

4

Discretização das Equações

O sistema de equações diferenciais apresentadas no capítulo anterior não possui solução analítica. Desta maneira, torna-se necessário a utilização de algum método de discretização capaz de transformar o sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas. Neste capítulo é apresentado o processo de discretização das equações que modelam o sólido e o fluido. Dois métodos diferentes são utilizados neste processo de discretização: o método de Galerkin/elementos finitos para a discretização espacial do problema, e o método das diferenças finitas para a discretização temporal das equações de conservação de momento linear do sólido e do fluido.

No início deste capítulo os métodos de Galerkin/elementos finitos e de diferenças finitas são brevemente apresentados, seguido da obtenção das expressões dos resíduos das equações, e concluindo-se com a obtenção das matrizes massa relativas aos resíduos das equações de conservação de momento linear.

4.1

O Método de Galerkin/Elementos finitos

O método de Galerkin pode ser compreendido como sendo uma metodologia geral para a solução de equações diferenciais, pertencente à classe dos métodos variacionais. Dentro desta classe, a solução da equação é escrita como uma combinação linear de funções-base apropriadamente escolhidas,

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i. \quad (4-1)$$

A eq. (4-1) é um exemplo de aproximação onde N é o número de termos da combinação, ϕ_i são as funções-base e c_i os coeficientes das funções, que representam as incógnitas do problema.

Os valores das incógnitas são obtidos substituindo-se a solução aproximada na formulação fraca (variacional) do problema, utilizando-se N funções peso linearmente independentes. No caso particular do método de Galerkin as funções peso são as mesmas utilizadas na expansão da solução aproximada.

4.1.1

Representação dos Campos Através de Funções-base e Definição dos Elementos

Existem basicamente 5 campos desconhecidos no problema tratado 3 referentes ao domínio do fluido e 2 ao sólido. No caso do fluido o campo de velocidade, pressão e posição em cada elemento são escritos como combinações lineares de funções bases da seguinte maneira:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^9 U_j \phi_j \\ \sum_{j=1}^9 V_j \phi_j \end{bmatrix}, \quad (4-2)$$

$$p = \begin{bmatrix} p \\ \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^3 P_j \chi_j, \quad (4-3)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^9 \mathbf{x}_j \phi_j \\ \sum_{j=1}^9 \mathbf{y}_j \phi_j \end{bmatrix}. \quad (4-4)$$

Já no caso do sólido os campos desconhecidos são somente o de pressão e posição, que escritos através de funções bases são dados por:

$$p^* = \begin{bmatrix} p^* \\ \partial p^* / \partial x \\ \partial p^* / \partial y \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^3 P_j^* \chi_j, \quad (4-5)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^9 \mathbf{X}_j \phi_j \\ \sum_{j=1}^9 \mathbf{Y}_j \phi_j \end{bmatrix}. \quad (4-6)$$

onde, ϕ_j são funções bases representadas por polinômios lagrangeanos bi-quadráticos, χ_j são funções-base lineares descontínuas e U_j , V_j , P_j , \mathbf{x}_j , \mathbf{y}_j , P_j^* , \mathbf{X}_j e \mathbf{Y}_j são os coeficientes de expansão de cada termo que representam os valores das incógnitas do problema num dado nó j .

A utilização de funções-base biquadráticas em um domínio bidimensional exige que cada elemento possua nove nós, como mostrado na figura 4.1, para a malha do domínio líquido. Neste caso, cada um dos nós, exceto o central, possui quatro graus de liberdade, dois para o campo de velocidade e dois para o de posição. O campo de pressão é um caso à parte, com três graus de liberdade por elemento este é armazenado num único nó central.

No sólido cada nó apresenta dois graus de liberdade referentes à posição em coordenadas espaciais. Novamente o campo de pressão possui três graus de liberdade por elemento localizados no nó central (Figura 4.2).

