3 - A FILOSOFIA NEO-FREGEANA DE CRISPIN WRIGHT

O objetivo deste capítulo é discutir as idéias apresentadas por Crispin Wright no seu livro *Frege's Conception of Numbers as Objects*.

3.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Como dissemos na introdução, o objetivo central de Wright no seu livro *Frege's Conception of Numbers as Objects* é defender uma posição logicista em relação à aritmética dos números naturais (ou teoria dos números). A idéia de Crispin Wright neste livro, como também indicamos, é adicionar o Princípio de Hume a uma lógica de segunda ordem apropriada[140] e derivar os axiomas da aritmética de segunda ordem de Dedekind-Peano. É claro que Wright, para justificar o seu logicismo Neo-Fregeano, tem de dar uma solução para o *Problema de Júlio César* que foi mencionado acima. Wright enfatiza que a tentativa de solução de Frege para resolver o *Problema de Júlio César*, a saber, formulando a definição explícita da expressão *o número que pertence ao conceito F* em termos de extensão de conceito, apenas adiou o problema, solucionando a questão para identidade entre objetos ordinários e os números cardinais, contudo ainda poderíamos perguntar se Júlio César é uma extensão. Como ele diz, o próprio Frege irá retomar esta questão no seu livro *Grundgesetze der Arithmetik* na § 10. A idéia subjacente de Wright é que Frege ao introduzir as extensões de conceitos no seu sistema não apenas não resolve satisfatoriamente o *Problema de Júlio César*, mas também introduz a *serpente no paraíso* (como diria Dummett), ou seja, surge a contradição. Heck (1993) e (1997b)[141] [142] e Dummett (1991) também têm a mesma opinião de Wright.

[140] Ver introdução.

[141] Heck (1997b) afirma que a questão central para Frege não assumir o Princípio de Hume como um axioma lógico era o *Problema de Júlio César*. Por exemplo, ele escreve o seguinte: "Uma questão histórica importante é que, em uma carta a Russell [carta de 28/7/1902], Frege explicitamente considera adotar o Princípio de Hume como um axioma, observando somente que 'as dificuldades aqui' não são as mesmas que aquelas que importunam o Axioma V. Frege não diz nada sobre estas 'dificuldades', mas ele seguramente tinha em mente a 'terceira dúvida' discutida em *Gl* [*Grundlagen der Arithmetik*]. É isto que o força a abandonar o Princípio de Hume e substitui-lo por uma definição explícita a partir da qual o Princípio de Hume pode ser derivado". (Heck, 1997b, 273-4). O problema é que na tradução inglesa há um erro. A passagem é a seguinte: "Die Schwierigkeiten sind hierbei dieselben, wie bei der Umsetzung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Wertverlaufsgleichheit". A tradução correta é: *as dificuldades aqui são as mesmas que*. Mas que dificuldades são estas? Frege, dois parágrafos acima, nessa mesma carta, diz que nunca se sentiu confortado em aceitar a Lei Básica V, ele via dificuldades nesta lei. E essas dificuldades aumentaram com a descoberta da contradição. Uma possível resposta então seria que uma vez que o Princípio de Hume é um análogo da Lei Básica V, então o Princípio de Hume poderia sofrer do

Wright, em *Frege's Conception of Numbers as Objects*, pretende dar uma solução ao *Problema de Júlio César*, mostrar que o paradoxo de Russell não é derivável do Princípio de Hume[143] e defender o logicismo em relação à aritmética. Para solucionar o *Problema de Júlio César*, Wright tentará defender que o conceito de número (cardinal) é um conceito sortal e que desse fato mais o Princípio de Hume, é possível dar uma resposta ao problema mencionado acima. Agora, para defender que o conceito de número é um conceito sortal, é estritamente necessário defender a tese já colocada por Frege de que os números cardinais são objetos. Wright, então, tem de dar um relato de como podemos reconhecer quando um termo funciona como um termo singular. Ligado a estas questões está a sua discussão contra o reducionismo ontológico, e a sua discussão a favor do entendimento de conceitos sortais abstratos[144]. Além disso, Wright tem de reinterpretar o logicismo de Frege. Como dissemos em **2**, Frege descreve uma verdade analítica como aquela que pode ser provada por meio de definições e leis lógicas. O pro-

mesmo mal (derivar uma contradição). É claro que isto é apenas uma suposição. Poderíamos perguntar porque Frege tenta reformular a Lei Básica V, de maneira que a contradição não seja derivada dela, ao invés de investigar se o Princípio de Hume é consistente (na verdade, consistência não seria o melhor termo, Frege poderia investigar se alguma contradição resultaria do Princípio de Hume). Isso nos leva a crer que as extensões são essenciais para Frege. A questão é, por que? O leitor interessado pode ler Ruffino (1996), (1998), (2000), (2002) e (2003).

[142] Heck (1993) mostra que o único uso essencial da Lei Básica V em *Grundgesetze der Arithmetik* é na prova do Princípio de Hume. Os demais usos das extensões de conceitos tinham por objetivo simplificar as provas e são todos dispensáveis. Portanto, se excluirmos a Lei Básica V, e os termos para extensão e adicionarmos o Princípio de Hume a *Grundgesetze der Arithmetik*, obtemos, segundo Heck, um sistema consistente capaz de provar os axiomas da aritmética de segunda ordem. Agora, Frege, em *Grundgesetze der Arithmetik,* pretende provar também teoremas da análise, como isso poderia ser possível? Frege necessita da noção de extensão (ou classe), posto que ele precisa de um conceito que tenha uma cardinalidade maior que o conceito de número cardinal. Como o próprio Frege diz lá (§164), o conceito *classe de números naturais* tem uma cardinalidade maior que o conceito *número natural* (aqui temos o uso implícito do teorema de Cantor). Frege diz: "aber diese Unendlichekeit genügt noch nicht", ou seja, "mas esta infinitude [a infinitude dos números naturais] ainda não é suficiente". Então ele diz: "Nennen wir den Umfang eines Begriffes, der dem Begriffe untergeordnet ist, eine Klasse endlicher Anzahlen, so kommt dem Begriffe Klasse endlicher Anzahlen eine unendliche Anzahl zu, die grösser als Emdlos ist", ou seja, "chamamos a extensão de um conceito que é subordinado ao conceito *número finito* [número natural] de uma classe de números finitos, assim um número infinito pertence ao conceito *classe de números finitos* que é maior que o Infinito [dos números naturais]". A nossa questão é, será mesmo que o único uso essencial da noção de extensão de conceito e da Lei Básica V é na prova do Princípio de Hume? (Vale lembrar que aritmética para Frege é a aritmética dos números naturais e reais). A noção de extensão parece desempenhar um papel fundamental também na derivação de teoremas da análise. Acredito que um estudo minucioso na teoria dos números reais de Frege em *Grundgesetze der Arithmetik* jogaria alguma luz no papel essencial das extensões de conceitos. Mas isto só será possível em uma outra ocasião.

[143] Wright conjetura também que a teoria resultante do acréscimo do Princípio de Hume a uma lógica de segunda ordem adequada é consistente. Tal fato foi provado, como dissemos na introdução, por Boolos e Burgess.

[144] Conceitos que são pretensamente exemplificados por objetos abstratos. Por exemplo, direções e números.

blema é que o Princípio de Hume não pode ser considerado uma lei lógica, uma vez que, em nosso tempo, uma lei lógica é aquela que é verdadeira em qualquer domínio (não vazio). Contudo, como dissemos na introdução, o Princípio de Hume só é verdadeiro em domínios infinitos. E o Princípio de Hume também não pode ser uma definição (no sentido estrito). O Princípio de Hume não satisfaz, como veremos mais adiante, os dois critérios que uma definição deve satisfazer, a saber, o critério da *eliminabilidade* e o critério da *não-criatividade*. Wright então proporá que o Princípio de Hume funcione como uma definição implícita do conceito de número cardinal. Mas, uma vez que o lado direito do Princípio de Hume é formulado em uma linguagem de lógica de segunda ordem, podemos considerar o Princípio de Hume como uma explicação (ou definição implícita) analítica do conceito de número (cardinal). É claro que Wright assume que lógica de segunda ordem preserva analiticidade, portanto os axiomas da aritmética de segunda ordem são também analíticos, uma vez que os mesmos são derivados de um princípio analítico.

Escrevemos acima uma série de questões tratadas por Wright em *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Nosso objetivo será apresentar e discutir a proposta de solução de Wright ao *Problema de Júlio César*. Isto implica que deveremos tratar das questões sobre o princípio do contexto, conceitos sortais, conceitos sortais abstratos e o reducionismo ontológico. Também discutiremos rapidamente a proposta de Wright de que o Princípio de Hume é uma definição implícita e analítica do conceito de número cardinal. A questão sobre se a lógica de segunda ordem preserva a analiticidade não será discutida nesta dissertação (mas esta é uma questão importante para o Neo-Fregeano).

3.2 - A NOÇÃO DE CONCEITO SORTAL

O que é um conceito sortal? Na seção **2.5** da presente dissertação, foi dito que um conceito sortal é um conceito que nos dá, por um lado, um critério de aplicação (ou qualitativo, como diria Aristóteles), ou seja, dado um objeto *a* e um conceito sortal F ou bem *a* cai sob F ou *a* não cai sob F; e, por outro lado, um critério de identidade sobre os objetos que caem sob tal conceito (um critério quantitativo). Como foi dito, Frege parece aceitar esta noção. Wright também a aceita. Ele escreve:

> O que realmente constitui a distinção é... que entender um conceito sortal envolve a compreensão [*grasping*] de uma noção de identidade para as coisas que caem sob ele. Entender qualquer conceito requer que se possua uma concepção das diferenças entre as coisas para as quais ele [conceito] se aplica e as coisas para as quais ele não se aplica. (Wright, 1983, pág.2).

Como Wright ilustra muito bem, o critério de aplicação é um critério que pertence a todo conceito, seja ele sortal ou não. Frege também afirma essa posição em alguns lugares. Em *Funktion und Begriff*, Frege diz que "deve ser determinado, para todo objeto, se ele cai sob o conceito ou não" (Frege, 1891, pág. 135 (148))[145]. Por outro lado, um critério de identidade é uma propriedade dos conceitos sortais. Wright também diz que um conceito sortal pode ser caracterizado da seguinte maneira:

> Uma caracterização plausivelmente equivalente à anterior é que um conceito ϕ é sortal dado que a questão 'quantos ϕs existem que satisfazem uma certa condição' sempre tem um sentido perfeitamente bom, na medida em que a condição é bem especificada. Para estarmos em posição de encontrar a resposta, temos de ser capazes não de distinguir meramente os ϕs de outros tipos de coisa, mas reconhecer identidade e distinguibilidade entre os próprios ϕs. (Wright, 1983, pág. 3).

A passagem acima tem uma íntima relação com a idéia de Frege de que os números cardinais são dados quando há uma resposta exata para a questão *quantos Fs existem?*[146] Mas, Wright sustenta uma outra distinção sobre a noção de conceito sortal:

> Mas, entender um conceito sortal envolve mais do que isto [entender um critério de aplicação e um critério de identidade]: envolve, também, um entendimento do que significa para qualquer objeto *a*, que exemplifica o conceito, ser o mesmo que ou distinto de qualquer objeto *b* que exemplifica o mesmo sortal. (Wright, 1983, pág. 2).

Esta distinção pode parecer desnecessária, uma vez que um conceito sortal tem de ter um critério de identidade e assim dados dois objetos *a* e *b* que caem sob um sortal F, saberíamos se *a* é o mesmo que *b* ou se *a* é distinto de *b*. Mas, se esta distinção não fosse dada, então conceitos como *vermelho*, *verde*, *marrom* (predicados de cores, por exemplo) poderiam ser considerados como sortais, posto que, por um lado, eles têm um critério razoável de aplicação[147]. E, por outro lado, podemos também distinguir os objetos que caem sob estes conceitos. Por exemplo:

[145] Predicados como *ser calvo* ou *ser um monte* não denotariam conceitos. Quando uma pessoa é calva? Quando um amontoado de coisas é um monte?
[146] Em nossa visão, esta idéia já estaria presente em Aristóteles (veja nota 128).
[147] Aqui, é claro, tem as questões sobre as tonalidades. Uma coisa que é azul escuro e uma coisa que é azul claro podem ser distinguidas segundo um critério de aplicação desses dois conceitos?

dado que há na minha mesa um livro azul, uma caneta azul e um lápis azul, então podemos distinguir claramente estas coisas. Em princípio, poderíamos admitir que há um critério de identidade. Mas se analisarmos cuidadosamente a questão, veremos que a distinção é feita novamente segundo um critério de aplicação. O lápis não é uma caneta, a caneta não é um livro e o livro não é um lápis. Em última análise, não parece ser possível, nem é necessário, dar um relato da mesmidade ou distinguibilidade dos objetos que caem sob um conceito que não é sortal[148].

