# 7 Resultados Numéricos

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos por meio da simulação numérica do escoamento de Couette sobre uma parede flexível, utilizando a metodologia descrita nos capítulos 3 e 4. O processo foi analisado considerando-se um fluido Newtoniano hipotético (não existente na natureza) de altíssimas viscosidade e massa específica, e um sólido hiperelástico de Mooney-Rivlin com baixos módulos de elasticidade e cisalhamento. Esta escolha de parâmetros permite uma redução na velocidade crítica de desestabilização do escoamento, já que, tal grandeza é inversamente proporcional à viscosidade do fluido

$$V_{crit} = \Lambda_{crit} \frac{GH_R}{\mu}.$$
(7-1)

Assim, quanto maior o valor da viscosidade do fluido menor será a velocidade crítica do escoamento. Isto faz com que o tempo transcorrido até a desestabilização do sistema também diminua, facilitando o pós-processamento dos arquivos de resultados e reduzindo o tempo computacional exigido. Como vantagem adicional, a utilização de altos valores de  $\mu$  garante um baixo valor do número de Reynolds, como é o desejado neste trabalho.

Os testes foram realizados considerando casos com 2 diferentes valores da razão de espessura sólido-fluido,  $\Pi = 1$  e  $\Pi = 2$ . Suas dimensões podem ser vistas nas figuras. 7.1 e 7.2. Planejava-se inicialmente testar um número maior de casos com valores mais elevados de  $\Pi$ . Porém, tal plano foi frustrado pela existência de um problema de origem desconhecida no pré-processador do software **CFD**, que limita o valor mínimo da espessura da camada de fluido. Este infortúnio poderia ser contornado, caso não fosse reduzida a espessura da camada de fluido, mas elevada a espessura do sólido. Entretanto, isto acarretaria num aumento significativo do número de elementos necessários à correta descrição do fenômeno neste domínio, e conseqüentemente do tempo computacional consumido.

Os procedimentos de teste utilizados neste trabalho são um pouco diferentes dos adotados na literatura clássica disponível sobre o assunto. Enquanto, nos trabalhos pioneiros prescreve-se a tensão de cisalhamento na



Figura 7.1: Sistema sólido flexível - fluido com razão de espessuras igual a 1.



Figura 7.2: Sistema sólido flexível - fluido com razão de espessuras igual a 2.

fronteira do fluido junto à parede rígida deslizante, permitindo-se a livre variação de sua velocidade, neste trabalho impomos a velocidade da parede rígida externa, deixando-se a tensão de cisalhamento variar livremente. A diferença na condição de contorno imposta na fronteira do fluido com o cilindro externo deve levar a resultados pouco divergentes dos que foram obtidos até este momento.

Todos os resultados foram gerados utilizando-se uma máquina com processador Intel Pentium 4 single core de 3,0 GHz, com 1 Gb de memória RAM e disco rígido Serial ATA de 160 Gb.

Iniciaremos este capítulo apresentando a metodologia usada para escolher e testar o grau de refinamento das malhas espaciais e temporais requeridos, e para a determinação do valor de  $\Lambda_{crit}$  para cada razão de espessura. Em seguida é feita uma análise do impacto causado pela diferença de metodologia utilizada. Finaliza-se o capítulo com a apresentação dos resultados dos testes, juntamente com uma análise de seus aspectos.

## 7.1

#### Teste de Malha e Determinação dos Parâmetros Críticos

A escolha de uma malha espacial é sempre um passo delicado num processo de simulação numérica. Ao mesmo tempo que esta deva ser capaz de representar fielmente o comportamento físico do sistema, também deve possuir o menor número possível de pontos nodais, a fim de reduzir os esforços computacionais exigidos. Em casos de escoamentos transientes a escolha se torna ainda mais difícil, pois, a amplitude do passo de tempo pode ser dependente do grau de refinamento requerido para a malha espacial (e vice-versa), introduzindo um novo grau de liberdade ao problema. Existem alguns critérios de escolha que permitem determinar o passo de tempo ideal em função da distância entre os pontos nodais na malha. Contudo, tais critérios não são aplicáveis em problemas envolvendo superfícies livres ou deformáveis, já que a distância entre pontos nodais se torna uma função do tempo, restando somente o método de tentativa e erro. Neste método são arbitradas malhas espaciais com diferentes graus de refinamento, as quais são testadas combinando-as com diversos valores de amplitude de passo de tempo. Isto é feito até se encontrar uma combinação capaz de aliar qualidade de resultados a um menor número de pontos nodais e uma maior amplitude de passo de tempo. Em nosso caso de estudo a situação é um pouco mais complexa, pois, o valor de  $\Lambda_{crit}$  é desconhecido à priori. Para que o programa seja utilizado é necessário estabelecer um valor máximo para  $\Lambda$  ( $\Lambda_{max}$ ), o qual será assumido pelo sistema ao longo do processo de escoamento. Tal valor deve ser igual (ou razoavelmente próximo) de  $\Lambda_{crit}$ , para que se possa observar a formação das ondulações na interface. A observação das ondas na interface sólido-líquido é crucial para a averiguação da qualidade da malha, já que, somente assim é verificado a suavidade destas formações. Considerar um valor de  $\Lambda_{max}$  inferior a  $\Lambda_{crit}$  não levaria, a princípio, o sistema a atingir uma instabilidade. Por outro lado a fixação de um valor de  $\Lambda_{max}$  muito alto pode levar a soluções absurdas, já que neste caso o programa não consegue acompanhar o comportamento do fenômeno de desestabilização. Nota-se assim, que a determinação do número de elementos na malha espacial e da amplitude do passo de tempo dependem da determinação do valor (ao menos aproximado) de  $\Lambda_{crit}$ . Todavia, a determinação do valor de  $\Lambda_{crit}$  também depende do conhecimento do grau de refinamento ideal da malha e do passo de tempo. Lembrando que o caso estudado é bidimensional, temos 4 graus de liberdade a serem tratados neste processo de escolha: o número de elementos angulares e radiais da malha, a amplitude do passo de tempo, e o valor de  $\Lambda_{crit}$ .

A solução encontrada para contornar este impasse foi utilizar uma metodologia iterativa baseada em 4 passos. O primeiro destes é direcionado ao conhecimento do número aproximado de elementos angulares e radiais da malha, necessários para a obtenção de resultados de boa qualidade. O segundo tem como objetivo o conhecimento do valor aproximado de  $\Lambda_{crit}$ . O terceiro visa encontrar o maior intervalo de tempo (passo de tempo) capaz de captar com perfeição o comportamento físico do sistema durante a transição do regime estável para o instável. O quarto e último passo é um "ajuste fino", onde desejamos confirmar os melhores valores dessas quatro variáveis. Nas subseções a seguir os procedimentos realizados em cada um destes passos são descritos em detalhe. Os valores de massa específica e viscosidade do fluido foram fixados e estabelecidos iguais a  $\rho_L = 1g/mm^3$ ,  $\mu = 500g/mm.s$ , respectivamente, enquanto que os coeficientes  $\beta_0 \in \beta_1$ , e a massa específica do sólido foram fixados respectivamente em  $\beta_0 = 800g/mm.s^2$ ,  $\beta_1 = 50g/mm.s^2$  e  $\rho_S = 1g/mm^3$ . A variação da razão entre forças viscosas e elásticas  $\Lambda$  foi obtida pela variação da velocidade da parede rígida externa (velocidade do cilindro externo).