Os elementos que compõem os domínios são parametrizados em coordenadas locais (ou elementares) por ε e ϑ . Neste sistema de coordenadas os

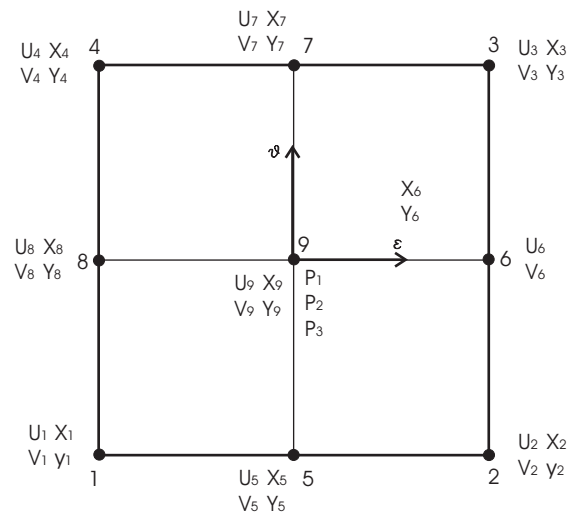


Figura 4.1: Elemento usado para discretizar o domínio fluido. Possui 9 nós e 39 graus de liberdade

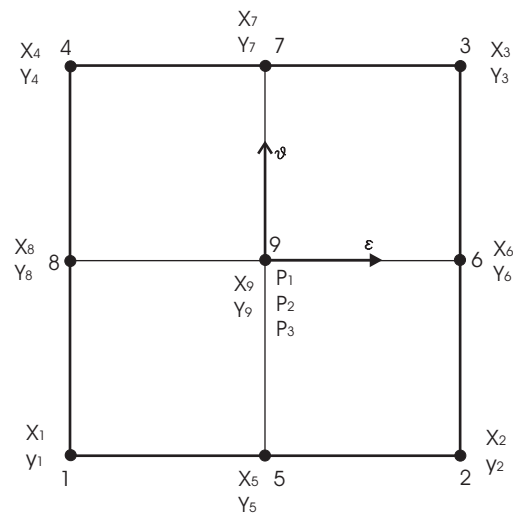


Figura 4.2: Elemento usado para discretizar o domínio sólido. Possui 9 nós e 21 graus de liberdade

elementos tem arestas que variam entre -1 e 1 como mostrado na figura 4.3.

As funções-base em coordenadas locais para o campo de velocidade e o mapeamento correspondentes a um elemento biquadrático de nove nós são:

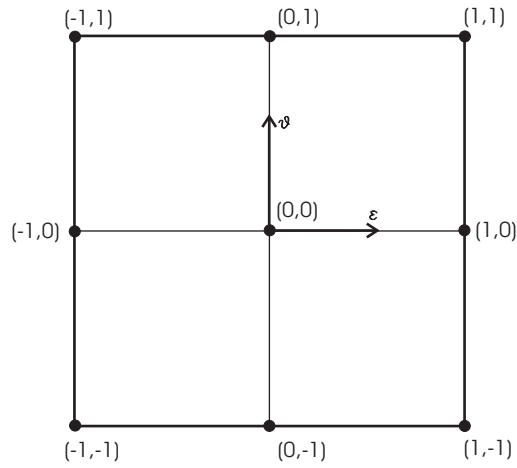


Figura 4.3: Eixos ordenados ε e ϑ , que parametrizam as equações em cada elemento

$$\begin{aligned}\phi_1(\varepsilon, \vartheta) &= \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)\vartheta(\vartheta - 1)}{4} \\ \phi_2(\varepsilon, \vartheta) &= \frac{\varepsilon(\varepsilon + 1)\vartheta(\vartheta - 1)}{4} \\ \phi_3(\varepsilon, \vartheta) &= \frac{\varepsilon(\varepsilon + 1)\vartheta(\vartheta + 1)}{4} \\ \phi_4(\varepsilon, \vartheta) &= \frac{\varepsilon(\varepsilon + 1)\vartheta(\vartheta - 1)}{4} \\ \phi_5(\varepsilon, \vartheta) &= \frac{(1 - \varepsilon^2)\vartheta(\vartheta - 1)}{2} \\ \phi_6(\varepsilon, \vartheta) &= \frac{\varepsilon(\varepsilon + 1)(1 - \vartheta^2)}{2} \\ \phi_7(\varepsilon, \vartheta) &= \frac{(1 - \varepsilon^2)\vartheta(\vartheta + 1)}{2} \\ \phi_8(\varepsilon, \vartheta) &= \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)(1 - \vartheta^2)}{2} \\ \phi_9(\varepsilon, \vartheta) &= (1 - \varepsilon^2)(1 - \vartheta^2)\end{aligned}$$