Podemos então exemplificar alguns conceitos sortais (seguindo Wright): *livro*, *pessoa*, *elefante*, *pato*, *ser humano*, *número cardinal*, *número natural*, *conjunto* etc. Estes conceitos são também conhecidos como conceitos sortais puros. Por outro lado, note que se um conceito sortal é adicionado a um outro conceito que não é sortal (às vezes, Wright os denomina de *meros predicáveis*), obtemos também um conceito sortal. Por exemplo, *livro vermelho*, *elefante branco*, *pessoa com blusa azul* etc. Estes conceitos são também denominados de conceitos sortais impuros.

Chegamos a uma questão central: como foi dito acima, um conceito sortal teria de ter um critério de aplicação e um critério de identidade. Considere, por exemplo, o conceito de *pessoa*. Este conceito parece ter um bom critério de aplicação, Júlio César, que é uma pessoa, não é um livro, não é um elefante, contudo não podemos decidir, como Frege diz, se Júlio César é ou não um número natural ou se este imperador romano é ou não um conjunto. O problema está na falta de um critério de aplicação dos conceitos de *número natural* e *conjunto* que são, pretensamente, conceitos sortais abstratos. Mas, mesmo negando que haja conceitos sortais abstratos (ou seja, mesmo se negarmos a existência de qualquer tipo de objetos abstratos), o conceito de *pessoa* (e, na verdade, muitos outros conceitos sortais) não parece ter um bom critério de identidade. Um critério de identidade para *pessoa* seria dado como um critério de identidade pessoal. O problema é que

[148] Em outras palavras, entender um conceito sortal ϕ, envolve entender contextos da forma *a é o mesmo* ϕ *que b*, dado que *a* e *b* exemplificam o conceito sortal ϕ. Mas, isto não é suficiente para um conceito ser sortal, segundo Wright. A relação *é o mesmo* ϕ *que* tem de ser uma relação de congruência para as propriedades que pertencem aos objetos que exemplificam o conceito ϕ (em contextos não intencionais ou não modais). Ou seja, dados os objetos *a* e *b* e o conceito ϕ. Se de F(*a*) e de *a* é o mesmo ϕ que *b*, é possível inferir F(*b*) e vice-versa, então ϕ é um conceito sortal e pode ser entendido como expressando uma relação de identidade genuína.

ainda não parece existir um bom critério de identidade pessoal[149]. A questão é, tal critério realmente existe? Poderíamos dizer que sim, uma vez que distinguimos uma pessoa de outra. Mas, esta distinção é realmente dada por algum critério? Ou podemos assumir que a noção de identidade é uma primitiva? Não discutiremos estas questões aqui, pois nos tomaria muito tempo e espaço, contudo uma noção de conceito sortal depende de uma discussão bastante ampla e pormenorizada sobre critérios de identidade (além, é claro, de uma discussão sobre critérios de aplicação). Para efeitos de argumentação, assumiremos que a noção de conceito sortal não é uma noção problemática.

3.3 - O PRINCÍPIO DO CONTEXTO REVISITADO - A INTERPRETAÇÃO DE WRIGHT

Na subseção **2.5.2** acima, foi discutido de uma maneira sucinta o princípio do contexto apresentado por Frege em *Die Grundlagen der Arithmetik*. Lá, dissemos que este princípio foi interpretado de inúmeras maneiras pela literatura secundária e apresentamos algumas possíveis interpretações. Wright, em *Frege's Conception of Numbers as Objects*, interpreta o princípio do contexto da seguinte maneira, a saber, as categorias sintáticas têm prioridade sobre categorias ontológicas[150] e interpreta a expressão *Bedeutung* como referência ou denotação[151]. A idéia de que as categorias sintáticas têm prioridade sobre as categorias ontológicas é sustentada por inúmeras passagens de *Die Grundlagen der Arithmetik*. Por exemplo, um objeto é o sujeito de uma sentença que expressa um juízo que tem um conteúdo singular (Sócrates é mortal). Um conceito é o predicado de uma tal sentença. Além disso, Frege apresenta outros critérios sintáticos para defender o *status* objectual dos números: (1) os numerais são precedidos pelo artigo definido; (2) os numerais não são precedidos nem por plural, nem por artigo indefinido (o plural e o artigo indefinido indicam que uma palavra que é precedida por eles tem um *status* conceitual); (3) numerais ocorrem em sentenças que expressam uma relação de identidade. Mas, como a relação de identidade é uma relação de primei-

[149] Veja, por exemplo, Perry (1978). Para uma discussão histórica, ver Leibniz (1686) e (1703, livro 2, capítulo 27) e Locke (1690, livro 2, capítulo 26).
[150] Em outras palavras, o *status* ontológico da referência de um determinado termo depende do papel sintático que este termo desempenha em uma sentença.
[151] Como já dissemos, *Bedeutung* terá o sentido técnico de referência somente depois de *Die Grundlagen der Arithmetik* (o próprio Frege reconhece isto em "*Über Begriff und Gegenstand*"(1892)).

ra ordem para Frege, então os numerais significam (ou como Wright dirá, referem-se a) objetos.

Wright ainda apresenta um outro critério (chamado de teste da assimetria da negação) que, segundo ele, Frege também aceitaria, a saber:

∀A∃B∀C [⌜A^C⌝ é verdadeiro se e somente se não é o caso que ⌜B^C⌝ seja verdadeiro], onde *A*, *B*, *C* percorrem expressões ou termos e ^ expressa concatenação.

Se tomarmos que *A* e *B* percorrem predicados de primeira ordem e *C* percorre termos singulares, então o princípio acima está dizendo que para todo predicado *A*, existe um predicado *B*, para todo termo singular *C* tal que *C* está concatenado a *A* é verdadeiro, se e somente se *C* concatenado a *B* é falso. Em outras palavras, a idéia de Wright aqui é próxima da idéia de Aristóteles de que predicados têm contrários, por exemplo, *ser vermelho* e *ser azul* são predicados contrários e se um termo singular está concatenado ao predicado *ser vermelho* (formando uma sentença verdadeira), então este termo não pode ser concatenado ao predicado *ser azul* (formando uma sentença verdadeira) e vice-versa[152]. Por outro lado, suponha que *A* e *B* percorrem termos singulares e *C* percorre predicados de primeira ordem. Agora, temos a seguinte situação, para todo termo singular *A*, existe um termo singular *B*, para todo predicado C, tal que *A* concatenado a *C* é verdadeiro, se e somente se *B* concatenado a *C* é falso. Isto é falso. É possível que dois termos singulares *a* e *b* estejam concatenados a um mesmo predicado (por exemplo, Sócrates é mortal, Platão é mortal, Descartes é mortal etc) de maneira que ambas as concatenações sejam verdadeiras. Interpretado dessa maneira, o princípio somente seria verdadeiro se existisse um termo singular *a´* oposto a *a* (por exemplo, se existisse o termo singular não-Sócrates oposto a Sócrates). Assim, um possível teste para vermos se um termo é um termo singular é observar se este termo satisfaz ou não o teste acima. Se ele satisfaz, o termo é um predicado e, portanto, significa um conceito (dado o princípio do contexto). Se ele não satisfaz, então este termo é um termo singular e significa um objeto (segundo o princípio do contexto).

[152] É claro que nem todos os predicados são contrários entre si: por exemplo, *ser vermelho* e ser *oval* não são predicados contrários, pode muito bem acontecer de uma coisa *ser vermelha* e *ser oval* ao mesmo tempo. Strawson (1952), por exemplo, diz que dois predicados são contrários se eles estão no mesmo âmbito de incompatibilidade. Assim, *ser vermelho* e *ser azul* estão no mesmo âmbito de incompatibilidade, enquanto *ser vermelho* e *ser oval* não.

A interpretação de Wright de que o princípio do contexto pode ser entendido como um princípio segundo o qual as categorias sintáticas têm prioridade sobre as categorias ontológicas parece ser justificada por algumas passagens de *Die Grundlagen der Arithmetik*. Mas, a sua interpretação do princípio do contexto (como um princípio de referência) pode ser sustentada dentro do contexto do *Die Grundlagen der Arithmetik*? Bem, como afirmamos na seção **2.5.2,** em uma nota, a passagem na §60 de *Die Grundlagen der Arithmetik*, a saber, "é suficiente que uma proposição como um todo tenha um sentido para que seja conferido um conteúdo às suas partes", pode ser interpretada da seguinte maneira: é suficiente que uma proposição como um todo tenha uma referência para que seja conferida uma referência às suas partes. Ou seja, uma vez que uma sentença é verdadeira, seus termos denotam. Assim, um termo singular denotaria um objeto e o predicado denotaria um conceito. A interpretação de Wright parece consistente com a passagem acima. Todavia, há outras passagens que podem ser citadas para defender uma posição contrária. Por exemplo:

> A auto-subsistência que estou reivindicando para o número não tem de ser tomada como dizendo que um numeral significa algo quando removido do contexto de uma proposição, mas somente exclui o uso de tais palavras como predicados ou atributos, o que altera apreciavelmente seu significado. (Frege, 1884, §61).

Esta passagem pode ser interpretada como afirmando o seguinte: termos singulares para objetos abstratos não denotam nenhum objeto que pertence à "mobília" do mundo; seu papel objectual se dá apenas no contexto de uma proposição. A passagem acima é muito problemática. Dado que termos singulares para objetos abstratos não denotam nada fora de contextos proposicionais, segundo a interpretação da passagem acima, por que Frege adota como análise correta de uma sentença na qual ocorre um numeral, sentenças do tipo (1) *o número de φ é igual a n* (onde, φ é um conceito de primeira ordem e n é um determinado numeral) em detrimento de sentenças do tipo (2) $\exists_n x \varphi(x)$ na qual o numeral ocorre como parte de um predicado de segunda ordem? Por que a análise correta não é a inversa, dado que numerais não denotam realmente objetos? Esta visão pode ser dividida em duas: (I) a posição reducionista austera que diz que a análise correta de sentenças nas quais ocorrem numerais é a do tipo (2). Essa posição é defendida principalmente por filósofos que têm tendências nominalistas[153]; (II) a posição reducionista moderada que sustenta que a forma de análise da sentença (1) é correta, porém os numerais não denotam realmente nenhum objeto. O papel de objeto desempenhado pelos numerais é dado apenas no contexto da linguagem em questão. A idéia básica, parece, é que numerais significam objetos na aritmética porque na linguagem na qual expressamos seus axiomas e teoremas, os números funcionam como objetos. As variáveis objectuais percorrem os numerais (nesse sentido, números podem ser objetos). Mas isto não significa que realmente existem números. Essa visão é, parece, sustentada por Dummett (1973, capítulo 14)[154].

Como indicamos anteriormente, o princípio do contexto dá margem para inúmeras interpretações, inconsistentes entre si. Para efeitos de argumentação, tomaremos a posição de Wright como sendo não problemática, ou seja, como sendo a interpretação correta do princípio do contexto.

3.4 - UMA CRÍTICA AO PRINCÍPIO DO CONTEXTO?

No final da seção V, denominada *Ontological reducionism*, Wright escreve:

> Assim, ... para organizar um desafio justificado contra a trivialização da noção de um objeto que o pensamento de Frege ameaça implicar, nós não deveremos tentar um refinamento da noção Fregeana de um termo singular, mas tornar boa a idéia que nós somos capazes de discernir se uma dada classe de termos singulares Fregeanos é genuinamente referencial independentemente dos valores de verdade das proposições nas quais eles aparecem. Isto quer dizer que precisamos atacar o Princípio do Contexto diretamente. (Wright, 1983, pág. 36).

Wright chega a esta conclusão pelo seguinte fato, a saber, que as noções sintáticas estabelecidas por Frege são muito generosas; elas permitem que vários termos que intuitivamente não são termos singulares possam ser aparentemente considerados como tais.

Wright começa a seção V escrevendo:

> O platonismo aritmético Fregeano é, com efeito, a crença de que número natural é um conceito sortal genuíno, instanciado no mundo por um único domínio infinito de objetos. De acordo com a interpretação que estamos cogitando e que devemos agora desenvolver e defender, este platonismo é uma tese baseada na estrutura sintática da linguagem da teoria dos números; Para Frege, categorias sintáticas

[153] O reducionismo austero de tendências nominalistas tentará reduzir sentenças nas quais ocorrem termos singulares para objetos abstratos em geral a sentenças nas quais estes termos singulares não aparecem.