## 7.1.1 Primeiro Passo

Como anteriormente comentado, o primeiro parâmetro a ser determinado é a ordem do grau de refinamento requerido para a malha espacial (número de elementos angulares e radiais de cada domínio). Para isto o programa foi ajustado de maneira a, partindo do sistema em repouso, impor uma aceleração constante na parede superior rígida (parede deslizante) fazendo com que  $\Lambda$ imposto ao sistema seja uma função do tempo ( $\Lambda = \Lambda(t)$ ). Aqui não foi préfixado um valor máximo para a velocidade  $V_{ext}$  desta parede, o que permite, ao menos em tese, que esta seja aumentada indefinidamente. O procedimento foi assim escolhido por acelerar o surgimento da instabilidade, lembrando que neste passo não estamos interessados em determinar o valor crítico de  $\Lambda$ , nem o número ótimo de elementos por domínio. Como os dois casos de interesse possuem geometrias idênticas e dimensões muito próximas não esperamos que haja uma grande diferença no número de elementos necessários para a modelagem do problema, sendo assim, os testes deste primeiro passo foram feitos considerando-se apenas o caso em que  $\Pi = 1$ . Caso o número de elementos encontrados aqui seja inadequado (inferior ao mínimo necessário), será logo descoberto e ajustado no quarto passo deste processo. De qualquer maneira, é importante deixar claro desde já que, devido um erro a existente no pré-processador do software não é possível utilizar números diferentes de elementos radiais e angulares em domínios adjacentes. Como o número de elementos no interior do sólido não deve ser alterado, utilizar o mesmo número de elementos nos dois ( $\Pi = 1 \in \Pi = 2$ ) casos, torna-se uma boa opção.

Foram arbitradas e testadas malhas com dois diferentes graus de refinamento, fixando-se um valor de passo de tempo pequeno igual a 0,01s:

- M1: Com 360 elementos (30 angulares x 3 radiais em cada subregião de cada domínios Figura 7.3);
- M2: Com 1200 elementos (60 angulares x 5 radiais em cada subregião de cada domínios - Figura 7.4).



Figura 7.3: Malha M1. A linha laranja indica a fronteira dos domínios (razão de espessuras igual à 1).

As figuras 7.5 e 7.6 mostram, respectivamente, os perfis de deformação dos domínios, obtidos através das malhas M1 e M2, no instante 3, 50s dentro do regime instável. O gradiente de cores são utilizadas para representar o gradiente de pressões, tornando mais fácil a visualização do domínio deformado. O azul representa o domínio fluido, sendo os tons mais claros indicam maiores pressões. Valores dos resultados de número de ondas formadas na interface, altura da maior onda e tempo de desestabilização são apresentados na tabela



Figura 7.4: Malha M2. A linha laranja indica a fronteira dos domínios (razão de espessuras igual à 1).

7.1. Em ambos os casos a interface adquire um perfil ondulado aparentemente periódico, sem intercruzamento de linhas de  $\epsilon$  e  $\eta$  (e de X e Y) constantes. O número de ondas formadas na interface é o mesmo, contudo a diferença entre amplitudes é bastante diferente chegando à uma diferença percentual de 400%. Duas diferenças marcantes podem ser destacadas. Primeiro, o tempo transcorrido até a perda de estabilidade do sistema é muito menor quando o problema é solucionado utilizando M1. Como o valor de  $\Lambda$  aplicado aqui é uma função do tempo, este comportamento sugere que o escoamento solucionado com M1 está se tornando instável a um  $\Lambda_{crit}$  inferior ao observado com M2 (ou que a taxa de acúmulo de erros computacionais é maior - como será tratado mais à frente). A perda prematura da estabilidade do escoamento indica uma malha "pobre", incapaz de fornecer soluções satisfatórias. A segunda, reside no perfil da interface deformada. A grande distância entre um ponto nodal e outro na malha M1 (ao longo da direção angular) acaba deixando as ondas com perfis poligonais, e não suaves como é observado em M2.

Malha	M1	M2
Tempo até a desestabilização	$3{,}34~{\rm s}$	$3,\!42 {\rm \ s}$
Altura da maior onda	0,5  mm	0,2  mm
Número de ondas	12	12

Tabela 7.1: Resultados obtidos com M1 e M2



Figura 7.5: Malha *M1* deformada (razão de espessuras igual a 1).

A presença destas pequenas distorções acaba por confirmar que M1 não possui um grau de refinamento satisfatório para a obtenção de bons resultados. Isto inviabiliza sua utilização como malha de teste nos próximos 2 passos deste processo iterativo, sendo portanto descartada. Assim, seguiremos utilizando a malha M2 para determinar aproximadamente o passo de tempo e o valor de  $\Lambda_{crit}$  nos dois casos de interesse. Entretanto, vale lembrar que esta pode não vir a ser a malha final utilizada na geração de resultados. É possível que malhas com grau de refinamento menores forneçam resultados de igual exatidão, ou mesmo que M2 ainda não seja capaz de reproduzir da melhor maneira possível os fenômenos envolvidos. Por isto o grau de refinamento final utilizado é definido somente no último quarto passo.

#### 7.1.2 Segundo Passo

De posse de uma malha capaz de gerar resultados coerentes do fenômeno de perda de estabilidade do escoamento, é necessário encontrar o valor crítico da razão entre forças viscosas e elásticas. O processo de determinação do valor de  $\Lambda_{crit}$  é um pouco complicado e consome bastante tempo, precisando ser realizado para cada razão de espessura de interesse. Como opção mais simples



Figura 7.6: Malha M2 deformada (razão de espessuras igual a 1).

e imediata, poder-se-ia resolver cada um dos casos considerando o regime permanente e utilizando algum método de continuação para variar (elevar) o valor de  $\Lambda$  do sistema. Quando não fosse mais possível encontrar uma solução do problema em regime permanente,  $\Lambda_{crit}$  (calculado pela eq. (2-3)) teria sido atingido. O procedimento foi assim executado considerando  $\Lambda$  inicial igual a 0,01 e aplicando uma continuação de ordem zero, fornecendo como resultados os valores apresentados na tabela 7.2.

	$\Pi = 1$	$\Pi = 2$
$\Lambda_{crit}$	2,6	1

Tabela 7.2: Valores de  $\Lambda_{crit}$  obtidos por continuação de ordem zero

Estes valores são razoavelmente próximos aos encontrados por Shankar et al (Shankar00) ao aplicar teoria de estabilidade fracamente não-linear na determinação dos parâmetros críticos de um escoamento de Couette em uma geometria plana. Entretanto, quando estes valores foram fixados como os máximos valores de  $\Lambda$  alcançados pelo escoamento durante os testes, não foi possível acompanhar o regime instável em um grande intervalo de tempo. O sólido flexível deformou-se exageradamente cruzando a fronteira superior (externa) do domínio fluido, havendo uma completa distorção dos domínios. Este comportamento sugere que o valor de  $\Lambda_{crit}$  aplicado é grande demais, sendo as tensões de cisalhamento resultantes muito elevadas. Foi cogitado que a inconsistência aparente do resultado em regime transiente residisse em algum erro de ordem computacional ou introduzido durante a modelagem numérica. Porém, após verificação exaustiva do modelo adotado, da rotina computacional e da discretização e formulação matemática, nenhum problema foi encontrado. A explicação para este estranho comportamento pode estar no fato de que os erros numéricos acumulados durante as sucessivas integrações temporais se tornam maiores quando o regime de escoamento se torna instável. Quando a transição é deflagrada as taxas de deformação tanto do domínio sólido, quanto do fluido, se tornam bastante altas, e os erros computacionais e devido a aproximações passam a ser mais relevantes. Uma discussão mais detalhada sobre este e outros assuntos é feita na seção 2 deste capítulo.



Figura 7.7: Gráfico representativo da norma da velocidade em função da razão de forças viscosas e elásticas de um escoamento sobre sólido flexível arbitrário em regime permanente.

Utilizamos neste trabalho a metodologia iterativa de tentativa e erro na determinação dos valores críticos de  $\Lambda$ . Esta consiste em, após fixado uma aceleração para a parede rígida, estabelecer um valor máximo para  $\Lambda$  ( $\Lambda_{max}$ ), calculado pela eq. (2-2) atingível durante o teste. Caso ocorram problemas de solução numérica ou a obtenção de resultados absurdos, reduzimos  $\Lambda_{max}$  e testamos novamente. Caso, por outro lado, não seja reportado o surgimento da instabilidade esperada, o valor de  $\Lambda_{max}$  é aumentado e é realizado um novo teste. A amplitude de aumento ou redução do valor de  $\Lambda_{max}$  é estabelecida pela metodologia de busca binária (como pode ser visto em (Apostila C)), que garante a convergência de  $\Lambda_{max}$  para  $\Lambda_{crit}$  com um menor número de iterações. Como estimativa inicial foi considerado o valor de  $\Lambda_{crit}$  encontrado através da solução do problema em regime permanente acoplada com a continuação de ordem zero. Os testes foram realizados utilizando-se a malha M2 determinada no passo anterior, e  $\Delta t = 0,01s$ . O tempo de duração de cada corrida foi de aproximadamente 16*h*.

