

## 2 - A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE FREGE

O objetivo deste capítulo é descrever e discutir alguns pontos da filosofia da matemática de Frege, bem como apresentar alguns resultados matemáticos desenvolvidos na terceira parte de *Begriffsschrift* (1879) e nas §§46-83 de *Die Grundlagen der Arithmetik*.

### 2.1 - LOGICISMO

Entre inúmeras tendências de pensamento na matemática no século XIX, uma das principais foi o movimento fundacionalista<sup>22</sup>. Muitos foram os matemáticos que exigiam um maior rigor nas definições de conceitos matemáticos e nas provas de teoremas. O movimento marcou também o rompimento entre a geometria e a aritmética. As definições de conceitos aritméticos tinham de ser explicados por meio de outros conceitos aritméticos mais básicos. Segundo alguns comentaristas, por exemplo, Demopoulos (1994), a rigorização da matemática e o rompimento entre geometria e aritmética<sup>23</sup> assinalavam uma transformação nas idéias dos matemáticos, a saber, que a aritmética formava uma ciência independente. Em última análise, se a aritmética dependesse da geometria para explicar seus conceitos, então a aritmética dependeria dos conceitos de tempo e espaço<sup>24</sup>:

Neste aspecto [o combate à incursão da intuição Kantiana], as motivações intelectuais de Frege refletem as dos analistas do século XIX que buscavam livrar o cálculo e a teoria dos reais de qualquer dependência da geometria e cinemática. Assim, já em 1817 Bolzano escreveu: ‘os conceitos de tempo e movimento são tão estranhos à matemática geral quanto o conceito de espaço’. (Demopoulos, 1994, pág. 76)<sup>25</sup>.

A posição de Demopoulos parece ser bastante plausível, principalmente quando Dedekind (1872) escreve:

É dito freqüentemente que o cálculo diferencial se ocupa com grandezas contínuas, todavia uma explicação desta continuidade não é dada em nenhum lugar e mesmo a exposição mais rigorosa do cálculo diferencial não fundamenta suas provas na continuidade, mas sim as provas ou apelam, com mais ou menos consciência, às noções geométricas ou às noções sugeridas pela geometria, ou se baseiam em teoremas que nunca são provados de uma maneira puramente aritmética. (Dedekind, 1872, pág. 316 (2)).

---

<sup>22</sup> O movimento fundacionalista, como entendemos, foi a tentativa, por parte dos matemáticos, de fornecer os fundamentos mais seguros e racionais para sua ciência.

<sup>23</sup> Por aritmética aqui, entendemos a aritmética dos números naturais e análise real. Quando nos referirmos apenas à aritmética dos números naturais, designaremos da seguinte forma: aritmética dos números naturais.

<sup>24</sup> Uma outra razão para o rigor era garantir a consistência e coerência da análise.

<sup>25</sup> Todas as traduções são minhas, exceto aquelas indicadas. No caso da tradução do alemão (Dedekind, Frege), o número que ocorre entre parênteses, se ocorrer, é a paginação da tradução inglesa.

Em uma outra passagem bastante sugestiva, Dedekind (1888) escreve:

Quando eu afirmo que a aritmética (álgebra, análise) é uma parte da lógica, eu quero dizer que eu considero o conceito de número totalmente independente das idéias ou das intuições do espaço e do tempo; que eu o considero, ao contrário, um resultado imediato das leis do pensamento [*reinen Denkgesetze*]. (Dedekind, 1888, pág. 335 (31)).

As duas citações acima parecem corroborar a interpretação de Demopoulos. Uma questão interessante é a seguinte: por que muitos matemáticos do século XIX defenderam que noções ou conceitos aritméticos não poderiam depender de idéias ou intuições de espaço e tempo? É difícil dar uma resposta geral para esta questão, mas uma das possíveis respostas talvez seria que a aritmética trata de “objetos” que não são intuitivos, que os conceitos aritméticos são abstratos. Frege (1874), por exemplo, escreve:

Se mostrarmos a um iniciante como somar ângulos, então ele sabe o que são ângulos. E está claro também que um conceito tão compreensivo e abstrato como o conceito de quantidade não pode ser uma intuição. De acordo com isto, existe uma diferença notável entre a geometria e a aritmética na maneira pela qual elas estabelecem seus princípios [*Grundsätze*]. Os elementos de todas as construções geométricas são intuições e a geometria se refere à intuição como a origem de seus axiomas [*Axiome*]. Uma vez que o ‘objeto’ [*Objekt*] da aritmética não tem um caráter intuitivo, então seus princípios não podem ser originados da intuição. (Frege, 1874, pág. 50 (56-7))<sup>26 27</sup>.

Para Frege, então, a aritmética é totalmente independente da intuição. Em particular, e como a passagem acima aponta, ele está defendendo uma diferença e, portanto, um rompimento entre a aritmética e a geometria<sup>28</sup>.

Como afirmamos acima, os matemáticos que tinham uma postura fundacionalista tentaram definir conceitos aritméticos por meio de outros conceitos aritméticos mais básicos. Um exemplo clássico foi a tentativa de Cauchy definir os

<sup>26</sup> *Grundsätze* pode ser também traduzido por axiomas. Porém, na mesma citação há a palavra *Axiome*, então, por isso, escolhemos traduzir a palavra *Grundsätze* por *princípios*.

<sup>27</sup> As aspas são minhas. *Objekt* tem de ser entendido não como objeto no seu sentido ordinário, isto é, da maneira como entendemos que o livro em cima da minha mesa é um objeto, mas sim no sentido de objeto de estudo de uma determinada ciência. E nem sempre o objeto de estudo de uma ciência é um objeto no sentido ordinário. Um exemplo, dado até por Frege, é que os objetos de estudo da lógica são conceitos e as relações entre os conceitos, mas como Frege defende em vários lugares, os conceitos são de natureza distinta dos objetos (*Gegenstand*) no seu sentido ordinário.

<sup>28</sup> Demopoulos (1998), em um outro lugar, escreve: “Uma visão da filosofia da aritmética de Frege que ganhou uma ampla aceitação é aquela que marca a culminação do processo de tornar rigoroso o cálculo e a teoria dos números reais; colocando brevemente, Frege buscou fazer para a aritmética o que Cauchy, Bolzano e outros fizeram para a análise: a saber, assegurar-lhe um ‘fundamento rigoroso’. Mas mesmo que o interesse no rigor seja uma clara explicação, isto nos diz quase nada. Na minha visão, a preocupação de Frege com o rigor, como a de Dedekind e outros matemáticos do período, estava intimamente ligada à sua rejeição da intuição no raciocínio aritmético”. (Demopoulos, 1998, pág. 481).

números reais em termos de uma seqüência de números racionais. Estes, por sua vez, podem ser definidos como sendo pares (ordenados) de números inteiros; e os números inteiros, como sendo pares (ordenados) de números naturais<sup>29</sup>. O movimento fundacionalista tinha, portanto, um aspecto reducionista, ou seja, entidades aritméticas de um certo tipo (por exemplo, os números reais) eram definidas por meio de ou reduzidas a entidades aritméticas de um outro tipo mais básico (no caso, os números racionais). Assim, seguindo a linha de raciocínio acima, toda a aritmética poderia ser definida por meio dos ou reduzida aos números naturais. Assim, defender que a aritmética é independente de intuições (em particular, das intuições de tempo e espaço) é defender que nosso conhecimento da aritmética dos números naturais não é dependente de intuições (em particular, das intuições de tempo e espaço).

O problema é que Kant, em *Kritik der reinen Vernunft* (1ª edição - 1781-2ª edição - 1787), defende que equações aritméticas simples, como  $5+7=12$ , dependem da intuição (no caso, uma intuição pura, uma vez que Kant sustenta que os juízos da aritmética são sintéticos *a priori*) para serem provadas.

À primeira vista poder-se-ia, sem dúvida, pensar que a proposição  $7+5=12$  é uma proposição simplesmente analítica, resultante, em virtude do princípio de contradição, do conceito da soma de sete e de cinco. Porém, quando se observa de mais perto, verifica-se que o conceito da soma de sete e de cinco nada mais contém do que a reunião dos dois números em um só, pelo que, de modo algum, é pensado qual é esse número único que reúne os dois. O conceito de doze de modo algum ficou pensado pelo simples facto de se ter concebido essa reunião de sete e de cinco e, por mais que analise o conceito que possuo de uma tal soma possível, não encontrarei nele o número doze. Temos de superar estes conceitos, procurando a ajuda da intuição que corresponde a um deles, por exemplo, os cinco dedos da mão ou (como Segner na sua aritmética) cinco pontos, e assim acrescentar, uma a uma, ao conceito de sete, as unidades do número cinco dadas na intuição. (Kant, 1787, B 15)<sup>30</sup>.

Um representante do movimento fundacionalista poderia responder o seguinte: Kant está errado em sustentar que a aritmética dos números naturais depende da intuição e, neste caso, ter-se-ia de dar uma explicação de como conhecemos as proposições da aritmética dos números naturais (por exemplo,  $5+7=12$ ) sem apelar à intuição; ou tentar-se-ia reduzir a aritmética dos números naturais a algo mais básico que não apele explícita ou implicitamente à intuição e, neste caso, afirmar-se-ia que Kant está errado. Note que as duas posições, apesar de serem

<sup>29</sup> Os números complexos podem ser definidos como pares de números reais.

<sup>30</sup> A tradução é da edição da Fundação Calouste Gulbenkian.

bastante parecidas, não são equivalentes. A primeira posição tenta explicar que conceitos da aritmética dos números naturais (por exemplo, os conceitos de número natural, de zero, de sucessor etc.) não dependem da intuição e a explicação de tal fato se daria dentro da própria teoria. A segunda irá mostrar que os conceitos da aritmética dos números naturais podem ser definidos por ou reduzidos a conceitos mais básicos que não dependem da intuição. Frege opta pela segunda posição, ou seja, ele sustentará que os conceitos da aritmética dos números naturais podem ser definidos por ou reduzidos a outros conceitos mais básicos. É claro que a primeira posição permanece em aberto, porém não a discutiremos aqui.

Mas, os conceitos da aritmética dos números naturais deveriam ser definidos por ou reduzidos a quais conceitos mais básicos? Frege irá sugerir uma redução da aritmética à lógica. Mas, por que a lógica? Primeiro, porque a lógica é analítica, pelo menos assim defendera Kant<sup>31</sup>. Uma vez que a lógica é analítica, então ela não dependeria da intuição<sup>32</sup>. Se a redução da aritmética à lógica for bem-sucedida, então a aritmética seria analítica e, portanto, não dependeria da intuição<sup>33</sup>. Além disso, Frege afirma que a aritmética se aplica a tudo que é pensável, seu escopo de aplicação é equivalente ao escopo da lógica e isto seria uma forte evidência de que a aritmética é uma lógica desenvolvida<sup>34</sup>. Assim, o logicismo de Frege, a saber, que a aritmética dos números naturais tem de ser reduzida à lógica, é uma espécie de corolário da idéia de que a aritmética não depende da intuição e do aspecto reducionista do movimento fundacionalista.

## 2.2 – O ANALÍTICO, O SINTÉTICO, O A PRIORI, O A POSTERIORI

Como afirmamos na seção 2.1, o logicismo de Frege é uma espécie de corolário de duas doutrinas em voga no movimento fundacionalista na matemática do século XIX – a independência da aritmética de qualquer espécie de intuição e

<sup>31</sup> Na verdade, existem várias noções de lógica em Kant. Por exemplo, a lógica pura, a lógica transcendental, a lógica aplicada. Dentre estas, somente a lógica pura é considerada analítica por Kant (Cf. Kant (1781) e (1787), A55/B79; A61/B86, A598/B626).

<sup>32</sup> Se um juízo depende da intuição, então, segundo Kant, este juízo é sintético.

<sup>33</sup> Isto também explica a recusa de Frege de elementos psicológicos na lógica e na matemática. Se a lógica dependesse da psicologia, sua tentativa de mostrar que a aritmética é independente da intuição fracassaria.

<sup>34</sup> “A base da aritmética é mais profunda, parece, do que a de qualquer ciência empírica e, até mesmo, a da geometria. As verdades da aritmética governam tudo que é numerável. Este é o mais amplo dos domínios; pois a ele pertence não somente o que é real, não somente o que é intuitivo, mas tudo que é pensável. As leis dos números não deveriam então estar conectadas intimamente com as leis do pensamento?” (Frege, 1884, §14).

a tendência reducionista. Frege tem de fundamentar os conceitos da aritmética na lógica, uma vez que a lógica é analítica e, conseqüentemente, não é sintética e assim não dependeria da intuição. Frege tem de analisar, então, os conceitos de *analítico* e *sintético*. Entretanto, Frege também tem de considerar os conceitos de *a priori* e *a posteriori* que são conceitos que estão intimamente relacionados aos de *analítico* e *sintético*<sup>35</sup>.

O trabalho de Frege de 1874 não tem nenhuma referência ao conceito de analítico, nem referências a Kant. Lá, ele apenas afirma que o conceito principal da aritmética – o de quantidade – não é intuitivo e que toda a aritmética é derivada deste conceito<sup>36</sup>. É claro que se a aritmética é derivada conceitualmente, então esta ciência seria, para Kant, analítica<sup>37</sup>. É difícil afirmar se Frege tinha isto em mente no seu trabalho de 1874, contudo, cinco anos depois, na *Begriffsschrift* (1879), há uma evidência que Frege considera a posição de Kant em relação aos conceitos de analítico e sintético.

No prefácio de *Begriffsschrift*, Frege afirma que há duas formas de se estabelecer a verdade de uma proposição, a saber: a) ou perguntando por qual caminho a proposição em questão foi estabelecida; b) ou de que maneira a mesma pode ser mais firmemente estabelecida. A primeira, como ele mesmo coloca, pode ser respondida diferentemente por diferentes pessoas, pois a verdade é estabelecida a partir da gênese do conhecimento da proposição. A segunda é mais definitiva, pois a verdade é estabelecida a partir da natureza interna da proposição. Em *Begriffsschrift*, a preocupação de Frege é tão somente com a segunda forma de se estabelecer a verdade. Em outras palavras, Frege se preocupou em apresentar a prova ou justificação do conhecimento da verdade de uma proposição. E Frege apresenta a seguinte classificação das proposições:

O método mais rigoroso de prova é obviamente o puramente lógico que, desconsiderando as características particulares das coisas, é baseado somente em leis sobre as quais todo conhecimento é fundamentado. De acordo com o que fora afirmado acima, nós dividimos todas as verdades que requeiram uma prova em

<sup>35</sup> “Se levarmos a diante a oposição de analítico e sintético, obteríamos quatro combinações uma das quais, a saber, analítico a posteriori não ocorre. Se decidirmos, como Mill, em favor do a posteriori não resta nenhuma escolha, de maneira que, para nós, somente as possibilidades sintético a priori e analítico faltam ser consideradas”. (Frege, 1884, §12).

<sup>36</sup> “Se, como mostramos, não encontramos o conceito de quantidade na intuição, mas criamo-lo por nós mesmos, então estamos justificados em tentar formular sua definição para permitir tantas vezes quanto possível uma aplicação, a fim de estender o domínio ao qual está sujeita a aritmética”. (Frege, 1874, pág. 51(57)).

<sup>37</sup> Segundo Kant, um juízo é analítico se ele é um juízo discursivo, ou seja, um juízo cuja verdade depende apenas dos conceitos do sujeito e do predicado.

dois tipos: a prova do primeiro tipo é executada puramente por lógica, enquanto a do segundo tem de ser apoiada em fatos empíricos. (Frege, 1879, Prefácio).

A passagem acima parece sugerir uma divisão entre proposições analíticas e sintéticas. As proposições provadas de maneira puramente lógica seriam analíticas e, caso contrário, as proposições seriam sintéticas. Mas, aqui há um problema: a definição de Frege não dá conta de juízos sintéticos *a priori*. Estes juízos não são provados por lógica pura, tampouco precisam de fatos empíricos para apoiar suas provas. O problema surge porque Frege (1884) defendeu, como Kant, o caráter sintético *a priori* da geometria. Poderíamos, é claro, dizer que somente depois da *Begriffsschrift*, Frege considerou a geometria sintética *a priori* e, portanto, quando Frege fala de intuição nos seus primeiros trabalhos, ele tinha em mente uma intuição empírica<sup>38</sup>. Entretanto, não há nenhuma evidência explícita de tal fato.

A citação acima também poderia sugerir uma distinção entre *a priori* e *a posteriori*, isto é, uma proposição é *a priori* quando provada apenas por leis lógicas; caso contrário, a proposição é *a posteriori*. Todavia, essa divisão não oferece novamente uma explicação de proposições sintéticas *a priori*, pois, repetimos, uma tal proposição não é provada por meios puramente lógicos, tampouco se baseia em fatos empíricos. Mas, pelo menos, uma coisa é evidente na *Begriffsschrift*: proposições (ou juízos) analíticas não dependem da intuição<sup>39</sup>.

Frege não é muito claro, em *Begriffsschrift*, sobre os conceitos de analítico, sintético, *a priori* e *a posteriori*. A passagem indicada acima apresenta algumas dificuldades interpretativas. Contudo, em *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege apresentará uma distinção mais elaborada entre estes conceitos. Aqui, poderíamos conjecturar duas hipóteses: (1) ou Frege já aceitava a posição de Kant sobre a geometria nos seus primeiros trabalhos e, portanto, ele percebeu que sua definição apresentada em *Begriffsschrift* não era exaustiva; (2) ou Frege passou a aceitar a posição de Kant depois da *Begriffsschrift* e, portanto, uma nova distinção entre estes conceitos era necessária, uma vez que a anterior (dada em *Begriffsschrift*) não era exaustiva. É importante dizer que a distinção entre estes

<sup>38</sup> Além da passagem de Frege (1874) citada acima, há uma no trabalho de 1873: “Se consideramos que toda geometria depende, em última análise, de axiomas que derivam sua validade da natureza de nossas faculdades intuitivas, então parece justificado questionar o sentido de formas imaginárias, uma vez que lhe atribuímos propriedades que freqüentemente contradizem toda nossa intuição”. (Frege, 1873, pág. 1(3)).

conceitos em *Die Grundlagen der Arithmetik*, como em *Begriffsschrift*, é uma distinção sobre a justificativa (ou prova) da proposição<sup>40 41</sup>. Segundo Frege (1884), uma proposição é analítica se a sua justificação (ou prova) depende apenas de leis lógicas e definições (também lógicas). Uma verdade é sintética se a sua justificação depende de alguma lei que não tem caráter lógico (poderíamos chamar tal lei de postulado). A verdade de uma proposição é *a priori*, se na sua justificação nenhum apelo é feito a fatos particulares, se sua justificação depende apenas de leis gerais que nem admitem nem necessitam de uma prova. Caso contrário, se a justificação de uma proposição depende de um fato particular, então a verdade de uma tal proposição é *a posteriori*. Note que agora Frege está em posição de defender o caráter sintético *a priori* da geometria, uma vez que esta ciência depende dos postulados, que não são leis lógicas, para executar suas provas – neste caso, a geometria é sintética –, mas os postulados são leis gerais que não admitem nem precisam de prova – neste caso, a geometria é *a priori*. Há ainda uma série de questões sobre estas distinções de Frege, mas infelizmente não trataremos delas aqui<sup>42 43</sup>.