As funções-base lineares descontínuas usadas para representar os campos de pressão (tanto do elementos do fluido quanto do sólido) no sistema de coordenadas locais são dadas por:

$$\begin{aligned}\chi_1(\varepsilon, \vartheta) &= 1 \\ \chi_2(\varepsilon, \vartheta) &= \vartheta \\ \chi_3(\varepsilon, \vartheta) &= \varepsilon\end{aligned}$$

A escolha da combinação das funções bases não é arbitrária. Uma má

escolha pode levar a soluções de baixa qualidade, ou mesmo a resultados completamente errados. Para que uma determinada combinação de funções-base possam ser utilizadas com resultados satisfatórios, esta deve satisfazer a condição de Ladyzhenskaya-Babûska-Brezzi (Brezzi (Brezzi91)). Para o caso de fluidos Newtonianos, de Santos (Santos91) mostrou que elementos biquadráticos para o campo de velocidades e lineares descontínuos para a pressão funcionam muito bem.

4.2

O Método das Diferenças Finitas

O método dos elementos finitos também poderia ser empregado na discretização das equações diferenciais de momento (do sólido e do fluido) em relação ao parâmetro tempo. Porém sua complexidade de implementação representaria uma dificuldade adicional no problema. Além disso há poucas evidências de alguma vantagem do uso deste método em termos transientes, o que levou à não utilização deste como metodologia de discretização temporal. Existem muitos métodos de discretização de equações diferenciais disponíveis na literatura.

Dentre os mais comuns, o método das diferenças finitas é sem dúvida o mais simples. Neste o intervalo de tempo no qual se deseja resolver a equação é dividido em $N - 1$ intervalos, que podem ou não ser iguais. A equação é aproximada para cada instante de tempo, substituindo-se as derivadas da função por expressões baseadas na diferença dos valores que a função assume em determinados instantes (aproximação por diferenças finitas), como por exemplo

$$\dot{f}(t_1) = \frac{f_2 - f_1}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad \dot{f}(t_5) = \frac{f_6 - f_4}{2\Delta t}$$

Isto resulta na obtenção de uma equação algébrica para cada instante de tempo. Os métodos de discretização de equações com termos temporais, baseados em diferenças finitas podem ser separados em duas categorias: métodos explícitos e métodos implícitos.

Nos métodos explícitos a equação diferencial é discretizada em termos dos valores da função f no tempo passado. Isto significa que seu valor em cada um dos pontos no instante presente podem ser calculados diretamente, conhecido seus valores nos instantes anteriores. Não há, então a necessidade de se resolver qualquer sistema. Estes métodos são bastante simples e consomem pouquíssimos esforços computacionais, entretanto, a instabilidade da solução fica comprometida e fortemente dependente do passo de tempo e da própria equação diferencial.

Nos métodos implícitos a equação é discretizada em termos dos valores que a função f assume no instante de tempo presente. Isto significa que, a solução do problema para um dado nó depende da solução de todos os outros num dado instante de tempo. Dessa maneira o problema não pode ser resolvido diretamente, pois há um sistema de equações algébricas a ser resolvido. Os métodos implícitos exigem claramente um maior trabalho de implementação e custo computacional, permitindo a utilização de passos de tempo maiores.

O programa utilizado foi adaptado para trabalhar com as derivadas temporais discretizadas por diferenças recuadas. Os termos de derivadas primeiras no tempo não ofereceram qualquer dificuldade em serem discretizadas, pois, basta um passo de tempo para que estes sejam bem representados. Assim, supondo f como sendo uma variável qualquer dependente do tempo no problema, tem-se que

$$\dot{f}_n \approx \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta t}. \quad (4-7)$$

onde \dot{f}_n representa a derivada de f em função do tempo, t_n é o instante de tempo presente aonde a derivada está sendo calculada, t_{n-1} é o instante de tempo anterior e $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ é o passo de tempo.

Dessa forma as derivadas primeiras das variáveis u , v , x e y podem ser calculadas muito facilmente através da eq. (4-7). Basta substituir \dot{f} pela variável que se deseja encontrar a derivada.