As tabelas 7.3 e 7.4 apresentam alguns dos resultados obtidos qualitativamente para  $\Pi = 1$  e  $\Pi = 2$  respectivamente, enquanto que na tabela 7.5 observam-se os valores críticos finais encontrados e adotados. Comparandose estes últimos valores com os da tabela 7.2, nota-se uma diferença de mais de uma ordem de grandeza. Isto foi motivo de grande preocupação durante a execução dos testes, pois era um indicativo da existência de algum erro no trabalho. Na próxima seção discutiremos este problema e apontaremos para uma explicação aparentemente razoável para tal discrepância dos resultados. Vale lembrar que os valores de  $\Lambda_{crit}$  encontrados aqui podem não ser os valores definitivos, já que, não se sabe o grau de refinamento mínimo requerido para a malha nem o passo de tempo máximo possível. Contudo, não espera-se grande variações destes valores, mesmo com um aumento significativo do grau de refinamento da malha. Além disso estamos mais interessados na observação do fenômeno e de seus aspectos que em meramente determinar o valor crítico de  $\Lambda$ . Podemos trabalhar muito bem com valores um pouco acima de  $\Lambda$  sem perda de qualidade dos resultados.

$\Lambda$ máximo aplicado	Resultado
2,600	Regime instável
1,300	Regime instável
0,650	Regime instável
0,325	Regime instável
0,160	Regime instável
0,120	Regime instável
0,110	Regime instável
0,105	Regime instável
0,100	Regime instável
0,095	Regime estável
0,090	Regime estável
0,080	Regime estável

Tabela 7.3: Regime encontrado para cada  $\Lambda$  imposto ( $\Pi = 1$ )

#### 7.1.3 Terceiro Passo

O objetivo deste terceiro passo é determinar o maior valor de  $\Delta t$  para o qual ainda é possível obter bons resultados numéricos. Esta determinação foi feita através da solução do sistema de equações que modelam o problema através do software **CFD**, considerando 5 diferentes amplitudes para  $\Delta t$ : 0, 1s, 0, 05s, 0, 01s, 0, 005s, 0, 001s. Comparando-se valores de tempo transcorrido

$\Lambda$ máximo aplicado	Resultado
1,000	Regime instável
0,500	Regime instável
0,250	Regime instável
0,125	Regime instável
0,060	Regime instável
0,045	Regime instável
0,040	Regime instável
0,035	Regime instável
0,033	Regime instável
0,032	Regime estável
0,030	Regime estável

Tabela 7.4: Regime encontrado para cada  $\Lambda$  imposto ( $\Pi = 2$ )

Razão de espessura $\Pi$	$\Lambda_{crit}$	Re
1	0,0004	0,100
2	0,000075	0,033

Tabela 7.5: Número de Reynolds e  $\Lambda_{crit}$  encontrados por método iterativo

até o inicio da desestabilização, velocidade de propagação e número de ondas formadas, identificamos o melhor dentre os 5 valores para o acompanhamento do fenômeno. Valores destas grandezas são apresentados na tabela 7.6 para as 5 amplitudes, considerando uma razão de espessuras  $\Pi = 1$ , uma malha do tipo M2 e  $\Lambda_{crit}$  ( $\Lambda_{max}$ ) igual a 0, 10.

Comparando-se valores de tempo transcorrido até o inicio da desestabilização  $(t_{inst})$ , velocidade de propagação  $(V_{\lambda})$  e número de ondas formadas, identificamos o melhor dentre os 5 valores para o acompanhamento do fenômeno ao longo do tempo.

$\Delta t \ (s)$	$t_{inst}$ (s)	$V_{\lambda} \ (mm/s)$	Número de ondas
0,100	_	_	_
0,050	_	_	_
0,010	4,96	21	16
0,005	4,96	21	16
0,001	4,963	21	16

Tabela 7.6: Resultados obtidos para diversos valores de  $\Delta t$  ( $\Pi = 1$ )

Quando o programa foi ajustado para operar com valores de  $\Delta t$  iguais a 0,1s e 0,05s, nenhum regime de escoamento instável foi observado. Em ambos casos as soluções obtidas permaneceram estáveis para uma longa faixa de amostragem, até se atingir o instante de 9,30s, quando então o método de Newton deixou de convergir para alguma solução. Por outro lado, notase uma invariância nos resultados obtidos com  $\Delta t = 0,01s$ ,  $\Delta t = 0,005s$  e  $\Delta t = 0,001s$ , isto é, não se nota quaisquer diferenças nos valores de tempo transcorrido até o inicio da desestabilização do escoamento, de velocidade de propagação e número de ondas formadas nos dois casos. Torna-se claro a existência de um limite bem definido para a amplitude do passo de tempo. Para valores superiores a 0,01s não é possível observar o surgimento do regime instável, entretanto, para amplitudes inferiores a este mesmo valor não se nota melhoria na qualidade dos resultados. Sendo assim, as soluções obtidas até o presente momento são no mínimo coerentes, já que foram geradas com um  $\Delta t = 0,01s$ . Poderíamos a princípio trabalhar com qualquer valor de  $\Delta t$ entre 0,01s. Uma análise mais aprofundada utilizando valores entre 0,05se 0,01s mostram que a amplitude máxima de  $\Delta t$ , necessária para capturar o comportamento instável do escoamento, é de 0,012s. Todavia, para se evitar trabalhar com valores do passo de tempo com mais de um algarismo significativo, seguiremos utilizando  $\Delta t = 0,01s$  sem preocupações.

#### 7.1.4 Quarto Passo

Neste quarto e último passo estamos interessados em confirmar, ou ajustar, os valores dos parâmetros operacionais (grau de refinamento da malha,  $\Lambda_{crit}$  e amplitude do passo de tempo) obtidos até o presente momento. Em outras palavras, desejamos saber se o grau da refinamento da malha é suficientemente bom para fornecer resultados confiáveis; se o  $\Lambda_{max}$  está verdadeiramente próximo do valor crítico, e se a amplitude de  $\Delta t$  é capaz de captar os fenômenos que ocorrem ao longo de todo o escoamento. Do primeiro passo, sabemos que a simulação numérica realizada com a malha M2 fornece resultados coerentes com as previsões iniciais (deformação suave dos domínios), por possibilitar a observação da instabilidade baixos valores de *Re*. Tomandose esta malha como referência, outras foram criadas com graus de refinamento levemente diferentes (maiores e menores), dadas por:

- M3: Com 800 elementos (50 elementos angulares x 4 elementos radiais em cada subregião de cada domínio - Figura 7.8);
- M4: Com 1680 elementos (70 elementos angulares x 6 elementos radiais em cada subregião de cada domínio Figura 7.9)).

A malha M3 possui um grau de refinamento um pouco inferior ao de M2, enquanto que M4 possui um grau um pouco superior. Testando-se os três casos de diferentes razões de espessura com estas três malhas podemos podemos dizer se M2 é suficientemente boa ou não. Ou ainda se esta está



Figura 7.8: Malha M3. A linha laranja indica a fronteira dos domínios (razão de espessuras igual a 1).

sobre-dimensionada, o que resultaria num consumo excessivo não justificavel de esforços computacionais. Para isto, basta verificar os resultados obtidos com cada uma delas. Caso malhas com diferentes graus de refinamento forneçam os mesmos resultados, sabemos que a que possui menor número de elementos já é satisfatória. A tabela 7.7 apresenta resultados  $t_{inst}$ ,  $\Lambda_{crit}$ ,  $V_{\lambda}$  e número de ondas, com M2, M3 e M4 para razões de espessuras iguais a 1 e 2.