### 2.3 – A NOTAÇÃO CONCEITUAL

Como dissemos acima, Frege defende a idéia de que a aritmética não depende da intuição (em particular, da intuição pura). Além disso, Frege sustenta (pelo menos até 1903) que a aritmética é redutível à lógica (uma espécie de corolário). Esta última tese implica então que os conceitos da aritmética devem ser definidos por meios puramente lógicos e que seus teoremas são provados a partir das leis da lógica e definições aritméticas (lógicas).

<sup>39</sup> Cf. Frege (1879), §23.

<sup>40</sup> “Estas distinções de *a priori*, *a posteriori*, sintético e analítico, na minha concepção, não dizem respeito ao conteúdo dos juízos, mas a justificação para se fazer um juízo”. (Frege, 1884, §3).

<sup>41</sup> O objetivo de Frege é mostrar que a distinção entre analítico, sintético, *a priori* e *a posteriori* não é uma distinção subjetiva, como seria o caso se estes conceitos dependessem do conteúdo das proposições, ou melhor, da maneira pela qual apreendemos estes conteúdos.

<sup>42</sup> O leitor interessado pode ler Dummett (1991).

<sup>43</sup> As distinções apresentadas por Frege (1884) serão úteis mais tarde quando discutirmos a proposta de Wright. Adiantando, Wright, como disse na introdução, irá propor a adição do Princípio de Hume à lógica de segunda ordem, e reivindicará o logicismo da aritmética, posto que a teoria resultante mais definições Fregeanas de Zero, Sucessor e Número Natural provam os axiomas da aritmética de segunda ordem. Porém, o Princípio de Hume, como iremos ver, não é nem uma definição, nem uma lei lógica, portanto a teoria resultante não seria analítica segundo as distinções acima. Na verdade, poderíamos reivindicar que a aritmética é sintética *a priori*, uma vez que ela depende de uma lei geral (o Princípio de Hume) que não admite prova (é claro, estamos levando

No entanto, para executar esta tarefa, Frege necessitava de uma notação ou de uma linguagem capaz de expressar as relações dos elementos que participam da justificação da verdade de uma proposição de maneira não ambígua. Tal linguagem tinha de ser suficientemente clara, para que na cadeia de dedução nada de estranho à prova pudesse entrar despercebido. Esta linguagem não poderia ser a linguagem ordinária, pois a mesma é, segundo Frege, ambígua e inadequada<sup>44</sup>, e não serve para estabelecer uma dedução totalmente livre de lacunas.

Vale a pena dizer que Frege não defende a superioridade de uma linguagem artificial sobre a linguagem natural. Segundo ele, a linguagem artificial, livre de ambigüidade, é superior à linguagem natural quando aquela é utilizada para propósitos científicos. A ciência necessita de uma linguagem na qual seus termos não variem de significado de acordo com o contexto, ou seja, a linguagem deve manter-se rígida. Todavia, se o objetivo é a arte, por exemplo, uma comédia, é essencial uma linguagem que seja ambígua e favoreça o duplo sentido. Neste caso, a linguagem natural é superior à linguagem artificial.

Essa língua artificial (denominada de “notação conceitual”) é, como o próprio Frege reconhece, inspirada na *Característica Universal* de Leibniz. No entanto, Frege acredita que Leibniz superestimou as vantagens de um tal método de notação. Isto porque na visão de Leibniz a *Característica Universal* seria um instrumento capaz de expressar todos os pensamentos humanos, independentemente da área. Ela seria capaz de expressar pensamentos tanto da aritmética quanto da moral, tanto da ciência quanto da metafísica. Frege pretende aplicar sua notação conceitual apenas à aritmética<sup>45</sup>.

Vale então lembrar alguns dos aspectos defendidos por Leibniz sobre a *Característica Universal*. Esta linguagem teria duas faces: por um lado, ela funcionaria como um cálculo *rationalator*, isto é, a partir de um determinado conjunto

---

em conta a definição de Frege de sintético *a priori*). Wright terá de modificar a concepção de analítico, se ele deseja mostrar que a aritmética é analítica.

<sup>44</sup> Tome, por exemplo, a palavra “ou” nas seguintes sentenças: “eu vou ao cinema ou eu vou ao teatro” e “o livro está na mesa ou a caneta está na cadeira”. Na primeira sentença, “ou” está sendo usado no sentido exclusivo, isto é, se a sentença for verdadeira, então uma das subsentenças é verdadeira, mas não é o caso de ambas serem verdadeiras. Na segunda sentença, “ou” é inclusivo, ou seja, se a sentença for verdadeira, então uma das subsentenças é verdadeira; ou ambas subsentenças são verdadeiras.

<sup>45</sup> “A aritmética, como disse no início, foi o ponto de partida da cadeia de pensamento que me levou à notação conceitual. Portanto, eu pretendo aplicá-la primeiro a esta ciência, tentando analisar seus conceitos e fornecer um profundo fundamento para seus teoremas”. (Frege, 1879, Prefácio).



de definições e axiomas (que expressariam os conceitos mais simples) seria possível chegar às noções mais complexas (ou conceitos mais complexos). Por outro lado, ela funcionaria como uma língua filosófica capaz de expressar os pensamentos humanos e suas inter-relações mais apuradamente e sem ambigüidades.

Ora, uma tese subjacente à *Característica Universal* é que os sinais são indispensáveis (sinais aqui podem ser entendidos por palavras, figuras, numerais, diagramas etc.), porque é através deles que comunicamos (de maneira objetiva) nossos pensamentos (ou idéias, na terminologia de Leibniz). Tais sinais não são marcas convencionais, como Locke defendera em *An Essay concerning Human Understanding* (1690), de idéias subjetivas de um "falante", mas sim marcas de idéias objetivas que todos os animais racionais (ou "falantes") são capazes de entender (se estiverem bastante familiarizados com as mesmas).

Podemos então expressar resumidamente, como Donald Rutherford sustenta (1995), os três pontos centrais da *Característica Universal*, a saber:

- 1) apresentar os conceitos primitivos (ou básicos) a partir dos quais os demais (os mais complexos) são obtidos;
- 2) imaginar sinais adequados para representar cada um desses conceitos primitivos;
- 3) e formular uma regra para combinação destes sinais.

Exemplificando a idéia de Leibniz, tome o conceito *ser humano*. Seguindo a própria análise Leibniziana, podemos desmembrar tal conceito em partes mais primitivas, a saber, *ser animal* e *ser racional*. Assim o conceito *ser humano* é um conceito complexo e *ser animal* e *ser racional*, conceitos mais básicos. Estipulando então que estes últimos não podem ser desmembrados em conceitos mais simples, basta-nos então por (2) estipular algum sinal adequado para tais conceitos. Sejam Ax e Rx <sup>46</sup> os símbolos para *ser animal* e para *ser racional*, respectivamente. Falta então estipular alguma regra para combinar os sinais de tal forma que, por esta combinação, seja expresso o conceito requerido (isto é, *ser humano*). Um bom candidato para esta regra pode ser a conjunção lógica que será representada pelo sinal de multiplicação (.). Temos assim que *ser humano* = Ax.Rx (humano é, por definição, animal e racional, ou animal racional). Não pretendemos entrar em muitos detalhes aqui, mas Leibniz, nos escritos entre 1678-1679<sup>47</sup>, usa como si-

<sup>46</sup> Supondo que esses símbolos são sinais adequados.

<sup>47</sup> Leibniz (1679). "*Samples of the Numerical Characteristic*".

nais adequados para representar os conceitos primitivos números primos (isto porque qualquer número integral pode ser fatorado unicamente como um múltiplo de um primo) e a multiplicação numérica como regra de combinação. Assumindo este modelo, o exemplo dado acima poderia ficar assim: para os conceitos *ser animal* e *ser racional* daríamos, respectivamente, os sinais 2 e 3 (números primos). Assim, o conceito *ser humano* teria como sinal característico (ou como Leibniz diz, número característico) o número 6 (ou seja,  $2 \times 3$ ). Portanto, um conceito que tem um sinal característico 22 é um conceito que contém o conceito *ser animal* (uma vez que o número 22 é múltiplo de 2)<sup>48</sup>.

Voltando a Frege, uma vez que ele se inspira na *Característica Universal*, então ele deve manter, de certa forma, os três princípios que foram apresentados acima. Eles são, para recapitular, 1) apresentar os conceitos primitivos da sua notação; 2) imaginar os sinais adequados para representá-los; e 3) formular regras para combinação dos mesmos. Na próxima seção, exporemos de maneira mais exata como Frege elabora sua notação conceitual.

## 2.4- BEGRIFFSSCHRIFT

*Begriffsschrift* foi o primeiro livro escrito por Frege. Neste livro, Frege pretende executar parte de seu programa logicista, tentando mostrar que o conceito de *ordenação-em-uma-seqüência* pode ser expresso ou reduzido ao conceito de *implicação lógica*<sup>49</sup>. Mas, Frege necessitava elaborar uma linguagem adequada para expressar os conceitos matemáticos (no caso, conceitos da aritmética). E tal linguagem foi inspirada, como também dissemos, na *Característica Universal* de Leibniz. Como dissemos acima, Frege precisa, então, apresentar e explicar seus conceitos primitivos, imaginar sinais adequados para estes conceitos e, enfim, formular regras de combinação destes sinais. Esta tarefa é executada na parte 1 de *Begriffsschrift*. O objetivo central de Frege (reduzir o conceito de *ordenação-em-uma-seqüência* ao conceito de *implicação lógica*) é realizado na parte 3 de *Begriffsschrift*. E na parte 2 deste livro, Frege apresenta as leis lógicas ou do pensamento (puro).

<sup>48</sup> Na verdade, o cálculo de Leibniz é um pouco mais complicado.

<sup>49</sup> Aqui, seguimos a sugestão de Ruffino (1998) e traduzimos *logische Folge* por *implicação lógica*. Como veremos mais adiante, Frege define noções de *ordenação-em-uma-seqüência* por meio de símbolos de implicação e quantificadores.

### 2.4.1- OS CONCEITOS PRIMITIVOS

Frege, na tentativa de analisar os conceitos da aritmética, como já dissemos, encontrou na linguagem natural uma fonte de imprecisão e erro. Ele então foi obrigado a analisar as sentenças da linguagem natural para estabelecer nas mesmas aquilo que era essencial em uma inferência (lógica). Para explicar tal procedimento em *Begriffsschrift* e responder as críticas feitas a sua notação conceitual, Frege (1880-1) escreve:

Como oposto a isto [divisão das proposições da lógica em primárias e secundárias], eu parto dos juízos e seus conteúdos, e não de conceitos. A relação hipotética precisamente definida entre conteúdos de juízos possíveis tem importância similar para os fundamentos de minha notação conceitual como a identidade de extensão tem para a lógica Booleana. (Frege, 1880-1, pág. 17 (pág. 16)).

Ora, Frege, na passagem acima, parece assumir que o juízo é a unidade da linguagem. E intimamente ligados aos juízos estão os conteúdos conceituais<sup>50</sup>. É então analisando os conteúdos conceituais dos juízos que Frege obtém seus conceitos (lógicos) primitivos. Por exemplo, tome o juízo categórico *Todo humano é animal*. Segundo Frege, o conteúdo conceitual deste juízo expressa uma relação de subordinação entre conceitos, ou seja, o conceito *humano* é subordinado ao conceito *animal*. Isto quer dizer que *para qualquer coisa se ela é humana, então ela é animal*. Assim, Frege chega a dois conceitos que considera como sendo primitivos: a implicação entre conteúdos conceituais e a generalização universal dos conteúdos (ou quantificação universal)<sup>51</sup> expressos pelas palavras “se..., então” e “para qualquer coisa”, respectivamente. Da mesma maneira, podemos analisar o conteúdo conceitual expresso pelo juízo categórico *Nenhum humano é imortal*. Novamente, tal conteúdo expressa uma relação entre os conceitos *humano* e *imortal*, a saber, que ambos são disjuntos. Isto quer dizer que para toda coisa se ela é humana, então ela não é imortal. Note que agora apareceu a palavra “não”. Frege também toma a negação como sendo um conceito (lógico) primitivo.

Até agora, identificamos três conceitos primitivos que Frege reconhece em *Begriffsschrift*. Além desses três conceitos, Frege reconhece também a noção de conteúdo conceitual e de juízo e apresenta os símbolos que os representam. Na §2

<sup>50</sup> Frege não nos diz o que é um conteúdo conceitual. Ele apenas nos diz quando dois conteúdos conceituais são iguais, a saber, quando eles podem ser substituídos em uma inferência preservando a dedutibilidade.

<sup>51</sup> Note então que para Frege não é o juízo que é universal, mas o conteúdo conceitual de um juízo que é universal.

de *Begriffsschrift*, Frege afirma que um juízo será sempre expresso na sua notação conceitual pelo seguinte sinal:

$$\vdash$$

assim, por exemplo, o sinal

$$\vdash A$$

indica que  $A$  é o caso<sup>52</sup> (hoje em dia, diríamos que  $A$  é verdadeiro). Agora, se for omitido o traço vertical, o juízo se transforma em mera combinação de idéias.

Assim, o símbolo

$$\text{---} A$$

não expressa nenhum juízo e significa apenas, segundo Frege, a circunstância em que  $A$  ocorre. O traço vertical é denominado por Frege de traço de juízo; o traço horizontal, o de conteúdo.

O símbolo para a implicação entre conteúdos conceituais é apresentado na §5. Seguindo seu exemplo, sejam  $A$  e  $B$  conteúdos judicáveis, então há quatro possibilidades possíveis, a saber, (1)  $A$  é o caso e  $B$  é o caso; (2)  $A$  é o caso e  $B$  não é o caso; (3)  $A$  não é o caso e  $B$  é o caso; (4)  $A$  não é o caso e  $B$  não é o caso. Segundo Frege, o símbolo

$$\begin{array}{l} \vdash \text{---} B \\ \quad \quad \quad \vdash \text{---} A \end{array}$$

significa que a possibilidade (2) não ocorre. Hoje em dia, poderíamos traduzir o símbolo acima por  $A \rightarrow B$ . Note que na notação de Frege a implicação é lida de baixo para cima.

Na §7, é introduzido o símbolo da negação. Seja, por exemplo, a proposição falsa  $2 + 2 = 5$ , então a negação desta proposição é verdadeira. Se a expressão  $2 + 2 = 5$  for denominada por  $A$ , então, na notação de Frege, o símbolo

$$\vdash \text{---} A$$

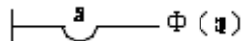
significa que  $A$  não é o caso (ou não- $A$  é o caso). A negação é simbolizada pelo traço vertical no meio do traço de conteúdo.

Na §11, Frege introduz a notação para a quantificação universal. Ele escreve:

Na expressão de um juízo, podemos sempre considerar a combinação de símbolos à direita de  $\vdash \text{---}$  como uma função de um dos símbolos que ocorre nela. Se

<sup>52</sup> Na verdade, este símbolo também indica que afirmamos que  $A$  é o caso.

substituímos este argumento por uma letra germânica e introduzimos no conteúdo uma concavidade contendo a mesma letra germânica, como em



então isto significa o juízo que a função é um fato para tudo que possamos tomar como seu argumento. (Frege, 1879, §11).<sup>53</sup>

Na notação lógica atual, o símbolo acima é expresso por  $\forall xFx$ . Na passagem supracitada, Frege diz que o símbolo à direita do símbolo de juízo pode ser considerado como uma função de um dos símbolos que ocorre nele. Chegamos a dois outros conceitos que Frege considera como sendo primitivos: os conceitos de *função* e *argumento*. Frege estipula estes conceitos como primitivos novamente analisando os conteúdos conceituais dos juízos. Seja, por exemplo, o conteúdo conceitual do juízo *Platão é mortal*. Este conteúdo é analisado por Frege como expressando que um determinado argumento (Platão) cai sob uma determinada função (ser mortal). Não é necessário que o argumento seja *Platão* e a função seja *ser mortal* no juízo em questão. Poderíamos analisar tal juízo da seguinte maneira: o argumento sendo *ser mortal* e a função,  $\Phi$ -*Platão* (*ser instanciado por Platão*)<sup>54</sup>.

Outros juízos mais complexos podem ser analisados também dessa maneira. Por exemplo, *Platão foi discípulo de Sócrates* pode ser analisado, segundo Frege, como se segue: *Platão* (argumento) e *ser discípulo de Sócrates* (função); *Sócrates* (argumento) e *ser mestre de Platão* (função); *Platão, Sócrates*<sup>55</sup> (argumentos) e *ser discípulo de* (função<sup>56</sup>); *Sócrates, Platão* (argumentos) e *ser mestre de* (função)<sup>57</sup>.

Na §10, Frege introduz os símbolos para argumento e função. O argumento será designado por letras maiúsculas latinas (A,B,C,...); a função, pelas letras gregas ( $\Phi, \Delta, \Gamma$ ...). Assim,  $\Phi(A)$  expressa, segundo Frege, “uma função indeterminada de argumento A”. No caso de uma relação, o símbolo introduzido por Frege é  $\Psi(A,B)$ . Se adicionarmos o símbolo de juízo a  $\Phi(A)$ , ou seja,

<sup>53</sup> Não tenho em meu computador a letra germânica, então escrevemos o símbolo utilizando a *Alle-gro BT*.