[154] Crispin Wright (1983, seção 10) tenta mostrar que a posição de Dummett é insustentável. Não discutiremos as objeções de Wright aqui. Veja também a resposta de Dummett (1991, capítulo 15).

> são anteriores às ontológicas e é, por referência à estrutura sintática de proposições verdadeiras que questões ontológicas têm de ser entendidas e estabelecidas. Duas coisas são imediatamente evidentes. Primeiro, se o Princípio do Contexto pode ser sustentado segundo esta interpretação, ele deve ser sustentado de uma forma geral e absoluta. Ou seja, terá de ser verdadeiro que questões de estrutura sintática e valor de verdade podem assumir, e, de fato, devem assumir, prioridade sobre questões de referência não só no que diz respeito a nomes de objetos abstratos, mas em toda parte. (Wright, 1983, pág. 25).

Como a passagem diz claramente, Wright irá considerar o princípio do contexto como exposto na seção anterior e verá se ele funciona adequadamente. Wright então apresenta a seguinte objeção à interpretação do princípio do contexto, a saber, que Frege não considerou a possibilidade de que os atos lingüísticos (ou nuances lingüísticas, como Wright diz) que usamos para formular juízos possam ser arbitrários. Vamos examinar as seguintes sentenças (seguindo Wright):

(1) João possui maturidade (*John possesses maturity*)

(2) A maturidade é rara (*Maturity is rare*)

Podemos observar que *maturidade* passa nos critérios sintáticos expostos na seção anterior. A expressão *maturidade* ocorre na sentença (1) que expressa uma relação de primeira ordem (*x possui y*), portanto ela é um dos sujeitos da sentença e, conseqüentemente, segundo o princípio do contexto, denotaria um objeto (dado que a sentença 1 é verdadeira). Da mesma maneira, a expressão *maturidade*, na sentença (2), funciona como um termo singular (é o sujeito da sentença). Além disso, *maturidade* é precedida pelo artigo definido. Mas, *maturidade* pode ocorrer em sentenças que expressam uma relação de identidade? Sim. Basta notar que é possível formar uma descrição definida com *maturidade*, usando o operador *a qualidade de* (*the quality of*)[155]. Segundo Wright, expressões como *beleza* (*beauty*), *maturidade*, *piedade* (*mercy*) etc (ou seja, adjetivos substantivados de qualidade) formam com operador *a qualidade de* expressões bem formadas. Agora, tome a seguinte sentença (novamente seguindo Wright):

(3) A qualidade de piedade é a qualidade que Stalin mais notavelmente falhou em mostrar

A palavra *é*, na sentença acima, pode ser considerada como uma identidade? Como expressando *é a mesma que*? A relação de identidade é uma relação de equivalência. E uma relação de equivalência funciona como uma relação de con-

[155] Na verdade, *a qualidade de maturidade* não parece ser bem formada no português. Assumirei que ela é para seguir a argumentação de Wright.

gruência com respeito a predicados relevantes (ou seja, aos predicados que se aplicam aos objetos que estão na relação de equivalência), ou seja, dado aRb (onde R é uma relação de equivalência) e Fa, então podemos deduzir Fb e vice-versa.[156]. Segundo Wright, "precisamos pesquisar se qualquer contexto da forma 'a qualidade de F é a qualidade de F' é verdadeiro independente do nome da qualidade introduzida por F" (Wright, 1983, pág. 27) e se "contextos da forma 'a qualidade de F é a qualidade de G' e da forma 'a qualidade de F é ϕ (onde ϕ é alguma estrutura de sentença não intencional e não modal) são verdadeiros, 'a qualidade de G é ϕ' será também verdadeira" (Wright, 1983, pág 27). Wright acredita que ambos os fatos descritos acima ocorrem.

> Em particular, se a qualidade de piedade não é hereditária e é a qualidade que Stalin mais notavelmente falhou em mostrar, parece se seguir que a qualidade que Stalin mais notavelmente falhou em mostrar não é hereditária! (Wright, 1983, pág. 27).

O ponto aqui é mostrar que *maturidade*, *piedade*, *beleza* etc. também passam no critério Fregeano de que termos singulares ocorrem em sentenças que expressam uma identidade. (Wright também afirma que as expressões acima passam no teste da assimetria da negação).

A argumentação de Wright é conduzida, como já dissemos, para a seguinte conclusão: os critérios sintáticos de Frege são generosos, permitindo que um termo como *maturidade* (e afins), que intuitivamente não denotaria nenhum objeto, funcione como um termo singular e denote um objeto (segundo o princípio do contexto). Wright vai além quando escreve:

> Assim, parece que a noção de objeto de Frege, como até agora explicado, irá se inchar abarcando todo tipo de casos estranhos e excêntricos. (Wright, 1983, pág. 28).

Para resolver o problema, há duas opções. Primeiro, encontrar outros tipos de critérios sintáticos mais refinados que dêem conta de excluir os casos indesejáveis, isto é, critérios que excluam termos singulares aparentes (como no caso de *maturidade*). A outra opção é, segundo Wright, recusar o princípio do contexto e afirmar que as categorias ontológicas têm prioridade sobre as sintáticas[157]. Segundo Wright, ambas propostas apresentam dificuldades. Vejamos porque.

---

[156] A relação de identidade no sentido estrito é considerada uma relação de congruência sobre todos os predicados. Por outro lado, a relação de paralelismo e de equinumerosidade são relações de congruência sobre alguns predicados relevantes.

[157] A discussão de Wright sobre esse ponto ficará para a próxima seção.

Reinterpretemos as sentenças (1) e (2) acima da seguinte maneira (seguindo Wright):

(1´) João é maduro

(2´) Relativamente poucas pessoas são maduras

As sentenças (1´) (2´) são equivalentes às sentenças (1) e (2). Um possível refinamento da noção de termo singular seria então o seguinte:

(α) um termo singular em uma sentença é real se o mesmo não pode ser sistematicamente excluído em uma outra sentença equivalente à primeira.

Assim, *maturidade* não seria um termo singular real, mas sim aparente, pois nas sentenças (1´) e (2´) que são equivalentes a (1) e (2), o termo singular *maturidade* é excluído. O problema é que esse possível refinamento abre um precedente indesejável para um Neo-Fregeano. Isso porque sentenças do tipo *o número de φ é igual a n* são equivalentes a sentenças do tipo *existem n coisas que são φ*. Nesse sentido, numerais e descrições definidas do tipo *o número de φ* são apenas termos singulares aparentes[158] [159]. Isso é fatal para um Neo-Fregeano, uma vez que é extremamente necessária a condição de que números sejam objetos para provar que *todo número tem um sucessor* e que *a relação de sucessor é 1-1*, onde juntamente com a proposição *o número 0 não é um sucessor*, implicam a existência de infinitos números naturais.

Portanto, Wright tem de apresentar uma objeção a essa tendência reducionista. E a objeção de Wright parece ser que o critério formulado em (α) é também muito generoso. Seguindo as idéias de Ramsey (1925) expostas em "*Universals*", Wright propõe que qualquer termo singular que ocorre em uma sentença poderia ser sistematicamente excluído em uma sentença equivalente à primeira. Ramsey escreve:

> Assim, não há nenhuma distinção essencial entre o sujeito de uma proposição e seu predicado e nenhuma classificação fundamental de objetos pode ser baseada sobre uma tal distinção. (Ramsey, 1925, pág. 21).

Em que Ramsey se baseia para fazer tal afirmação? Segundo Ramsey, e Wright parece endossar, uma sentença *sobre um certo indivíduo* (*about*), pode ser transformada em uma sentença *sobre uma certa propriedade.* Vamos exemplificar: seja a sentença (4) *Platão é mortal*. Esta sentença parece afirmar algo (ser

[158] A idéia acima é o núcleo do reducionismo ontológico.
[159] O mesmo vale para a noção de direção.

mortal) sobre um indivíduo (Platão). Contudo, poderíamos considerar essa sentença como afirmando algo sobre a propriedade *ser mortal*, a saber, que (5) a propriedade de ser mortal é instanciada por Platão. A proposta de Ramsey é a seguinte: toda sentença da forma *F(a)* pode ser transformada em uma sentença da forma $\varphi a(F)$. Da mesma maneira, uma sentença que expressa uma relação entre indivíduos (afirma algo sobre indivíduos), pode ser transformada em uma sentença que afirma algo sobre uma relação. Novamente, uma sentença do tipo *aRb*, pode ser transformada em uma sentença do tipo $a\psi b(R)$[160]. Ora, dado o critério reducionista exposto em (α) para termos singulares, qualquer termo singular seria aparente. Mas, então como podemos manter a noção de objeto, dado que critérios sintáticos apresentados até agora não são suficientes, segundo Wright, para explicar tal noção? Então, ele escreve o seguinte:

> Assim, independentemente das formas sintáticas nas quais damos expressão a um fato particular, deveríamos acreditar na nossa capacidade de reconhecer quais objetos existem na porção da realidade que constitui este fato. Tal reconhecimento seria possível somente se tivéssemos algum entendimento da noção de um objeto que poderia ser exercitado independente de nosso entendimento de critérios sintáticos e da nossa capacidade em reconhecer valor de verdade. (Wright, 1983, pp. 35-6).

Wright chega assim à sentença com a qual começamos essa seção. A próxima seção da presente dissertação mostrará que a tese da prioridade das categorias ontológicas sobre as sintáticas tem um problema crucial ao Neo-Fregeano.

3.5 - CONCEITOS SORTAIS ABSTRATOS

Na seção anterior, expomos uma suposta crítica de Wright ao princípio do contexto (segundo a sua própria interpretação). Poderíamos imaginar então que Wright abandonará tal princípio e defenderá a posição justamente oposta, como foi escrito acima. Mas isso leva a um grande problema, pelo menos, se desejarmos, como Wright deseja, defender que o conceito *número cardinal* (e, conseqüentemente, o conceito *número natural*) seja sortal. Isto quer dizer que caem sob tais conceitos (1) objetos que compõem a "mobília" do mundo, que podem ser distinguidos de outros objetos de outros tipos e, finalmente, que podem ser distinguidos dos objetos de seu tipo. Todavia, os objetos que caem sob os conceitos supracitados são abstratos, se tais conceitos são realmente sortais. E objetos abs-

[160] Note que essa posição também pode ser atribuída a Frege, pelo menos, em *Begriffsschrift*. Veja

tratos são, grosso modo, objetos atemporais e não-espaciais[161]. Os objetos abstratos são objetos causalmente inertes, isto significa que não podemos ter qualquer contato causal com eles. Não podemos tocá-los, vê-los, senti-los. Assim, a questão é, como podemos saber que existem objetos abstratos, em particular, como podemos saber que existem os números cardinais e naturais, posto que não podemos ter qualquer interação causal com esses objetos? Esta é a questão central quando é defendido que as noções ontológicas têm prioridades sobre as sintáticas. Como dar conta desse problema, se quisermos defender que o conceito de *número cardinal* e de *número natural* são sortais? Poderíamos dizer que, na verdade, temos algum "contato" com objetos abstratos ou, pelo menos, com objetos matemáticos, como afirmou Gödel (1947). Contudo, Wright rejeita essa posição:

> Uma resposta a esse desafio [explicar como um entendimento de um conceito sortal abstrato poderia ser comunicado a alguém cujos poderes para adquirir conceitos estão sujeitos a restrições impostas pelas limitações sensórias humanas], oferecida, em particular, por Gödel, é insistir justamente que objetos matemáticos são capazes de se apresentarem a nós na experiência; que a impressão é derivada de um apelo a uma noção muito estrita de 'experiência'. Ao contrário, possuímos faculdades cognitivas especiais que nos capacitam apreender os objetos com os quais a matemática pura lida, faculdades que produzem 'um tipo de percepção' de tais objetos... Entretanto, esta idéia é totalmente inútil. Pois, parece que a única evidência que possuímos uma tal habilidade 'perceptual' é fornecida pela nossa capacidade de entender uma linguagem que, aparentemente, envolve referência a, predicação de e quantificação sobre objetos abstratos. (Wright, 1983, pág.6).

Wright não aceita a idéia de que podemos ter "algum contato" com objetos matemáticos do tipo imaginado por Gödel. Na passagem acima, ele afirma que se este contato existe, isto tem a ver com o papel sintático dos termos que se referem aos objetos matemáticos. Porém, na seção anterior, mostramos uma crítica ao princípio do contexto. Assim, temos de sustentar, como os empiristas, que não há objetos abstratos?

