

3 Formulação Matemática

Neste capítulo será apresentado a descrição matemática do problema proposto. Em primeira instância são apresentadas as equações que descrevem o comportamento físico do meio fluido, isto é, as equações de conservação de quantidade de movimento linear e de massa. Em seguida são discutidos a técnica e as equações utilizadas para o tratamento do problema com superfície deformável, que devido a sua grande importância é apresentado em uma seção à parte. E finalizando as equações que modelam o comportamento do sólido, e o problema de superfície deformável são tratados.

3.1 Modelagem do Fluido

A modelagem matemática de um escoamento é sempre um passo complicado. Se por um lado desejamos que a solução das equações de conservação sejam o mais próximo possível do fenômeno físico real, a utilização de modelos complexos, onde sejam consideradas todas as variáveis que influenciam o resultado final, implicará em uma maior dificuldade de solução do problema. Dificuldade esta, que, na maioria esmagadora das vezes, não é compensada com uma melhora significativa do resultado. Assim sendo, antes da apresentação da modelagem matemática propriamente dita do escoamento, algumas considerações devem ser feitas a fim de simplificar seu estudo. A seguir são apresentadas as simplificações consideradas neste trabalho.

- O comportamento exato do escoamento após se atingir o regime instável é desconhecido *à priori*, entretanto, observações da superfície do sólido após os experimentos por Eggert (Eggert04) e Kumaran (Kumaran99) revelam um perfil com ondulações apenas na direção do escoamento, levando a crer que o padrão de escoamento é bidimensional (não há escoamento na direção transversal ao movimento da placa), sendo assim considerado.
- Os efeitos de forças de corpo são muito pequenos quando comparados com os das demais forças atuantes, e por esse motivo desprezadas.

- O sistema se encontra isolado (não há fluxo de calor), e os efeitos de dissipação viscosa são desprezíveis, o que leva a um escoamento isotérmico.
- O fluido é modelado como Newtoniano, por ser o modelo mais simples e aproximar satisfatoriamente o comportamento de diversos líquidos de interesse em engenharia.

Os campos de velocidade e pressão para um fluido Newtoniano incompressível são governados pelas equações de Navier-Stokes e de continuidade, cuja forma vetorial é dada por:

$$\rho_L \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_L \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \{-p\mathbf{I} + \mu[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]\} \quad (3-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3-2)$$

onde, \mathbf{v} é o vetor de velocidade, p é a pressão (multiplicador de Lagrange - parte isotrópica do tensor das tensões), μ e ρ_L são respectivamente a viscosidade e a massa específica do fluido.

3.1.1

Condições de Contorno para a Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear

A integração das equações diferenciais que descrevem um escoamento só é possível após a prescrição de condições de contorno apropriadas. As condições aplicadas à equação de conservação de Navier-Stokes podem ser de dois tipos: informações sobre velocidade na fronteira, ou informações sobre forças (tensões) atuantes na fronteira.

A figura 3.1 apresenta esquematicamente as condições de contorno utilizadas:

1. Na superfície do cilindro rígido, aplicação de condição de não-deslizamento e não-penetração

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} = V_{ext}$$

em que, V_{ext} é a velocidade linear do cilindro externo.

2. Na superfície livre da interface sólido-fluido:

- Condição Cinemática:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} = f(\mathbf{x})$$

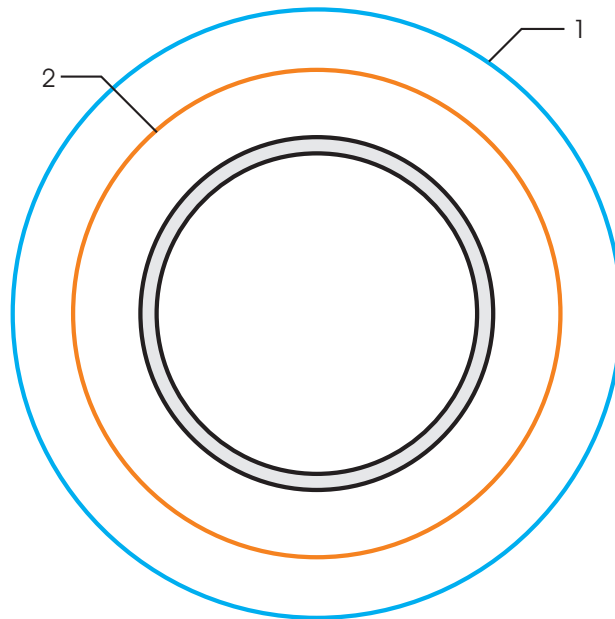


Figura 3.1: Tipos de condições de contorno da equação de conservação de quantidade de movimento do fluido aplicadas nas fronteiras do domínio.

onde, $f(\mathbf{x})$ é a velocidade do deslocamento da superfície devido a deformação do sólido flexível.

