Phi G)\ V\ \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$ é uma relação de equivalência.
[252] (A) é uma instância de um princípio mais geral que tem a seguinte forma: (A_1) $\forall F \forall G\ (\S F=\S G \leftrightarrow (P \vee \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)))$, (onde P é qualquer sentença que pode ser expressa na linguagem de lógica de segunda ordem). Richard Heck (1992) mostrou que este princípio de abstração é consistente se e somente se P é consistente (na verdade, Heck diz que este princípio é satisfazível se e somente se P é satisfazível).
[253] Estes exemplos são de Wright.
[254] Uma vez que ambas propriedades são satisfazíveis, (A´) e (A´´) são consistentes.
[255] É intuitivo que se o universo tem a cardinalidade do limite inacessível, então o universo não poderá ter a cardinalidade de um sucessor inacessível e vice-versa.

Companhias. Qual critério que temos para defender a analiticidade de (A′) em detrimento de (A′′) e vice-versa?

O problema de princípios de abstração como (A) é que há embutidos neles princípios claramente inconsistentes (a Lei Básica V) e, portanto, é possível mostrar que (A) implica que $\exists F \Phi F$[256]. Uma alternativa para Wright seria então desconsiderar todos os princípios de abstração que contenham outros princípios inconsistentes. Mas a questão é: como saber se um princípio de abstração contém ou não princípios inconsistentes? Além disso, tal alternativa excluiria como princípio "bom" um princípio análogo à Lei Básica V (porém consistente) que foi elaborado por Boolos, New V, e que Wright (1997) toma como sendo, talvez, um princípio que explicaria *a priori* (e analiticamente) nosso conceito de conjunto. O New V tem a seguinte forma:

$$\forall F \forall G(\S F=\S G \leftrightarrow (\mathrm{Big}(F) \& \mathrm{Big}(G)) \vee \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$$ [257] [258]

É interessante mencionar novamente que o Princípio de Hume apesar de ser, parece, um princípio suficiente para estabelecer a teoria dos números (aritmética dos naturais), não é possível desenvolver com este princípio, a aritmética dos números reais. É necessária a introdução de um novo princípio de abstração para provar teoremas interessantes da análise e o New V poderia ser um

[256] Assuma como hipóteses:
1 (1)$\forall F \forall G(\S F=\S G \leftrightarrow (\Phi F \& \Phi G) \vee \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$ hip
2 (2)$\forall F \forall G \neg(\Phi F \& \Phi G)$
1 (3) $\S F'=\S G' \leftrightarrow (\Phi F' \& \Phi G') \vee \forall x(F'x \leftrightarrow G'x))$ instanciação universal em 1 (duas vezes, uma para $\forall F$, outra para $\forall G$)
2 (4) $\neg(\Phi F' \& \Phi G')$ instanciação universal (duas vezes)
Assuma também como hipótese
5 (5)$\S F'=\S G'$ hip.
1,2,5 (6) $\forall x(F'x \leftrightarrow G'x)$ (3), (4), (5) lógica proposicional, uma vez que $\S F'=\S G'$ e $\neg(\Phi F' \& \Phi G')$ e $\S F'=\S G' \leftrightarrow (\Phi F' \& \Phi G') \vee \forall x(F'x \leftrightarrow G'x))$
1,2 (7) $\S F'=\S G' \rightarrow \forall x(F'x \leftrightarrow G'x)$ (5), (6) regra do condicional (lógica proposicional?)
Assuma também a seguinte hipótese
8 (8) $\forall x(F'x \leftrightarrow G'x)$ hip.
1, 8 (9) $\S F'=\S G'$ (3), (8), lógica proposicional
1 (10) $\forall x(F'x \leftrightarrow G'x) \rightarrow \S F'=\S G'$ regra do condicional
1,2 (11) $\forall x(F'x \leftrightarrow G'x) \leftrightarrow \S F'=\S G'$ (7), (10) lógica proposicional.
1,2 (12) $\forall F \forall G(\S F=\S G \leftrightarrow (\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)))$ (11) generalização universal (duas vezes).
1,2 (13) contradição, pois (12) é a Lei Básica V
Portanto $\Phi F \& \Phi G$
1 (14) $\neg \forall F \forall G \neg(\Phi F \& \Phi G)$ (2), (13)
1 (15) $\exists F \exists G(\Phi F \& \Phi G)$ (14) lógica de ordem superior.
1 (16) $\exists F \Phi F$ (15) lógica de ordem superior.

[257] Onde "Big(F)" significa que $F \approx (x=x)$, ou seja, F é equinumérico ao conceito *ser idêntico a si mesmo*.

[258] Note que o New V é uma instância do princípio de abstração (A).

candidato. Mas, como Boolos (1987a) e (1989) mostra, o New V também não nos ajuda muito nessa tarefa. O New V é, em certos aspectos, um princípio bastante forte[259], mas em outros, bastante fraco[260].