O tratamento do termo de derivada segunda do espaço em relação ao tempo que surge na equação de conservação de momento linear do sólido (eq. (3-16)) é um pouco mais complicado. O programa foi desenvolvido para trabalhar com passos de tempo variáveis para que seja possível reduzir o avanço no tempo caso a solução não convirja. Mas são necessários ao menos dois passos de tempo para se representar a derivada segunda no tempo, e a maioria das aproximações disponíveis na literatura fixam o passo de tempo para se simplificar a expressão desse termo. É, então, necessário determinar uma expressão para derivadas segundas recuadas no tempo com passos variáveis. A utilização de apenas dois passos, entretanto, pode fornecer aproximações de má qualidade já que não há necessariamente uma regularidade entre os passos, por isso, para garantir um resultado de boa qualidade optou-se por desenvolver uma expressão baseada em três passos de tempo recuados.

Uma expressão para a derivada segunda de uma função arbitrária $g(t)$ pode ser obtida através de uma combinação linear de valores de g para diversos instantes de tempo. No caso de três passos de tempo, tem-se:

$$\ddot{g}_n \simeq \alpha_0 g_n + \alpha_1 g_{n-1} + \alpha_2 g_{n-2} + \alpha_3 g_{n-3}. \quad (4-8)$$

O índice n representa o passo de tempo no qual a função g está sendo avaliada. Supondo três passos de tempo diferentes, $\Delta t_1 = (t_n - t_{n-1})$, $\Delta t_2 = (t_{n-1} - t_{n-2})$ e $\Delta t_3 = (t_{n-2} - t_{n-3})$, os coeficientes são encontrados expandindo-se cada termo da combinação em séries de Taylor em torno de g_n ,

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 g_n &= \alpha_0 g_n, \\
 \alpha_1 g_{n-1} &= \alpha_1 \left[g_n - \Delta t_1 \frac{\partial g_n}{\partial t} + \frac{\Delta t_1^2}{2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial t^2} - \frac{\Delta t_1^3}{6} \frac{\partial^3 g_n}{\partial t^3} \right], \\
 \alpha_2 g_{n-2} &= \alpha_2 \left[g_n - (\Delta t_1 + \Delta t_2) \frac{\partial g_n}{\partial t} + \frac{(-\Delta t_1 - \Delta t_2)^2}{2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t_1 + \Delta t_2)^3}{6} \frac{\partial^3 g_n}{\partial t^3} \right], \\
 \alpha_3 g_{n-3} &= \alpha_3 \left[g_n - (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) \frac{\partial g_n}{\partial t} + \frac{(-\Delta t_1 - \Delta t_2 - \Delta t_3)^2}{2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial t^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)^3}{6} \frac{\partial^3 g_n}{\partial t^3} \right]
 \end{aligned} \tag{4-9}$$

e montando-se um sistema linear, onde as incógnitas são os valores dos coeficientes da combinação. Como o objetivo é aproximar a derivada segunda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\Delta t_1 & -(\Delta t_1 + \Delta t_2) & -(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) \\ 0 & \frac{\Delta t_1^2}{2} & \frac{(\Delta t_1 + \Delta t_2)^2}{2} & \frac{(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)^2}{2} \\ 0 & -\frac{\Delta t_1^3}{6} & -\frac{(\Delta t_1 + \Delta t_2)^3}{6} & -\frac{(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)^3}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4-10}$$

Resolvendo-se este sistema encontra-se:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= 2 \frac{(2\Delta t_2 + \Delta t_3 + 3\Delta t_1)}{(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)\Delta t_1(\Delta t_1 + \Delta t_2)}; \\
 \alpha_1 &= -2 \frac{(2\Delta t_2 + \Delta t_3 + 2\Delta t_1)}{(\Delta t_2 + \Delta t_3)\Delta t_1\Delta t_2}; \\
 \alpha_2 &= 2 \frac{(\Delta t_3 + 2\Delta t_1 + \Delta t_2)}{(\Delta t_1 + \Delta t_2)\Delta t_2\Delta t_3}; \\
 \alpha_3 &= -2 \frac{(2\Delta t_1 + \Delta t_2)}{(\Delta t_1\Delta t_2 + \Delta t_1\Delta t_3 + \Delta t_2^2 + 2\Delta t_2\Delta t_3 + \Delta t_3^2)\Delta t_3}.
 \end{aligned} \tag{4-11}$$