<sup>54</sup> No caso,  $\Phi$ -*Platão* é uma função de segunda ordem sob a qual cai uma função de primeira ordem (no caso acima, *ser mortal*).

<sup>55</sup> Aqui, é claro, temos um par ordenado <Platão, Sócrates>. Note que o par inverso não satisfaz a função *ser discípulo de*.

<sup>56</sup> Frege também denomina funções binárias de relações.

<sup>57</sup> Novamente, poderíamos analisar a mesma sentença como expressando que uma determinada relação (*ser discípulo de*) cai sob a função de 2ª ordem *PlatãoRSócrates*. Ou então que a relação *ser mestre de* cai sob a função de 2ª ordem *Sócrates RPlatão*.

$$\vdash \Phi(A)$$

isto significa que  $A$  tem a propriedade  $\Phi$ . No caso de uma relação  $\Psi(A,B)$ , o símbolo

$$\vdash \Psi(A,B)$$

significa que  $B$  se encontra na relação  $\Psi$  com  $A$ , ou  $B$  é o resultado da aplicação do procedimento  $\Psi$  ao argumento  $A$ .

Finalmente, apresentaremos o último conceito primitivo que Frege considera em *Begriffsschrift*, a saber, a noção de identidade de conteúdos (§8). Este conceito, diferente do conceito de negação, de implicação, de generalização, de argumento e de função, não é obtido através da análise dos conteúdos conceituais dos juízos e, diferente dos três primeiros conceitos primitivos, não relaciona os conteúdos conceituais, mas nomes dados aos conteúdos conceituais. Assim o juízo

$$\vdash A \equiv B$$

significa que o símbolo  $A$  e o símbolo  $B$  têm o mesmo conteúdo conceitual e, portanto, podemos sempre substituir  $A$  por  $B$  e vice-versa. O propósito para introdução desse símbolo se tornará mais claro quando discutirmos a parte 3 de *Begriffsschrift*. A noção de identidade de conteúdo desempenhará um papel importante na introdução das definições de conceitos matemáticos. O problema é que a noção de identidade de conteúdos é bastante ambígua, pois, na parte 2 de *Begriffsschrift*, ela parece desempenhar o papel da identidade entre objetos quando o seguinte axioma é apresentado:  $(a \equiv b \rightarrow (f(a) \rightarrow f(b)))$ <sup>58</sup> (ou seja, *se  $a$  é igual a  $b$  e se  $a$  tem a propriedade  $f$ , então  $b$  tem esta mesma propriedade*). Mas, como veremos, parece existir uma certa incompatibilidade entre a versão lógica da lei acima e a maneira como Frege geralmente a usa<sup>59</sup>.

Frege, ainda na parte 1 de *Begriffsschrift*, apresenta sua regra de inferência (§6). Tomemos o seu exemplo: sejam os juízos

$$\begin{array}{l} \vdash A \\ \vdash B \end{array} \text{ e } \vdash B$$

então podemos inferir

<sup>58</sup> Veremos que Frege colocará, na maioria das vezes, nos lugares de  $a$  e  $b$  os símbolos que serão definidos na parte 3 de *Begriffsschrift*.  $a$ , às vezes, é o *definiens* e  $b$ , o *definiendum* das definições apresentadas lá. Assim, em última análise, veremos que a partir de uma definição  $a \equiv b$ , Frege deduz via  $(a \equiv b \rightarrow (f(a) \rightarrow f(b)))$  que  $a \rightarrow b$ . A volta, ou seja,  $b \rightarrow a$  é obtida via  $(a \equiv b \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a)))$ . Mostraremos isso mais tarde.

<sup>59</sup> Chateaubriand (2001) no capítulo 8 também indica algumas ambigüidades da noção de igualdade de conteúdos (com relação à noção de verdade).

$$\vdash \text{---} A$$

pois, o primeiro juízo significa que a possibilidade de *A não ser o caso* e *B ser o caso* não ocorre. Mas, o segundo juízo significa que *B é o caso*. Portanto, *A* tem de ser o caso, pois, caso contrário, contradiríamos o primeiro juízo<sup>60</sup>. Frege apresenta o *modus ponens* como a sua única regra de inferência, mas ele também usa, implicitamente, a regra de substituição<sup>61</sup>. Na §11, Frege também expressa a regra de generalização universal e utiliza-a nas derivações feitas na parte 3 de *Begriffsschrift*:

Por exemplo, ao invés de

$$\vdash X(a)$$

poderíamos colocar

$$\vdash \overset{a}{\text{---}} X(\text{---})$$

se *a* ocorre somente no lugar de argumento de *X(a)*. (Frege, 1879, §11).

Frege assume que as letras latinas minúsculas (*a, b, c, ...*) desempenharão o papel de variáveis. Às vezes, as letras do início do alfabeto (no caso, *a, b, c* e *d*) serão variáveis proposicionais (ou variáveis para conteúdos conceituais), às vezes, variáveis de argumentos (ou objectual)<sup>62</sup>. As letras *f, g, h* serão variáveis de funções. Às vezes, *f* também será uma variável de relação (no caso, binária). A letra latina maiúscula *F* será uma variável de função e será usada nas definições dadas na parte 3 de *Begriffsschrift*. As letras latinas minúsculas *x, y, z* serão variáveis de argumentos (ou objectuais).

Na primeira parte de *Begriffsschrift*, Frege apresenta e explica<sup>63</sup> os conceitos que ele toma como sendo primitivos (a primeira tarefa estipulada acima), assume símbolos adequados para expressar estes conceitos (segunda tarefa) e apre-

<sup>60</sup> Esta regra é conhecida por *modus ponens*.

<sup>61</sup> A regra de substituição para conceitos é equivalente ao axioma de compreensão de segunda ordem. Uma vez que Frege utiliza regra de substituição para conceitos, poderíamos assumir explicitamente o axioma de compreensão de segunda ordem. Assim, o sistema formal de *Begriffsschrift* pode ser tomado como um sistema de lógica de segunda ordem.

<sup>62</sup> Na verdade, isso se deve a ambigüidade da noção de identidade de conteúdo. Como veremos, apesar de parecer que *a, b, c* se comportem como variáveis de argumento, algumas deduções, que serão feitas, irão assumir que *a, b* e *c* são determinados símbolos que expressam o mesmo conteúdo conceitual, ou seja, *a, b* e *c* seriam variáveis proposicionais.

<sup>63</sup> Na tradução de Bynum (1972), o título da primeira parte foi denominado de “Definição dos Símbolos”. Claramente, Frege não define os símbolos de implicação, generalização, negação, conteúdo conceitual, mas explica o sentido no qual eles teriam de ser entendidos. O título da primeira seção em alemão é “*Erklärung der Bezeichnungen*”. *Erklärung* pode ser traduzido por definição, mas também pode ser entendido como explicação (ou esclarecimento). Os conceitos que poderiam ser definidos, segundo Frege, seriam a conjunção e a disjunção. Estes conceitos poderiam ser definidos por meio da negação e implicação. Assim, a conjunção poderia ser definida como  $\mathfrak{S}(A \rightarrow \mathfrak{S}B)$  (o caso de *A* ser o caso e *B* ser o caso é o único que ocorre) e a disjunção, como  $\mathfrak{S}A \rightarrow B$  (o caso de *A* não ser o caso e *B* não ser o caso não ocorre).

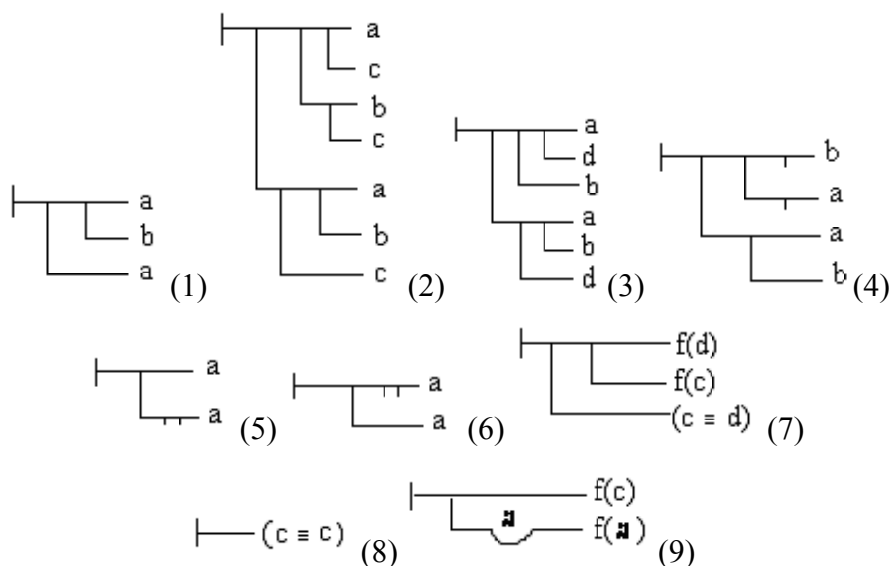
senta uma regra de inferência (a terceira tarefa). A partir dos conceitos primitivos, Frege poderá expressar as verdades lógicas ou do pensamento puro e, com a regra de inferência, deduzir outras verdades lógicas. Veremos, rapidamente, como ele faz isso na próxima seção.

## 2.4.2- AS LEIS DO PENSAMENTO

No início da parte 2 de *Begriffsschrift*, Frege escreve:

Agora neste capítulo, alguns juízos do pensamento puro que podem ser expressos na notação conceitual têm de sê-lo em símbolos. Parece natural deduzir o mais complexo destes juízos a partir de outros mais simples, não para os tornar mais certos, o que geralmente seria desnecessário, mas a fim de explicitar as relações entre os juízos. Conhecer meramente as leis não é obviamente o mesmo que entender como algumas delas estão implicitamente contidas em outras. Desta maneira, obtemos um pequeno número de leis em que (se adicionarmos as leis contidas na regra) está incluído, embora de forma embrionária, o conteúdo delas [leis] todas. E é uma vantagem do modo dedutivo de apresentação, pois nos ensina a reconhecer este núcleo [não desenvolvido] de conteúdos. Porque não podemos enumerar todo número ilimitado de leis que podem ser estabelecidas, obtemos a completude somente procurando por aquelas que, potencialmente, implicam todas as outras. (Frege, 1879, §13).

Na passagem acima, Frege expõe sua tática, a saber, identificar quais as leis lógicas mais básicas (os axiomas) e a partir destas, com a regra de inferência, obter (calcular, como diria Leibniz) leis lógicas mais complexas. Frege escolhe, para constituir seu conjunto de axiomas, as seguintes leis:





As leis acima<sup>64</sup> são combinações dos conceitos primitivos mencionados anteriormente. Por exemplo, a primeira, a segunda e a terceira leis só utilizam o conceito de implicação. A quarta, a quinta e a sexta são expressas por meio da implicação e negação. A sétima e a oitava são expressas por meio da implicação, identidade (de conteúdo), função e argumento. E, finalmente, a nona utiliza os conceitos de implicação, quantificação, função e argumento.

Estas nove leis são lógicas, segundo Frege, porque negá-las implicaria em uma contradição. Por exemplo: tome a primeira lei acima. Temos quatro possibilidades, a saber, 1)  $a$  é o caso e  $b \rightarrow a$  é o caso; 2)  $a$  é o caso e  $b \rightarrow a$  não é o caso; 3)  $a$  não é o caso e  $b \rightarrow a$  é o caso; e 4)  $a$  não é o caso e  $b \rightarrow a$  não é o caso. O juízo apresentado na primeira lei exclui a possibilidade (2), ou seja, a possibilidade de  $a$  ser o caso e  $b \rightarrow a$  não ser o caso. Assim, se assumirmos que a primeira lei não é lógica, deveríamos assumir a possibilidade (2). Contudo, se assumirmos a possibilidade (2), teremos de assumir que  $b$  é o caso e  $a$  não é o caso (isto porque  $b \rightarrow a$  não é o caso). Assim, para que a primeira lei não seja o caso,  $a$  tem de ser o caso e não ser o caso ao mesmo tempo, contradição. Em última análise, Frege justifica o caráter lógico de seus axiomas em *Begriffsschrift* sempre apelando ao princípio de não-contradição<sup>65 66</sup>.

Frege assume implicitamente algumas leis que hoje compõem a metateoria. Por exemplo, Frege assume que se  $A$  é uma lei lógica, então  $A'$ , que é obtida a partir de  $A$ , substituindo-se algumas ou todas as ocorrências das variáveis proposicionais por fórmulas, é também uma lei lógica. Por exemplo, assumamos a primeira lei, a saber,  $(a \rightarrow (b \rightarrow a))$  ( $A$ ). Se substituirmos em ( $A$ ),  $b$  por  $a \rightarrow b$ , obte-

<sup>64</sup> Em notação lógica atual: (1)  $(a \rightarrow (b \rightarrow a))$ ; (2)  $((c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)))$ ; (3)  $((d \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow (b \rightarrow (d \rightarrow a)))$ ; (4)  $((b \rightarrow a) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b))$ ; (5)  $(\neg \neg a \rightarrow a)$ ; (6)  $(a \rightarrow \neg \neg a)$ ; (7)  $((c=d) \rightarrow (f(c) \rightarrow f(d)))$ ; (8)  $(c=c)$ ; e (9)  $((x)f(x) \rightarrow f(a))$ .

<sup>65</sup> Isto é importante porque mais tarde Frege introduzirá, parece, uma outra noção de lei lógica, a saber, auto-evidência. Adiantando, Frege em "*Funktion und Begriff*" (1891) afirmará, implicitamente, que a Lei Básica V é uma lei lógica, posto que o lado direito da igualdade tem o mesmo sentido que o do lado esquerdo. Talvez Frege percebera que a Lei Básica V não preenchia a exigência estipulada em *Begriffsschrift* e até mesmo em *Die Grundlagen der Arithmetik*.

<sup>66</sup> A lei lógica (9), hoje em dia, está sendo discutida. Isto porque ela nem sempre é verdadeira. Assuma, por exemplo, que seu sistema lógico é livre e aceita termos singulares que não denotam. Portanto,  $\forall x Fx \rightarrow Fa$  não será verdadeiro se  $a$  não tem denotação. Na verdade,  $\forall x Fx \rightarrow Fa$  não será nem verdadeira nem falsa. É interessante notar que nos sistemas de lógicas atuais é assumido que o universo de discurso não é vazio, pois, caso contrário,  $\forall x Fx \rightarrow Fa$  não seria válida ou verdadeira em todos os domínios, uma vez que em um domínio vazio, ela também é nem verdadeira nem falsa.

mos então  $(a \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow a))$  ( $A'$ )<sup>67</sup>. Note que  $(a \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow a))$  é também uma lei lógica. Podemos assumir esta lei como uma regra de inferência: a regra da substituição<sup>68</sup>.

Frege também assume implicitamente que a regra de *modus ponens* preserva a *lógicidade*. Ou seja, todas as leis lógicas derivadas dos axiomas mais regras de inferência são lógicas também. Hoje há um meta-teorema que diz que se  $A$  é uma tautologia e  $A \rightarrow B$  é uma tautologia, então  $B$  é uma tautologia, isto é, a regra de *modus ponens* preserva a *tautologicidade*<sup>69 70</sup>.

Ele também assume implicitamente uma regra de substituição de funções. Por exemplo, tome a lei lógica (9), a saber,  $\forall x Fx \rightarrow Fa$ . Poderíamos substituir  $f(A)$  por  $(h(A) \rightarrow (g(A) \rightarrow f(A)))$ . Assim, obteríamos  $\forall x (h(x) \rightarrow (g(x) \rightarrow f(x))) \rightarrow (h(a) \rightarrow (g(a) \rightarrow f(a)))$ . Como indicamos em uma nota, a regra de substituição para conceitos é equivalente ao axioma de compreensão de segunda ordem (na verdade, um esquema de axioma) que pode ser posto nos seguintes termos:  $\exists R^n \forall x_1, \dots, x_n (R^n x_1, \dots, x_n \leftrightarrow A(x))$ , onde  $A$  é qualquer fórmula e  $R$  não ocorre livre em  $A$ .

O sistema lógico apresentado em *Begriffsschrift* interpretado como um sistema lógico de segunda ordem e com o axioma da compreensão impredicativo é um sistema lógico adequado para a derivação dos axiomas da aritmética de Dedekind-Peano. Na próxima seção, apresentaremos as definições lógicas de *ordenação-em-uma-seqüência* e discutiremos a derivação de alguns teoremas a partir das definições e leis lógicas.

### 2.4.3 - REDUÇÃO DO CONCEITO DE ORDENAÇÃO-EM-UMA-SEQÜÊNCIA AO CONCEITO DE IMPLICAÇÃO LÓGICA

Como dissemos na seção 2.4, o objetivo central de Frege em *Begriffsschrift* era mostrar que o conceito de uma *ordenação-em-uma-seqüência* poderia ser reduzido ao conceito de *implicação lógica*. Nesta subseção, apresentaremos estas definições e discutiremos uma questão relacionada à identidade de conteúdo.

<sup>67</sup> Poderíamos substituir todas as ocorrências de variáveis em  $(a \rightarrow (b \rightarrow a))$ .

<sup>68</sup> Esta regra vale para as primeiras seis leis que compõem o cálculo proposicional.

<sup>69</sup> Não é difícil provar isto: assumamos que  $A$  e  $A \rightarrow B$  são tautologias e  $B$  não é uma tautologia. Se  $B$  não é uma tautologia,  $B$  é falso para alguma valoração. Mas, uma vez que  $B$  é falso para alguma valoração e  $A$  é uma tautologia, então na valoração em questão  $A \rightarrow B$  é falso. Portanto, se  $B$  não é uma tautologia, então  $A \rightarrow B$  não é uma tautologia, contrariando a hipótese.

<sup>70</sup> Isto vale para as seis primeiras leis que compõem o cálculo proposicional.