- Condição dinâmica descrita pelo balanço de forças que será discutida mais adiante.

3.1.2

Condições Iniciais para Equações de Descrevem o Escoamento

A solução de equações diferenciais envolvendo termos transientes traz a exigência da definição da configuração inicial do sistema. No caso da equação de Navier-Stokes, é preciso informar os campos de velocidade e pressão no instante inicial, a partir do qual deseja-se analisar o escoamento.

Como condição inicial foi considerado o fluido em repouso e pressão constante para qualquer instante de tempo t menor que o instante inicial t_0 . Em outras palavras para $t < t_0$:

$$u = 0,$$

$$v = 0,$$

$$p = 0.$$

3.2

Solução do Problema de Fronteira Deformável do Meio Líquido

Como já mencionado, quando a tensão de cisalhamento imposta pelo cilindro externo é baixa, não há uma deformação normal apreciável na interface. Neste caso as equações de Navier-Stokes podem ser integradas sem

grandes problemas dentro de seu domínio, já que a posição da interface com o sólido é conhecida (pré-determinada) e bem definida. Geralmente, nestes casos, é suficiente usar algum método algébrico para discretizar este domínio baseado na distribuição dos subdomínios numa fronteira prescrita.

Contudo, quando o valor da tensão imposta pelo cilindro externo é alta o suficiente, a camada resiliente se deforma e a geometria onde o escoamento ocorre não é conservada, *à priori*, caracterizando um problema de fronteira livre ou deformável. Problemas de fronteiras livres, representam uma dificuldade adicional na solução do sistema de equações, pois, o domínio no qual estas devem ser resolvidas é desconhecido *a priori*, e passa a fazer parte do problema.

Uma forma bem prática para se contornar este inconveniente é transferir, através de um mapeamento, o problema do domínio físico desconhecido para um domínio de referência (ou computacional) fixo conhecido. Existem diversas técnicas de mapeamento disponíveis para esta finalidade: o método das “Splines” (Kistler (Kistler84)), “Geração elíptica de malhas” (Cristodoulou (Cristodoulou91) e Benjamin (Benjamin94)) e “Deformação de domínio” (Almeida (Almeida95) e Musson ((Musson01))).

Dentre estas metodologias, o método das Splines destaca-se por ser o mais simples. Nele os nós na fronteira deformável são permitidos deslizar sobre linhas “splines” pré-definidas. Os primeiros trabalhos utilizando splines eram limitados a pequenas deformações pois apenas os nós da superfície deformável podiam se deslocar. Nos trabalhos mais recentes, os nós internos também são capazes de deslizar acompanhando o movimento dos nós da fronteira livre. Apesar da simplicidade de implementação o método das Splines traz a inconveniência de uma programação não generalizada, exigindo a definição de novas Splines para cada problema diferente.

Os métodos de geração elíptica de malhas e deformação de domínio se baseiam na utilização de equações diferenciais para a geração de malha. Desta maneira, o sistema já existente é ampliado com a adição de novas equações. Neste trabalho foi utilizado o método de geração elíptica de malha, sendo por isso o método tratado daqui por diante.

Para resolver o problema utilizando estes métodos, as equações diferenciais de conservação de quantidade de movimento linear e massa formulados no domínio físico líquido Ω_L devem ser transformadas em equações equivalentes definidas no domínio de referência $\bar{\Omega}_L$. Esta transformação é feita mediante um mapeamento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ capaz de conectar os dois domínios ($\Omega_L \rightarrow \bar{\Omega}_L$).