Veremos que a posição de Wright é totalmente dialética. Ele levanta uma possível crítica ao princípio do contexto. E apresenta uma possível solução (a solução reducionista) que é, como vimos, insatisfatória para seu projeto. Então, ele generaliza a sua crítica, abarcando também a solução reducionista e, supostamente, descarta o princípio do contexto. Assim, Wright sugere inverter a ordem dada no princípio do contexto. Mas, como ele mesmo diz, e foi escrito na seção anterior, esta posição também tem os seus problemas. No fim, como veremos, dado que

---

a subseção **2.4.1.**

[161] Para maiores detalhes, veja Bob Hale (1987).

as duas posições são problemáticas (a tese segundo a qual as categorias sintáticas têm prioridade sobre as ontológicas e a tese segundo a qual as categorias ontológicas têm prioridade sobre as sintáticas), Wright defenderá novamente o princípio do contexto (mesmo sendo este problemático) e defenderá que o conceito de *número cardinal* pode ser considerado um conceito sortal genuíno.

Wright começa a seção (vii) de *Frege's Conception of Numbers as Objects* (denominada: *Understanding abstract sortal concepts*) escrevendo:

> O objetivo desta seção é tornar mais compreensível a suspeita empirista de objetos abstratos [*is to bring the empiricist suspicion of abstract objects into a sharper focus*] e, simultaneamente, realçar quais obstáculos que qualquer tentativa de reverter à aproximação de Frege enfrenta ao dar prioridade às categorias ontológicas sobre as sintáticas. (Wright, 1983, pág. 41).

Esta passagem ilustra muito bem o que foi dito no parágrafo acima. Vamos então analisar os argumentos de Wright para mostrar que a inversão do princípio do contexto também é problemática. Podemos sustentar que um empirista afirmaria que os objetos que compõem a "mobília" do mundo são os objetos dos quais somos capazes de ter alguma interação causal (isto excluiria os objetos abstratos, em particular, os objetos matemáticos). Aqui, também poderia ser sustentado que os termos singulares genuínos são aqueles que se referem a objetos do tipo descrito acima, excluindo numerais e descrições definidas do tipo o *número de* φ, uma vez que não temos qualquer interação causal com os números, os objetos referidos por tais termos (note que aqui a noção de termo singular depende da noção ontológica de objeto).

Wright divide o pensamento empirista exposto acima em três linhas diferentes de pensamento: (1) uma versão do "problema da aquisição": se um conceito não pode ser aprendido por uma rota empírica, então este conceito é, na melhor das hipóteses, problemático; (2) uma versão do empirismo clássico segundo a qual é conferido um significado a um nome próprio se o objeto que é referido por este nome próprio é capaz de excitar os nossos sentidos e, assim, produzir uma determinada idéia na nossa mente (Cf. Locke (1690)); (3) uma versão "contra a possibilidade de uma referência inteligível a objetos abstratos" (Wright, 1983, pág. 42). Segundo esta versão, somente termos para objetos que impressionam nossos sentidos são capazes de serem referidos por uma definição ostensiva. Portanto, a palavra *João* é um termo singular genuíno, uma vez que podemos apontar para o referente de *João* e dizer *este é o João*. Contudo, não podemos apontar para o referente da palavra *dois* e dizer *este é o dois* (o número dois é um objeto abstrato, se ele for um objeto). As três linhas de pensamento estão intimamente relacionadas. Mas, como Wright, discutiremos somente (3). Todavia, vale lembrar que uma vez que o princípio do contexto é defendido, temos uma resposta para (2). E essa resposta parece ser a que Frege pretendia dar em *Die Grundlagen der Arithmetik*, a saber, os objetos não são dados a nós somente na sensibilidade. Se pudermos usar numerais desempenhando o papel de sujeito de uma proposição verdadeira que expressa um juízo singular ou uma relação de primeira ordem, então tais termos significam objetos e, conseqüentemente, números são objetos sem que tenhamos qualquer idéia deles.

Antes de começarmos a explorar a crítica de Wright à posição (3), vale mencionar a seguinte questão: não poderíamos usar uma outra expressão para explicar a referência de um determinado termo singular abstrato? Por exemplo, não poderíamos usar a expressão 1+1 para explicar a referência do número 2? Ou seja, 2 é 1+1 (como na definição de Leibniz). E não poderíamos usar a expressão 2+1 para explicar a referência do número 3? Dado que 2 é 1+1, então o número 3 é 1+1+1. O problema é que o número 1 é também um objeto abstrato, de maneira que teríamos de explicar a referência do número 1. O processo continuaria infinitamente. No caso de objetos ordinários (objetos dos quais temos alguma interação causal), é suposto que essa cadeia termine em uma definição ostensiva. Por exemplo, poderíamos perguntar o que é (ou quem é) o João? Uma resposta seria: o estudante da PUC que entrou no ano de 2002. Mas talvez essa descrição não estipule a referência do termo João. A cadeia termina quando apontamos para o referente do termo *João* e afirmamos: este é o João. É aqui que se encontra a crítica de Wright. Ele escreve:

> Suponha, por exemplo, que damos a alguém uma tal definição da referência do nome pessoal 'João'. Apontamos para o referente do termo do nome e dizemos 'Este é João'. O que nosso homem tem de fazer se ele tem de nos persuadir que entendeu o que queríamos dizer? Três *desiderata* são evidentes. Para começar, ele deve continuar usando a palavra, 'João', como um nome. Uma maneira radical na qual ele não teria entendido nossa definição é se ele pensasse que estivéssemos escolhendo alguma qualidade na região para a qual estamos apontando e que João é um predicado que expressa esta qualidade. (Wright, 1983, pág. 43-4).

A posição de Wright na passagem acima é clara, a saber, uma pessoa para entender o que pretendíamos dizer quando apontamos para o referente do termo

João e dizemos "este é João" tem de entender que *João* é um termo singular e ela tem de continuar a usar *João* desta maneira. Wright continua:

> Em segundo lugar, é também evidentemente necessário que ele continue a usá-lo [o termo 'João'] como um termo singular que signifique uma *pessoa*. Outra maneira radical na qual ele não teria nos entendido é se ele pensasse que a expressão definida era um nome de algum outro tipo de objeto na região para a qual apontamos. (Wright, 1983, pág. 44).

O ponto aqui, parece, é que a pessoa em questão já tem de ter a noção do conceito de *pessoa* e que a referência do termo *João* é uma instância desse conceito. Caso contrário, ela poderia pensar que *João*, na expressão *este é João*, fosse o braço, ou a perna, ou a cabeça, ou a camisa, ou a calça etc. E Wright ainda escreve:

> Finalmente, ele também deve mostrar, pelo seu uso subseqüente do nome, que entendeu qual pessoa a expressão definida significa; isto quer dizer que ele tem de estar preparado para concordar com várias asserções verdadeiras ou, pelo menos, justificadas que contenham o nome para nos persuadir que quaisquer erros que ele cometa nas asserções deste tipo não sejam plausivelmente atribuídos a uma falha de entendimento da definição, (Wright, 1983, pág. 44).

Wright quer dizer que a pessoa em questão já deve entender um critério de identidade para o conceito *pessoa*, de maneira que ela possa distinguir se uma determinada asserção é verdadeira (ou justificada) do referente do nome *João* e não é verdadeira (ou justificada) de um outro termo singular para pessoa, por exemplo, *José*.

Então, recapitulando, segundo Wright, para uma pessoa entender uma definição ostensiva é necessário entender a distinção entre termo singular e predicado. Portanto, ela já tem de ter um domínio de algumas sentenças da forma sujeito-predicado. Além disso, como foi dito acima, ela tem de possuir um critério de aplicação do conceito. Ou seja, ela deve saber se o conceito se aplica ou não ao objeto referido por um determinado termo singular, se tal termo for realmente um termo singular (no exemplo acima, ela tem de ter um critério de aplicação do conceito *pessoa* e assim distinguir pessoas de outros objetos). E, também, ela tem de ter um entendimento da noção *ser o mesmo* φ *que*, isto é, ela tem de ter um critério de identidade para os objetos (que são referidos por tais termos singulares) que caem sob um determinado conceito (no nosso exemplo, ela tem de ter a noção *ser a mesma pessoa que*). Assim, segundo Wright, uma definição ostensiva não é reduzida a uma cadeia infinita porque temos este *background* conceitual acima. Ora, Wright questiona, por que então é problemática a noção de objeto abstrato, uma vez que as noções justamente usadas para explicar um determinado termo, por exemplo, *João*, podem ser usadas para explicar um termo para um objeto abstrato, por exemplo, *o número dois*? Assim, Wright escreve:

> Para sumariar: Uma definição ostensiva da referência de um termo singular concreto funciona quando e somente quando capacita seu destinatário [*recipient*] a concordar com [*cotton on to*] o uso do termo definido em construções sentenciais. Nenhuma razão é evidente agora porque o mesmo efeito não pode ser alcançado pelas definições meramente verbais, não ostensivas que, no caso de termos singulares abstratos, é tudo que somos capazes de dar. O que é necessário é que a expressão definida seja associada pelas definições com uma expressão com cujo uso em todos os contextos sentenciais o aprendiz já esteja familiarizado. Devem existir alguns tais contextos nos casos de termos singulares abstratos e termos singulares concretos, se qualquer tipo de definição tem de funcionar, ostensiva ou não. (Wright, 1983, pág. 47).

Segundo Wright, chegamos a um círculo. Se defendermos que as categorias ontológicas têm prioridade sobre as sintáticas, então temos de dar um relato do que seja um objeto. O empirista propõe, em última análise, uma definição ostensiva. Todavia, entender uma definição ostensiva, como Wright afirmou, é entender categorias sintáticas e o papel sintático dessas categorias em certos contextos sentenciais (verdadeiros). Além disso, não está claro para Wright porque poderíamos defender que termos singulares "concretos" se referem a objetos e termos singulares abstratos não se referem a nada, uma vez que o critério de referência em ambos os casos é dado pelo papel sintático de um termo em certos contextos sentenciais (verdadeiros). Wright, então, mesmo considerando problemático o princípio do contexto, mantê-lo-á, principalmente, porque o mesmo oferece um relato interessante de nosso conhecimento de objetos abstratos (além de dar um relato de como podemos nos referir a tais objetos), sem postular qualquer capacidade cognitiva que nos capacita ter um contato "causal" com tais objetos (como Gödel sustentou). Infelizmente, não entraremos nos detalhes da posição de Wright sobre essa questão. O leitor interessado pode ler as seções (x), (xi), (xii) de *Frege's Conception of Numbers as Objects*[162].

[162] Além disso, Wright tem de dar um critério para excluir termos singulares aparentes (como, bondade, beleza, piedade etc) de termos singulares reais (o número dois, 3 etc). Na seção ix, Wright avalia os critérios de Dummett (1973, capítulo 4). Wright conclui que tais critérios são ainda insuficientes para dar um relato de termo singular, mas vê nos critérios de Dummett com algumas outras restrições (que ele não detalha) uma posição bastante promissora. O leitor interessado pode ler também os artigos de Hale (2001a) e (2001b). As objeções que serão apresentadas em **4** assumem que a noção de termo singular é uma noção não problemática e por isso não discutiremos estas questões aqui.

3.6 - JÚLIO CÉSAR ENTERRADO?

Discutiremos agora o ponto central de *Frege's Conception of Numbers as Objects*, a saber, a solução proposta por Wright para resolver o *Problema de Júlio César*. Como afirmamos nas considerações gerais, Wright afirma que a solução ao *Problema de Júlio César* proposta por Frege em *Die Grundlagen der Arithmetik* apenas adiou o problema e que Frege foi obrigado a enfrentá-lo nove anos depois em *Grundgesetze der Arithmetik*. Além disso, Wright afirma que a introdução das extensões de conceito no sistema formal de *Grundgesetze der Arithmetik* ocasionou a contradição. Wright escreve:

> Com efeito, isto é o conteúdo do malfadado axioma V de *Grundgesetze*. Uma vez que identificar números com extensões não resolverá o problema de César para números a menos que já tenhamos resolvido o problema de César para extensões, como Frege supõe que o último foi resolvido?... Assim, a sugestão de Frege em *Grundlagen*, Seção 68, meramente adiou a dificuldade. (Wright, 1983, pág.112).

Como afirmamos em uma nota, Frege, na §10 de *Grundgesetze der Arithmetik*, tenta resolver esse problema. Wright sustenta que a solução apresentada na § 10 é insatisfatória, na medida em que resolve o problema somente quando as variáveis objectuais são supostas a percorrerem apenas termos (singulares) para percurso de valores e valores de verdade. Não há, segundo Wright, uma solução geral para o *Problema de Júlio César*[163]. Assim, uma vez que Frege não é bem-sucedido, segundo Wright, em dar uma solução ao *Problema de Júlio César* no que diz respeito à noção de extensão, ele não é bem-sucedido também em dar uma solução ao *Problema de Júlio César* no que diz respeito à noção de número cardinal. Wright então tentará atacar o problema em uma nova perspectiva.