As quatro definições de conceitos matemáticos (no caso, conceitos da aritmética) a partir das quais, juntamente com as leis lógicas (apresentadas na parte 2), são obtidos outros conceitos matemáticos bastante interessantes são (na notação conceitual) <sup>71</sup>:

$$(1) \quad \left( \begin{array}{c} \text{Diagram: } \left[ \begin{array}{l} \text{--- } \mathbf{b} \text{--- } \mathbf{a} \text{---} \\ \text{--- } \mathbf{a} \text{---} \\ \text{--- } \mathbf{b} \text{---} \end{array} \right. \begin{array}{l} F(\mathbf{a}) \\ f(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \\ F(\mathbf{b}) \end{array} \end{array} \right) \equiv \begin{array}{c} \delta \quad F(\alpha) \\ \left| \right. \\ \alpha \quad f(\delta, \alpha) \end{array} \end{array} \right)$$

$$(2) \quad \left( \begin{array}{c} \text{Diagram: } \left[ \begin{array}{l} \text{--- } \mathbf{f} \text{---} \\ \text{--- } \mathbf{a} \text{---} \\ \text{--- } \mathbf{y} \text{---} \\ \text{--- } \mathbf{x} \text{---} \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{a}) \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \\ \delta \quad \mathbf{f}(\alpha) \\ \left| \right. \\ \alpha \quad f(\delta, \alpha) \end{array} \end{array} \right) \equiv \begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_\mathbf{y}, \mathbf{y}_\mathbf{\beta}) \end{array} \end{array} \right)$$

$$(3) \quad \left( \begin{array}{c} \text{Diagram: } \left[ \begin{array}{l} \text{--- } (z \equiv x) \text{---} \\ \text{--- } \mathbf{y} \text{---} \\ \text{--- } \mathbf{z} \text{---} \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{f}(\mathbf{x}_\mathbf{y}, \mathbf{z}_\mathbf{\beta}) \end{array} \end{array} \right) \equiv \begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_\mathbf{y}, \mathbf{z}_\mathbf{\beta}) \end{array} \end{array} \right)$$

$$(4) \quad \left( \begin{array}{c} \text{Diagram: } \left[ \begin{array}{l} \text{--- } \mathbf{e} \text{--- } \mathbf{b} \text{--- } \mathbf{a} \text{---} \\ \text{--- } \mathbf{a} \text{---} \\ \text{--- } \mathbf{b} \text{---} \\ \text{--- } \mathbf{e} \text{---} \end{array} \right. \begin{array}{l} (\mathbf{a} \equiv \mathbf{e}) \\ f(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \\ f(\mathbf{b}, \mathbf{e}) \end{array} \end{array} \right) \equiv \begin{array}{c} \delta \\ \mathbf{I} \quad f(\delta, \epsilon) \\ \epsilon \end{array} \end{array} \right)$$

Antes de explicarmos o significado dos símbolos acima, faremos algumas observações gerais sobre estas definições. Primeiramente, note que no lado esquerdo do símbolo “ $\equiv$ ” há somente os símbolos que foram introduzidos para representar os conceitos primitivos (implicação, negação, quantificação, função, relação). E no lado direito, há símbolos que não foram introduzidos anteriormente. Além disso, aparece no início de cada definição o símbolo

<sup>71</sup> As definições a seguir são apresentadas nas seções 24, 26, 29 e 31 de *Begriffsschrift*, respecti-



Este símbolo, diferente do símbolo de juízo, não indica que o conteúdo que se segue está sendo julgado, mas sim estipulado. Assim, poderíamos traduzir este símbolo por “seja de agora em diante tal coisa”. Em última análise, as definições acima estipulam que os símbolos que ocorrem à direita do símbolo de igualdade (de conteúdos) têm o mesmo conteúdo conceitual que os símbolos que ocorrem à esquerda do símbolo de identidade (de conteúdos)<sup>72</sup>. E uma vez que uma definição é uma estipulação, então, segundo Frege, nenhum juízo é feito (em particular, nenhum juízo sintético). Contudo, somente juízos entram na cadeia de deduções e, portanto, Frege tem de transformar a estipulação acima em um juízo. Segundo Frege, uma vez que é estipulado que ambos os símbolos que ocorrem à direita e à esquerda de “ $\equiv$ ” têm o mesmo conteúdo conceitual, então seu sentido é fixado e, portanto, esta estipulação pode ser transformada em um juízo e, neste caso, um juízo analítico (pois foi estabelecido que tais símbolos representam o mesmo conteúdo conceitual). Assim, segundo Frege, uma vez que as definições são transformadas em juízos analíticos, segue-se então que os juízos derivados das definições juntamente com as leis lógicas (segundo as regras de inferências apresentadas) são também analíticos. Frege interpreta, parece, a noção de identidade (de conteúdos) como relacionando os nomes dados aos conteúdos e não os próprios conteúdos para mostrar que suas definições são analíticas. Se a identidade (de conteúdos) relacionasse os próprios conteúdos, então um Kantiano poderia reivindicar que o juízo apresentado nas definições seria sintético. Na §8, temos algumas evidências textuais<sup>73</sup>.

Examinemos agora as definições individualmente. A primeira definição pode ser traduzida em palavras assim: “para todo objeto **b**, se **b** tem a propriedade F, então para todo objeto **a**, se **a** está na relação f com **b**, então **a** tem a propriedade F”. Frege define em (1) a relação de hereditariedade. Podemos entender a definição (1) como afirmando que a propriedade F é hereditária na relação f, quando F e

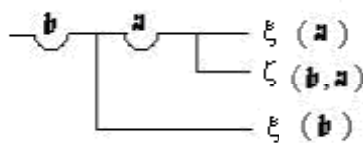
---

vamente.

<sup>72</sup> Poderíamos entender também as definições de Frege da seguinte maneira: o símbolo que ocorre à direita do símbolo de igualdade de conteúdo é uma abreviação do símbolo que ocorre à esquerda.

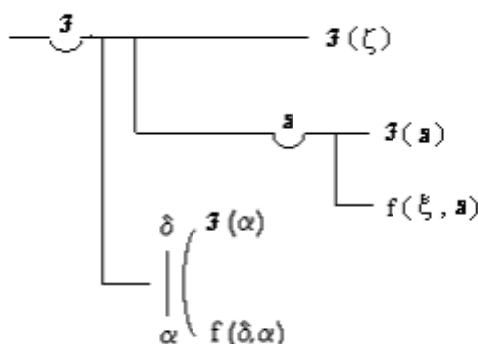
<sup>73</sup> “Mas, o juízo requer, para sua expressão, um símbolo para identidade de conteúdos no intuito de combinar dois nomes. Segue-se disto que diferentes nomes para o mesmo conteúdo nem sempre são meramente uma questão indiferente de forma; mas, ao contrário, se eles são associados a diferentes modos de determinação, eles atingem o coração da questão. Neste caso, o juízo para identidade de conteúdo é sintético no sentido Kantiano”.(Frege, 1879, §8).

$f$  satisfazem a condição estabelecida acima. Frege está definindo a seguinte relação de segunda ordem (na sua notação conceitual)



sob a qual caem pares ordenados do tipo  $\langle F, f \rangle$ <sup>74</sup> ( $F$  sendo uma propriedade,  $f$  uma relação). Na notação lógica atual, a definição da relação de hereditariedade poderia ser dada assim:  $\forall b \forall a (Fb \ \& \ bfa \rightarrow Fa) \equiv Her(F, f)$  (onde,  $Her(F, f)$  significa que  $F$  é hereditária na relação  $f$ ).

A segunda definição é a do “ancestral forte”. Em palavras, ela diz que “para toda propriedade  $\mathfrak{F}$ , se  $\mathfrak{F}$  é hereditária em uma relação  $f$  e se para todo objeto  $a$ , se  $a$  está na relação  $f$  com um objeto qualquer  $x$ , então  $a$  tem a propriedade  $\mathfrak{F}$ , então um objeto qualquer  $y$  tem a propriedade  $\mathfrak{F}$ ”. Em outras palavras, podemos dizer que “ $y$  se segue após  $x$  na relação  $f$ ”. Aqui, Frege está definindo a relação de primeira ordem *seguir-se após em uma relação  $f$*  sob a qual caem pares ordenados de objetos  $\langle x, y \rangle$ . Na notação conceitual de Frege, este conceito seria



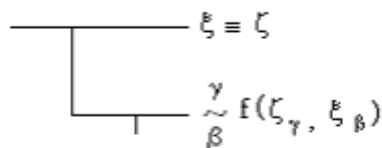
Na notação lógica atual, a definição desta relação poderia ser:  $\forall \mathfrak{F} ((Her(\mathfrak{F}, f) \ \& \ \forall a (f(x, a) \rightarrow \mathfrak{F}a)) \rightarrow \mathfrak{F}y) \equiv x f^* y$ <sup>75</sup> (onde,  $x f^* y$  significa que  $y$  se segue após  $x$  na seqüência  $f$  ou então, se preferir,  $x$  precede  $y$  na seqüência  $f$ ).

A terceira definição é a definição do “ancestral fraco”. Poderíamos ler esta definição como se segue: “ou  $z$  se segue após  $x$  em uma relação  $f$  ou  $z$  é igual a

<sup>74</sup> Os símbolos “ $\xi$ ” e “ $\zeta$ ” indicam os lugares dos argumentos.

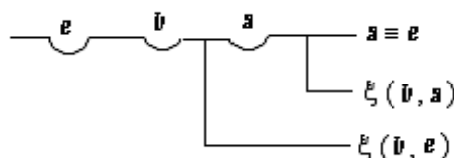
<sup>75</sup> Frege não estipula, em *Begriffsschrift*, a quantificação sobre propriedades. O conceito de quantificação é uma função de segunda ordem sob o qual caem funções de primeira ordem (em *Begriffsschrift*). Contudo, quando chegamos a este ponto, vemos que, em realidade, o conceito de quantificação é uma função de segunda ordem em diante. No caso da definição (2), temos um conceito de segunda ordem caindo sob o conceito de terceira ordem representado por  $\forall F \dots \phi \dots$ . Não sabemos dizer se, em *Begriffsschrift*, Frege tinha percebido este fato.

$x$ ". Aqui, Frege está definindo a relação de primeira ordem *pertencer a uma seqüência f iniciada por*<sup>76</sup> sob a qual caem pares de objetos  $\langle x,y \rangle$ . Na notação conceitual de Frege, este conceito seria representado por



Na notação lógica atual, poderíamos definir esta relação como se segue:  $(xf*z \vee x=z) \equiv xf^*z$  (onde  $xf^*z$  significa:  $z$  se segue após  $x$  na seqüência  $f$  ou  $z$  é igual a  $x$ ). Aqui há um problema interpretativo. Frege explicou que o símbolo de igualdade de conteúdo não relaciona conteúdos conceituais, mas sim nomes dados a estes conteúdos. A questão é que na definição do “ancestral fraco”, o símbolo “ $\equiv$ ” funciona como uma igualdade que relaciona dois objetos e não os nomes desses objetos<sup>77</sup>.

Finalmente, a quarta definição é a definição de função. Em palavras, esta definição nos diz que “para todo objeto  $e$ ,  $b$  e  $a$ , se  $e$  está na relação  $f$  com  $b$  e  $a$  está na relação  $f$  com  $b$ , então  $a$  é igual a  $e$ ”. Aqui, é definido então uma propriedade de segunda ordem *funcionalidade* sob a qual caem relações de primeira ordem (satisfazendo, é claro, a condição estabelecida acima)<sup>78</sup>. Esta propriedade pode ser representada na notação conceitual assim



Na notação lógica atual, poderíamos definir esta propriedade da seguinte maneira:  $\forall e \forall b \forall a (bfe \ \& \ bfa \rightarrow a=e) \equiv F(f)$  (onde  $F(f)$  significa  $f$  é uma função)<sup>79</sup>.

Apresentado o significado das quatro definições de Frege, agora pretendemos discutir a questão que sustentamos em uma nota e na subseção 2.4.1. Lá,

<sup>76</sup> Mais adiante veremos que esta relação desempenhará um papel importante na definição de número natural.

<sup>77</sup> Depois, em *Über Sinn und Bedeutung* (1892), Frege tratará o símbolo “ $\equiv$ ” como sendo o símbolo de igualdade ordinário. Para isso, Frege foi obrigado a fazer a distinção entre o sentido e a referência de um nome (próprio).

<sup>78</sup> As funções são relações de um tipo especial, ou seja, uma função é uma relação que satisfaz o seguinte requisito: todo elemento que pertence ao domínio da função está relacionado a um e somente um elemento do contra-domínio.

afirmamos que Frege, na parte 2 de *Begriffsschrift*, apresenta como uma lei lógica primitiva (axioma) a seguinte fórmula  $(a \equiv b \rightarrow (f(a) \rightarrow f(b)))$  (a fórmula (7), na subseção 2.4.2). Como dissemos, esta lei parece tratar o símbolo “ $\equiv$ ” como expressando a identidade no sentido ordinário. Contudo, como também dissemos, “ $\equiv$ ” é tratado por Frege (§8) como expressando uma identidade entre símbolos, e não entre objetos. A questão é que Frege ora toma esta lei (e as leis derivadas dela) no primeiro sentido, ora no segundo sentido. Exemplificaremos: na §25 de *Begriffsschrift*, Frege apresenta a seguinte dedução:

- (1) assumo a primeira definição, no caso,  $\forall b \forall a (Fb \ \& \ bfa \rightarrow Fa) \equiv \text{Her}(F, f)$ .
- (2) assumo a lei lógica básica 7, ou seja,  $(a \equiv b \rightarrow (f(a) \rightarrow f(b)))$ <sup>80</sup>.
- (3) agora, substitua  $a$  por  $\forall b \forall a (Fb \ \& \ bfa \rightarrow Fa)$ ,  $b$  por  $\text{Her}(F, f)$  e  $f(\Delta)$  por  $\Delta$ <sup>81</sup>.
- (4) obtemos então:  $(\forall b \forall a (Fb \ \& \ bfa \rightarrow Fa) \equiv \text{Her}(F, f)) \rightarrow (\forall b \ \forall a \ (Fb \ \& \ bfa \rightarrow Fa) \rightarrow \text{Her}(F, f))$ .
- (5) Portanto, aplicando *modus ponens* entre (1) e (4), obtemos:  $(\forall b \forall a (Fb \ \& \ bfa \rightarrow Fa) \rightarrow \text{Her}(F, f))$ <sup>82</sup>.

Neste caso, esta lei se assemelha bastante com a seguinte lei do cálculo proposicional:  $((a \leftrightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b))$ . Vale dizer que a lei lógica  $(a \equiv b \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a)))$  (derivada da lei lógica básica 7) também é utilizada de uma maneira análoga (§29):

- (1) assumo a terceira definição dada acima (ancestral fraco), isto é,  $(xf^*z \vee x=z) \equiv xf^*z$
- (2) assumo também a lei lógica  $a \equiv b \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a))$ <sup>83</sup>.
- (3) substitua  $a$  por  $(xf^*z \vee x=z)$ ,  $b$  por  $xf^*z$  e  $f(\Delta)$  por  $\Delta$ .
- (4) obtemos então  $((xf^*z \vee x=z) \equiv xf^*z) \rightarrow ((xf^*z) \rightarrow (xf^*z \vee x=z))$ .
- (5) Aplicando *modus ponens* entre (1) e (4), temos  $(xf^*z) \rightarrow (xf^*z \vee x=z)$ .

Ou seja, a lei  $(a \equiv b \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a)))$  parece desempenhar o papel da seguinte lei lógica do cálculo proposicional:  $(a \leftrightarrow b \rightarrow (b \rightarrow a))$ . Há uma evidência em *Begriffsschrift* na qual poderíamos tomar Frege como interpretando “ $\equiv$ ” no sentido de uma equivalência quando ele escreve o seguinte no prefácio deste livro:

Notei somente depois que as fórmulas (31)[55a  $\rightarrow$  a] e (41) [a  $\rightarrow$  55a] poderiam ser combinadas em uma única fórmula

$$\vdash (\top \top \ a \equiv a)$$

<sup>79</sup> Aqui, novamente, “ $\equiv$ ” teria de ser interpretado como a identidade no sentido ordinário.

<sup>80</sup> Aqui, coloquei o “ $f$ ” em itálico para que o mesmo não seja confundido com o “ $f$ ” que aparece na expressão  $\forall b \forall a (Fb \ \& \ bfa \rightarrow Fa) \equiv \text{Her}(F, f)$ .

<sup>81</sup> Isto significa que  $f(\Delta)$  é substituída pelo seu próprio argumento, assim  $f(a)=a$  e, no caso em questão,  $f(a)= \forall b \forall a (Fb \ \& \ bfa \rightarrow Fa)$ . O mesmo vale para  $f(b)$ .

<sup>82</sup> Sua numeração em *Begriffsschrift* é (75).

<sup>83</sup> Sua numeração em *Begriffsschrift* é (57).

que possibilitaria, até mesmo, mais simplificações. (Frege, 1879, Prefácio)<sup>84</sup>.

Por outro lado, na derivação da proposição 92, a saber,  $(x \equiv z \rightarrow (x f y \rightarrow z f^* y))$  (se  $x$  é igual a  $z$  e  $y$  está na relação  $f$  com  $x$ , então  $y$  se segue após  $z$  na relação  $f$ ), Frege utiliza a lei lógica  $(f(c) \rightarrow ((c \equiv d) \rightarrow f(d)))$ <sup>85</sup> (derivada da lei básica 7) como uma lei que rege a identidade de objetos. Vejamos porque:

- 1) vamos assumir, como Frege faz, a proposição 91, a saber,  $x f y \rightarrow x f^* y$  (ou seja, *se  $y$  está na relação  $f$  com  $x$ , então  $y$  se segue após  $x$  na relação  $f$* ).
- 2) tome agora a lei  $f(c) \rightarrow (c \equiv d \rightarrow f(d))$  (proposição 53 em *Begriffsschrift*).
- 3) substitua  $c$  por  $x$ ,  $d$  por  $z$  e  $f(\Delta)$  por  $x f y \rightarrow \Delta f^* y$ <sup>86</sup>.
- 4) obtemos assim a seguinte proposição:  $(x f y \rightarrow x f^* y) \rightarrow (x \equiv z \rightarrow (x f y \rightarrow z f^* y))$ .
- 5) Aplicando *modus ponens* entre (1) e (4), chegamos à proposição  $x \equiv z \rightarrow (x f y \rightarrow z f^* y)$  (92).

Note que agora Frege considera  $f$  (na proposição 53) como sendo uma função de primeira ordem (no caso, a função  $x f y \rightarrow \xi f^* y$ ) sob a qual caem objetos. Assim,  $c \equiv d$  tem de ser interpretado, na proposição (53), como expressando a identidade ordinária entre dois objetos. Essa ambigüidade será dissipada em “*Über Sinn und Bedeutung*”, uma vez que Frege considerará os valores de verdade como objetos. Esta consideração juntamente com a distinção entre sentido e referência e a interpretação de “ $\equiv$ ” como significando o sinal de identidade ordinário, permitirá uma interpretação inequívoca da lei básica (7) e das leis derivadas a partir dela. Há ainda outras questões em *Begriffsschrift*, mas infelizmente não as discutiremos aqui.