Quando reduzimos o número de elementos da malha M2 e resolvemos o escoamento transiente utilizando M3, há uma variação nos valores de alguns dos parâmetros estudados. A velocidade de propagação de ondas interfaciais sofre um expressivo aumento de 15% em relação ao encontrado com M2. Isto, no entanto, representa uma variação real de 3mm/s, sendo pouco representativo do ponto de vista de resultados, ainda mais quando consideramos o erro de medição dos deslocamentos. Já os valores de  $\Lambda_{crit}$  e do tempo até a perda de estabilidade do sistema sofrem uma redução considerável ao diminuirmos o grau de refinamento da malha. Estes dois últimos resultados são de especial importância pois mostram uma inadequação da malha M3 na geração de soluções. Mais à frente veremos que o valor crítico de  $\Lambda$  encontrado neste trabalho é completamente dependente da qualidade de resultados. Malhas mais grosseiras fornecem resultados com erros associados maiores, que acabam



Figura 7.9: Malha M4. A linha laranja indica a fronteira dos domínios (razão de espessuras igual a 1).

desencadeando a perda de estabilidade do escoamento mesmo com valores de  $\Lambda$ muito pequenos e em períodos de tempo mais curtos. Além disso, boas malhas devem necessariamente fornecer resultados iguais aos de malhas com grau de refinamento maior, o que obviamente não ocorre aqui. Assim, constata-se que M3 agrega uma quantidade de erros grandes à solução do problema, o que inviabiliza sua utilização como malha de testes.

Consideraremos agora o caso do aumento do grau de refinamento de M2, que gera a malha M4. Neste caso não são observadas quaisquer alterações relevantes em  $t_{inst}$ ,  $V_{\lambda} \in \Lambda_{crit}$  em relação a M2. Isto sugere que a discretização dos domínios utilizando a malha M2 fornece resultados satisfatórios, os quais são insensíveis a aumentos no grau de refinamento. Em outras palavras, a elevação do número de elementos por domínio a partir de M2 não agrega qualidade aos resultados. Além do mais a solução do sistema de equações discretizados com M4 promove um aumento considerável no tempo computacional consumido para cada iteração do método de Newton (cerca de 150% em relação a M2), o que torna sua utilização menos atrativa. Como M2 é capaz de fornecer resultados satisfatórios aliados a um consumo computacional relativamente pequeno, verifica-se que esta é a mais adequada das três propostas. Poder-se-ia realizar um estudo mais aprofundado numa tentativa de encontrar uma malha

П	Malha	$t_{inst}$ (s)	$\Lambda_{crit}$	$V_{\lambda} \ (\rm mm/s)$	Número de
					ondas
1	M2	4,96	0,10	21	16
	M3	4,71	0,07	24	16
	M4	4,96	0,10	24	16
2	M2	8,00	0,025	10	8
	M3	7,89	0,019	12	8
	<i>M</i> 4	8,02	0,026	10	8

Tabela 7.7: Resultados utilizando malhas M2,  $M3 \in M4$ 

com menor número de elementos ainda capaz de fornecer resultados tão bons quanto M2. Contudo, os esforços gastos neste estudo não seriam recompensados por uma redução tão significativa no tempo de processamento.

Como não houve alteração no grau de refinamento da malha, não há a necessidade de se verificar a adequação da amplitude do passo de tempo e de  $\Lambda_{crit}$ , pois estes já foram estabelecidos nos passos 2 e 3 deste processo. Dessa forma os valores dos parâmetros de interesse são apresentados na tabela 7.8.

П	$t_{inst}$	$\Lambda_{crit}$	$V_{\lambda}$	Número de	Altura de	Comprimento
				ondas	onda	de onda
1	$4{,}96~{\rm s}$	0,100	21  mm/s	16	$0,155 \mathrm{~mm}$	4,71 mm
2	$8,00 \mathrm{~s}$	0,025	10  mm/s	8	$0{,}225~\mathrm{mm}$	9,42 mm

Tabela 7.8: Parâmetros que caracterizam o sistema instável

#### 7.2 Considerações da Sensibilidade do Sistema à Prescrição de Velocidade da Parede Rígida Deslizante

Conforme mencionado anteriormente, neste trabalho foi utilizado uma metodologia diferente da aplicada na literatura clássica deste assunto. Enquanto nos trabalhos pioneiros prescreve-se tensão de cisalhamento junto à parede rígida deslizante, o que permite a livre variação da taxa de cisalhamento quando a desestabilização se inicia, aqui é imposta a velocidade desta mesma parede, deixando a tensão de cisalhamento variar ao longo do tempo. Este procedimento foi escolhido no início do trabalho sem que fosse imaginado os problemas que se sucederiam. Viemos a despertar para tal fato apenas no começo da análise dos resultados, em um alto grau de avanço do projeto, o que impossibilitou a reformulação metodológica em tempo hábil. Rever a metodologia implicaria em construir novas funções para o software **CFD** e a tomada de uma nova bateria de testes, o que tomaria um tempo muito grande e não disponível. Infelizmente os problemas induzidos pela diferença na metodologia, aliados a erros numéricos, levam a certas limitações no estudo do fenômeno, pois, a manutenção da velocidade do fluido na fronteira com a parede rígida não permite um controle adequado do escoamento instável. Assim, o estudo, que seria bem abrangente, teve que ser reduzido a uma análise de caráter mais qualitativo que quantitativo. A melhor maneira de compreender os "efeitos colaterais" produzidos pelo uso do controle de velocidade da parede deslizante é estudando separadamente como cada metodologia afeta o sistema. A análise a seguir foi baseada em resultados obtidos com o software **CFD** (velocidade controlada) e por trabalhos anteriores (tensão de cisalhamento controlada). Após esta discussão, os problemas introduzidos pela metodologia adotada neste trabalho se tornarão mais claros.

#### 7.2.1

### Análise do Processo de Desestabilização do Sistema com uso de Tensão de Cisalhamento Controlada

A maneira como um escoamento de Couette sobre um sólido flexível, com tensão de cisalhamento controlada, perde sua estabilidade já foi explicada no capítulo 1 deste trabalho. Na explanação foram apresentados os trabalhos experimentais de Kumaran et al. (Kumaran99) e Eggert et al. (Eggert04), que consideraram um sistema composto por duas placas paralelas circulares, separadas por um espaço contendo um gel flexível sobre o qual o fluido escoa. O caso aqui estudado é um pouco diferente, já que se baseia em uma geometria cilíndrica. Escoamentos neste tipo de geometria podem sofrer a ação de fortes efeitos de curvatura caso a razão  $H/R_{sup}$  não seja suficientemente pequena, o que levaria o sistema a um comportamento diferente do caso plano, possibilitando, inclusive, a formação de vórtices de Taylor em alguns casos especiais. Em nossos dois casos de estudo os raios de cada cilindro foram escolhidos de maneira a minimizar os efeitos de curvatura, reduzindo-se a razão  $H/R_{sup}$  sem, entretanto, comprometer a solução do sistema pela exigência de um número muito grande de elementos para discretizar os domínios. Logo, todas as explicações feitas no capítulo 1 permanecem válidas para o nosso caso, tornando desnecessário repetir todo o processo de desestabilização do escoamento. Porém, uma análise mais focada no comportamento das grandezas envolvidas durante o fenômeno pode ser bastante interessante na compreensão das diferenças introduzidas pela condição de contorno imposta. A seguir apresentaremos uma análise baseada na extrapolação dos resultados obtidos por Eggert e Kumaran, para o nosso objeto de interesse. Não há até o presente momento qualquer estudo que utilize uma geometria cilíndrica similar à nossa, que permita afirmar que esta é uma boa aproximação. Mas acredita-se não estar errando muito ao se fazer tal consideração.



Figura 7.10: Tensão de cisalhamento aplicada ao fluido em função do tempo.