Wright pretende solucionar o problema em questão, utilizando a própria noção de conceito sortal. Como afirmamos acima, um conceito sortal é um conceito que teria de ter um critério de aplicação bem determinado para todos os objetos (característica de todo conceito sortal ou não) e, também, um critério de identidade bem determinado para os objetos que caem sob tal conceito (característica dos conceitos sortais). A idéia básica de Wright é tentar mostrar que se um conceito sortal tem um "bom" critério de identidade para os objetos que caem sob ele, então é possível mostrar que este conceito também tem um critério razoável

[163] Agora, é emblemático porque Frege considerou apenas valores de verdade e percurso de valores como os únicos objetos introduzidos no sistema de *Grundgesetze der Arithmetik*. Para uma possível resposta ver Ruffino (1996), (2000).

de aplicação. Wright tenta solucionar o problema da aplicação de conceitos sortais abstratos (em particular, o problema de aplicação do conceito de *número cardinal*) via critério de identidade que ocorre entre os objetos que instanciam os conceitos sortais abstratos (em particular, Wright tenta solucionar o problema de aplicação do conceito de *número cardinal* via Princípio de Hume)[164]. Mas, como a solução é encaminhada? Ora, vamos assumir dois conceitos sortais F e G. Ambos os conceitos deveriam ter um critério de identidade que se aplica aos objetos que caem sob F e G. Vamos assumir que os objetos que caem sob F têm o seguinte critério de identidade $x=_F y$ que ocorre segundo uma certa condição de verdade; e que os objetos que caem sob G têm o seguinte critério de identidade $w=_G z$ que também ocorre segundo uma certa condição de verdade. Como poderíamos saber, somente com estes critérios de identidade, se algum F ou todos os Fs são Gs ou não e vice-versa? A idéia de Wright é a seguinte: assumamos que *a* e *b* são termos singulares que se referem a objetos que são instâncias do conceito F; assumamos também que *c* e *d* são termos singulares que se referem a objetos que são instâncias do conceito G. Assim, o critério de identidade entre *a* e *b* seria dado pelas condições de verdade estabelecidas por $a=_F b$. A mesma coisa pode ser dita sobre *c* e *d*, ou seja, o critério de identidade seria dado pelas condições de verdade estabelecidas por $c=_G d$. Agora, se desejamos saber se algum F ou todo F é um G, então as condições de verdade da proposição *a que é um F é o mesmo que c que é um G*, têm de ser dadas pelas condições de verdade estabelecidas por $a=_G c$ (uma vez que *a* e *c* seriam instâncias do conceito G). Da mesma maneira, elas teriam de ser estabelecidas por $a=_F c$. Além disso, uma vez que o critério de identidade de *a* pode ser estabelecido via $w=_G z$, poderíamos perguntar se *a* é o mesmo que *b*, via $a=_G b$. Este critério foi denominado de **SI** (*sortal inclusion*) [165]. Wright escreve:

> Nenhum objeto que cai sob um dado conceito sortal, *Fx*, pode ser um bom candidato para a *identidade* com os objetos que caem sob outro conceito sortal, *Gx*, a menos que a seguinte condição seja satisfeita: para toda proposição de identidade, '***a=b***'*,* onde '***a***' e '***b***' pretendem referir-se às instâncias relevantes de *Fx*, corresponde a, pelo menos, uma proposição '***A=B***', onde '***A***' e '***B***' pretendem denotar instâncias de Gx, que têm as mesmas

[164] "A sugestão é, então, simples: ao explorarmos nossa compreensão da segunda parte da noção sortal mencionada [critério de identidade via correspondência 1-1] de número - nossa compreensão das condições de identidade e distinguibilidade entre números - fixamos a primeira parte do conceito sortal: a distinção entre números e coisas de outros tipos". (Wright, 1983, pág. 114).

[165] Hale propõe o seguinte critério geral para conceitos sortais: "(S) Termos singulares de um dado domínio significam instâncias de um conceito sortal F sse há algum sortal G cuja extensão está incluída na de F tal que, onde *a* e *b* são quaisquer termos deste domínio, entender '*a=b*' envolve uma compreensão do critério de identidade para os Gs". (Hale, 1987, pág. 206). Note que ***SI*** e (S) são bastante parecidos.

> condições de verdade. Ou seja, se a extensão de um conceito sortal tem de incluir a de um outro, fatos sobre identidade e distinguibilidade entre os membros do último devem ser *eo ipso* fatos sobre identidade e distinguibilidade sobre certos membros do primeiro. (Wright, 1983, pág. 122).

A idéia de Wright, em outras palavras, é a seguinte: se dois conceitos sortais F e G são coincidentes ou se um está incluído no outro, então a (s) condição (ões) de verdade de certas proposições de identidade entre objetos que instanciam os conceitos F e G deveria (m) ser a(s) mesma(s). Ora, Wright supõe que os princípios de abstração introduzem conceitos sortais abstratos. Por exemplo, o Princípio de Direção introduz o conceito sortal abstrato de direção e o Princípio de Hume introduz o conceito sortal abstrato de número cardinal. Como afirmamos, o Princípio de Direção e o Princípio de Hume parecem ser critérios de identidade razoáveis para distinguir as direções e os números cardinais, respectivamente. Assim, dado o Princípio de Hume e o critério **SI**, podemos, segundo Wright, dar uma solução ao Problema de César da seguinte maneira: Júlio César é uma pessoa que é um conceito sortal. E um critério de identidade entre as instâncias do conceito de pessoa é dado segundo o critério, Wright afirma, de identidade pessoal. Da mesma maneira, 0 é um número cardinal que também é um conceito sortal. E o critério de identidade entre as instâncias do conceito de número cardinal é dado segundo o Princípio de Hume, ou seja, é dado pela correspondência 1-1 entre conceitos. Agora, se Júlio César ou qualquer outra instância do conceito de pessoa é um número cardinal, então as condições de verdade de proposições de identidade entre algumas instâncias do conceito de pessoa teriam de ser explicadas via correspondência 1-1 entre conceitos. Da mesma forma, se 0 ou algum outro número é uma pessoa, então as condições de verdade de proposições de identidade entre números teriam de ser explicadas segundo o critério de identidade pessoal. Ou seja, se alguns números são pessoas (se os conceitos *número cardinal* e *pessoa* são coincidentes ou um está incluído no outro), então o critério de identidade entre números em termos de critérios de identidade pessoal teria de fazer sentido. E se algumas pessoas são números, então o critério de identidade entre pessoas em termos de correspondência 1-1 também teria de fazer sentido. Contudo, isto não ocorre em ambos os casos. Wright então é levado à conclusão de que os conceitos sortais *número cardinal* e *pessoa* não são coincidentes e, portanto, Júlio César (e qualquer outra pessoa) não é um número e 0 (e qualquer outro número) não é uma pessoa[166]. Assim, Wright propõe como uma solução ao *Problema de Júlio César* o seguinte:

> Como uma solução ao Problema de César para o caso especial de números, proponho:
> ***N***^{d}: Gx é um conceito sortal sob o qual caem números (se? e) somente se há ou poderia haver termos singulares '***a***' e '***b***' que pretendem denotar instâncias de Gx tal que as condições de verdade de '***a***=***b***' poderiam ser adequadamente explicadas como as condições de alguma proposição em que uma correlação 1-1 ocorra entre um par de conceitos. (Wright, 1983, pág. 116-7).

Vale mencionar que o critério ***N***^{d} é uma conseqüência do critério geral ***SI*** mais o Princípio de Hume. Não discutiremos nesta seção se a solução de Wright é satisfatória ou não. No próximo capítulo, apresentaremos e discutiremos algumas objeções à sua solução[167].

---

166 Na verdade, a solução de Wright pretende ser mais geral. Dados dois conceitos coincidentes, eles devem compartilhar as mesmas condições de verdade. Ou seja, se livros são números, então a distinção entre os livros deveria ser dada segundo uma correspondência 1-1 entre conceitos, o que não parece ser o caso.

167 Vale mencionar também a tentativa de solução de Heck ao *Problema de Júlio César* (1997b). Segundo ele, o ponto central do logicismo de Frege em *Grundlagen der Arithmetik* é provar a existência de infinitos números. Como dissemos, isto depende de três proposições (1) 0 não é um sucessor; (2) a relação de sucessor é uma função 1-1; (3) todo número natural tem um sucessor. Para provar (3), e, na verdade, para provar (2) também, Frege necessita tomar os números como objetos, uma vez que, ao fazer isto, Frege mostra a existência de um conceito instanciado por n+1 objetos a partir do qual é obtido o número n+1. Heck afirma, então, que Frege é levado a considerar os números cardinais como sendo do mesmo tipo lógico que os objetos ordinários (os objetos, ao contrário dos conceitos, não são organizados segundo uma hierarquia). Segundo Heck, é nesse contexto que surge o Problema de Júlio César. A idéia de Heck é que não temos nenhum motivo para considerar números como sendo do mesmo tipo lógico que os objetos ordinários. Assim, ele propõe trabalhar com uma lógica *two-sorted*, onde as variáveis x, y, z... seriam variáveis objectuais para objetos ordinários e **x**, **y**, **z**, ... seriam variáveis objectuais para números e F, G,... seriam variáveis conceituais para conceitos que se aplicam aos objetos ordinários e **F**, **G**, ... seriam variáveis conceituais para conceitos que se aplicam aos números. Assim, ele propõe três instâncias do Princípio de Hume. A primeira instância é valida apenas para conceitos instanciados por objetos ordinários:

NxFx=NyGy↔Fx1-1Gy

Por exemplo, o número de livros na minha mesa é igual ao número de cadernos na minha mesa se e somente se existe uma correlação entre os livros e os cadernos que estão na minha mesa. Note que não é possível provar a infinitude dos números naturais (assumindo esta instância do Princípio de Hume), se não existirem infinitos objetos ordinários. A segunda instância é válida apenas para conceitos instanciados por números

N**xFx**=N**yGy**↔**Fx**1-1**Gy**

Por exemplo, o número dos números de 1 a 5 é igual ao número dos números de 6 a 10 se e somente se há uma correspondência 1-1 entre os objetos que caem sob o conceito $1\leq\xi\leq5$ e sob o conceito $6\leq\xi\leq10$. Note que com essa instância do Princípio de Hume é possível provar a existência de infinitos números naturais. A terceira instância seria válida para contextos de identidade misturados

NxFx=N**xFx**↔Fx1-1**Fx**

Por exemplo, o número de planetas em nosso sistema solar é igual ao número dos números de 1 a 9 se e somente se existe uma correlação 1-1 entre os objetos que caem sob os conceitos *planetas no nosso sistema solar* e $1\leq\xi\leq9$. Essa instância trata da aplicação da aritmética. Uma vez que, segundo Heck, Júlio César (e qualquer outro objeto ordinário) é de um tipo lógico diferente que os números, então Júlio César (e qualquer outro objeto ordinário) não é um número. Agora, a solução

3.7 - O PRINCÍPIO DE HUME REVISITADO

Na introdução da presente dissertação e em **2**, apresentamos rapidamente o Princípio de Hume. Agora, pretendemos discuti-lo minuciosamente. O Princípio de Hume, como dissemos, tem a seguinte forma

$$\forall F\forall G(Nx\ Fx=Nx\ Gx\leftrightarrow F1\text{-}1G)$$

E *F1-1G* pode ser decodificada na linguagem da lógica de segunda ordem da seguinte maneira (veja também **2**, subseção **2.5.3**):

$$\exists R[\forall x(Fx\rightarrow\exists y(Gy\&xRy))\ \&\ \forall x\ (Gx\rightarrow\exists y(Fy\ \&\ yRx))\ \&\ \forall x\forall y\forall z((xRy\ \&\ xRz)\rightarrow y=z)\ \&\ \forall x\forall y\forall z\ ((xRy\ \&\ zRy)\rightarrow x=z)]$$

O Princípio de Hume pode ser analisado em dois (sub-) princípios distintos[168], a saber, (1) a definição da noção de equinumerosidade (*exatamente tantos...quantos...*)

Existem exatamente tantos Fs quantos Gs se e somente se existe uma correlação 1-1 entre os Fs e os Gs

e (2) a definição da equivalência numérica – o próprio Princípio de Hume

o número de Fs é igual ao número de Gs se e somente se existem exatamente tantos Fs quantos Gs

(1) não parece ser tão problemática e, na verdade, tem "ar" de verdade lógica. Mas, vamos nos deter um pouco em (1). Podemos dividir (1) em dois outros (sub-) princípios, a saber,

(1´) se existem exatamente tantos Fs quantos Gs, então existe uma correlação 1-1 entre os Fs e os Gs.