Para finalizar esta seção, apresentaremos duas proposições que, acreditamos, Frege consideraria como paradigmas de que a aritmética não necessita da intuição para provar suas proposições. Elas são as proposições (98) e (133) (numeração de *Begriffsschrift*). A proposição (98) é  $x f^* y \rightarrow (y f^* z \rightarrow x f^* z)$  e afirma que a relação *ancestral forte* é transitiva. Podemos ler a proposição 98 assim: *se  $y$  se segue após  $x$  na relação  $f$  e se  $z$  se segue após  $y$  na relação  $f$ , então  $z$  se segue*

<sup>84</sup> Devemos esta observação a Chateaubriand (2001), capítulo 8.

<sup>85</sup> Sua numeração em *Begriffsschrift* é (53).

<sup>86</sup> Frege comete um erro aqui, parece, pois ele substitui  $c$  por  $z$  e  $d$  por  $x$ . Contudo, nesta substituição, é obtida a seguinte proposição:  $(f(x, y) \rightarrow z f^* y) \rightarrow (z \equiv x \rightarrow f(x, y) \rightarrow x f^* y)$ .



após  $x$  na relação  $f$  <sup>87</sup>. A proposição (133) é  $(F(f) \rightarrow (xf^*m \rightarrow (xf^*y \rightarrow (yf^*m \vee mf^*y \vee m=y))))$ . Esta proposição indica que se uma relação  $f$  é funcional, então a relação  $f$  conecta quaisquer dois objetos  $m$  e  $y$  que estão na relação de ancestralidade  $f$  com  $x$ . Em palavras, a proposição 133 afirma que *se a relação  $f$  é funcional (ou uma função), e se  $m$  se segue após  $x$  na relação  $f$ , e se  $y$  se segue após  $x$  na relação  $f$ , então ou  $m$  se segue após  $y$  na relação  $f$  ou  $y$  se segue após  $m$  na relação  $f$  ou  $m$  é igual a  $y$* <sup>88</sup>.

## 2.5- DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK

Frege, no último parágrafo de *Begriffsschrift*, escreve:

A aritmética, como disse no início, foi o ponto de partida da cadeia de pensamento que me levou a minha notação conceitual. Portanto, pretendo aplicá-la a esta ciência, tentando analisar seus conceitos e fornecer um fundamento mais profundo para seus teoremas. Aqui, apresento no terceiro capítulo algumas coisas que se movem nesta direção. Além disso, o prosseguimento do caminho sugerido, a elucidação dos conceitos de número, magnitude e assim por diante, deve constituir o assunto de outras investigações que produzirei imediatamente após este livro. (Frege, 1879, Prefácio).

Estas investigações demoraram cinco anos, quando Frege publicou *Die Grundlagen der Arithmetik*. É interessante notar que o tom de Frege na citação acima sugere que ele já tinha em mente o rumo de suas pesquisas sobre o conceito de número e magnitude. Por que Frege demorou tanto para publicar o *Die Grundlagen der Arithmetik*? Esta questão tem uma importância mais histórica do que filosófica e uma resposta para ela é totalmente especulativa. Contudo, acreditamos que vale a pena uma pequena discussão. Gostaríamos de levantar três possíveis respostas: (1) a primeira é que esta passagem era totalmente retórica e, na verdade, Frege ainda não tinha em mente como se dariam estas investigações, e por isso a demora na publicação do livro; (2) a segunda, apresentada por Bynum (1972), é que Frege realmente já tinha traçado a sua análise do conceito de número e pretendia executá-la logo após a publicação de *Begriffsschrift*, mas devido à pequena receptividade deste livro, ele foi obrigado a adiar seu objetivo no intuito

<sup>87</sup> O uso de *seguir-se após* não significa que estamos usando a noção de tempo aqui, mas infelizmente é difícil traduzir para a linguagem ordinária o que exatamente a proposição diz.

<sup>88</sup> Note que dessa proposição é possível obter o princípio de tricotomia para números naturais (basta interpretar a relação  $f$  convenientemente): dado dois números naturais  $a$  e  $b$  ou  $a < b$  ou  $b < a$  ou  $a = b$ .

de responder às críticas levantadas à sua notação conceitual<sup>89</sup>. A resposta de Bynum parece plausível, uma vez que Frege publicou, em revistas especializadas, entre os anos de 1880-2, alguns artigos defendendo a sua notação conceitual<sup>90</sup>; (3) a terceira resposta está fundamentada textualmente. Frege não só tinha em mente o rumo de sua pesquisa sobre o conceito de número, como também a executou antes do ano de 1884. Há uma passagem em uma carta que Frege enviou a Anton Marty em 29 de agosto de 1882 que fundamenta tal resposta:

Caro Colega,

Vossa carta cordial me deixou muito feliz, ainda mais que, até agora, encontrei muito pouca concordância. Eu gostaria de vos dar mais algumas informações sobre minha *Begriffsschrift*, na esperança de que vós., talvez, tenhais a oportunidade de mencioná-la em algum periódico. Isto tornaria mais fácil para que eu publicasse outros trabalhos. Agora, eu estou quase completando um livro no qual eu trato do conceito de número cardinal [*Anzahl*] e demonstro que os primeiros princípios sobre contar os números [*ersten Sätze über das Zählen der Zahl*], que até agora foram considerados, em geral, como axiomas indemonstráveis, podem ser provados a partir de definições por meio de leis lógicas somente, de maneira que estes princípios podem ser considerados como juízos analíticos no sentido de Kant. (Frege, 1976, pág. 163 (1980, pág. 99)).

A passagem acima sugere que Frege, em 1882, já tinha escrito grande parte de *Die Grundlagen der Arithmetik*. Mas por que ele ainda demorou dois anos para publicá-lo? Uma outra passagem desta carta parece elucidar a questão:

Eu me encontro em um círculo vicioso: antes que as pessoas dêem atenção à minha notação conceitual, elas querem ver o que eu posso fazer com ela e eu, por sua vez, não posso mostrar isto sem pressupor uma familiaridade com a minha notação conceitual. Assim, parece que dificilmente contarei com qualquer leitor para o livro que mencionei no início [da carta]. (Frege, 1976, pág. 165 (1980, pág. 102)).

A passagem acima sugere que Frege não publicou seu *Die Grundlagen der Arithmetik* porque tinha receio de que ninguém o leria. A passagem também insinua que o suposto livro fora escrito na notação conceitual, senão seu temor não teria sentido. Vale mencionar que onze dias após enviar a carta a Anton Marty, Frege, em 9 de setembro de 1882, recebeu uma carta de Carl Stumpf na qual ele sugere que Frege escrevesse um livro na linguagem ordinária, explicando sua li-

<sup>89</sup> Uma das críticas principais, uma crítica levantada por Schröder (1880), era que já existia uma linguagem formal, a de Boole, em voga e a mesma já era suficiente para representar as leis do pensamento (ou da lógica). É interessante mencionar que Frege não faz nenhuma referência a Boole no seu primeiro livro. É sugerido que Frege não conhecia o seu trabalho antes de *Begriffsschrift* e somente depois das críticas ele se familiarizou com a lógica Booleana.

<sup>90</sup> Por exemplo, “*Über den Zweck der Begriffsschrift*” (1882-3) e “*Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift*” (1882). Além disso, Frege tentou publicar, sem sucesso, o

nha de raciocínio e, então, no mesmo livro ou em um livro posterior pusesse suas idéias na notação conceitual. Esta sugestão parece ter sido seguida por Frege (Frege, 1976, pág.256 (1980, pág. 171)). Assim, apesar de ser uma especulação, parece plausível, dadas estas evidências textuais, que Frege já tinha escrito grande parte de *Die Grundlagen der Arithmetik* em 1882 (na sua notação conceitual), não o publicou por receio de que este livro tivesse uma pequena aceitação (como ocorrera com *Begriffsschrift*) e Frege o publicou somente em 1884 depois de reescrever o seu conteúdo na linguagem ordinária (seguindo a sugestão de Carl Stumpf). Novamente especulando, o livro escrito na notação conceitual em 1882 talvez seja o livro que Frege teve de descartar depois da introdução dos valores de verdade como objetos e da distinção entre sentido e referência<sup>91</sup>.

Depois desta pequena digressão, voltemos a nossa atenção para *Die Grundlagen der Arithmetik*. O objetivo central de Frege neste livro é formular o conceito de número em termos puramente lógicos, na intenção de executar seu programa logicista que começara em *Begriffsschrift*. Geralmente, *Die Grundlagen der Arithmetik* é dividido em duas partes, a primeira (introdução até §44) é dita ser essencialmente negativa nos seus objetivos. Frege apresenta, discute e refuta uma série de opiniões referentes à natureza das proposições da aritmética, ao conceito de número cardinal, e à noção de unidade. Mas, na verdade, a primeira parte também tem um aspecto positivo. Frege, ao refutar uma determinada opinião, implicitamente estabelece a sua. Infelizmente, não discutiremos estes aspectos da primeira parte de *Die Grundlagen der Arithmetik*, pois nos tomaria muito tempo e espaço. Contudo, gostaríamos de indicar ao leitor, algumas teses positivas implicitamente defendidas lá por Frege. Nas §§5-17, Frege argúi implicitamente em favor da provabilidade das fórmulas numéricas e, além disso, ele simpatiza com a maneira de definição dos números individuais de Leibniz<sup>92</sup>. É claro que, como ele mesmo diz, é necessária uma lei geral para provar as fórmulas numéricas a partir dessas definições<sup>93</sup>. E esta lei geral tem de ser lógica, uma vez que, como disse-

---

artigo “*Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift*” (1880-1) e “*Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift*” (1882b).

<sup>91</sup> Mesmo escrito na linguagem ordinária, *Die Grundlagen der Arithmetik* teve uma pequena recepção. Tal fato deve ter levado Frege a adiar a publicação do livro em notação conceitual.

<sup>92</sup> Leibniz define os números da seguinte maneira:  $2=1+1$ ;  $3=2+1$ ;  $4=3+1$  etc. Em geral, Leibniz define os números individuais a partir de 1 e do acréscimo de um.

<sup>93</sup> Uma lei geral é necessária pela seguinte razão: não podemos provar as fórmulas numéricas somente a partir das definições. Leibniz, implicitamente, assume a associatividade da adição ( $a+(b+1)=(a+b)+1$ ). É claro que poderíamos considerar esta lei como sendo um axioma. Mas, para

mos acima, seu objetivo é mostrar que a aritmética pode ser reduzida à lógica. Nas §§18-44, Frege estabelece que o conceito de número cardinal (*Anzahl*) tem de ser um conceito geral (e também lógico), pois é a partir dele que será obtida a lei geral mencionada acima (§18)<sup>94 95</sup>. Frege também estabelece implicitamente o resultado que ele considerará como sendo o mais importante de *Grundlagen der Arithmetik*, a saber, que uma atribuição numérica contém uma predicação de um conceito<sup>96</sup> (Cf. §22). Tal resultado é alcançado através de sua discussão sobre se o número cardinal é uma propriedade de objetos ordinários (objetos exteriores, como mesa, livro etc). Como o próprio Frege diz, uma mesma coleção de objetos ordinários pode ter diferentes números. O que muda não é a coleção, mas sim a nossa maneira de concebê-la<sup>97</sup>. Frege também obtém este mesmo resultado quando considera o número cardinal como sendo uma coleção de unidades (defendida já por Euclides nos *Elementos*). Segundo Frege, tal noção apresenta duas características contraditórias. Uma é que todas as unidades são iguais entre si; a outra que as mesmas têm de ser distinguidas de alguma forma para se obter o número cardi-

---

o objetivo de Frege, ter-se-ia de mostrar que a associatividade da adição é uma lei lógica, caso contrário seu programa logicista fracassaria. Frege então defenderá a existência de uma lei geral lógica que desempenha um papel análogo da associatividade da adição. E a partir dela, mais as definições individuais dos números é possível provar as fórmulas numéricas.

<sup>94</sup> Frege escreve: “Agora, ao considerar os objetos primários da aritmética, devemos distinguir entre os números individuais 3, 4 e assim por diante e o conceito geral de número cardinal. Já decidimos em favor da visão que os números individuais são derivados da melhor maneira, segundo o procedimento de Leibniz, Mill, H. Grassmann e outros, do número um e do aumento de um, mas estas definições permanecem incompletas na medida em que o número um e o aumento de um estão indefinidos. Vimos também que precisamos de proposições gerais [§§6-7] se temos de derivar fórmulas numéricas destas definições. Por causa de sua generalidade, tais leis não podem se seguir das definições dos números individuais, mas somente do conceito geral de número cardinal”. (Frege, 1884, §18).

<sup>95</sup> É interessante mencionar que esse é realmente o procedimento de Frege. A partir da terceira definição de número cardinal, Frege prova o Princípio de Hume (a lei geral), e a partir deste, ele esboça provas dos axiomas da aritmética.

<sup>96</sup> Aqui, seguimos a tradução de Mattias Schirn (1996b). Dummett (1991) traduz assim: “o conteúdo de uma atribuição numérica consiste em predicar algo de um conceito”. (Dummett, 1991, 88).

<sup>97</sup> Frege escreve: “Baumann rejeita a posição de que números são conceitos extraídos das coisas externas: ‘A razão é que coisas externas não se apresentam para nós com qualquer unidade estrita; elas se apresentam como grupos isolados ou pontos sensíveis, mas temos a liberdade para tratar cada uma delas novamente como muitas’. É totalmente verdadeiro que, enquanto não estou em posição de alterar a cor ou a dureza de uma coisa simplesmente pensando-a de um modo diferente, sou capaz de pensar na *Iliada* ou como um poema ou como 24 livros ou como um grande número cardinal de versos. Os sentidos não são diferentes quando falamos que uma árvore tem mil folhas de quando falamos que a mesma tem folhas verdes? Atribuímos a cada folha particular a cor verde, mas não lhe atribuímos o número 1000. Se chamarmos todas as folhas de uma árvore de sua folhagem, então a folhagem é verde, mas a folhagem não é 1000. A propriedade 1000 pertence ao quê então?”. (Frege, 1884, §22).

nal<sup>98</sup>. A concepção acima mencionada, a saber, que uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito, unifica, na visão de Frege, satisfatoriamente as duas características contraditórias acima, uma vez que, grosso modo, um conceito tem um critério de aplicação e, portanto, o conceito informa a “unidade” em questão (no caso, a unidade são os objetos que caem sob o conceito). Por outro lado, alguns conceitos (no caso, os conceitos sortais<sup>99</sup>), a princípio, têm um critério de identidade que se aplica aos objetos que caem sob ele. Dessa forma é possível considerar as “unidades” do conceito como sendo diferentes<sup>100</sup>. Assim, segundo Frege, o conceito (sortal) nos dá a “unidade” e os meios para distinguir estas “unidades”.

A segunda parte de *Die Grundlagen der Arithmetik* (§§45-109) é considerada positiva, uma vez que Frege, a partir da sua discussão apresentada nas primeiras seções, constrói a sua própria concepção de número e apresenta o esboço de provas de teoremas da aritmética.

Depois dessa breve discussão dos resultados implicitamente obtidos por Frege na primeira parte, apresentaremos e discutiremos, rapidamente, a noção de número como objeto que é defendida por Frege, o princípio do contexto e as §§46-83 de *Die Grundlagen der Arithmetik*.

### 2.5.1- NÚMERO COMO OBJETO

Como já afirmamos exaustivamente, o objetivo de Frege é mostrar que a aritmética dos números naturais é analítica, e para isso Frege pretende reduzi-la à lógica. Uma questão central para Frege é, portanto, provar a existência de infinitos números naturais por meios puramente lógicos. Nesta prova, a concepção de nú-

<sup>98</sup> Como Frege mostra, vários matemáticos, tentando superar esta dificuldade, aproximaram-se de uma visão formalista da matemática, tomando os numerais como sendo os próprios números. Jevons (ver §§36-8 de *Die Grundlagen der Arithmetik*), por exemplo, propõe a seguinte solução, a saber, tomar todas as unidades como 1 e colocando o sinal ' para diferenciá-las. Assim, três seria  $1+1'+1''$ . Mas, também poderia ser:  $1'''+1''''+1''''''$ . Portanto, na versão de Jevons, teríamos inúmeros números três.

<sup>99</sup> Discutiremos a noção de um conceito sortal em 3.

<sup>100</sup> Quase sempre os conceitos sortais não têm os dois critérios bem definidos. Por exemplo, tome o conceito de pessoa. Este conceito parece ter um bom critério de aplicação, uma vez que uma cadeira não é uma pessoa, um livro não é uma pessoa, em geral, é possível distinguir uma coisa que é pessoa de uma outra coisa que não é pessoa. Assim temos a nossa “unidade”. Contudo, o conceito de pessoa não parece ter um bom critério de identidade. Quando uma pessoa é a mesma que uma outra e quando ela é diferente?

mero (cardinal)<sup>101</sup> como objeto desempenhará um papel fundamental, como veremos quando discutirmos as §§45-83. Aqui, discutiremos quais são as razões que Frege dá para tal concepção de número (cardinal).

Já na introdução de *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege afirma que o número 1 se comporta como um objeto, uma vez ele tem propriedades que lhe são características (ou seja, que nenhum outro número tem). Uma dessas propriedades características, uma citada por Frege, é que o número 1 multiplicado por ele mesmo tem como resultado o próprio 1 ( $1 \cdot 1 = 1$ ). Além disso, proposições como *existe um número primo par*, *existem números primos entre 0 e 10* parecem dar a impressão que números são objetos, uma vez que eles estão no escopo das variáveis objectuais da teoria. Podemos traduzir a primeira proposição, em notação lógica, da seguinte maneira:  $\exists x(Nat(x) \& Par(x) \& Prim(x))$ , onde *Nat* significa *ser número natural*; *Par* significa *ser par*; e *Prim*, *ser primo* (as propriedades *ser número natural*, *ser par* e *ser primo* podem também ser definidas). Essa parece ter sido uma das razões que fez Frege considerar os números como objetos.