O sistema tratado é bem conhecido e dispensa apresentações de detalhes. Consideremos que o fluido e o sólido encontrem-se inicialmente em repouso, completamente livres de forças externas (incluindo forças de campo). A figura 7.10 apresenta a tensão de cisalhamento aplicada ao fluido na fronteira com o cilindro externo ao longo do tempo. No instante t = 0 a parede rígida é posta em movimento impondo-se uma tensão de cisalhamento que varia linearmente com o tempo no início do escoamento (regiões  $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$  da figura 7.10). Quando um determinado valor da tensão de cisalhamento  $\tau_{max}$  previamente escolhido é atingido, esta passa a ser mantida constante, como mostrado na figura 7.10 (região C). Iremos supor inicialmente que  $\tau_{max}$  é igual à tensão de cisalhamento crítica  $\tau_{crit}$ , para a qual ocorre a perda de estabilidade do escoamento. O fluido é considerado Newtoniano e por isso sua viscosidade real não varia. Entretanto, a viscosidade aparente do líquido, medida pela eq. (2-6) pode variar, caso haja algum tipo de transição ou fenômeno ocorrendo no escoamento no interior do sistema. O gráfico apresentado na figura 7.11 representa o comportamento da viscosidade aparente em função do tempo para este caso. Nos instantes iniciais quando o fluido sai do repouso, existe uma inércia que precisa ser vencida (região  $\mathbf{A}$  das figuras 7.10 e 7.11). Os esforços necessários para mover a placa rígida nesta fase são relativamente altos, mas conforme a placa é acelerada estes decaem rapidamente. Esta variação de esforços requeridos produz uma leve oscilação no valor da viscosidade aparente  $(\mu_{ap})$  com valor médio aproximadamente igual a  $\mu$  (viscosidade real). Quando todas as forças inerciais são vencidas a viscosidade aparente converge para a viscosidade real  $(\mu_{ap} = \mu)$ , permanecendo constante neste valor mesmo com a elevação da tensão  $\tau$  imposta ao fluido (região **B** das Figs. 7.10 e 7.11). Quando o valor crítico da tensão de cisalhamento  $\tau_{crit}$  é atingido, observa-se um vertiginoso aumento de  $\mu_{ap}$  seguido de uma forte oscilação em torno de um valor médio muito superior a  $\mu$  (região C das figuras 7.10 e 7.11). Este aumento abrupto da viscosidade aparente é um reflexo da variação da taxa de cisalhamento junto à parede e indica que uma transição está ocorrendo no sistema, enquanto que sua oscilação sugere uma periodicidade no escoamento instável pós-transição.



Figura 7.11: Viscosidade aparente em função do tempo para tensão de cisalhamento controlada imposta ao fluido.

Caso a tensão de cisalhamento máxima  $\tau_{max}$  seja pouco maior que a tensão crítica, o sistema apresentará um comportamento semelhante ao descrito, com diferenças apenas no valor da freqüência e amplitude de oscilação de  $\mu_{ap}$ . Por outro lado, caso  $\tau_{max}$  seja inferior a  $\tau_{crit}$ , obviamente não se observa o fenômeno de variação abrupta de  $\mu_{ap}$ , confirmando que não há qualquer transição no escoamento neste caso. A situação de grande relevância é o caso onde  $\tau_{max}$  é muito maior que  $\tau_{crit}$ . Resultados experimentais de Kumar e Eggert indicam que quando isto ocorre não há escoamento de fluido no espaço entre a placa rígida e o sólido deformável. Logo, vemos a existência de uma faixa de valores de  $\tau$  para os quais é possível observar o escoamento instável. A existência do limite superior de operação ( $\tau_{limitsup}$ ) representa um fator limitante do uso de velocidade controlada da parede rígida. O motivo disto será visto em maiores detalhes na próxima subseção quando tratarmos de controle de velocidade da parede deslizante.

#### 7.2.2

### Análise do Processo de Desestabilização do Sistema com uso de Controle de Velocidade da Parede Rígida

Tomemos o sistema considerado no caso anterior novamente em repouso. No instante t = 0 a parede rígida externa do cilindro é colocada em movimento impondo-se uma aceleração angular constante com o tempo no fluido junto a esta fronteira. Quando uma velocidade linear máxima  $V_{max}$  é atingida, cessa-se a aceleração da placa e esta passa a se movimentar a uma taxa constante (Figura 7.12). Este procedimento é bastante semelhante ao caso anteriormente apresentado, como única diferença a grandeza controlada ao longo do processo. Ao analisarmos o comportamento da viscosidade aparente com o tempo, verificamos algumas diferenças entre os resultados obtidos nos dois casos. A figura 7.12 apresenta o gráfico  $\mu_{ap} Vs t$  obtido com o controle da velocidade da parede do cilindro externo. Nos primeiros instantes, quando a placa está sendo acelerada, a viscosidade aparente apresenta valores inferiores aos da viscosidade dinâmica do fluido. Estes valores de  $\mu_{ap}$  crescem a uma taxa assustadoramente alta ocorrendo uma sobrepassagem em poucos centésimos de segundo. Após a sobrepassagem o valor de  $\mu_{ap}$  decresce até convergir para  $\mu$ (região **A** da figura 7.13). Isto ocorre devido à inércia que deve ser vencida no começo do escoamento para que a placa rígida seja posta em movimento. Conforme esta parede é acelerada, a inércia vai sendo vencida, e o valor de  $\mu_{ap}$  cai convergido para  $\mu$  (viscosidade real do fluido) em um curto período de tempo. Enquanto o escoamento prossegue sendo acelerado, até que se atinja a velocidade máxima imposta na fronteira, a viscosidade aparente permanece constante e igual à viscosidade dinâmica do líquido. Aqui, consideraremos dois casos distintos:

- A velocidade máxima da placa é igual à velocidade crítica, ou seja, à tensão de cisalhamento resultante da aplicação de  $V_{max}$  é igual a tensão crítica  $(V_{max} = V_{crit} = V(\tau_{crit}));$
- A velocidade máxima da placa é inferior à velocidade crítica ( $V_{max} < V_{crit} = V(\tau_{crit})$ ).



Figura 7.12: Velocidade aplicada na parede rígida em função do tempo.

Quando o valor de  $\Lambda$  aplicado em um sistema é superior ao crítico as forças viscosas exercidas pelo líquido são suficientes para vencer as forças elásticas do sólido. Em contrapartida, quando  $\Lambda$  apresenta valor inferior ao crítico tais forças viscosas não são capazes de se sobrepor às forças elásticas. Entretanto, a desestabilização do sistema não depende somente de um simples balanço de forças. O mecanismo que atua na desestabilização de escoamentos de Couette sobre sólidos flexíveis é a transferência de energia do fluido para



Figura 7.13: Viscosidade aparente em função do tempo para velocidade da parede controlada.

o meio devido ao trabalho de deformação. Em outras palavras a posição da interface sólido-líquido sofre flutuações em resposta às tensões exercidas pelo fluido. Quando a taxa de transferência de energia do líquido excede a taxa de dissipação do sólido, este se deforma dando origem a um regime instável de escoamento. Logo, quando afirmamos que as tensões viscosas se sobrepõem (ou não) às tensões elásticas, queremos dizer que estas tensões são capazes de provocar (ou não) pequenas deformações na interface.

Quando a velocidade imposta na fronteira com o cilindro externo for capaz de promover uma tensão de cisalhamento igual à tensão crítica ( $\tau_{crit}$ ), o sistema perderá sua estabilidade. O valor da viscosidade aparente neste momento sofre um vertiginoso aumento e passa a oscilar ao longo do tempo, como reflexo do comportamento da tensão de cisalhamento média imposta ao fluido. As amplitudes de oscilação da viscosidade aparente e das tensões podem ser muito altas durante o regime pós-transição. Em meio a este processo,  $\tau$  pode atingir valores superiores a  $\tau_{limit}$  fazendo cessar o escoamento. Como não há movimento de fluido a tensão de cisalhamento neste instante cai à zero, e o solido flexível retorna a sua configuração inicial, o que permite que o líquido volte a escoar. Tal processo pode se repetir por diversas vezes levando não somente o escoamento a perder sua estabilidade, mas tornando todo o sistema instável. Sob o ponto de vista computacional, quando  $\tau$  atinge valores absurdamente altos, a expressão utilizada para aproximar a derivada segunda do espaço em função do tempo pode levar a erros grosseiros que impossibilitam a convergência do método de Newton para qualquer solução. Mesmo quando o método de Newton converge, o conjunto de soluções alcançadas são normalmente absurdas, formando perfis de exagerada deformação.