Assim o termo de derivada segunda pode ser encontrado por

$$\begin{aligned}
\ddot{g}_n &\simeq 2 \frac{(2\Delta t_2 + \Delta t_3 + 3\Delta t_1)}{(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)\Delta t_1(\Delta t_1 + \Delta t_2)} g_n - \\
&- 2 \frac{(2\Delta t_1 + \Delta t_3) + 2\Delta t_3}{(\Delta t_2 + \Delta t_3)\Delta t_1\Delta t_2} g_{n-1} + 2 \frac{(\Delta t_3 + 2\Delta t_1 + \Delta t_2)}{(\Delta t_1 + \Delta t_2)\Delta t_2\Delta t_3} g_{n-2} - \\
&- 2 \frac{(2\Delta t_1 + \Delta t_2)}{(\Delta t_1\Delta t_2 + \Delta t_1\Delta t_3 + \Delta t_2^2 + 2\Delta t_2\Delta t_3 + \Delta t_3^2)\Delta t_3} g_{n-3}. \quad (4-12)
\end{aligned}$$

4.3

Expressões dos Resíduos das Equações

Nesta seção são apresentadas as expressões dos resíduos das equações que modelam o problema, isto é, as equações de conservação de quantidade de movimento linear, continuidade e geração elíptica de malha para o fluido, e as equações de momento, e a restrição de incompressibilidade para o sólido.

4.3.1

Equações do Escoamento

Equação de Momento

Partindo da equação de conservação de quantidade de movimento linear (eq. (3-13)), e escrevendo-se sua formulação fraca:

$$\int_{\Omega_L} [\rho(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}] \mathbf{W} d\Omega_L = 0. \quad (4-13)$$

Aqui \mathbf{W} é o vetor de funções peso dado em termos de suas componentes:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}. \quad (4-14)$$

Uma primeira expressão para o resíduo do momento é então obtida, dada por:

$$\begin{aligned}
R_{L\bar{m}} &= \int_{\Omega_L} [\rho(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}] \mathbf{W} d\Omega_L. \\
&\Rightarrow \int_{\Omega_L} [(\rho \dot{\mathbf{v}}) - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \mathbf{v}) + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})] \mathbf{W} d\Omega_L - \int_{\Omega_L} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{W} d\Omega_L.
\end{aligned} \quad (4-15)$$

O termo $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ apresenta a segunda derivada da velocidade. Pode-se transferir a derivada para a função peso utilizando-se a igualdade vetorial:

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{W} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{W}. \quad (4-16)$$

Assim, tem-se que

$$\int_{\Omega_L} (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{W} d\Omega_L = \int_{\Omega_L} \nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{W}) d\Omega_L - \int_{\Omega_L} \sigma : \nabla \mathbf{W} d\Omega_L. \quad (4-17)$$

Utilizando o teorema de Gauss pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_L} \nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{W}) d\Omega_L = \int_{\Gamma_L} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma \cdot \mathbf{W}) d\Gamma_L \quad (4-18)$$

logo,

$$\int_{\Omega_L} (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{W} d\Omega_L = \int_{\Gamma_L} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma \cdot \mathbf{W}) d\Gamma_L - \int_{\Omega_L} \sigma : \nabla \mathbf{W} d\Omega_L. \quad (4-19)$$

Substituindo eq. (4-19) na eq. (4-15), obtém-se a expressão final do resíduo:

$$\begin{aligned} R_{L\bar{m}} &= \int_{\Omega_L} (\rho \dot{\mathbf{v}}) \mathbf{W} d\Omega_L - \int_{\Omega_L} \rho (\dot{\mathbf{x}} \nabla \mathbf{v}) \mathbf{W} d\Omega_L + \int_{\Omega_L} (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \mathbf{W} d\Omega_L + \\ &+ \int_{\Omega_L} \sigma : \nabla \mathbf{W} d\Omega_L - \int_{\Gamma_L} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma \cdot \mathbf{W}) d\Gamma_L. \end{aligned} \quad (4-20)$$

A equação vetorial do resíduo pode ser separada em duas equações para cada nó, referentes às componentes do momento nas direções x e y .

$$\begin{aligned} R_{Lm_x}^i &= \int_{\Omega_L} \left[\rho \left(\dot{u} - \dot{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \phi_i + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \phi_i + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Omega_L - \\ &- \int_{\Gamma_L} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}})_x \phi_i d\Gamma_L \end{aligned} \quad (4-21)$$

$$\begin{aligned} R_{Lm_y}^i &= \int_{\Omega_L} \left[\rho \left(\dot{v} - \dot{x} \frac{\partial v}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \phi_i + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \phi_i + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left(-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Omega_L - \\ &- \int_{\Gamma_L} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}})_y \phi_i d\Gamma_L \end{aligned} \quad (4-22)$$