Há também outras razões para Frege considerar números como objetos. Ele, em inúmeras passagens, defende que os números são objetos apoiando-se em evidências da linguagem, a saber, que os numerais são antecidos por artigo definido (§§ 23, 38, 57, 68, 74) e o artigo definido indica *existência* e *unicidade*<sup>102</sup>. Além disso, numerais ocorrem em sentenças de identidade (por exemplo,  $2+3=5$ ), e a relação de identidade é, segundo Frege em *Die Grundlagen der Arithmetik*, uma relação de primeira ordem, ou seja, uma relação sob a qual caem pares de objetos (§57)<sup>103</sup>. É interessante mencionar que numerais ocorrem em algumas sentenças desempenhando o papel de adjetivo. Por exemplo, *o zoológico tem sete leões*. Aqui, “sete” modifica o substantivo “leões” e, portanto, é um adjetivo. Neste sentido, “sete” não parece desempenhar o papel de um objeto, mas de uma propriedade (de segunda ordem). Frege também considera esta situação. Contudo, ele

<sup>101</sup> Os números cardinais são, segundo Frege, os números que dão uma resposta exata para a questão *Quantos objetos existem que são F?*, ou similarmente *Quantos Fs existem?* (F sendo um determinado conceito (sortal) e os Fs, os objetos que caem sob F). É interessante notar a seguinte questão, a saber, os números naturais são, na visão de Frege, um subconjunto dos números cardinais e, assim, eles também são objetos, se os números cardinais forem.

<sup>102</sup> Frege também diz que os numerais nunca são precedidos por artigo indefinido. Segundo Frege, o artigo indefinido precedendo uma palavra indica o caráter predicativo da mesma.

<sup>103</sup> Aqui, Frege já considera a igualdade como uma relação entre objetos, contudo, como tentamos mostrar na seção anterior, em *Begriffsschrift* há uma certa ambigüidade nessa relação. Talvez, ao

irá propor que sempre podemos transformar uma sentença na qual o numeral desempenha o papel de um adjetivo em uma sentença na qual o numeral desempenha o papel de um substantivo. Por exemplo, a sentença (1) *o zoológico tem sete leões* pode ser decodificada da seguinte maneira: (2) *o número de leões no zoológico é sete*. Aqui, Frege argúi, a palavra “é” não funciona como uma cópula; ela expressa uma identidade, ou seja, *o número de leões no zoológico é igual a sete*. Da mesma maneira, podemos transformar a sentença (3) *existem sete leões no zoológico* na qual “sete” parece ser também uma propriedade de segunda ordem, uma vez que modifica “leões no zoológico”, na sentença *o número de leões no zoológico é igual a sete*. Segundo Frege, as três sentenças acima expressariam o mesmo conteúdo conceitual. Por que Frege favorece a interpretação (2) em detrimento das demais? Na §57, Frege afirma que nas sentenças da forma (1) e (3), o numeral é apenas um elemento do predicado. Contudo, ele considera que as razões dadas anteriormente em *Die Grundlagen der Arithmetik* (por exemplo, que os numerais são precedidos pelo artigo definido) já estabelecem a natureza ontológica dos mesmos, de maneira que é apenas ilusório que em (1) e (3) números sejam propriedades<sup>104</sup>.

Vale também mencionar que Frege novamente resgata a nomenclatura “sujeito” e “predicado” que, em *Begriffsschrift*, ele afirma ser irrelevante para sua notação conceitual. A utilização dessa nomenclatura está diretamente ligada com as noções de conceito e objeto. Um conceito é, para Frege em *Die Grundlagen der Arithmetik*, o predicado de uma sentença; o objeto é o sujeito da sentença. Vale lembrar que isto só é possível em sentenças que expressam um juízo que tem um conteúdo singular (por exemplo, Platão é filósofo) ou no caso de uma sentença que expressa uma relação de primeira ordem (por exemplo, Platão foi discípulo de Sócrates). No caso de uma sentença como *toda baleia é um mamífero*, o sujeito da relação não é um objeto. Na verdade, como já dissemos um pouco mais acima, isso pode ser traduzido da seguinte maneira: para todo objeto x, se x é baleia, então x é mamífero. Assim, estamos predicando uma determinada relação entre os

---

considerar a necessidade de interpretar a relação de identidade como uma relação de primeira ordem sob a qual caem objetos, Frege notou a ambigüidade de sua primeira concepção.

<sup>104</sup> Frege escreve: “Na proposição ‘o número 0 pertence ao conceito F’, 0 é somente um elemento no predicado (tomando o conceito F como sendo o sujeito real). Por esta razão evitei chamar um número tal como 0 ou 1 ou 2 de uma propriedade de um conceito... Já chamei a atenção acima para o fato de que falamos de ‘o número 1’, onde o artigo definido serve para classificá-lo como um objeto”. (Frege, 1884, §57).

conceitos *baleia* e *mamífero*, a saber, que o primeiro conceito é subordinado ao segundo. Chateaubriand (2001) interpreta sentenças desse tipo como expressando uma relação entre sujeito e predicado, no caso o predicado é a relação de segunda ordem *subordinação* e os sujeitos são *baleia* e *mamífero*. Frege parece implicitamente admitir isto. Por isso a restrição que demos acima que um objeto é o sujeito de uma sentença que expressa um conteúdo individual ou uma relação de primeira ordem; caso contrário, os conceitos poderiam ser admitidos como objetos, posto que eles são os sujeitos de sentenças que expressam uma relação de segunda ordem ou uma propriedade de segunda ordem e isso violaria a terceira cláusula que Frege expressa na introdução de *Die Grundlagen der Arithmetik*, a saber, “nunca perder de vista a distinção entre conceito e objeto”. Há uma série de questões ainda sobre a noção de número como objeto, contudo terminamos aqui a discussão sobre este tema neste capítulo.

### 2.5.2- O PRINCÍPIO DO CONTEXTO

O princípio do contexto é um dos elementos mais controversos de *Die Grundlagen der Arithmetik*. Existem inúmeras interpretações desse princípio na literatura secundária. Não é o objetivo dessa subseção tentar formular uma resposta de como deveríamos interpretar este princípio, mas apresentar algumas interpretações sugeridas sobre ele.

Frege, na introdução do livro mencionado acima, apresenta, pela primeira vez, o princípio do contexto, a saber, (1) “nunca perguntar pelo significado<sup>105</sup> de uma palavra isoladamente, mas somente no contexto de uma proposição”. Além desse princípio, Frege, também na introdução, apresenta mais outros dois princípios, a saber, o já mencionado acima (nunca perder de vista a distinção entre conceito e objeto) e “separar precisamente o psicológico do lógico, o subjetivo do objetivo”. À primeira vista, estes três princípios parecem ser princípios metodológicos e interdependentes. Por exemplo, se tomarmos o significado dos numerais isoladamente, poderia ser o caso de ligarmos a este significado uma determinada idéia, e assim o primeiro princípio seria violado. Da mesma maneira, se tomarmos o significado de uma expressão no contexto de uma proposição, então certamente saberíamos o *status* “ontológico” de tal expressão. Por exemplo, se a expressão

<sup>105</sup> Frege usa a palavra *Bedeutung* na passagem acima. Traduza esta palavra por significado, pois *Bedeutung* não tem aqui ainda o sentido técnico de referência.



for um sujeito em uma proposição que tem um conteúdo singular, então tal expressão significará um objeto. Se ela for o predicado de uma tal proposição, então ela significará um conceito<sup>106</sup>.

Contudo, há, no decorrer do livro, outras formulações que não parecem ser apenas metodológicas. Por exemplo, na §60, Frege diz que (2) “é suficiente que uma proposição como um todo tenha um sentido para que seja conferido um conteúdo para as suas partes”. Na §62, ele afirma (3) “é somente no contexto de uma proposição que as palavras têm significado”. E na §106, lemos o seguinte: (4) “estabelecemos o princípio segundo o qual o significado de uma palavra tem de ser explicado não isoladamente, mas no contexto de uma proposição”. A formulação (2) parece ser uma formulação ontológica, posto que é uma condição para a existência dos conteúdos das partes da proposição. A formulação (3), no contexto da §62, parece ser uma formulação epistemológica, uma vez que Frege pergunta como os números que são objetos não-intuitivos (não estão no tempo nem no espaço), podem ser dados a nós. Ele diz, “uma vez que é somente no contexto de uma proposição que as palavras têm sentido”, basta “definir o sentido de uma proposição na qual um numeral ocorre”. A formulação (4) parece ser uma repetição da formulação (1).

Por outro lado, poderíamos interpretar a formulação (3) como sendo ontológica, uma vez que na §62 Frege fixa o sentido dos numerais em proposições de identidade, portanto os numerais significam objetos (posto que a relação de identidade é uma de primeira ordem, segundo Frege). A formulação (2) é ambígua, uma vez que a noção de conteúdo, em *Die Grundlagen der Arithmetik*, é uma noção que mistura a de sentido e a de referência que são separadas somente após este livro (em *Über Sinn und Bedeutung*). Portanto, poderíamos interpretar o princípio do contexto em (2) (segundo a distinção entre sentido e referência) como expressando o seguinte: (2') se uma proposição como um todo tem sentido, então as suas partes constituintes têm um sentido; ou, então, (2'') se uma proposição como um todo tem sentido, então suas partes constituintes têm referência. (2'') é falsa. Uma

---

<sup>106</sup> Chateaubriand (2001), no capítulo 8, afirma que o princípio do contexto está relacionado com a idéia, já apresentada acima, de que os conteúdos conceituais são as unidades básicas da notação conceitual. Sua visão, parece, é consistente com esta apresentada acima.

proposição como *Odisseu foi deixado adormecido em Ítaca* tem um sentido, mas o nome *Odisseu* não tem referência (apesar de ter um sentido)<sup>107</sup>.

Dada essa série de interpretações do princípio do contexto, é difícil chegarmos a um denominador comum. Mas, vale ressaltar uma interpretação que nos parece errada, a saber, que o objetivo do princípio do contexto é legitimar definições contextuais (um dos defensores de tal idéia é Sluga (1980))<sup>108</sup>. Essa interpretação nos parece errada porque Frege rejeita as duas definições contextuais que ele apresenta na §55 e §62 (como Sluga diz), mas, na §106, Frege reafirma o princípio do contexto como uma das suas máximas e isso nos leva a acreditar que tal princípio desempenha um papel relevante em *Die Grundlagen der Arithmetik* que não é o de legitimar definições contextuais<sup>109</sup>. Mas qual é esse papel? Dummett (1991, capítulo 16, pág. 201-2) diz que o princípio do contexto funciona como um guia para formular uma definição correta de número cardinal. Em outras palavras, Dummett está dizendo que para uma definição de número ser correta, deveríamos derivar da mesma um critério de identidade de número. Como dissemos acima, Frege parece sugerir na §18 que é necessário um conceito geral de número cardinal, a partir do qual derivaríamos uma lei geral e a partir dessa poderíamos provar as proposições da aritmética junto com as definições individuais dos números. Isto parece ser consistente com a posição de Dummett. Uma vez que Frege deduz da definição direta de número cardinal o Princípio de Hume que é um critério de identidade de números, isto mostra então que a definição direta é uma definição correta (escrevemos “uma”, porque poderia existir mais de uma) e que o Princípio de Hume é a lei geral a partir da qual as demais proposições da aritmética são deduzidas. Na § 107, Frege escreve:

<sup>107</sup> Na verdade, a palavra “sentido” (*Sinn*) em (2) também não tem o sentido técnico que Frege apresentará posteriormente. Em *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege usa as palavras conteúdo e sentido como sendo sinônimas. Portanto, poderíamos dividir o princípio do contexto em (2) em quatro princípios, a saber, os dois já dados acima (em termos de “sentido”); e em (2'') se uma proposição tem referência, então suas partes têm referência; e, também, (2''') se uma proposição tem referência, então suas partes têm sentido.

<sup>108</sup> “Mas há algo estranho e perturbador sobre a definição de números em termos de extensões de conceitos no contexto geral do pensamento de Frege. Originalmente ele raciocinou que os números, como objetos lógicos, tinham de ser definidos contextualmente. Presumivelmente, foi por esta razão que ele intitulou a seção relevante do livro: ‘Para obter o conceito de número cardinal, devemos fixar o sentido de uma identidade numérica’ (F, p. 73). Mas a conclusão desta seção foi que a definição que preenchia esta condição não poderia ser legitimamente adotada”. (Sluga, 1980, 127).

<sup>109</sup> Como o próprio Sluga diz, se fosse o caso no qual o papel do princípio do contexto é o de legitimar definições contextuais, então a passagem na §106 contradiria o próprio procedimento de Frege em *Die Grundlagen der Arithmetik*.

Nesta definição, o sentido da expressão ‘extensão de um conceito’ é assumido como sendo conhecido. Esta maneira de superar a dificuldade não pode ser considerada como tendo uma aprovação universal, e muitos irão preferir outros métodos para remover as dúvidas em questão. Não atribuo nenhuma importância decisiva ao empregar extensões de conceito. (Frege, 1884, §107).

Assim, o que parece importante para Frege, em *Die Grundlagen der Arithmetik*, é o Princípio de Hume (que é derivado da definição direta). Frege parece escolher as extensões de conceito, porque elas são consideradas amplamente na lógica. Assim, uma vez que o Princípio de Hume é derivado de uma definição lógica, ele também é lógico. Mas, a passagem acima parece sugerir que se de uma outra definição (lógica) também é derivado o Princípio de Hume, então esta definição é igualmente correta (creio que Dummett concordaria com isso). Contudo, como dissemos, não é a pretensão dessa subseção chegar a uma resposta definitiva sobre o princípio do contexto. Terminamos aqui nossa discussão sobre o assunto. Em 3, discutiremos o princípio do contexto novamente, mas na luz da interpretação de Wright.

### **2.5.3 - DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK §§45-83**

O objetivo dessa subseção é expor sucintamente as idéias apresentadas por Frege nas §§45-83. Em particular, é nosso interesse tocar no *Problema de Júlio César*. Além disso, mostraremos como as definições apresentadas em *Begriffsschrift* desempenharão um papel importante nas definições apresentadas por Frege em *Die Grundlagen der Arithmetik*, em particular, nas definições de número natural e correspondência 1-1.

Como dissemos acima, Frege, implicitamente, nas §§18-44, sustenta a posição segundo a qual uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito. Frege chega a esta conclusão examinando e refutando algumas tentativas de definir o conceito de número (a tentativa de definir número como propriedades de objetos externos e a tentativa de definir número como uma coleção de unidades). Na §46, Frege afirma explicitamente esta posição:

Ao olhar para o mesmo fenômeno externo, posso dizer com igual direito que ‘é um grupo de árvores’ e ‘são cinco árvores’, ou que ‘aqui temos quatro companhias’ e ‘aqui temos 500 homens’. Agora, o que muda de um juízo para o outro não é qualquer um dos objetos individuais, nem a totalidade, nem a aglomeração desses objetos, mas sim minha terminologia. Mas isto é em si somente um sinal que um conceito foi substituído por outro. Isto sugere como uma resposta à primeira questão deixada em aberto no último parágrafo que o conteúdo de uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito. (Frege, 1884, §46).

Frege assume que o conteúdo de uma atribuição numérica é uma atribuição de uma propriedade de segunda ordem, a saber, *ser instanciada por x objetos* (onde  $x$  denota um numeral), a conceitos de primeira ordem. Por exemplo, tome a proposição, *o zoológico tem sete leões*. Aqui, temos o conceito *leões no zoológico* caindo sob a propriedade de segunda ordem *ser instanciado por sete objetos*. Seguindo esta sugestão, Frege então apresenta a sua primeira definição de números naturais, a saber

(1) o número 0 pertence a um conceito  $F$ , se nenhum objeto cai sob  $F$ . Ou seja, 0 seria a propriedade de segunda ordem sob a qual caem conceitos que não são instanciados por quaisquer objetos (em símbolos  $N^0xFx \equiv_{def} \neg \exists xFx$ , onde  $N^0xFx$  significa *o número zero pertence ao conceito F*).

(2) o número 1 pertence a um conceito  $F$ , se existe um e somente um objeto que cai sob  $F$ . Ou seja, 1 é a propriedade de segunda ordem sob a qual caem conceitos que são instanciados por um e somente um objeto (em símbolos,  $N^1xFx \equiv_{def} \exists!x(Fx)$ , ou seja,  $\exists x(Fx \ \& \ \forall y(Fy \rightarrow x=y))$ ), onde  $N^1xFx$  significa *o número um pertence ao conceito F*).

Frege também mostra como poderíamos obter os demais números indutivamente: o número  $n+1$  pertence a um conceito  $F$ , se existe um objeto  $a$  que cai sob  $F$  tal que o número  $n$  pertence ao conceito ‘cair sob  $F$ , mas não ser  $a$ ’ (em símbolos,  $N^{n+1}xFx \equiv_{def} \exists x(Fx \ \& \ (\exists!y(Fy \ \& \ y \neq x)))$ ). Isto é, dadas as definições de zero e um e a definição indutiva (acima), obtemos os números  $N^2xFx$ ,  $N^3xFx$  etc<sup>110 111</sup>.

Todavia, Frege rejeita a sua primeira definição de número, dando-nos os seguintes argumentos: (1) não podemos decidir se o número Júlio César pertence a um conceito  $F$ , e se Júlio César é um número ou não; (2) não é possível a partir das definições acima provar fórmulas numéricas simples, uma vez que a identidade é um conceito de primeira ordem.

A primeira crítica é estranha, se considerarmos que Frege realmente está tomando os números como conceitos de segunda ordem. Se isto fosse o caso, então a sua crítica não teria sentido, uma vez que, segundo a sua própria diretriz,

<sup>110</sup> Aqui, Frege está seguindo a sugestão de Leibniz para definir os números individuais.