Assim, o que obtemos da simulação é apenas uma pequena faixa com no máximo uma banda de oscilação dos valores de  $\tau$ , logo em seguida o sistema não pode mais ser resolvido, e o programa para. Em casos reais, durante

sua oscilação a tensão de cisalhamento na fronteira externa também pode atingir valores inferiores a  $\tau_{crit}$ . Neste caso a instabilidade do escoamento não é cessada, devido ao conhecido comportamento não-linear do sistema, mas o fluido poderia voltar a escoar. Além disso, mesmo que  $\tau$  caia a valores muito pequenos (suficientes para reestabilizar o escoamento), como a velocidade do fluido na parede é controlada, o sistema rapidamente retorna ao estado instável, sendo, portanto, sempre impedido o alcance de um novo estado permanente.



Figura 7.14: Viscosidade aparente em função do tempo para velocidade da parede controlada.

Quando a velocidade imposta ao cilindro externo produz uma tensão de cisalhamento pouco inferior a  $\tau_{crit}$ , não deveria haver a perda de estabilidade do escoamento. E, tanto a tensão de cisalhamento média na parede, quanto a viscosidade aparente devem permanecer constantes independente do período de teste. De fato, é este o comportamento esperado para sistemas reais como mostrado na figura 7.14. Todavia, o trabalho aqui desenvolvido se baseia em simulação numérica, onde as equações diferenciais são aproximadas por equações algébricas, cujas soluções apresentam pequenas divergências com relação à solução analítica. Para cada solução encontrada há um erro relacionado, e sendo o problema transiente estes erros vão se acumulando e produzindo pequenas divergências nos resultados. Estas divergências podem provocar uma falsa desestabilização. A maneira como isto ocorre fica mais clara quando observamos os gráficos  $\mu_{ap}$  Vs t e V<sub>ext</sub> Vs t das figuras 7.15 e 7.16, respectivamente.

Quando submetido a uma velocidade inferior a velocidade crítica, a tensão de cisalhamento média na fronteira externa permanece num patamar constante ao longo do tempo. Como conseqüência a viscosidade aparente também deve se manter constante, como indicado na região  $\mathbf{B}$  do gráfico apresentado na figura 7.15. Nesta etapa os erros computacionais introduzidos pelo método numérico não são capazes de interferir na solução do problema (ou interferem muito pouco). Todavia, conforme o número de integrações temporais



Figura 7.15: Viscosidade aparente em função do tempo



Figura 7.16: Velocidade imposta na fronteira do domínio fluido devido movimento do cilindro externo em função do tempo

cresce, o erro acumulado pode se tornar significativamente grande de maneira a introduzir divergências na solução real do problema. Neste caso, alguns pontos nodais na interface fluido-sólido podem ser deslocados de sua posição verdadeira, originando uma variação na espessura das camadas de fluido e de sólido propiciando a formação de gradientes de pressão. Nestas condições a flutuação na posição da interface é causada pelos erros computacionais acumulados ao longo das sucessivas integrações temporais. Como o modelo de Mooney-Rivlin não leva em conta dissipação viscosa do meio, a energia absorvida durante o trabalho de deformação é acumulado no sólido, levandoo a se deformar tornando o escoamento instável. A situação é agravada pela forte tendência dos erros se tornarem maiores conforme o número de integrações aumenta. Como conseqüência da transição a viscosidade aparente começa a oscilar ao longo do tempo, refletindo o comportamento da tensão de cisalhamento na fronteira com o cilindro externo. As variações nos valores de  $\mu$ começam com amplitudes muito pequenas, mas que aumentam continuamente conforme o regime instável se desenvolve (região  $\mathbf{C}$  da figura 7.15). As tensões de cisalhamento, então, atingem valores cada vez mais altos até que não se consiga mais resolver o sistema de equações. Caso a condição de contorno aplicada na fronteira externa do fluido prescrevesse a tensão de cisalhamento, ainda assim o sistema teria um forte potencial a se tornar instável. Entretanto, as tensões nos meios não excederiam um valor limite acima do qual não se obtém soluções para o problema.

Podemos concluir destes resultados que, a desestabilização do sistema é independente do valor do  $\Lambda$  imposto. De uma maneira geral, o alcance de um regime instável para este problema é puramente uma questão de tempo. Deve-se ter em mente que o tempo de desestabilização  $t_{inst}$  e  $\Lambda$  são grandezas inversamente proporcionais. Quanto maior o valor de  $\Lambda$  aplicado, menor é o tempo de desestabilização. Por outro lado, quanto menor o valor do  $\Lambda$  aplicado, maior é o tempo até que a desestabilização seja atingida. Isto provavelmente vem do fato de que, quanto menor forem as forças viscosas maior deve ser a deformação permanente proveniente do acúmulo de erros computacionais para que o sistema se torne instável. Em outras palavras é preciso que o sólido seja deformado, não fisicamente, mas computacionalmente, com amplitude suficiente para promover um gradiente de pressões que se sustente e seja capaz de gerar deformações elásticas.

Nos testes realizados durante a confecção deste trabalho utilizamos um tempo de amostragem de no máximo 10,0s. Assim os valores de  $\Lambda_{crit}$  obtidos, são referentes aos menores valores de  $\Lambda$  para os quais é atingido o regime instável. Optou-se por utilizar valores pequenos de  $\Lambda$  para aumentar o tempo de amostragem dentro do regime instável. A existência de um valor limite, abaixo do qual o escoamento não se desestabiliza, é desconhecido. Alguns testes mostraram que reduzindo em 10% os valores dos  $\lambda_{crit}$  considerados seria necessário um tempo de amostragem de cerca de 27s (aproximadamente) para que fosse possível captar o fenômeno. É bem provável que reduzindo o valor da razão entre forças viscosas e elásticas encontre-se um tempo de amostragem requerido tão grande que seria possível se considerar como infinito. Mas um estudo mais específico sobre o assunto é necessário para averiguar a existência de um valor crítico computacional.

A desestabilização do sistema provocada por mecanismos computacionais é extremamente indesejada, já que, mascara o comportamento rea do sistema. A principal fonte de erros é provavelmente o modelo de discretização utilizado para a derivada segunda do espaço em função do tempo. Ao discretizarmos por diferenças finitas devemos ter muito cuidado com relação à estabilidade da equação de aproximação. O desenvolvimento de uma equação de quatro pontos recuada no tempo com passos variáveis, sem testes criteriosos e rigorosos, pode não ter sido uma boa alternativa. A análise de estabilidade da equação pode ser utilizada como um indicador primário na averiguação dos limites de consistência das soluções. Caso fique comprovada a ineficácia neste modelo, um método mais robusto pode ser utilizado a fim de minimizar os efeitos instáveis da solução.

### 7.2.3 Conclusão

A comparação dos resultados obtidos por Kumar e Eggert (Eggert04), e por Kumaran e Muralicrishnan (Kumaran99), com as soluções geradas pelo software CFD sugere que o fenômeno de perda de estabilidade do escoamento em questão pode ser controlado através do controle da tensão de cisalhamento da parede rígida externa. Isto é, pode-se iniciar e concluir a desestabilização do escoamento meramente controlando o valor de  $\tau$  imposto ao meio. Todavia, quando controlada a velocidade da parede rígida (e conseqüentemente a taxa de cisalhamento) não se tem um controle do processo e por isso é inapropriado para um estudo mais rigoroso. Este trabalho foi guiado até este estágio supondo controle de velocidade da parede externa. Seria impraticável nesta fase, programar um modo de controle de tensão no software, e por isso continuaremos utilizando este modo de imposição de quantidade de movimento. A fim de aumentar o período de amostragem de dados utilizamos velocidade subcrítica (abaixo da necessária para iniciar a transição). Esta metodologia pode não ser a ideal, mas permitirá a obtenção de resultados bastante interessantes sobre o comportamento do escoamento instável.