O domínio físico do escoamento é parametrizado pelo vetor posição $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y)$ que é desconhecido a princípio e faz parte da solução do problema (Figura 3.2), enquanto que o de referência é parametrizado pelo vetor $\xi =$

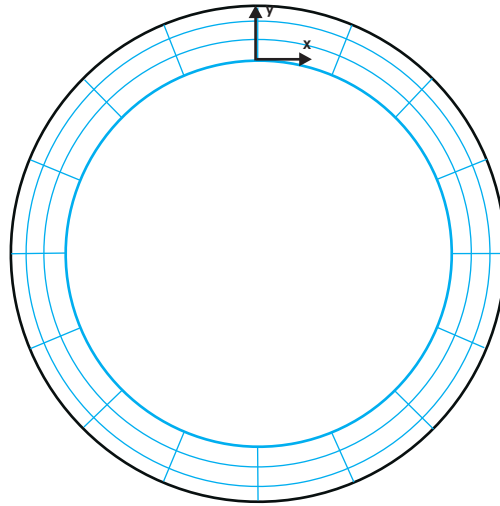


Figura 3.2: Domínio Físico do meio Fluido, parametrizado pelo vetor posição em coordenadas cartesianas \$(x, y)\$.

\$\xi(\xi, \eta)\$ estabelecido conforme a definição deste domínio, como mostrado na figura 3.3.

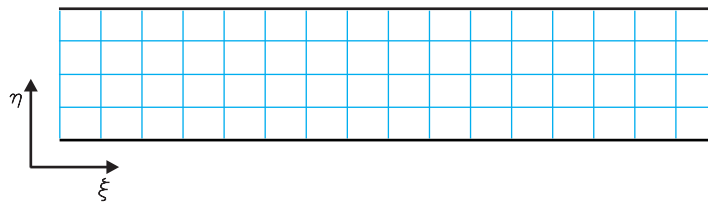


Figura 3.3: Domínio Computacional do meio Fluido, parametrizado pelo vetor \$(\xi, \eta)\$.

A representação das equações que governam o escoamento no domínio de referência exige que as derivadas em relação as coordenadas Eulerianas \$(x, y)\$ sejam expressas em função das coordenadas de referência \$(\xi, \eta)\$. Para isto define-se o tensor gradiente de deformação do mapeamento como sendo o gradiente do vetor posição no domínio físico em função do vetor posição no domínio de referência. Assim

$$\nabla_{\xi} \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

\$J_T\$ é chamada de Jacobiana da transformação. Dessa maneira, dado uma variável qualquer \$\varphi\$ (que pode ser escalar ou vetorial), pode-se aplicar a regra da cadeia obtendo

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{pmatrix} = J_T \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

Assim, as derivadas em relação a x e y podem ser escritas em função das coordenadas do domínio de referência por meio das equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{|J_T|} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{|J_T|} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (3-5)$$

onde,

$$|J_T| = \det J_T = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (3-6)$$

é o determinante da Matriz Jacobiana da transformação.

Independente do meio (sólido ou fluido) duas condições básicas devem ser satisfeitas para que seja possível se determinar o mapeamento de um domínio:

1. Os contornos do domínio físico deve ser mapeado para os contornos da referência;

$$\Gamma \leftrightarrow \bar{\Gamma} \quad (3-7)$$

2. O mapeamento deve ser inversível de maneira que uma condição necessária é

$$\|J_T\| > 0 \quad (3-8)$$

3.3

Geração Elíptica de Malhas

O método de geração elíptica de malha foi desenvolvido por de Santos (Santos91) generalizando o método proposto por Cristodoulou (Cristodoulou90) e (Cristodoulou91). A idéia principal deste método é minimizar um funcional que mede o grau de suavidade da malha, de maneira que, para as coordenadas ξ e η no domínio de referência

$$\int_{\Omega} (D_{\xi} |\nabla \xi|^2 + D_{\eta} |\nabla \eta|^2) d\Omega = 0 \quad (3-9)$$

onde, D_{ξ} e D_{η} são os coeficientes de difusão que controlam o espaçamento entre curvas de ξ e η constantes. As equações de Euler que minimizam este funcional são um par de equações diferenciais parciais elípticas, apresentada por