(1´´) se existe uma correlação 1-1 entre os Fs e os Gs, existem exatamente tantos Fs quantos Gs.

(1´´) não parece ser problemático. Se assumirmos que existe uma correlação entre os Fs e os Gs parece bastante plausível assumir que existem exatamente tantos Fs quantos Gs. O problema se encontra em (1´). Assumamos que existem exatamente tantos Fs quantos Gs, então é plausível assumir a existência de uma

---

ao *Problema de Júlio César* tem de ser satisfatória para qualquer objeto. Assim, uma questão é, a direção de uma reta *a* é um número? O que dizer do tipo lógico de diferentes objetos abstratos? Heck, parece, considera que os números são de um tipo lógico diferente que os objetos ordinários, porque aqueles são abstratos. Assim, direções e números seriam do mesmo tipo lógico. Como podemos saber se a direção de uma reta *a* é igual ao número de um conceito F? O *Problema de Júlio César* reaparece. Assim, Heck ainda tem de dar um relato satisfatório para resolver o problema da indeterminação entre os objetos abstratos.

[168] Veja Dummett (1998).

correspondência 1-1 entre os Fs e os Gs? Wright (1983), na página 107, coloca algumas dúvidas sobre (1´)[169]. Segundo ele, (1´) será plausível se os conceitos F e G são finitamente instanciados por objetos[170]. Poderíamos afirmar um pouco mais e, talvez, sustentar que (1´) parece plausível se os conceitos F e G são contáveis (ou seja, finitos ou denumeráveis[171]). Agora, se os conceitos F e G são não-denumeráveis[172], (1´) não parece ser tão trivial. Felizmente, para provar os axiomas de PA2 a partir do Princípio de Hume é necessário somente considerar a existência de conceitos que são finitos. Poderíamos, até mesmo, apresentar uma versão modificada de tal princípio, a saber

(FHP) $\forall F \forall G$(F é finito e G é finito $\rightarrow NxFx=NxGx \leftrightarrow F1\text{-}1G)$[173]

Voltemos-nos agora para (2) que é, de fato, o próprio Princípio de Hume. (2) também parece ser uma verdade lógica. Todavia, (2) tem uma forte carga ontológica. No lado esquerdo de (2) aparecem termos singulares (*NxFx*, *NxGx*) a partir dos quais, generalizando existencialmente, obtemos a existência de números. Assuma a seguinte instância do Princípio de Hume

$$NxFx=NxFx \leftrightarrow F1\text{-}1F$$

No lado direito da instância acima, temos uma verdade lógica (segunda ordem). Ou seja, é provável em lógica de segunda ordem que $\forall G(G1\text{-}1G)$. Em particular, é provável que $F1\text{-}1F$ (instanciando universalmente). Assim, temos que $NxFx=NxFx \leftrightarrow F1\text{-}1F \rightarrow (F1\text{-}1F \rightarrow NxFx=NxFx)$ (lógica proposicional). Então, $F1\text{-}1F \rightarrow (NxFx=NxFx)$ (*modus ponens*). E, assim, $NxFx=NxFx$ (novamente, *modus ponens*). A questão é, *NxFx* tem alguma referência? Segundo Wright, sim. O termo *NxFx* é obtido a partir de uma proposição que estabelece as condições de ver-

169 "O que é, *prima facie*, mais problemática é a inversa: se existem precisamente tantos Fs quantos Gs, segue-se que existe uma relação, R, que correlaciona 1-1 as instâncias destes dois conceitos [F e G]? Ou os Fs e os Gs poderiam estar, se fosse o caso de existirem precisamente tantos Fs quantos Gs, totalmente não relacionados? Bem, suponha que Fx, de fato, tem precisamente tantas instâncias quanto Gx e que eles são finitamente instanciados: então não é difícil ver como podemos construir uma relação, R, para tais instâncias que satisfaça as condições de Frege, não importa quão intuitivamente suas instâncias possam estar não relacionadas... De acordo com isso, pelo menos para conceitos de extensão finita, exaustivamente enumerável, a adequação de $\mathbf{N}^{=}$ [Princípio de Hume] como uma análise é clara". (Wright, 1983, pág. 107).

170 Esta noção pode ser decodificada na linguagem da lógica de segunda ordem: Um conceito F é finito se e somente se F não é infinito ($Fin(F)=_{def}$ 5Infin(F)). E a noção de infinito pode ser decodificada em: $Infin(G)=_{def} \exists R[\forall x\forall y\forall z(xRy \ \& xRz \rightarrow y=z) \& \ \forall x\forall y\forall z(xRz \ \& yRz \rightarrow x=y) \ \& \ \forall x\forall y(Gx \ \& \ xRy \rightarrow Gy) \ \& \exists y(Gy \& \forall x(Gx \rightarrow 5xRy))]$.

171 Um conceito seria denumerável se ele é instanciado por infinitos e contáveis objetos. A noção *contável* pode ser decodificada da seguinte maneira (lógica de segunda ordem): $Count(X)=_{def} \forall Y(\forall x(Yx \rightarrow Xx) \rightarrow (Fin(Y) \ v \ |Y|=|X|))$. Veja Shapiro (1991).

172 Um conceito F é não denumerável se ele for infinito e não for contável.

dade de uma identidade numérica e, portanto, segundo o princípio do contexto, tal termo tem uma referência. E qual é a sua referência? (Não discutimos nesta dissertação os critérios para se estabelecer se um determinado termo é um termo singular ou não, mas vale afirmar que Wright e Hale consideram o termo *NxFx* como um termo singular)[174]. Uma vez que *NxFx* é um termo singular, então *NxFx* se refere a um objeto. Assim, por lógica de predicados, dado que *NxFx* denota (pelo princípio do contexto)[175], obtemos $\exists x(x=NxFx)$. E por generalização universal (segunda ordem) é obtido *que* $\forall F\exists x(x=NxFx)$. Ou seja, o Princípio de Hume implica que todo conceito tem um número cardinal. Agora, irá ficar claro a defesa de Wright do princípio do contexto (que as categorias sintáticas têm prioridade sobre as ontológicas e que os termos que ocorrem em sentenças verdadeiras denotam). Se trabalhássemos no contexto de uma lógica clássica, onde todos os termos são supostamente referenciais, poderíamos provar a existência de números sem o auxílio do Princípio de Hume, assumindo apenas que *NxFx* é um termo singular:

(1) $\forall x(x=x)$ (lei da identidade)
(2) NxFx=NxFx (1), instanciação universal
(3) $\exists y(y=NxFx)$ (2), generalização existencial (existência do número *NxFx*)

Wright, parece, trabalha em um contexto de lógica livre (ou, pelo menos, deveria trabalhar) onde nem todos os termos denotam[176]. Assim, o passo (3) acima não seria justificado, se *NxFx* não tem referência. A referência de *NxFx* é dada via Princípio de Hume que estabelece as condições de verdade de proposições que expressam a identidade numérica juntamente com o princípio do contexto.

Wright (1999) sustenta que a existência de números provada via lógica de segunda ordem juntamente com o Princípio de Hume (como acima) seria analítica se o Princípio de Hume e lógica de segunda ordem forem[177].

Agora, poderíamos dispensar o princípio do contexto e formular um axioma (relacionado com o Princípio de Hume) que afirma a existência e unicidade dos números diretamente, a saber:

---

[173] O leitor pode ler o artigo interessante de Heck "*Finitude and Hume's Principle*" (1997c).
[174] Veja nota 163.
[175] Lembre-se que Wright, como afirmamos, mantém o princípio do contexto.
[176] O leitor interessado pode ler o capítulo 6 de Chateaubriand (2001).
[177] Bem, poderíamos dizer o mesmo da prova da existência de números no contexto da lógica clássica. Por que Wright parece favorecer um contexto de lógica livre? Uma possível resposta é que não é apenas necessário provar a existência de números, mas também provar os axiomas de PA2, o que não é possível, parece, no contexto da lógica clássica de primeira ordem.

(*Numbers*) $\forall F\exists!x\forall G(G\eta x\leftrightarrow F1\text{-}1G)$, onde η é a relação *Φ está em ξ* que ocorre entre um conceito e um objeto[178] [179].

Boolos prova a partir de *Numbers* o Princípio de Hume, definindo o número cardinal de um conceito F da seguinte maneira: *o número cardinal que pertence a F é x se e somente se para todo conceito H, H está na extensão de x se e somente se H é equinumérico a F* (em símbolos, $NxFx=x\leftrightarrow\forall H(H\eta x\leftrightarrow H1\text{-}1F)$)[180] [181]. Boolos também mostra que a partir do Princípio de Hume é possível provar *Numbers*. Ou seja, *Numbers* e Princípio de Hume são equivalentes. É claro que Wright favorecerá o Princípio de Hume, pois, caso contrário, ao assumirmos a existência e unicidade dos números (em *Numbers*), ele diria, não poderíamos assumir a existência analítica dos mesmos, uma vez que a sua existência não é provada a partir da lógica (segunda ordem) e de um princípio analítico, tese crucial ao projeto logicista de Frege e de Wright[182].

Também podemos desmembrar (2) em duas partes, a saber

(2´) Se existem exatamente tantos Fs quantos Gs, então o número de Fs é igual ao número de Gs

(2´´) se o número de Fs é igual ao número de Gs, então existem exatamente tantos Fs quantos Gs

(2´) não é um princípio tão problemático[183]. Se assumirmos a existência de uma correspondência 1-1 entre os Fs e os Gs (existem exatamente tantos Fs quantos Gs), então temos que o número de Fs é igual ao número de Gs (*modus ponens*). E se assumirmos que o número de Fs não é igual ao número de Gs, então

[178] Ou seja, para todo conceito F existe um único objeto x para todo conceito G, tal que G está em x se e somente se F é equinumérico a G.

[179] Vale mencionar que o *Numbers* tem uma relação com a terceira definição de número cardinal dada por Frege em *Grundlagen der Arithmetik*. A relação η diz que um certo conceito pertence a uma determinada classe que tem por elementos conceitos. A definição explícita de Frege no livro acima mencionado toma a existência de uma classe que tem também como elementos conceitos de primeira ordem. Para maiores detalhes veja Boolos (1987b).

[180] *Numbers* tem um modelo e, portanto, é consistente.

[181] A prova estará no apêndice.

[182] Wright sustenta, parece, que o princípio de Hume tem uma prioridade epistêmica sobre *Numbers*, apesar de serem equivalentes.

[183] Neil Tennant (1997) afirma que o princípio (2´) não é analítico. Ele escreve: "(*N2*) O número de *Fs* é idêntico ao número de *Gs* se existem exatamente tantos *Fs* quantos *Gs* que não é analiticamente verdadeiro como ele se encontra. *F* e *G* podem ter uma extensão tão vasta que, embora eles possam estar em uma correspondência 1-1, eles, não obstante, gozam de nenhum número como sua cardinalidade". (Tennant, 1997, pág. 313). Aqui, o problema se liga com o que foi dito acima. Contudo, podemos excluir conceitos que tenham uma extensão muita vasta, como já dissemos.

temos que não há uma correspondência entre os Fs e os Gs (*modus tollens*)[184]. Um dos problemas centrais do Princípio de Hume se encontra em (2´´). Isso porque (2´´) assume existência de uma função 1-1 das classes de equivalência de conceitos formadas pela relação de equinumerosidade nos objetos. Assumamos que *se o número de Fs é igual ao número de Gs, então os Fs estão correlacionados 1-1 com os Gs*. Também assumamos que *o número de Fs é igual ao número de Gs*. Então obtemos que *os Fs estão correlacionados 1-1 com os Gs* (*modus ponens*). Por outro lado, assumamos que não existe uma correlação 1-1 entre os Fs e os Gs. Temos então que *número de Fs não é igual ao número de Gs* (*modus tollens*). Note que isto implica uma função 1-1 das classes de equivalência nos objetos. Ou seja, se *5(F1-1G)*, então $NxFx \neq NxGx$. O problema é que a existência de uma tal função só é possível em domínios infinitos. Isto porque os conceitos são divididos pela relação de equinumerosidade, como já dissemos na introdução, em n+1 classes de equivalências (sendo a cardinalidade do domínio dos objetos igual a n). Assim, uma função 1-1 dos conceitos divididos em classes de equivalência segundo a relação de equinumerosidade nos objetos só é possível, afirmamos novamente, em domínios infinitos[185]. Portanto, o princípio (2´´) é o responsável pela inflação em domínios finitos[186].