#### 7.3 Resultados

Nesta seção apresentaremos os resultados propriamente ditos, obtidos através da simulação numérica do escoamento de Couette sobre o sólido flexível. Os parâmetros resultantes mais importantes a serem analisados são: o perfil de velocidades adqüirido pelo escoamento ao longo de seu processo de desestabilização, o perfil de deformações dos domínios sólido-líquido, notando-se especialmente o número de ondas formadas na interface e comprimento e amplitude das mesmas, tempo até a perda de estabilidade do sistema, velocidade e aceleração de propagação de ondas interfaciais, e freqüência do regime instável. Infelizmente dois casos de estudo é muito pouco para se obter uma completa compreensão dos aspectos envolvidos no fenômeno. Entretanto, como trabalho pioneiro de simulação numérica, esperamos esclarecer algumas dúvidas a respeito do comportamento do sistema durante o escoamento instável.

O principal objetivo da simulação numérica do escoamento é o de com-

preender como este ocorre após atingir a instabilidade. Para tanto devemos estudar como os meios sólido e líquido se deformam durante este processo de desestabilização. Consideremos inicialmente a figura 7.17 onde é apresentado o comportamento da viscosidade aparente em função do tempo, para o escoamento no sistema com  $\Pi = 1$ . Conforme explicado na seção anterior, quando a placa rígida externa é posta em movimento, o valor da viscosidade aparente medida através da eq. (2-6) apresenta um rápido crescimento seguido de um pico no qual seu modulo é bem maior que o valor da viscosidade real do líquido Newtoniano. Nesta primeira etapa do escoamento nenhuma deformação é observada na interface entre os meios, sendo esta variação no valor de  $\mu_{ap}$  devida unicamente às forças inerciais que necessitam ser vencidas para que a superfície deslizante entre em movimento. Este comportamento é bastante previsível, já que, a viscosidade aparente é medida através da relação entre taxa e tensão de cisalhamento  $\tau$ .



Figura 7.17: Viscosidade aparente em função do tempo para velocidade da parede controlada com  $\Pi = 1$ .

Como a força necessária para se tirar o sistema do repouso é maior que a necessária para mantê-lo em movimento, a existência de uma ultrapassagem ("overshoot") seguida da convergência para o valor absoluto de  $\mu$  é esperada sem a implicação em qualquer transição de regime. Sendo o problema é simétrico são apresentadas apenas a metade superior da seção do cilindro, sendo desnecessária a representação da outra metade. As únicas tensões que atuam na interface são as tensões de cisalhamento impostas ao sólido pelo movimento do fluido (conseqüencia da aplicação de um movimento da placa rígida externa), lembrando que o campo de pressões no fluido é homogêneo. Como a face interna do sólido flexível permanece ancorada ao cilindro interno rígido, as únicas deformações observadas neste domínio são pequenos deslocamentos tangenciais à direção do fluxo (deformação puramente angular). O escoamento neste instante se comporta exatamente como em um escoamento de Couette no interior do espaço anular de dois cilindros rígidos concêntricos, onde o perfil de velocidades varia linearmente ao longo do eixo radial.

Retornemos à figura 7.17. A viscosidade aparente é mantida constante durante todo o período em que o escoamento se mantém estável. Quando o número de integrações no tempo cresce e se aproxima de 496 (resultando num intervalo de 4,96s) deformações começam a surgir na interface sólidolíquido. Estas primeiras deformações apresentam pequena magnitude, sendo quase imperceptíveis a olho nú. Como o módulo da velocidade imposta ao fluido na fronteira externa é o mesmo em qualquer ponto, a alteração da espessura do canal leva a uma variação do campo de pressões do escoamento. Nas regiões onde há uma redução da espessura do espaço anular os elementos infinitesimais de fluido sofrem um substancial aumento de velocidade, resultando em uma queda de pressão. Por outro lado, nas regiões onde a interface é deslocada radialmente para o centro do cilindro (formando depressões) os elementos de fluido sofrem uma redução no modulo de velocidade, refletindo num aumento da pressão local. A existência de regiões de alta e baixa pressões provocam um aumento nas amplitudes de deformação sofridas pelos meios fazendo com que ondulações angularmente distribuidas surjam ao longo de toda a interface. As figuras 7.22, 7.23, 7.24 e 7.25 apresentam os perfis de deformação dos meios nos instantes  $4, 20s, 5, 30s, 6, 00s \in 6, 50s$  onde é possível observar a surgimento das ondulações interfaciais, já nas figuras 7.18, 7.19, 7.20 e 7.21 observa-se os campos de velocidade do escoamento nestes mesmos instantes. As regiões de mais baixa pressão no fluido dão origem aos picos (cristas), enquanto que as zonas de mais alta pressão originam os vales. Para o caso em que  $\Pi = 1$  são formadas 16 ondas com aproximadamente o mesmo comprimento de onda de 4,71mm.

As ondulações apresentam característica dinâmica, ou seja, se propagam ao longo da interface no sentido do fluxo do escoamento. A explicação para esta característica se deve aos baixos valores dos módulos de elasticidade e cisalhamento do meio, aliados à incessante movimentação do cilindro rígido externo. Como os valores destes dois módulos são relativamente baixos, o sólido







Figura 7.22: Perfil de deformações no instante 4,20s, para  $\Pi = 1$ .



Figura 7.23: Perfil de deformações no instante 5,30s, para  $\Pi=1.$ 



Figura 7.24: Perfil de deformações no instante 6,00s, para  $\Pi=1.$ 

se torna suscetível a gradientes de pressão, e (ou) a tensões aplicadas, se deformando muito facilmente. Como a formação das ondas gera automaticamente um gradiente local de pressões (tomando como referência uma ondulação), o sólido responde se deformando continuamente. Em um sistema semelhante ao



Figura 7.25: Perfil de deformações da metade superior dos domínios sólido e líquido no instante t = 6,50s, para sistema com  $\Pi = 1$ .

nosso onde, entretanto, as ondulações são esculpidas em um sólido rígido, é reconhecido que as zonas junto aos vales possuirão pressões mais elevadas, enquanto que nas regiões junto às cristas os valores de pressão são reduzidos. Ao considerarmos um sólido flexível, as regiões de mais alta e mais baixa pressões irão interagir com o meio, de maneira que, as regiões de baixa pressão no fluido "puxam" o meio sólido, enquanto que, as de alta pressão "empurram" o mesmo. Assim, conforme as ondas são formadas o gradiente de pressão força os picos a se deslocarem no sentido do escoamento na tentativa de atingir um estado de equilíbrio. Como a placa rígida permanece em movimento, e todas as ondas se deslocam na mesma direção com velocidades muito próximas (possivelmente iguais) não é possível o alcance do equilíbrio, já que há sempre um gradiente de pressão local (no interior de uma onda), o que torna o sistema instável. As regiões entre os cumes dos picos e os menores pontos dos vales subseqüentes (no sentido do escoamento) apresentam perfis de pressões de menores intensidades ("puxam" os picos), enquanto que nas regiões entre os menores pontos dos vales e os cumes dos picos subseqüentes apresentam perfis de pressões maiores ("empurram" os picos). O perfil de variação de pressão no fluido e no sólido podem ser observados na figura 7.26 onde pressões menores são representadas por tons mais escuros de azul, enquanto que pressões mais elevadas por tons mais claros.

O padrão de escoamento básico do fluido não apresentou grandes alterações, e se mantém semelhante a um escoamento de Couette entre placas rígidas. As únicas diferenças notáveis são a aceleração do fluido junto aos picos de onda, e sua desaceleração nos vales, fazendo com que as componentes de velocidade do fluido sejam maiores nas primeiras e menores nas segundas. Não foi observado qualquer formação de vórtices no escoamento, como era esperado no início, mas não podemos descartar sua existência em casos especiais. Alguns testes realizados, considerando escoamento com maiores números de Reynolds, apontaram a formação de vórtices que se estendem ao longo dos vales das ondas. Contudo, para esta observação, é necessária a prescrição de uma velocidade maior junto à parede externa fazendo com que os resultados sejam obtidos para um intervalo muito curto de tempo.



Figura 7.26: Campo de pressões do escoamento no instante t = 6,40s, para sistema com  $\Pi = 1$ .



Figura 7.27: Tensões sofridas pelo sólido durante a propagação de ondas.