$$\nabla \cdot (D_\xi \nabla \xi) = 0 \quad (3-10)$$

$$\nabla \cdot (D_\eta \nabla \eta) = 0 \quad (3-11)$$

Quando D_ξ e D_η são constantes as eqs. (3-10) e (3-11) se reduzem aos Laplacianos de ξ e η . Há uma clara semelhança entre as equações acima e a equação diferencial de transferência de calor com coeficientes de condutividade térmica variável. Esta semelhança não é mera coincidência, de fato, na natureza o funcional que mede o grau de suavidade de curvas de propriedade constantes (como temperatura, concentração, e etc) tendem a ser minimizados. Como nota, é bem sabido que em processos envolvendo condução de calor bi ou tri-dimensional não há cruzamento de curvas de temperatura constante, então é de se esperar que o uso de equações elípticas reduza as chances de que linhas de coordenadas ξ ou η constantes se sobreponham. Dessa maneira parece bem apropriado o uso desse tipo de equação para geração de malhas, já que tendem a reproduzir fenômenos naturais.

É importante notar que as eqs. (3-10) e (3-11), formuladas no domínio físico, descrevem o mapeamento $\xi = \xi(\mathbf{x})$ inverso ao desejado, isto é, ξ e η são variáveis dependentes de x e y . Analogamente às equações de conservação de quantidade de movimento linear e continuidade, as equações de geração elíptica de malha devem ser reescritas no domínio de referência, permitindo que as coordenadas do domínio físico sejam calculadas em função das coordenadas de referência $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$.

A escolha do domínio de referência é arbitrária, porém uma boa escolha pode simplificar em muito a solução do mapeamento. Um dos domínios de referência mais simples possíveis de serem adotados em uma geometria bidimensional é uma região quadrangular dividida em quadrados (elementos) de lados unitários. Há, é claro, a possibilidade de que o domínio físico seja de tal complexidade que apenas uma região (domínio) de referência não seja capaz de representá-la. Nestes casos pode-se dividir o domínio físico como um todo em subdomínios mais simples que possam ser mapeadas em subdomínios de referência. O agrupamento, assim, dos subdomínios de referência formarão o domínio de referência como um todo.

3.3.1

Termo de Velocidade de Deslocamento da Malha

Como o problema é transiente e há uma superfície deformável a posição de cada ponto nodal da malha varia ao longo do tempo, devido deformação

desta. Tal deslocamento da malha acaba introduzindo nas equações um termo de velocidade fisicamente inexistente, uma velocidade de deslocamento de malha. A contabilização deste termo pode levar a soluções completamente erradas do sistema de equações, e por este motivo deve ser evitada.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}} - (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}) \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3-12)$$

Assim a equação de quantidade de movimento linear passa a ser dada por

$$\rho_L (\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \nabla \cdot \sigma = 0. \quad (3-13)$$

onde $\dot{\mathbf{x}}$ é a derivada do espaço em relação ao tempo.

3.3.2

Condições de Contorno das Equações de Geração Elípticas de Malha

As condições de fronteira para as equações que descrevem o mapeamento *i.e.* as equações de malha podem ser de dois tipos: *A* e *B*. As condições do tipo *A* servem para especificar a localização dos contornos, enquanto que as condições do tipo *B* distribuem os nós ao longo destes. As condições de contorno utilizadas nesta dissertação são apresentadas a seguir:

Condições tipo *A*:

1. Deslizamento sobre os contornos: Especifica uma fronteira ou contorno, por onde os nós podem ou não deslizar.
2. Interface sólido-líquido: impõe balanço de forças que será melhor explicado mais a frente quando for tratado o acoplamento. (Esta condição é tanto do tipo *A* quanto do tipo *B*)

Condições tipo *B*:

1. Ortogonalidade: Posiciona os nós e faz a malha ortogonal ao dado contorno.
2. Interface sólido-líquido: impõe balanço de forças que é melhor explicado mais a frente quando for tratado o acoplamento.

Um ponto interessante a ser notado é a ausência de condições iniciais, já que as equações de geração elíptica de malhas não possuem termos transientes. As figuras 3.4 e 3.5 mostram respectivamente aonde cada uma das condições de contorno é aplicada.