As expressões do resíduo no domínio físico, então, são levadas para o domínio de referência multiplicando-se as equações pelo determinante da matriz Jacobiana

de transformação.

$$\begin{aligned}
R_{Lmx}^i &= \int_{\bar{\Omega}_L} \left[\rho \left(\dot{u} - \dot{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \phi_i + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \phi_i + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \|J_T\| d\bar{\Omega}_L - \\
&- \int_{\bar{\Gamma}_L} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\sigma})_x \phi_i \left(\frac{d\Gamma_L}{d\bar{\Gamma}_L} \right) d\bar{\Gamma}_L
\end{aligned} \tag{4-23}$$

$$\begin{aligned}
R_{Lmy}^i &= \int_{\bar{\Omega}_L} \left[\rho \left(\dot{v} - \dot{x} \frac{\partial v}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \phi_i + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \phi_i + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left(-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \|J_T\| d\bar{\Omega}_L - \\
&- \int_{\bar{\Gamma}_L} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\sigma})_y \phi_i \left(\frac{d\Gamma_L}{d\bar{\Gamma}_L} \right) d\bar{\Gamma}_L,
\end{aligned} \tag{4-24}$$

onde, \dot{u} , \dot{v} , \dot{x} e \dot{y} são obtidos da eq. (4-7).

Os termos $\int_{\bar{\Gamma}_L} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\sigma})_x \phi_i \left(\frac{d\Gamma_L}{d\bar{\Gamma}_L} \right) d\bar{\Gamma}_L$ e $\int_{\bar{\Gamma}_L} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\sigma})_y \phi_i \left(\frac{d\Gamma_L}{d\bar{\Gamma}_L} \right) d\bar{\Gamma}_L$ se referem às forças sofridas pelo meio nas fronteiras, sendo por este motivo calculados apenas nos nós fronteiraicos sob ação de tensões externas, onde a condição de contorno de Newman é imposta. Em outras palavras são nestes termos que entram as condições de contorno responsáveis pelo acoplamento (eq. (3-39)) do líquido com o sólido.

As expressões dos resíduos das equações restantes são obtidas obedecendo-se a um procedimento análogo ao demonstrado acima, e por este motivo detalhes sobre suas deduções são omitidos.

Equação da Continuidade (Fluido)

$$R_{Lc}^i = \int_{\bar{\Omega}_L} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \chi_i \|J_T\| d\bar{\Omega}_L = 0. \tag{4-25}$$

Equação de Geração de Malha

$$R_{Lx}^i = - \int_{\bar{\Omega}_L} D_\xi \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}_L} D_\xi \frac{1}{\|J_T\|} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \eta_x - \frac{\partial x}{\partial \eta} \eta_y \right) \left(\frac{d\Gamma_L}{d\bar{\Gamma}_L} \right) \phi_i d\bar{\Gamma}_L \tag{4-26}$$

$$R_{Ly}^i = - \int_{\bar{\Omega}_L} D_\eta \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}_L} D_\eta \frac{1}{\|J_T\|} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \eta_x - \frac{\partial x}{\partial \xi} \eta_y \right) \left(\frac{d\Gamma_L}{d\bar{\Gamma}_L} \right) \phi_i d\bar{\Gamma}_L. \tag{4-27}$$

4.3.2

Equações do Sólido

Equação de Conservação de Momento

$$\begin{aligned}
 R_{Smx}^i &= - \int_{\bar{\Omega}_S} \left[\rho \left(\ddot{x} + \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \right) \phi_i + T_{xx}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial X_0} + T_{xy}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial Y_0} \right] \|J_{T0}\| d\bar{\Omega}_S + \\
 &+ \int_{\bar{\Gamma}_S} \phi_i \left(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{T}^0 \right)_x \cdot \frac{d\Gamma_0}{d\bar{\Gamma}_S} d\bar{\Gamma}_S,
 \end{aligned} \tag{4-28}$$

$$\begin{aligned}
 R_{Smy}^i &= - \int_{\bar{\Omega}_S} \left[\rho \left(\ddot{y} + \dot{x} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \right) \phi_i + T_{yx}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial X_0} + T_{yy}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial Y_0} \right] \|J_{T0}\| d\bar{\Omega}_S + \\
 &+ \int_{\bar{\Gamma}_S} \phi_i \left(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{T}^0 \right)_y \cdot \frac{d\Gamma_0}{d\bar{\Gamma}_S} d\bar{\Gamma}_S.
 \end{aligned} \tag{4-29}$$

Lembra-se que os termos transientes, isto é, as primeiras e segundas derivadas temporais são encontradas utilizando as eqs. (4-7) e (4-12), respectivamente.