Voltemos agora a *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Como afirmamos nas considerações gerais e na introdução, Wright defende uma posição logicista em relação à aritmética. E a sua tese é amplamente amparada pela derivação dos axiomas de PA2 a partir do Princípio de Hume. Agora, como dissemos também nas considerações gerais e na nota 44, Wright necessita reinterpretar a noção de logicismo. Em **2**, dissemos que o logicismo de Frege era a tese segundo a qual as proposições da aritmética seriam provadas a partir de leis lógicas mais definições (lógicas). Assim, na interpretação Fregeana, o logicismo da aritmética

---

[184] Aqui, é assumida uma função 1-1 dos objetos nos conceitos (na verdade, nas classes de equivalência de conceitos formadas pela relação de equinumerosidade). Ou seja, se $NxFx \neq NxGx$, então 5(F1-1G). Essa função pode existir.

[185] Note que na Lei Básica V ocorre a mesma situação. O responsável pela contradição é o seguinte princípio: se a extensão de um conceito F é igual à extensão de um conceito G, então F e G são coextensionais. Este princípio assume a existência de uma função 1-1 das classes de equivalência de conceitos formadas pela relação de coextensividade nos objetos (no caso, se $5\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$, então $\{x:Fx\} \neq \{x:Gx\}$). Como afirmamos na introdução, as classes de equivalência produzidas pela relação de coextensividade têm a mesma cardinalidade que o domínio dos conceitos. Assim, é assumida uma função 1-1 do domínio dos conceitos no domínio dos objetos. O problema é que não existe tal função (teorema de Cantor). Boolos (1996, pág. 280) afirma que a negação do princípio acima pode ser considerada uma lei lógica.

derivada do Princípio de Hume só será possível (1) se o Princípio de Hume for uma verdade lógica ou (2) se o Princípio de Hume for uma definição. Veremos que nenhuma das duas opções é satisfeita.

Comecemos por (1). Hoje em dia, é considerada como uma lei lógica, aquela lei que é verdadeira em qualquer domínio (ou modelo). Intimamente ligado a isto, está a afirmação de que a lógica não tem compromissos ontológicos. O Princípio de Hume não satisfaz nenhum dos dois requerimentos. Este princípio é somente verdadeiro em domínios infinitos e também implica a existência de infinitos objetos, os números. Boolos (1997) afirma que as reivindicações ontológicas do Princípio de Hume excluem considerá-lo como um princípio analítico ou uma lei lógica. É claro que se Frege fosse bem-sucedido em *Grundgesetze der Arithmetik*, então poderia ser assumido que a lógica implica a existência de infinitos objetos[187], as extensões [188] (Lei Básica V). Mas, como Wright, assumiremos também, dadas as circunstâncias acima, que o Princípio de Hume não é uma lei lógica. Entretanto, este princípio poderia ser uma definição (no sentido estrito)?

Uma definição no seu sentido estrito deve satisfazer dois critérios, a saber, (1) o critério da *eliminabilidade* e (2) o critério da *não-criatividade*[189]. Podemos colocar (1) nos seguintes termos:

> Critério da Eliminabilidade*:* Uma fórmula **S** que introduz um novo símbolo em uma teoria satisfaz o critério de eliminabilidade se e somente se sempre que $\mathbf{S_1}$ é uma fórmula na qual o novo símbolo ocorre, então há uma $\mathbf{S_2}$ na qual o novo

---

[186] Isso significa que (2´´) exige mais objetos do que é possível em domínios finitos.

[187] Frege sustentava que a lógica tem preocupações ontológicas. Essa é uma das divergências que ele teria com a idéia de Kant de que lógica é formal e, portanto, não tem comprometimento ontológico. Não é possível uma discussão pormenorizada aqui (isso seria um tema para uma outra dissertação), mas vale ressaltar o seguinte: para Kant, a lógica seria um *cânon* para o raciocínio – um corpo de regras. Para Frege, lógica é um corpo de verdades. Além disso, para Kant, a generalidade da lógica consiste na sua total abstração do conteúdo dos juízos, enquanto, para Frege, ela se baseia na sua quantificação irrestrita sobre todos os objetos. Portanto, a noção de Kant de generalidade torna impossível que as leis lógicas tenham conteúdo, enquanto que a de Frege é consistente com a idéia de que as leis lógicas tenham conteúdo. Isto quer dizer que, segundo Frege, as leis lógicas afirmam algo sobre o mundo (sobre os objetos). É interessante notar que Frege e Kant concordam que a lógica é normativa, isto é, as leis lógicas não nos dizem como pensar, mas como deveríamos pensar (Cf. Kant (1781; 1787, A52/B76) e (1800, introdução) e Frege (1893)). O que é interessante é que, para Frege, a lógica é prescritiva e, ao mesmo tempo, descritiva, pois, uma vez que ela prescreve como pensar, ela, de certa forma, descreve como o mundo é. Kant não concordaria com isso.

[188] E também os números naturais.

[189] Na verdade, qualquer tipo de definição (estrita ou não) deve satisfazer quatro regras fundamentais: (1) uma definição deve dar a essência do que é definido; (2) não deve ser circular; (3) não deve ser negativa em caráter; (4) não deve ser expressa figurativamente. Por exemplo, se definirmos livro como sendo aquilo que não é cavalo, violamos (3). Se definirmos conjunto (em uma teoria de conjuntos como ZFC) como uma coleção de objetos, violamos (2).

> símbolo não ocorre tal que $\mathbf{S}\rightarrow(\mathbf{S_1}\leftrightarrow\mathbf{S_2})$ é derivável dos axiomas e definições que já existiam na teoria. (Suppes, 1957, pág. 154).

Em outras palavras, uma definição no sentido estrito deve funcionar como uma mera abreviação[190]. Assim, se uma letra de predicado unário **S** não pertence a uma linguagem L de uma teoria T, então uma definição no sentido estrito de **S** é uma fórmula $\Phi(x)$ da linguagem L da teoria T (onde Φ não contém a ocorrência de **S**)[191]. Se **S′** é uma letra de predicado binário que não pertence à linguagem L da teoria T, então uma definição estrita de **S′** é uma fórmula $\Psi(x,y)$ da linguagem L da teoria T (onde Ψ não contém ocorrência de **S′**)[192]. E, enfim, se t é um termo singular que não pertence à linguagem L da teoria T, então uma definição estrita de t é um termo singular *u* da linguagem L da teoria T (onde *u* não contém ocorrência de t) [193] [194].

Suppes coloca (2) nos seguintes termos

> Critério da Não-Criatividade. Uma fórmula **S** que introduz um novo símbolo em uma teoria satisfaz o critério de não-criatividade se e somente se não existe nenhuma fórmula **T** na qual o novo símbolo não ocorra tal que $\mathbf{S}\rightarrow\mathbf{T}$ é derivável dos axiomas e definições já dadas, mas **T** não é derivável. (Suppes, 1957, pág. 154).

Ou seja, uma definição estrita, posto que é uma mera abreviação, não pode apresentar qualquer conseqüência nova para uma teoria T na qual tal definição é adicionada. Tudo que é derivável em uma teoria T mais a definição, também é derivável apenas da teoria T. Ou seja, uma definição tem de ser conservativa.

Se o Princípio de Hume for uma definição, então o que está sendo definido é o símbolo *Nx...x...*, o operador (numérico) formador de termo *o número que pertence a Φ*. Assim, o Princípio de Hume seria uma definição no sentido estrito, se

---

[190] Suppes escreve: "A razão para esta restrição terminológica é óbvia. Ao estabelecermos investigar uma determinada teoria, queremos afirmar os axiomas criativos no início e sempre nos referimos aos mesmos como 'axiomas'. Uma vez que definições são teoreticamente dispensáveis, não queremos lhes dar o mesmo *status* que o dos axiomas básicos da teoria". (Suppes, 1957, pág. 154)

[191] Por exemplo, a definição de função apresentada em *Begriffsschrift*: $\forall\mathfrak{e}\forall\mathfrak{b}\forall\mathfrak{a}(\mathfrak{b}f\mathfrak{e}\ \&\mathfrak{b}f\mathfrak{a}\rightarrow\mathfrak{a}=\mathfrak{e})$ $\equiv\mathbf{F}(f)$. Note que a letra de predicado unário **F**(f) é definida em termos de símbolos já introduzidos na linguagem da *Begriffsschrift* e não há ocorrência de tal predicado na fórmula que o define.

[192] Por exemplo, a definição de hereditariedade em *Begriffsschrift*: $\forall\mathfrak{b}\forall\mathfrak{a}(F\mathfrak{b}\ \&\mathfrak{b}f\mathfrak{a}\rightarrow F\mathfrak{a})\equiv Her(F,f)$.

[193] Não há qualquer exemplo em *Begriffsschrift* de uma definição estrita de um termo singular t.

[194] Na verdade, as regras são mais complexas. Suppes escreve: "Regras para definir Símbolos de relação. Uma equivalência **D** que introduz um novo símbolo de relação eneária é uma definição própria em uma teoria se e somente se **D** é da forma $\mathbf{P}(v_1,...,v_n)\leftrightarrow\mathbf{S}$ e as seguintes restrições são satisfeitas: (i)$v_1,...,v_n$ são variáveis distintas; (ii) **S** não tem qualquer outra variável livre que não seja $v_1,...v_n$; (iii) **S** é uma fórmula na qual as únicas constantes não lógicas são símbolos primitivos e previamente definidos na teoria". (Suppes, 1957, pág. 156). Veja também a discussão de Frege em *Grundgesetze der Arithmetik*, §33.

este operador fosse totalmente eliminável, ou seja, se ao invés de falarmos de *NxFx=NxGx*, pudéssemos falar de correspondência 1-1 entre os *Fs* e os *Gs*. Ou seja, o operador *NxFx=NxGx* seria uma abreviação de *F1-1G*[195]. Considere, por exemplo, as definições de 0 e 1 dadas em **2**, a saber,

(I) $0 \equiv_{def} Nx(x \neq x)$
(II) $1 \equiv_{def} Nx(x=0)$
(II´) mas, como 0 é $Nx(x \neq x)$, então $1 \equiv_{def} Ny(y= Nx(x \neq x))$.

Assumamos a seguinte fórmula numérica, a saber, $0 \neq 1$ (esta fórmula numérica é provável na Aritmética de Frege). Pelo Princípio de Hume, temos

$0 \neq 1 \leftrightarrow 5((\xi \neq \xi)1\text{-}1(\xi = Nx(x \neq x)))$, ou seja,
$Nx(x \neq x) \neq Nx(x= Nx(x \neq x)) \leftrightarrow 5\ \exists R\ [\forall x\ (x \neq x \rightarrow \exists y(y= Nx(x \neq x) \& xRy))\ \&\ \forall x\ (x=Nx(x \neq x) \rightarrow \exists y(y \neq y\ \&\ yRx))\ \&\ \forall x \forall y \forall z((xRy\ \&\ xRz) \rightarrow y=z)\ \&\ \forall x \forall y \forall z\ ((xRy\ \&\ zRy) \rightarrow x=z)]$ [196]

Note que ainda temos, no lado direito da equivalência, a ocorrência do operador numérico *Nx...x...*. E tal ocorrência não pode ser eliminada. Da mesma maneira, se considerarmos, por exemplo, que o número de luas da Terra é igual a 1. Pelo Princípio de Hume temos

$NxLx=1 \leftrightarrow Lx1\text{-}1(\xi=Nx(x \neq x))$, (onde *Lx* é o predicado que denota o conceito *ser lua da Terra*). Assim, obtemos
$NxLx= Nx(x= Nx(x \neq x)) \leftrightarrow \exists R\ [\forall x\ (Lx \rightarrow \exists y(y= Nx(x \neq x)\ \&\ xRy))\ \&\ \forall x\ (x=Nx(x \neq x) \rightarrow \exists y(Ly\ \&\ yRx))\ \&\ \forall x \forall y \forall z((xRy\ \&\ xRz) \rightarrow y=z)\ \&\ \forall x \forall y \forall z\ ((xRy\ \&\ zRy) \rightarrow x=z)]$.

Novamente, o operador *Nx...x...*ainda ocorre no lado direito da equivalência e não pode ser eliminado. É interessante mencionar que o problema da não eliminabilidade do operador numérico é uma conseqüência da impredicatividade do Princípio de Hume. Se tomarmos o Princípio de Hume predicativamente, então a ocorrência do operador numérico seria eliminável. Por exemplo, se assumirmos que *NxFx=NxGx* (onde as instâncias de *Fx* e *Gx* não pode ser da forma *Nx...x...*), então isso pode ser explicado da seguinte maneira

F1-1G, ou seja, $\exists R[\forall x\ (Fx \rightarrow \exists y(Gy\ \&xRy))\ \&\ \forall x\ (Gx \rightarrow \exists y(Fy\ \&\ yRx))\ \&\ \forall x \forall y \forall z((xRy\ \&\ xRz) \rightarrow y=z)\ \&\ \forall x \forall y \forall z\ ((xRy\ \&\ zRy) \rightarrow x=z)]$

[195] Agora, se *NxFx=NxGx* fosse uma mera abreviação de *F1-1G*, então seria estranha a reivindicação Neo-Fregeana de que o termo *Nx...x...* é um termo singular.
[196] Note que o Princípio de Hume é impredicativo, ou seja, o operador *Nx...x...* pode ocorrer como instâncias dos conceitos de primeira ordem.