<sup>111</sup> É interessante mencionar que a definição indutiva pode ser transformada em uma definição de sucessor ou predecessor que teria de ser dada em terceira ordem, uma vez que os números são definidos como conceitos de segunda ordem, da seguinte maneira: *Predecessor<sub>φ</sub> [Mxφx, Nxφx]*

conceitos são entidades distintas de objetos. Em particular, números (como conceitos de segunda ordem) são distintos de Júlio César e, portanto, Júlio César não seria número (sendo um conceito de segunda ordem). Como Frege diz, e já foi citado acima, é apenas aparente que números foram definidos como propriedades de um conceito (§57). Os numerais ocorrem, segundo Frege, como parte do predicado. Na verdade, ele mesmo diz, o que foi fixado é o sentido da expressão ‘o número 0 pertence a’ e ‘o número 1 pertence a’ (ou seja, os conceitos de segunda ordem  $N^0x\Phi x$  e  $N^1x\Phi x$ , respectivamente). Isto parece significar que as razões apresentadas nas seções anteriores à §55 (e retificadas nas §§56-9) de *Die Grundlagen der Arithmetik* já estabeleceram que os números são objetos.

A segunda crítica pressupõe também a natureza ontológica de números como objetos. Como Frege diz, não é possível provar das proposições *o número a pertence ao conceito F* e *o número b pertence ao conceito F* que  $a=b$  (ou seja, números devem ocorrer em proposições que expressam uma identidade). Contudo, essa crítica não é tão forte. Como Heck (1997b) afirma, é possível provar que nenhum conceito de primeira ordem cai sob dois conceitos numéricos diferentes, de maneira que a coextensividade poderia ser dada como um critério de identidade (em terceira ordem) para números (sendo conceitos de segunda ordem). Para exemplificar, tome as definições de 0 e 1 (como conceitos de segunda ordem dados acima). Se admitirmos que um conceito F cai sob 0 e 1 (ou como Frege escreveu, os números 0 e 1 pertencem ao conceito F), então estamos admitindo, ao mesmo tempo, que F não é instanciado por nenhum objeto e que ele é instanciado por um objeto. Ou seja, admitir que um conceito F cai sob dois conceitos numéricos diferentes é uma contradição. Portanto, todos os conceitos numéricos serão disjuntos, isto é, eles não têm elementos em comum (no caso, conceitos de primeira ordem). Assim, se dois conceitos numéricos são coextensivos, então eles são um e o mesmo conceito numérico.

Dummett (1991) aponta uma outra razão porque os números definidos como conceitos de segunda ordem não são suficientes para os propósitos de Frege, a saber, não seria possível provar a infinidade de números naturais. Como veremos mais adiante, a conclusão de Frege de que existem infinitos números naturais é dada como uma consequência imediata das seguintes proposições: (1) que a re-

---

$\equiv_{def} \forall F[NxFx \leftrightarrow \exists y(Fy \& Mx(Fx \& y \neq x))]$ , ou seja, o conceito numérico de segunda ordem  $Mx...x...$

lação de sucessor é uma função e que a sua inversa é também uma função (estes dois resultados juntos afirmam que a relação de sucessor é uma função 1-1); (2) que zero não é o sucessor de nenhum número; e (3) que todo número tem um sucessor<sup>112</sup>. Contudo, se números são conceitos de segunda ordem, então a terceira proposição só poderia ser provada se admitíssemos a existência de infinitos objetos não lógicos (como fizeram Russell e Whitehead em *Principia Mathematica* (1910)). Vale mencionar também a seguinte questão: se tomarmos a relação de sucessor como uma de segunda ordem (como na nota 112), então a primeira proposição também não seria provada. Assuma que o universo só tem um único objeto, por exemplo, {Alessandro}. Podemos mostrar que existe um conceito que cai sob 0 (como conceito de segunda ordem), a saber, a autodiversidade (ser diferente de si mesmo); também teremos conceitos que caem sob 1, a saber, *ser igual a Alessandro* e *ser igual a si mesmo*. Mas, não teremos nenhum conceito que caia sob 2, 3, 4,.... Isto significa que 2, 3, 4,... são todos vazios, e assim é possível mostrar que 1, 2, 3,... têm o mesmo sucessor, a saber, a classe vazia (ou seja, números diferentes podem ter o mesmo sucessor). Novamente, é bloqueada a conclusão de Frege de que existem infinitos números naturais<sup>113</sup>.

Nas §§60-1, Frege prepara o terreno para a sua segunda tentativa de definição de número cardinal. A discussão lá é se os objetos têm de ser concretos, ou podem existir objetos que não estão nem no tempo, nem no espaço<sup>114 115</sup>. Frege se decidirá pela segunda opção. Poderíamos entender estes dois parágrafos como uma tentativa de dar uma resposta para uma possível objeção Kantiana ao logicismo de Frege<sup>116</sup>, a saber, uma vez que objetos são dados a nós somente através

---

é o predecessor do conceito numérico de segunda ordem  $Nx...x...$

<sup>112</sup> Note que aqui há alguma similaridade com a noção definida por Dedekind (1888) na §71 (definição de um sistema simplesmente infinito). O problema é que Dedekind não provou a existência de tal sistema, apenas o definiu. Por isso o passo crucial na §66, onde ele prova a existência de um sistema infinito, uma vez que a existência de um sistema simplesmente infinito é provada a partir de um sistema infinito (na §72).

<sup>113</sup> Se olharmos mais de perto, veremos que ambas conclusões acima são quase equivalentes. Para mostrarmos que 2 é o único sucessor de 1, temos de admitir a existência de 2 objetos. Mas para provarmos que 3 é o único sucessor de 2, temos de admitir a existência de 3 objetos, e assim por diante. Russell e Whitehead também apresentam como um axioma do infinito o seguinte: a classe vazia não é um número natural. Há alguma discussão sobre esta questão em Boolos (1994).

<sup>114</sup> “Dar coordenadas espaciais para o número 4 não faz sentido; mas a única conclusão que pode ser esboçada é que ele não é um objeto espacial, não que ele não seja um objeto”. (Frege, 1884, 61).

<sup>115</sup> Vale lembrar que, para Frege, as idéias também são entidades que não estão nem no tempo, nem no espaço, contudo Frege afirma que elas não são objetivas.

<sup>116</sup> Pelo menos esta parece ser a idéia que Frege tem em mente. Veja §§12-3 de *Die Grundlagen der Arithmetik*.

da sensibilidade, e uma vez que números são objetos, então números são dados a nós também pela sensibilidade (ou seja, a aritmética dependeria da intuição e não seria analítica). O objetivo de Frege nas §§60-1 é tentar mostrar que a primeira premissa é falsa, isto quer dizer que, para Frege, nem todo objeto é dado a nós pela sensibilidade<sup>117</sup>. Frege recorre então ao seu princípio do contexto. Ele diz:

Que podemos formar nenhuma idéia de seu conteúdo não é razão para negar qualquer significado a uma palavra ou para excluí-la de nosso vocabulário. De fato, somente nos é imposto a visão contrária porque, ao perguntar pelo sentido de uma palavra, consideramo-la isoladamente, e isto nos leva a aceitar uma idéia como o seu significado. De acordo com isso, qualquer palavra para a qual não podemos encontrar qualquer descrição mental correspondente não parece ter conteúdo. Mas, deveríamos manter sempre diante de nossos olhos uma proposição completa. Somente em uma proposição as palavras têm, na verdade, um significado. (Frege, 1884, 60).

Nas §§60-1, é sugerida a seguinte interpretação: se uma palavra para a qual não temos qualquer idéia pode ser usada em proposições que expressam um sentido (conteúdo), então esta palavra tem também um conteúdo. E se esta palavra é o sujeito de uma proposição que expressa um conteúdo singular ou uma relação de primeira ordem, então tal palavra irá significar um objeto. Os numerais aparecem como sujeitos de proposições que expressam uma relação de primeira ordem (igualdade), portanto eles significam objetos (os números)<sup>118 119</sup>.

Frege apresenta, nas §62-67, a sua segunda definição de número cardinal. Uma vez que, segundo Frege, números são objetos, a definição tem de dar conta de seu caráter “ontológico”. Frege propõe então definir o sentido de uma proposição na qual numerais ocorrem significando objetos. Frege escolhe a proposição que expressa a relação de identidade entre números (pelas razões discutidas acima). Assim, Frege tem de definir o sentido da proposição

*O número que pertence ao conceito F é igual ao número que pertence ao conceito G.*

<sup>117</sup> Ou, então, contra a seguinte argumentação: uma vez que (1) objetos são dados a nós na intuição, e (2) números não são intuitivos, então números não são objetos. O ponto de Frege é mostrar que (1) não é verdadeira.

<sup>118</sup> “A auto-subsistência que estou reivindicando para o número não tem de ser tomada como dizendo que um numeral significa algo quando removido do contexto de uma proposição, mas somente excluir o uso de tais palavras como predicados ou atributos, o que altera apreciavelmente seu significado”. (Frege, 1884, §61).

<sup>119</sup> Geralmente é dito que Frege defende, em *Die Grundlagen der Arithmetik*, uma visão Platônica em relação à aritmética, posto que ele diz em inúmeras passagens deste livro que os números são objetos auto-subsistentes, independentes de nós. Entretanto, a passagem da nota acima mostra que Frege ainda não está tomando uma posição totalmente Platônica. A auto-subsistência dos números é assumida somente no contexto de uma proposição.

Frege, citando Hume, propõe então que o sentido da proposição acima pode ser definido como expressando a existência de uma correspondência 1-1 entre as coisas que são F e as coisas que são G (§63).

Na §63, tem-se uma passagem bastante interessante

Não é somente entre os números que a relação de identidade é encontrada. Parece seguir-se disto que não deveríamos defini-la especialmente para o caso de números. Deveríamos esperar que o conceito de identidade fosse fixado primeiro, e então, a partir dele com o conceito de número cardinal, deveria ser possível deduzir quando os números cardinais são idênticos uns com os outros, sem precisar, para este propósito, de uma definição especial de identidade numérica também. (Frege, 1884, §63).

Como a passagem acima diz, ao invés de definir uma igualdade numérica, deveríamos definir o sentido do conceito de identidade e juntamente com o conceito de número cardinal deduzir a identidade numérica. O problema é que o conceito de número cardinal ainda não foi fixado (como o próprio Frege diz). Além disso, não é óbvio como definir uma relação de identidade. Frege então propõe:

Nosso objetivo é construir o conteúdo de um juízo que pode ser tomado como uma identidade tal que cada lado dela é um número. Portanto, estamos propondo não definir a identidade especialmente para este caso, mas usar o conceito de identidade, tomado como já conhecido como um meio de alcançar aquilo que tem de ser considerado como sendo idêntico. (Frege, 1884, §63).

Frege, ao explicar este tipo de definição, usa um exemplo da geometria (§64). Ele afirma que o juízo “a reta  $a$  é paralela à reta  $b$ ” pode ser transformado em uma identidade no sentido estrito, a saber, “a direção da reta  $a$  é igual à direção da reta  $b$ ”. A relação de paralelismo é uma relação de equivalência, ou seja, ela é reflexiva, transitiva e simétrica. A relação de identidade também é uma relação de equivalência. E isto parece ser crucial para a passagem da relação de paralelismo de retas para identidade de direção de retas. Segundo Frege, o conteúdo do juízo “a reta  $a$  é paralela à reta  $b$ ” é *reformulado* (*zerspalten* (alemão), *carve up* (inglês)) de uma maneira diferente e assim é obtido um novo conceito (o conceito de direção). Frege, aqui, parece estar dizendo algo próximo do que ele disse em *Begriffsschrift*, a saber, que um mesmo conteúdo conceitual pode ser expresso de várias maneiras diferentes. Em última análise, Frege parece propor que a proposição “a reta  $a$  é paralela à reta  $b$ ” expressa o mesmo conteúdo conceitual que a proposição “a direção da reta  $a$  é igual à direção da reta  $b$ ”<sup>120 121</sup>.

<sup>120</sup> Aqui há um problema. Frege, depois de *Die Grundlagen der Arithmetik*, dividiu o conteúdo conceitual em sentido e referência. Assim, as duas proposições acima expressam o mesmo sentido



O Princípio de Hume pode ser visto da mesma maneira. Seguindo a análise de Frege, poderíamos “reformular” o conteúdo expresso pela proposição “existe uma correspondência 1-1 entre os Fs e os Gs” de uma maneira diferente, obtendo um novo conceito, o conceito de número cardinal (a relação de equinumerosidade, que é uma relação de equivalência para conceitos (sortais) de primeira ordem, é transformada em uma relação de identidade entre os números cardinais que pertencem a estes conceitos).

Frege também defende que a relação de paralelismo tem uma prioridade epistêmica. É comum explicarmos o conceito de paralelismo invocando o conceito de direção, a saber, duas retas são paralelas se elas têm a mesma direção. Contudo, a geometria é, para Frege, um conhecimento intuitivo (a geometria é, para Frege, sintética *a priori*). Uma vez que direções são objetos abstratos (ou seja, objetos não-intuitivos), então devemos explicar as direções indiretamente via retas que são intuitivas. O mesmo poderia ser dito do Princípio de Hume, ou seja, a relação de equinumerosidade tem uma prioridade epistêmica sobre a identidade de números cardinais (posto que a relação de equinumerosidade pode ser expressa somente por vocabulário lógico).

Frege apresenta (§65-67) então três possíveis objeções à sua segunda definição, sendo as duas primeiras

Esta definição foge, de certa forma, da prática normal, uma vez que ela serve ostensivamente para adaptar a relação de identidade, tomada como já conhecida, a um caso especial, enquanto, na realidade, ela é designada a introduzir a expressão “a direção da reta a” que somente ocorre acidentalmente. E isto dá origem a uma segunda dúvida: não estaríamos propensos, ao usar tais métodos, a entrar em conflito com as leis bem conhecidas de identidade? Vamos ver quais são estas leis. Como verdades analíticas, elas seriam derivadas do próprio conceito. Agora, a definição de Leibniz é como se segue:

‘Coisas que são idênticas entre si podem ser substituídas umas pelas outras sem perda de verdade’.

Eu proponho isto como sendo minha própria definição de identidade. (Frege, 1884, §65).

---

ou a mesma referência? Em termos de referência, as coisas se complicam, uma vez que todas as proposições verdadeiras têm a mesma referência, o objeto o Verdadeiro (todas as proposições falsas se referem ao Falso). Em termos de sentido, uma resposta também não é clara, se assumirmos a tese da composicionalidade, ou seja, o sentido de uma proposição é uma função dos sentidos de suas partes. Assim, parece que a proposição “a direção da reta a é igual à direção da reta b” não expressa o mesmo sentido que a proposição “a reta a é paralela à reta b”. É interessante mencionar que a Lei Básica V tem esse mesmo problema. Frege irá dizer, implicitamente, em *Funktion und Begriff*, que os dois lados da Lei Básica V expressam o mesmo sentido (assumindo a sua auto-evidência).

<sup>121</sup> Frege não diz qual é o conteúdo que ambas as proposições expressam, mas poderíamos supor que ele toma que ambas as proposições expressam uma relação de equivalência em relação às entidades relevantes.

Estas duas objeções são, para Frege, mal colocadas<sup>122</sup>. Contudo, a terceira objeção é a crucial. Frege escreve:

Mas, há ainda uma terceira dúvida que pode nos fazer suspeitar da definição proposta. Na proposição ‘a direção de a é idêntica à direção de b’ a direção de a desempenha o papel de um objeto, e nossa definição nos permite um meio de reconhecer este objeto como o mesmo novamente, no caso deste objeto aparecer repentinamente de alguma outra forma, por exemplo, como a direção de b. Mas, este meio não é suficiente para todos os casos. Por exemplo, ele não decidirá para nós se a Inglaterra é a mesma que a direção do eixo da Terra - se eu posso ser desculpado pelo exemplo que parece ser sem sentido. Naturalmente, ninguém confundirá a Inglaterra com a direção do eixo da Terra, mas isto não ocorre graças à nossa definição de direção. (Frege, 1884, §66).

Aqui, estamos diante do *Problema de Júlio César*. Como Frege disse na §63, a relação de identidade é uma relação sob a qual caem objetos (em geral). Portanto, poderíamos perguntar sempre se dois objetos são os mesmos ou não. Em particular, uma vez que as direções são objetos (ocorrem como sujeitos de uma relação de identidade), poderíamos perguntar se a direção de uma reta  $a$  (existente) é igual à Inglaterra. O problema é que a definição de direção só nos dá meios de distinguir quando duas direções são iguais ou não. Dada a sentença “a direção da reta  $a$  é idêntica a  $q$ ” (onde  $q$  é uma variável objectual), ela só terá uma resposta afirmativa ou negativa se  $q$  tiver, por exemplo, a forma “a direção da reta  $b$ ” ou “a direção do eixo da Terra”.

O problema da definição do conceito de direção pode ser transportado para o Princípio de Hume, ou seja, não podemos decidir se Júlio César ou qualquer outro objeto (até mesmo a direção de uma reta  $a$ ) é igual ao número 0 (ou a qualquer outro número) ou não. O Princípio de Hume só pode decidir proposições da forma: o número que pertence ao conceito  $F$  é igual ao número que pertence ao conceito  $G$ .

Agora, chegamos a um ponto crucial. Como dissemos acima, Frege defende na §46 que uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito. Também dissemos que Frege chegou a essa conclusão ao considerar e refutar a definição de número (cardinal) como propriedade de objetos externos e a definição de número (cardinal) como conjunto de unidades. Em relação à última definição, Frege critica a idéia de que as unidades são idênticas entre si, mas são, de alguma

<sup>122</sup> Não discutiremos os argumentos de Frege para responder a estas duas objeções.

forma, distintas umas das outras. A sua tese segundo a qual uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito parece unificar estas duas características contraditórias. Por um lado, conceito apresenta a unidade (ou seja, o conceito tem um critério de aplicação) e, por outro lado, temos uma relação de identidade entre as coisas que caem sob o conceito<sup>123</sup>. O Princípio de Hume e o Princípio de Direção são critérios de identidades para os números cardinais e as direções, respectivamente.