Equação de Conservação de Massa (Sólido)

$$R_{S\pi} = \int_{\bar{\Omega}_S} \left[\frac{\partial x}{\partial X_0} \frac{\partial y}{\partial Y_0} - \frac{\partial y}{\partial X_0} \frac{\partial x}{\partial Y_0} - 1 \right] \chi_i \|J_{T0}\| d\bar{\Omega}_S. \tag{4-30}$$

4.4

Solução do Sistema de Equações Não-lineares pelo Método de Newton

Quando as variáveis independentes nas equações de Navier-Stokes e de equilíbrio são escritas em termos das funções-base, obtém-se um sistema de equações algébricas não lineares, representado compactamente por:

$$\mathbf{R}(\mathbf{c}; \mathbf{b}) = 0. \tag{4-31}$$

Aqui \mathbf{R} representa o vetor de resíduos ponderados associado com os graus de liberdade de cada elemento; \mathbf{c} representa o vetor solução do problema e \mathbf{b} é o vetor de parâmetros do qual o problema depende.

Devido à não-linearidade das equações, este sistema não pode ser resolvido por métodos convencionais diretos e por isso é resolvido de forma iterativa através do método de Newton. Este método consta do seguinte procedimento:

$$(\mathbf{J} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M})\delta\mathbf{c} = -\mathbf{R}(\mathbf{c}; \mathbf{b}) \quad (4-32)$$

$$(\mathbf{c})^{k+1} = (\mathbf{c})^k + \delta\mathbf{c} \quad (4-33)$$

Aqui \mathbf{R} é avaliado em $(\mathbf{c})^k$, \mathbf{J} é a matriz Jacobiana do resíduo, cujos componentes são as derivadas dos termos não temporais dos resíduos, \mathbf{M} é a matriz Massa do sistema, cujos componentes são as derivadas dos termos de derivadas temporais dos resíduos e Δt é o passo de tempo. Os componentes tanto da matriz Massa quanto da Jacobiana podem ser encontrados através de métodos analíticos ou numéricos. Neste trabalho estes coeficientes foram calculados analiticamente.

A iteração se inicia com uma estimativa inicial $(\mathbf{c})^0$ da solução do problema e continua até que a eq. (4-31) seja satisfeita (ou ao menos seja quase satisfeita). Isto significa que a soma da norma L_2 do vetor de solução $\delta\mathbf{c}$ e do resíduo \mathbf{R} sejam menores que um parametro estipulado ϵ . Em outras palavras, que a desigualdade

$$\|\delta\mathbf{c}\|_2 + \|\mathbf{R}\|_2 \leq \epsilon \quad (4-34)$$

seja verificada.

O método de Newton converge quadraticamente desde que a estimativa inicial se encontre próxima à solução do sistema. Contudo, caso a estimativa inicial esteja fora do raio de convergência a solução irá divergir e uma nova estimativa inicial terá de ser tomada. Boas estimativas podem ser encontradas através de métodos de continuação, alterando-se adequadamente certos parâmetros.

Em cada iteração do método de Newton a matriz $\mathbf{J} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}$ é invertida mediante decomposição PLU utilizando o método frontal proposto por Hood (Hood76). O método frontal é possível, pois, esta matriz possui a característica marcante de ser uma matriz de bandas, permitindo economia de memória, aumentando a velocidade de solução.

Uma observação aqui se faz necessária para evitar mal-entendidos. A eq. (4-32) mostra a matriz massa sendo multiplicada pelo inverso do passo de tempo no momento em que o método de Newton é realizado. Porém, visto a apresentação do termo de derivada segunda do sólido depende de vários passos de tempo, tal procedimento não é possível aqui. Na realidade, neste trabalho a matriz Massa foi calculada já considerando os termos de passo de tempo, então, daqui por diante entende-se como Matriz Massa a matriz das derivadas dos termos transientes já considerando os passos de tempo, de maneira que $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3)$.