Como não há ocorrência do operador numérico nas instâncias de *Fx* e *Gx*, então tal operador é totalmente eliminado. É claro que a partir do Princípio de Hume predicativo não é possível provar a existência de infinitos números naturais sem assumir a existência de infinitos objetos ordinários (não lógicos) no mundo. E isto ocorre por uma razão simples. Frege define, como já dissemos no capítulo anterior, um conceito instanciado por n+1 objetos, assumindo que os números são objetos e podem ser contados. Mas, o Princípio de Hume predicativo exclui tal possibilidade. Não podemos assumir que sob o conceito $\xi=Nx(x\neq x)$ caia um único objeto. Nem que sob o conceito $(\xi=Nx(x\neq x)\ v\ \xi=Ny(y=Nx(x\neq x)))$ caiam somente dois objetos e, em geral, não podemos assumir que sob o conceito *ser o número dos números naturais que precedem n ou é igual a n* caiam n+1 objetos [197].

Da mesma maneira, o Princípio de Hume seria uma definição no sentido estrito, se o mesmo fosse não-criativo. O Princípio de Hume, claramente, não satisfaz este critério também, uma vez que ele implica na existência de infinitos objetos e, conseqüentemente, implica que o universo seja infinito. Assim, dada uma teoria T que tem somente modelos finitos e uma sentença *A* que ocorre em modelos infinitos, então Princípio de Hume+T implica *A*, mas T somente não implica *A*[198].

Ora, se o Princípio de Hume, como vimos acima, não é nem uma lei lógica, nem uma definição no sentido estrito, como Wright pode reivindicar que a prova de PA2 a partir do Princípio de Hume estabelece a analiticidade da aritmética? Wright sustenta que o Princípio de Hume não é uma definição no sentido estrito, mas pode ser considerado como uma definição implícita do operador numérico. E o Princípio de Hume, como um definição implícita, é capaz de fixar o sig-

[197] Na verdade, no caso do Princípio de Hume impredicativo, quando os conceitos *Fx* e *Gx* são instanciados por objetos ordinários, o operador numérico é eliminável. Por exemplo, como podemos saber se o número de livros em cima da minha mesa é igual ao número de cadernos em cima da minha mesa? Ora, vendo se há uma correspondência 1-1 entre os cadernos e os livros. Assim, a instância do Princípio de Hume será: $NxCx=NxLix\leftrightarrow\exists R[\forall x(C(x)\rightarrow\exists y(Li(y)\&xRy))\&\forall x(Li(x)\rightarrow\exists y(C(y)\ \&\ yRx))\ \&\ \forall x\forall y\forall z((xRy\ \&\ xRz)\rightarrow y=z)\ \&\ \forall x\forall y\forall z\ ((xRy\ \&\ zRy)\rightarrow x=z)]$. O operador numérico é eliminável nessa instância.

[198] Se uma teoria T tem somente modelos finitos, então T+Princípio de Hume não seria uma extensão conservativa de T. É interessante mencionar que um dos requerimentos que Wright apresenta contra a objeção das *Más Companhias* (veremos mais adiante qual é essa objeção) é justamente o critério de conservatividade. Ora, mas sendo a teoria T´ (T+Princípio de Hume) não conservativa, como Wright pode sustentar como um critério de aceitabilidade de princípios de abstração, em particular, do Princípio de Hume, a conservatividade? Veremos (em **4**) que Wright enfraquece o critério de não-criatividade e isto resulta no critério de conservatividade.

nificado de *Nx...x...*. Há alguns exemplos de definições implícitas. Por exemplo, a definição recursiva da soma

x+0=x
x+sy=s(x+y) (onde *s* significa a relação de sucessor)

e a definição recursiva da multiplicação

x.0=0
x.sy=x.y+x

Note que os símbolos '+' e '.' ocorrem em ambos os lados das definições. Eles não são elimináveis. O Princípio de Hume poderia ser entendido da mesma maneira[199]. A noção de definição implícita poderia ser formalizada da seguinte forma:

Seja uma teoria T formulada em uma linguagem L e seja um termo novo A que não pertence à linguagem L da teoria T. Uma definição implícita de A na linguagem L da teoria T é um conjunto de sentenças Γ *na linguagem estendida L+{A}*[200].

Mas, como o operador numérico *Nx...x...* é explicado em termos de correspondência 1-1, uma noção definida na lógica de segunda ordem, Wright, então, sustenta que o Princípio de Hume é uma definição implícita e analítica cujo papel é explicar o significado de tal operador[201]. Assim, uma vez que o Princípio de Hume é uma definição implícita e analítica, então PA2, assumindo que lógica de segunda ordem preserva analiticidade, é também analítica. Existem inúmeros problemas relacionados à noção de definição implícita e analítica, mas infelizmente não os discutiremos nessa dissertação[202].

---

[199] Aqui há um ponto importante. As definições recursivas acima são justificadas pelo teorema da recursão, que diz que existe apenas uma tal função, provado por Dedekind (1888) em lógica de segunda ordem (por isso, em lógica de segunda ordem, tais funções são elimináveis). A questão é, o Princípio de Hume é justificado? Será que a prova de *Numbers* justifica, talvez, a idéia de que o Princípio de Hume seja uma definição implícita, uma vez que aquele afirma a existência de um único número cardinal que pertence a conceitos equinuméricos?

[200] Vale mencionar que se a linguagem é de primeira ordem e se uma definição implícita Γ é eliminável e não criativa, então existe uma definição no sentido estrito equivalente a Γ. Esse é o teorema de Beth.

[201] Como já falamos algumas vezes, se a lógica de segunda ordem não for analítica, então a afirmação de Wright de que o Princípio de Hume é analítico será falsa.

[202] A noção de definição implícita analítica e *a priori* esbarra em alguns problemas. Dentre eles, podemos citar, o *Problema da Existência*. Uma definição implícita de uma expressão teria de funcionar como uma maneira de decidirmos se algumas sentenças que contêm tal expressão são corretas e estas servem para fixar o significado de tal expressão (na verdade, qualquer definição (estrita ou não) tem por objetivo fixar o significado de uma expressão). Assim, uma definição implícita de

Para finalizar esta seção e, também este capítulo, introduziremos uma distinção entre os princípios de abstração. Na introdução, afirmamos que Frege, em *Grundlagen der Arithmetik*, além do Princípio de Hume, introduz outros dois princípios de abstração, a saber, o Princípio da Direção e o Princípio da Forma. A relação de equivalência de ambos é relevante para objetos, retas e figuras respectivamente. Enquanto que no Princípio de Hume a relação de equivalência é relevante para conceitos de primeira ordem. Portanto, faremos a seguinte distinção entre os princípios de abstração no que diz respeito às entidades do domínio original (relevantes à relação de equivalência): (i) princípios de abstração objectuais,

---

uma expressão *F* é um contexto sentencial *#F* que é verdadeiro e a verdade do contexto sentencial *#F* depende do significado *F*. O problema da existência (ligado ao ceticismo de Quine em relação à existência dos significados) é então: para que o contexto sentencial *#F* seja verdadeiro, é necessário assumir a existência de um significado da expressão *F*. Quine negará a existência de tais objetos (significados), posto que os mesmos não têm um critério de identidade razoável. Um outro problema que está relacionado com o problema acima é o seguinte: suponhamos que existem os significados, a questão é, que garantias temos de que uma determinada expressão tenha um único significado? Esse é o *Problema da Unicidade*. Para maiores detalhes, o leitor poderia ler Paul Horwich (1997), Quine (1936) e (1951). As respostas para estas questões são encontradas em Hale e Wright (2001b). Veja também Chateaubriand (2001) e (a ser publicado). Há uma outra questão que nos parece ser mais interessante: os axiomas da aritmética de segunda ordem de Dedekind-Peano (PA2) podem ser considerados como definindo implicitamente as noções *0*, *número natural* e *sucessor*. A questão é, por que os axiomas de PA2 não podem ser considerados como uma definição implícita analítica dessas noções? A questão está ligada ao que dissemos em **2**, seção **2.1**: "Ou Kant está errado em sustentar que a aritmética dos números naturais depende da intuição e, neste caso, ter-se-ia de dar uma explicação de como conhecemos as proposições da aritmética dos números naturais (por exemplo, 5+7=12) sem apelar à intuição ou tentar-se-ia fundamentar ou reduzir a aritmética dos números naturais a algo mais básico que não apele explícita ou implicitamente à intuição e, neste caso, diríamos que Kant está errado. Note que as duas posições, apesar de serem bastante parecidas, não são equivalentes. A primeira posição tenta explicar que conceitos da aritmética dos números naturais (por exemplo, os conceitos de número natural, zero, de sucessor etc) não dependem da intuição e a explicação de tal fato se daria dentro da própria teoria. A segunda irá mostrar que os conceitos da aritmética dos números naturais podem ser definidos por ou reduzidos a conceitos mais básicos que não dependem da intuição". Hale e Wright (2001b) sustentam que os axiomas de PA2 assumem a existência de infinitos objetos (não lógicos) que se comportam segundo a descrição dos axiomas. Assim, PA2 depende de uma hipótese *a* posteriori, a existência de infinitos objetos e não pode ser analítico. Hale e Wright então fazem a seguinte distinção entre definições implícitas: "Vamos chamar arrogante qualquer estipulação de uma sentença, '#f', cuja verdade é tal que o significado antecedente de '#' não pode ser justificadamente afirmada sem um trabalho epistêmico colateral (*a posteriori*)". (Hale e Wright, 2001b, pág. 128). Então, eles afirmam: "Por exemplo, poderíamos ensaiar fixar os significados dos termos primitivos da aritmética – '0', 'número natural' e 'sucessor' – estabelecendo simples e diretamente os axiomas de Dedekind-Peano. Ou poderíamos fixar o significado do único termo primitivo não lógico da teoria de conjuntos – 'ε' – estipulando a verdade de uma coleção adequada de axiomas teórico-conjuntista [*set-theoretic*]. Em ambos os casos, a estipulação dos axiomas exigiria diretamente a existência de um domínio apropriadamente largo de objetos – infinitos números cardinais finitos, no primeiro caso e (prescindindo dos problemas de Löwenheim-Skolem) uma coleção muito larga de conjuntos, no outro caso – seria, portanto, arrogante". (Hale e Wright, 2001b, pág. 147). No caso do Princípio de Hume, a existência desses objetos é provada, segundo Hale e Wright, por lógica pura (lógica de segunda ordem). Contudo, nem todos os princípios de abstração são consistentes como o Princípio de Hume (por exemplo, a Lei Básica V), de maneira que consistência é um dos requisitos para que um princípio de abstração seja considerado como um princípio legítimo para introduzir objetos abstratos. Ora, isso também não é um trabalho epistêmico colateral?

cuja relação de equivalência é relevante para objetos; e (ii) princípios de abstração conceituais, cuja relação de equivalência é relevante para conceitos (de primeira ordem, segunda ordem etc.)[203].

[203] É interessante mencionar que a relação de equinumerosidade não é somente uma relação de equivalência sobre conceitos de primeira ordem. Por exemplo, podemos dizer que o número que pertence ao conceito de segunda ordem *não ser auto-subordinado* $5(\Phi\rightarrow\Phi)$ é o mesmo que o número que pertence ao conceito *não ser auto-coextensivo* $5(\Phi\leftrightarrow\Phi)$, uma vez os "objetos" (conceitos de primeira ordem) que caem sob o primeiro conceito podem ser colocados em uma correspondência 1-1 com os "objetos" (também conceitos de primeira ordem) que caem sob o segundo conceito. Note que a relação de correspondência 1-1, neste caso, é de terceira ordem. Poderíamos elaborar um Princípio de Hume em termos análogos à teoria dos tipos de Russell e Whitehead: $\forall F_n \forall G_n(N_{n+1}\alpha_n F_n \alpha_n = N_{n+1}\alpha_n G_n \alpha_n \leftrightarrow \exists R_{n+1}(F_n 1\text{-}1 G_n))$. Ou seja, o operador numérico e a relação de equivalência são de um tipo acima que os conceitos relevantes à relação de equivalência e ao operador numérico. Leia, por exemplo, Heck (1997b).