O Princípio de Hume é compatível com qualquer princípio de abstração consistente e conservativo, em particular, o Princípio de Hume é compatível com os princípios (A´) e (A´´), entretanto tal fato não é confortante. Uma vez que há infinitas instâncias problemáticas de princípios de abstração consistentes e conservativos[261] é difícil sustentar que o Princípio de Hume está em ordem, em particular, que o mesmo é uma definição implícita e analítica do conceito de número cardinal. Como dissemos, é o *Problema das Más Companhias*.

Wright (1997), é claro, não se dá por vencido. Ele apresenta um outro critério para distinguir os princípios de abstração "bons" dos "maus". Wright (1997) escreve:

> Isto sugere que uma abstração D-tipo particular ou uma instância embutida com um paradoxo poderia ser aceita se fosse fornecido que a mesma satisfaz outra restrição da conservatividade: aproximadamente, que toda conseqüência que pode ser obtida explorando seu componente paradoxical deveria ter, *a priori*[262] e independentemente, um bom prestígio independente [*should be, a priori, in independent good standing*]. Os teoremas da lógica são assim *par excellence*. Mas, 'um bom prestígio independente' [*independent good standing*] também poderia ser tomado razoavelmente como cobrindo o caso no qual a conseqüência obtida a partir de uma abstração suspeita - que explora o paradoxo – poderia ser obtida não somente da lógica, mas, inocentemente, dos recursos adicionais fornecidos por tal abstração. (Wright, 1997, pág. 301).

A restrição que Wright propõe acima foi chamada de *Restrição do Quase-Paradoxo* por Shapiro e Weir (1999). A idéia básica é a seguinte: as conseqüências ontológicas obtidas das instâncias dos princípios de abstração como (A) ou (A_1) não podem depender da exploração do componente paradoxical.

---

[259] É possível provar vários axiomas da teoria de conjuntos ZFC, dentre os quais, o Axioma da Extensionalidade, o Axioma da Adjunção, o Axioma da Separação, o Axioma da Escolha, Axioma da Substituição. E definindo a noção de conjunto puro, podemos provar o Axioma da União e o Axioma da Regularidade.

[260] Não é possível provar o Axioma do Infinito, o Axioma do Conjunto Potência. O New V é forte o suficiente para provar os axiomas da aritmética dos naturais, contudo não é possível provar a existência do conjunto dos naturais, uma vez que não há meios de provar que tal conjunto não é Big. O mesmo vale também para o conjunto potência. Uma solução seria estabelecer que o conjunto dos naturais não é Big e a potência do conjunto dos naturais não é Big, mas para os Neo-Fregeanos tal procedimento não justificaria a reivindicação de logicismo.

[261] Como dissemos em uma nota anterior, (A_1) (e, conseqüentemente, (A)) é satisfazível se P é satisfazível. Assim, teremos infinitas instâncias de (A_1), todas incompatíveis entre si. Basta tomar cada P como afirmando que a cardinalidade do universo é igual a um dos números transfinitos $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$,.... $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}$,. $\aleph_{\omega+2}$,...

[262] Ênfase nossa.

Assim, (A′) e (A′′) não satisfazem este requerimento e, portanto, seriam princípios "maus". O New V, por outro lado, Wright acreditava até então, satisfazia tal requerimento, uma vez que tal princípio não impõe qualquer restrição sobre a cardinalidade do universo (isto é verdade, uma vez que não podemos provar, a partir de New V, que há um conjunto infinito[263]). A noção *ser Big* é uma noção que não implica que o universo tenha tal e tal cardinalidade (independente da cardinalidade do universo em questão, se um conceito é equinumérico ao universo, então tal conceito é *Big*). Contudo, Wright estava errado. O New V, como Shapiro e Weir (1999) mostraram, não satisfaz a *Restrição do Near-Paradox*. Infelizmente, não mostraremos aqui os argumentos deles, mas o leitor interessado pode ler o artigo já mencionado[264].

O *Problema das Más Companhias* nos leva à seguinte conclusão: parece ser uma questão de sorte de que o Princípio de Hume seja não-problemático, isto é, consistente, conservativo e cujas reivindicações ontológicas não exploram um componente paradoxical. Não há, até onde sabemos, nenhum outro princípio de abstração conceitual que satisfaça tais requerimentos. Como, então, poderíamos defender que o Princípio de Hume é verdadeiro, e se ele for, analítico? Esta é a principal conclusão do *Problema das Más Companhias*. Além disso, há, é claro, o problema mencionado na nota 203. Tais critérios não seriam *ad hoc* e descobrir quais princípios de abstração são "bons" e quais são "maus" não seria um trabalho epistêmico colateral? Se a resposta for positiva, Wright, então, está errado ao reivindicar que o Princípio de Hume é uma definição implícita e analítica.

---

[263] Ver nota 261.
[264] O New V também não satisfaz, segundo Shapiro e Weir (1999), o critério da conservatividade.