O problema é que não temos um critério de aplicação para os conceitos *número cardinal* e *direção* (devido ao seu caráter abstrato). Em particular, não podemos dizer se Júlio César é um número. Sabemos que Júlio César não é um livro, assumindo que os conceitos *pessoa* e *livro* têm um critério de aplicação razoável<sup>124</sup>. Portanto, podemos dividir a tese colocada aqui em duas: (1) quando dois objetos que são F são iguais ou não?<sup>125</sup>. Por exemplo, quando Júlio César e Brutus, que são pessoas, são iguais ou não? (2) E quando um objeto que é F é igual a um outro objeto que é G?<sup>126</sup>. Por exemplo, quando o livro que está em cima da minha mesa que é um livro é igual ou não a Júlio César que é uma pessoa? A primeira questão será respondida, se for possível, apelando-se a um critério de identidade válido para os objetos que caem sob o conceito (no exemplo, *ser uma pessoa*). A segunda questão é respondida apelando-se ao critério de aplicação. Júlio César não é um livro e todo livro particular não é uma pessoa<sup>127</sup>. Também podemos questionar quando o número que pertence a um conceito F e o número

<sup>123</sup> “Somente um conceito, que isola o que cai sob ele de uma forma definida e que não permite qualquer divisão arbitrária dele em partes, pode ser uma unidade relativa a um número cardinal finito. Será notado aqui, entretanto, que indivisibilidade tem um significado específico. Podemos agora facilmente resolver o problema de reconciliar a identidade de unidades com sua distinguibilidade. A palavra ‘unidade’ esta sendo usada aqui em um duplo sentido. As unidades são idênticas se a palavra tem o sentido justamente explicado. Na proposição ‘Júpiter tem quatro luas’, a unidade é ‘lua de Júpiter’. Sob este conceito cai a lua I, e da mesma maneira cai também a lua II e a lua III e finalmente a lua IV. Assim, podemos dizer: a unidade para a qual I se relaciona é idêntica à unidade para a qual II se relaciona, e assim por diante. Isto nos dá nossa identidade. Mas quando afirmamos a distinguibilidade das unidades, entendemos que as coisas numeradas são distinguíveis”. (Frege, 1884, §54).

<sup>124</sup> Em última análise, poderíamos dar um critério de aplicação ostensivamente, ou seja, apontado para o objeto e dizendo *isto é um F*.

<sup>125</sup> Aqui temos uma diferença quantitativa.

<sup>126</sup> Aqui temos uma diferença qualitativa.

<sup>127</sup> Aristóteles também tem uma opinião semelhante: “Costumamos falar de ‘mesmo’ com respeito ao número ou com respeito à espécie ... Com respeito ao número, são um aquelas coisas cuja matéria é única... Com respeito à espécie, são o mesmo coisas que são muitas, sendo, contudo, indiferenciáveis quanto à espécie como, por exemplo, homem e homem ou cavalo e cavalo. É que todas as coisas que caem sob a mesma espécie são ditas ser o mesmo no que toca à espécie”. (Aristóteles, Tópicos, 103a8s). Cf. Metafísica 1016b32s.

que pertence a conceito  $G$  que são números cardinais são os mesmos ou não. A resposta é: o número que pertence a  $F$  é igual ao número que pertence a  $G$  quando existe uma correspondência 1-1 entre os  $F$ s e os  $G$ s (Princípio de Hume). Por outro lado, se questionarmos quando um número que pertence a um conceito  $F$  que é um número cardinal é o mesmo que Júlio César que é uma pessoa, não chegaremos a nenhuma conclusão. O conceito de número cardinal, dado pelo Princípio de Hume, não parece ter um critério de aplicação<sup>128</sup>.

Frege tem de dar um relato de ou assumir um critério de aplicação do conceito de número cardinal se ele pretende executar seu programa logicista. (Isto porque Frege prova que existem infinitos números naturais assumindo que os próprios números podem ser contados, ou seja, o conceito *número natural* é, para Frege, um conceito sortal). Frege, então, desiste de sua segunda definição e propõe a terceira e última definição de número cardinal, a saber, o número que pertence ao conceito  $F$  é a extensão do conceito ‘equinúmero a  $F$ ’. Da mesma maneira, Frege define o conceito de direção: a direção de uma reta  $a$  é a extensão do conceito ‘paralela à reta  $a$ ’. Frege assume que é conhecido o que é uma extensão de conceito. Assim, Frege assume que sabemos que Júlio César (ou qualquer outro objeto) não é uma extensão de conceito. Ou seja, Frege assume um critério de aplicação para o conceito de extensão. Mas, uma vez que o conceito de número cardinal é definido como sendo uma determinada extensão de conceito, então temos também um critério de aplicação para o conceito de número cardinal e, assim, podemos dizer que Júlio César não é um número<sup>129</sup>.

A seguir, Frege tem de dar uma definição lógica do que seja uma correspondência 1-1. Na § 71, ele define a noção de correspondência entre os  $F$ s e os  $G$ s. Ele escreve:

Ora, se todo objeto que cai sob o conceito  $F$  encontra-se na relação  $\phi$  a um objeto que cai sob o conceito  $G$  e se a todo objeto que cai sob  $G$  encontra-se na relação  $\phi$

<sup>128</sup> “Vendo que não podemos por estes métodos obter qualquer conceito de direção com limites precisos a sua aplicação e, portanto, pelas mesmas razões, nem a qualquer conceito satisfatório de número cardinal também, vamos tentar uma outra maneira”. (Frege, 1884, §68).

<sup>129</sup> Em *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege assume a Lei Básica V que tem a mesma forma do Princípio de Hume e que rege a introdução das extensões de conceito. Poderíamos novamente questionar se uma extensão é idêntica a Júlio César. A Lei Básica V é incapaz de nos dar uma resposta. Contudo, em *Grundgesetze der Arithmetik* (§10), Frege tenta solucionar a questão da identidade. Mas, ele somente assume, neste livro, a existência de dois tipos de objetos, as extensões (ou, de uma forma mais geral, percurso de valores) e os objetos o Verdadeiro e o Falso. Ou seja, o problema é se o Verdadeiro e o Falso são extensões. Frege propõe identificar o Verdadeiro e o Falso com quaisquer percursos de valores. Ele identificará o Verdadeiro com a extensão {o Verdadeiro} e o Falso com a extensão {o Falso}.

um objeto que cai sob F, então os objetos que caem sob F e G são correlacionados reciprocamente pela relação  $\phi$ . (Frege, 1884, §71).

Assim, uma correspondência entre os Fs e os Gs é definida, como Frege sugerira na passagem acima, da seguinte maneira:  $\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Gy \& x\phi y)) \& \forall x(Gx \rightarrow \exists y(Fy \& y\phi x))$ .

É claro que ainda não temos uma correspondência 1-1, pois pode acontecer que um dos Fs esteja na relação  $\phi$  com mais de um dos Gs e vice versa. Para estabelecer uma correspondência 1-1 entre os Fs e os Gs, Frege precisa colocar mais uma cláusula, a saber, que a relação  $\phi$  é uma função 1-1. Na §72, Frege escreve:

Assim, vimos quando os objetos que caem sob os conceitos F e G estão correlacionados um com o outro pela relação  $\phi$ . Mas, no nosso caso, esta correlação tem de ser um-para-um. Entendo por isto que as duas seguintes proposições são válidas:

1. Se  $d$  está na relação  $\phi$  com  $a$ , e se  $d$  está na relação  $\phi$  com  $e$ , então, para qualquer  $d$ ,  $a$  e  $e$ ,  $a$  é o mesmo que  $e$ .
2. Se  $d$  está na relação  $\phi$  com  $a$ , e se  $b$  está na relação  $\phi$  com  $a$ , então, para qualquer  $d$ ,  $b$  e  $a$ ,  $d$  é o mesmo que  $b$ . (Frege, 1884, §72).

Ou seja,  $\phi$  é uma função 1-1 quando  $\phi$  é uma função, ou seja,  $\forall a \forall b \forall d ((a\phi b \& a\phi d) \rightarrow b=d)$  e sua inversa (ou seja, se  $a$  está na relação  $\phi$  com  $b$ , então  $b$  está na relação inversa de  $\phi$  com  $a$ .) é também uma função, isto é,  $\forall a \forall b \forall d ((a\phi b \& d\phi b) \rightarrow a=d)$ . Portanto, uma correspondência 1-1 é definida da seguinte maneira:  $\exists \phi [\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Gy \& x\phi y)) \& \forall x(Gx \rightarrow \exists y(Fy \& y\phi x)) \& \forall a \forall b \forall d ((a\phi b \& a\phi d) \rightarrow b=d) \& \forall a \forall b \forall d ((a\phi b \& d\phi b) \rightarrow a=d)]$ .

Frege também, na §72, define a expressão “ $n$  é um número cardinal”. Segundo ele,  *$n$  é um número cardinal se e somente se existe um conceito F tal que  $n$  é o número cardinal que pertence a F*. Como o próprio Frege diz, esta definição parece ser circular, mas a expressão *o número cardinal que pertence a um conceito* já foi definido, de maneira que a definição se torna:  *$n$  é um número cardinal se e somente se existe um conceito F tal que  $n$  é a extensão do conceito ‘equinumerico a F’*.

Na §73, Frege esboça a prova do Princípio de Hume a partir de sua definição explícita. Não discutiremos em detalhes a sua prova aqui<sup>130</sup>. Na §74, Frege

<sup>130</sup> Boolos (1987a) afirma que Frege implicitamente usa uma lei análoga à Lei Básica V (versão em segunda ordem) para provar que  $[H:H1-1F] = [H:H1-1G] \leftrightarrow F1-1G$  (onde,  $[H:H1-1F]$  e  $[H:H1-1G]$  significam a extensão do conceito ‘equinumerico a F’ e a extensão do conceito ‘equinumerico a G’, respectivamente), a saber,  $C=D \leftrightarrow \forall H(C(H) \leftrightarrow D(H))$  (onde, C e D são conceitos de segunda ordem, ‘C’ e ‘D’ são as extensões desses conceitos). Portanto, a lei acima diz que a ex-

define o número 0, a saber, *0 é o número que pertence ao conceito 'não ser idêntico a si mesmo'*. Portanto, 0 é a extensão do conceito “ser equinúmero ao conceito ‘não ser idêntico a si mesmo’”. Uma vez que 0 é uma extensão, e Frege assume que já sabemos o que é uma extensão, então 0 não é igual a Júlio César. Vale mencionar que a extensão do conceito “ser equinúmero ao conceito ‘ser diferente de si mesmo’” é igual à extensão do conceito de segunda ordem  $\exists x\phi x$ . Cai sob este último qualquer conceito de primeira ordem que não é instanciado por nenhum objeto. Mas, da mesma maneira, caem sob o conceito *ser equinúmero ao conceito ‘ser diferente de si mesmo’* somente conceitos de primeira ordem que não são instanciados por nenhum objeto. Por que Frege não escolheu o número 0 como sendo a extensão do conceito de segunda ordem  $\exists x\phi x$ ?

Na §76, Frege define a relação de sucessor. Segundo ele, a proposição *n se segue imediatamente após m na série natural dos números*<sup>131</sup> tem o mesmo significado que a proposição *existe um conceito F e um objeto x que cai sob F, tal que o número cardinal que pertence ao conceito F é n e o número cardinal que pertence ao conceito ‘cair sob F, mas ser diferente de x’ é m*. Em símbolos, podemos definir a relação de sucessor<sup>132</sup> da seguinte maneira:  $\text{Pred}(m,n) /_{\text{def}} \exists F\exists x[Fx \ \& \ n=Nz:Fz \ \& \ m=Nz:(Fz \ \& \ z\neq x)]$ .

Na §77, Frege prova que o número 0 tem um sucessor. Uma vez que 0 é um objeto, Frege pode considerar então o conceito *ser igual a 0*. Como ele próprio diz, 0 cai sob este conceito (ou seja, existe um x tal que x cai sob F). Porém, sob o conceito *ser igual a 0 e não ser 0* não cai nenhum objeto, portanto o número que pertence a este conceito é 0 ( $m=Nz:(Fz \ \& \ z\neq x)$ ). Conseqüentemente, o número que pertence ao conceito *ser igual a 0* é o sucessor de 0 (uma vez que 0 cai sob *ser igual a 0* e n é o número deste conceito e 0 é o número do conceito *ser igual a*

---

tensão de um conceito de segunda ordem C é igual à extensão de um outro conceito de segunda ordem D se e somente se C e D são coextensionais, ou seja, se e somente se para toda propriedade de primeira ordem H, H cai sob C se e somente se cai sob D. Boolos então mostra que uma contradição também pode ser derivada da lei acima.

<sup>131</sup> Aqui há um pequeno problema. Austin (na sua tradução de *Die Grundlagen der Arithmetik* (1986)) traduziu a expressão *n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m* por *n se segue imediatamente após m na série dos números naturais*. Entretanto, Frege ainda não definiu o conceito de número natural (§83). Portanto, seguimos a sugestão de Heck e Boolos (1997). Contudo, a proposição *n se segue imediatamente após m na série natural dos números* é também enganosa. Primeiro, o que Frege entende por série natural dos números? Se for a seqüência natural de todos os números cardinais, então essa definição não vale para todo número cardinal. Se for a seqüência natural dos números cardinais para os quais a definição vale, então ela é bem definida somente para os números naturais. Daí a tradução de Austin.

<sup>132</sup> Na verdade, Frege define a relação acima em termos de predecessor.

0 e não ser igual a 0, assim n é o sucessor de 0). Frege então define 1 da seguinte maneira: 1 é o número que pertence ao conceito ‘ser igual a 0’. Novamente, pela definição, 1 é a extensão do conceito “ser equinúmero ao conceito ‘ser igual a 0’”. Note que o conceito de segunda ordem  $\exists_1 x \phi x$  tem a mesma extensão que o conceito *ser equinúmero ao conceito ‘ser igual a zero’*. Sob ambos cai todo conceito de primeira ordem que é instanciado por um só objeto<sup>133</sup>.

Na §78, Frege apresenta uma lista com seis teoremas que podem ser provados por meio das definições acima e o Princípio de Hume. Em particular, uma proposição importante é a proposição 5 que diz que a relação de sucessor é uma função 1-1.

Na §79, Frege retoma sua definição de ancestral forte (apresentada em *Begriffsschrift* e comentada acima). Como dissemos, a proposição *y se segue após x na série f* ( $xf^*y$ ) significa que *para toda propriedade  $\mathcal{F}$ , se  $\mathcal{F}$  é hereditária em uma relação f e se para todo objeto  $a$ , se  $a$  está na relação com um objeto qualquer x, então  $a$  tem a propriedade  $\mathcal{F}$ , então um objeto qualquer y tem a propriedade  $\mathcal{F}$*  (em símbolos,  $(\forall \mathcal{F} ((\text{Her}(\mathcal{F}, f) \ \& \ \forall a (f(x, a) \rightarrow \mathcal{F}a)) \rightarrow \mathcal{F}y))$ )<sup>134</sup>. Agora, a nossa relação f é a relação de sucessor. Assim, Frege propõe definir que *y se segue depois de x na série natural dos números da seguinte maneira:  $\text{Pred}^*(x, y)$*  /*def*  $(\forall \mathcal{F} ((\text{Her}(\mathcal{F}, \text{Pred}) \ \& \ \forall a (\text{Pred}(x, a) \rightarrow \mathcal{F}a)) \rightarrow \mathcal{F}y))$  (§81)<sup>135</sup>.

Frege também propõe definir o conceito de ancestral fraco (como em *Begriffsschrift*), a saber, *y é membro da série f iniciada por x* ( $xf^{*\bar{}}y$ ) significa que *y se segue após x na série f ou x é igual a y* ( $xf^*y \vee x=y$ ) (§81). Frege esboça nas §§82-3 a prova de que todo número natural tem um sucessor<sup>136</sup>. Não entraremos

<sup>133</sup> Em geral, os números 2, 3, 4 ... podem ser definidos da seguinte maneira: 2 é o número que pertence ao conceito ‘ser igual a 0 ou ser igual a 1’, 3 é o número que pertence ao conceito ‘ser igual a 0 ou ser igual a 1 ou ser igual a 2’ etc. Um número natural n é definido tomando-se todos os seus predecessores. Note que uma vez que foi provado que 1 é o sucessor de 0, e pelo Princípio de Hume, sabemos que 0 não é igual a 1, então o conceito ‘ser igual a 0 ou ser igual a 1’ é instanciado por dois objetos. E uma vez que existe um conceito que é instanciado por dois objetos, então 2 é o número que pertence a este conceito. Também pode ser provado que 2 é o sucessor de 1. Novamente, o conceito ‘ser igual a 0 ou ser igual a 1 ou ser igual a 2’ é instanciado por três objetos, de maneira que 3 é o número que pertence a este conceito. Frege toma números como objetos, porque isto garantirá a existência de um conceito que é instanciado por n+1 objetos.

<sup>134</sup> O conceito de hereditariedade já foi explicado também.

<sup>135</sup> Vale mencionar que dessa definição é possível provar facilmente o axioma da indução matemática.

<sup>136</sup> Como dissemos anteriormente, segue-se das proposições (1) 0 não é um sucessor; (2) a relação de sucessor é uma função 1-1; e (3) todo número natural tem um sucessor que existem infinitos números naturais, pois, caso contrário, uma das três proposições seria falsa. Assim, assumindo que há finitos números e mantendo que sucessor é 1-1 e que todo número tem um sucessor, então 0

aqui nesta prova, pois a mesma é muito longa. Mas, para dar uma idéia intuitiva, Frege tenta mostrar que o número dos números naturais que precedem ou são iguais a um número natural  $m$  é o sucessor de  $m$ . Por exemplo, o número de números que precedem ou são iguais ao número 0 é 1. O número de números que precedem ou são iguais a 1 é 2, e assim por diante<sup>137</sup>. Frege precisa, então, definir o conceito de número natural (ou finito): *n é um número natural se e somente se n pertence à série natural dos números iniciada por 0*<sup>138 139</sup>. Em símbolos:  $\forall n /_{\text{def}} \text{Pred}^*(0, n)$ .

---

tem de ser o sucessor de algum número. Por exemplo, seja o conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Sabemos que sucessor é 1-1 (no caso, assumiremos a relação de sucessor normal para os números maiores que 0), ou seja, 1 é o sucessor de 0, 2 é o sucessor de 1, 3 é o sucessor de 2. Mas, como também é suposto que todo número tem um sucessor, então 0 é o sucessor de 3. Assim (1) é falsa.

<sup>137</sup> A prova pressupõe que o conceito de número natural é um conceito sortal, ou seja, é um conceito que dá uma resposta exata para a questão *quantos Fs existem?*

<sup>138</sup> Note que os números naturais são números cardinais fechados sobre 0 e a relação de sucessor (acréscimo de um). Assim, uma vez que o conceito de número cardinal é um conceito sortal para Frege, então o conceito de número natural também será sortal.

<sup>139</sup> Será dado em apêndice um esboço das provas dos axiomas da aritmética a partir do Princípio de Hume.