É interessante chamar a atenção para a maneira como ocorre a deformação do meio durante a passagem da onda em uma dada região do cilindro. Kumar e Gkanis (KumarG05) em uma análise a respeito da propagação de ondas interfaciais em escoamentos sobre sólidos flexíveis, determinaram que os picos são comprimidos (sofrem tensões angulares compressivas) durante a passagem das ondas, enquanto que os vales são tracionados (sofrem tensões angulares trativas) (Figura 7.27). A comprovação deste comportamento é feita através de uma rápida observação de linhas materiais de  $X_0$  constante. Estas linhas têm como propriedade conter um mesmo conjunto de elementos materiais, tanto no domínio físico quanto no domínio de referência. Sendo no domínio físico representado por retas, necessitamos apenas verificar seus perfís flexão para dizer em quais regiões o meio sofre quais tipos de tensão interna. Junto aos picos as linhas  $X_0 = Cte$  encontram-se fletidas formando curvas com concavidade voltada para as zonas de vales, revelando que esforços compressivos de fazem presentes na região. Por outro lado, as linhas materiais de  $X_0$ constante junto às zonas de vales se encontram fletidas formando curvas com concavidade voltadas para o centro destas zonas, isto é, voltadas para o menor

Instante de tempo (s)	Velocidade (mm/s)
5, 5	6, 3
6,0	10
6, 2	15
6, 5	21
6, 7	21
7,0	21

ponto do vale da onda, confirmando a ação de esforços trativos exercidos pelo próprio meio na região.

Tabela 7.9: Velocidade de propagação de ondas Vs. tempo  $(\Pi = 1)$ 

As ondas se formam, obviamente, a partir do sólido não-deformado radialmente e crescem até atingirem uma altura máxima, que neste caso foi de 0.31mm (1.24mm de altura de crista e 9.3mm de espessura no vale a partir do cilindro interno). Durante seu processo de crescimento as ondas se propagam com uma aceleração de aproximadamente  $0, 6rad/s^2$  resultando em uma aceleração linear média de cerca de  $12mm/s^2$ . Ao se atingir a velocidade de 21mm/s é cessada a aceleração, e as ondas passam a se propagar a uma velocidade constante. A evolução das ondas interfaciais se propagando nos instantes  $6,50s, 6,60s \in 6,70s$  pode ser observada nas figuras 7.25, 7.29 e 7.30 respectivamente. A tabela 7.9 apresenta os valores de velocidade de propagação de ondas para alguns instantes de tempo com  $\Pi = 1$ . É digno de nota que a velocidade de propagação de ondas encontrada é igual à velocidade imposta ao fluido pela placa superior deslizante. No entanto, este é apenas um dado isolado e não pode ser utilizado para concluir que a velocidade de propagação de ondas é igual a velocidade imposta ao meio. Tal proposição pode até estar correta, mas não estará nos objetivos deste trabalho analisar sua veracidade, até mesmo porque o estudo de apenas dois casos não é o suficiente para se obter conclusões sólidas sobre o assunto.

Observando-se a figura 7.17 é fácil descobrir quando as primeiras deformações radiais surgem no sólido flexível, basta observar o instante no qual a viscosidade aparente passa a sofrer oscilações no tempo. Em uma rápida observação verifica-se que isto ocorre em aproximadamente t = 4,96s, porém é difícil afirmar com certeza pois as primeiras deformações são pequenas demais para serem captadas pelo olho humano. No entanto, não devemos estar errando em muito assumindo este valor. Para finalizar o estudo dos resultados de  $\Pi = 1$ , é interessante analisar as freqüências que dominam o escoamento instável medidas a partir das oscilações nos valores de  $\mu_{ap}$ . A figura 7.31 apresenta o espectro de freqüências encontrado através do software MatLab. Observa-se claramente a existência de uma freqüência dominante de 39Hz além de uma secundaria







Figura 7.29: Perfil de deformações no instante 6,60s, para  $\Pi = 1$ .



Figura 7.30: Perfil de deformações no instante 6,70s, para  $\Pi = 1$ .

de 7Hz. A existência de uma freqüência dominante é notável mesmo na figura 7.17, e está de acordo com os resultados encontrados por Kumar e Eggert (Eggert04), ainda que estes possuam resultados numéricos diferentes.

O comportamento físico do fenômeno ocorrendo no caso de estudo em que  $\Pi = 2$  é muito semelhante ao já explicado para  $\Pi = 1$ . Os perfis de



Figura 7.31: Espectro de freqüências do escoamento instável ( $\Pi = 1$ ).

deformação dos meios são apresentados nas figuras 7.35, 7.36 e 7.37, enquanto que os campos de velocidade são mostrados nas figuras 7.32, 7.33, 7.34, para os instantes 6, 50s, 8, 50s = 9, 50s, respectivamente. A tabela 7.10 apresenta os valores de número de ondas formadas, comprimento e altura das mesmas, e sua velocidade de propagação e aceleração. Já a figura 7.38 mostra a variação da viscosidade aparente ao longo do tempo.

Grandeza	Valor
Número de ondas	8
Comprimento médio de ondas	9,42mm
Altura de onda	0,225mm
Velocidade terminal de propagação de ondas	10mm/s
Aceleração de ondas	$3,7mm/s^{2}$

Tabela 7.10: Parâmetros que caracterizam o sistema instável ( $\Pi = 2$ )

Como pode ser observado, com o aumento da razão de espessura sólidofluido ocorre uma redução do número de ondas formadas na interface. É interessante notar que estas ondas interfaciais, apresentam amplitudes de deformação menores que para a razão  $\Pi = 1$ , o que nos leva à crer que quanto maior o número de ondas interfaciais formadas menor será a amplitude das mesmas. Este resultado tem bastante coerência do ponto de vista físico, devido à restrição de incompressibilidade do sólido flexível. Durante a formação das



Figura 7.32: Campo de velocidade do escoamento da metade superior do sistema no instante t = 6, 5s ( $\Pi = 2$ ).



Figura 7.33: Campo de velocidade do escoamento da metade superior do sistema no instante t = 8, 5s ( $\Pi = 2$ ).

Figura 7.34: Campo de velocidade do escoamento da metade superior do sistema no instante t = 9, 5s ( $\Pi = 2$ ).

ondas, a aceleração é de  $3,7mm/s^2$ , enquanto que a velocidade terminal de propagação de ondas se situa em torno de 10mm/s. Nas figuras 7.39, 7.40 e 7.41 é apresentada a evolução das ondas propagadas nos instantes 9, 40s, 9, 50s e 9, 60s, respectivamente.

A figura 7.42 apresenta o espectro de freqüências de oscilação da viscosidade aparente  $\mu_{ap}$  para razão de espessura sólido-líquido igual a 2. Diferente do caso anterior, verificamos apenas uma freqüência dominante neste escoamento, de módulo igual a 21, 5Hz. Não se observa aqui a ocorrência de uma única freqüência secundária, mas sim de uma banda relativamente estreita de freqüências de menor importância no escoamento. Estas freqüências podem ser fruto de erros computacionais associados, que são suprimidos pela freqüência dominante, no entanto, qualquer afirmativa a respeito do assunto exige um estudo mais acurado.



Figura 7.35: Perfil de deformações no instante 6,50s, para  $\Pi=2.$ 



Figura 7.36: Perfil de deformações no instante 8,50s, para  $\Pi=2.$ 



Figura 7.37: Perfil de deformações no instante 9,50s, para  $\Pi=2.$ 



Figura 7.38: Viscosidade aparente em função do tempo para velocidade da parede controlada com  $\Pi=2.$ 

Instante de tempo (s)	Velocidade $(mm/s)$
8,00	6, 3
8,80	6, 3
9,00	8, 4
9,20	10
9,50	10
9,70	10
9,99	10

Tabela 7.11: Velocidade de propagação de ondas em função do tempo para  $\Pi=2$ 



Figura 7.39: Perfil de deformações no instante 9,40s, para  $\Pi=1.$ 



Figura 7.40: Perfil de deformações no instante 9,50s, para  $\Pi=1.$ 



Figura 7.41: Perfil de deformações no instante 9,60s, para  $\Pi=1.$ 



Figura 7.42: Espectro de freqüências do escoamento instável com razão de espessura  $\Pi=2.$