A determinação dos termos da matriz Jacobiana pode ser encontrada com maiores detalhes em Carvalho (Carvalho96). A dedução dos termos da matriz Massa serão apresentados a seguir com maiores detalhes.

4.4.1

Dedução dos Termos da Matriz Massa

Apenas as expressões dos resíduos provenientes das equações de conservação de quantidade de movimento linear oferecem termos à matriz Massa. Como apenas os termos transientes das equações entram nesta matriz utilizar-se-á a terminologia ${}^t R_{m*}^i$ para indicar que se trata do termo transiente do resíduo da equação de momento do sólido ou fluido na direção $*$.

Dessa maneira, tomando-se o termo transiente do resíduo da equação de Navier-Stokes na direção x , tem-se:

$${}^t R_{Lmx}^i = \int_{\bar{\Omega}_L} \left[\rho \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t} - \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \phi_i \right] \|J_T\| d\bar{\Omega}_L \quad (4-35)$$

$${}^t R_{Lmy}^i = \int_{\bar{\Omega}_L} \left[\rho \left(\frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t} - \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \phi_i \right] \|J_T\| d\bar{\Omega}_L. \quad (4-36)$$

As incógnitas presentes nestes termos são u , x e y , logo precisa-se achar $\frac{\partial {}^t R_{Lmx}^i}{\partial U_j}$, $\frac{\partial {}^t R_{Lmx}^i}{\partial X_j}$ e $\frac{\partial {}^t R_{Lmx}^i}{\partial Y_j}$, resultando em:

$$\frac{\partial {}^t R_{Lmx}^i}{\partial U_j} = \int_{\bar{\Omega}_L} \left[\rho \left(\frac{\phi_j}{\Delta t} - \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \phi_i \right] \|J_T\| d\bar{\Omega}_L \quad (4-37)$$

$$\frac{\partial {}^t R_{Lmx}^i}{\partial X_j} = - \int_{\bar{\Omega}_L} \left[\rho \left(\frac{\phi_j}{\Delta t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \phi_i \right] \|J_T\| d\bar{\Omega}_L \quad (4-38)$$

$$\frac{\partial^t R_{Lmx}^i}{\partial Y_j} = \int_{\bar{\Omega}_L} \left[\rho \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t} - \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \phi_i \right] \|J_T\| d\bar{\Omega}_L \quad (4-39)$$

4.4.2

Comentários sobre o Método de Newton e Solução Numérica de Sistemas

O método de Newton é uma ferramenta muito útil na solução de sistemas de equações algébricas não lineares, entretanto algumas características limitantes devem ser notadas. Primeiramente, para que a solução da equação convirja é necessário que a estimativa inicial seja suficientemente boa (próxima da solução real). Desta maneira, caso a estimativa não seja tão próxima da solução, o método divergirá. Em casos de estudo de escoamentos e processos em regime permanente, este fato pode não representar um problema tão sério, pois, através de métodos de continuação pode-se obter resultados de problemas próximos ao desejado que servem como boas estimativas iniciais, ainda que haja iteração entre fluidos e sólidos.

No caso de análise de problemas transientes, o cenário pode vir a mudar um pouco. Em muitos problemas o conhecimento dos campos de velocidade, deformação e pressão em diversos instantes de tempo permite que se faça naturalmente uma continuação, obtendo-se boas estimativas para a solução no instante presente. Entretanto em casos aonde uma mudança muito abrupta no sistema seja passível de ocorrer (como por exemplo uma transição súbita no padrão de escoamento, ou uma deformação muito acentuada na interface num curto período de tempo), a solução anterior, ou uma extrapolação baseada na mesma podem não se caracterizar como boas estimativas para a solução no instante presente. O procedimento, à primeira vista mais óbvio, seria reduzir o passo de tempo, contudo tal redução implica num mal condicionamento da matriz Jacobiana, já que há termos inversamente proporcionais ao passo de tempo Δt (termo transiente do fluido), e termos que são inversamente proporcionais ao quadrado do passo de tempo (termo transiente do sólido). E junta a isto o fato que, normalmente, os parâmetros do sólido são ordens de grandeza maiores que os do fluido. Assim uma redução no passo de tempo se converte num pior condicionamento da matriz Jacobiana o que pode levar a problemas na solução do sistema linear.

Dessa maneira o método de Newton deve ser utilizado com muito cuidado nesses processos transientes envolvendo iteração fluido-estrutura, para que erros de arredondamento sejam minimizados.