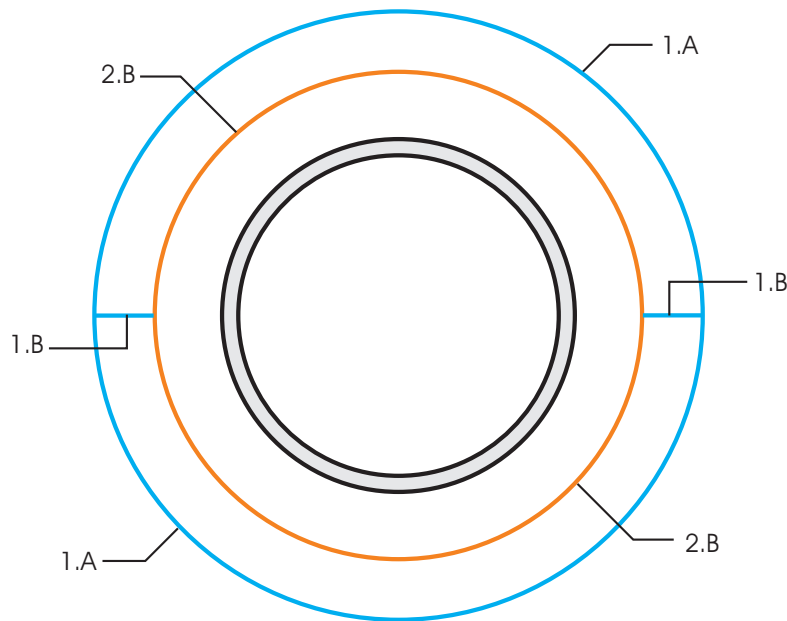


Figura 3.4: Localização das condições de contorno de malha na direção radial.

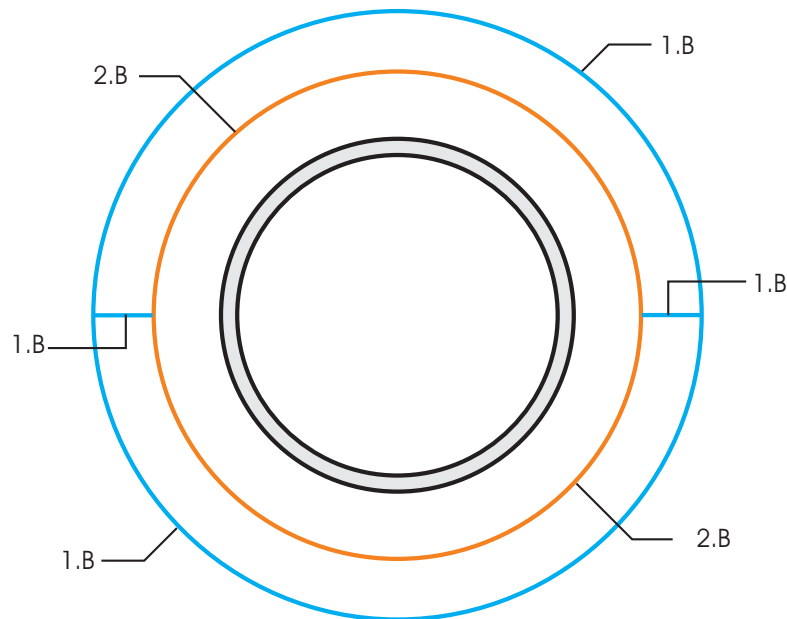


Figura 3.5: Localização das condições de contorno de malha na direção angular.

3.4 Modelagem do sólido

O comportamento do sólido, diferente do fluido, é descrito pelo campo de deformações. Dessa forma a informação buscada na solução das equações que governam este meio é a sua configuração geométrica num dado instante de tempo. Isso configura um típico problema de elasticidade, já que é esperado que o meio retorne a sua configuração original quando tiverem cessado todas as tensões externas.

Para se descrever completamente um campo de deformações, precisa-se comparar a configuração deformada Ω_S do meio com uma referência convenientemente escolhida (mesmo que o meio nunca assuma esta configuração). Uma escolha natural para sólidos elásticos é a configuração Ω_{S_0} que estes apresentariam caso se encontrassem completamente livre da ação de tensões externas. Tal configuração é conhecida como estado livre de tensões, e representa uma escolha clássica em problemas de elasticidade com deformações finitas (Malvern (Malvern)).

O procedimento para se resolver as equações é muito semelhante ao já realizado para o fluido. Precisa-se mapear o domínio físico no domínio de referência para que as equações possam ser resolvidas. A diferença, é que a solução do problema de elasticidade é por si só o mapeamento. Assim, é novamente necessário definir um tensor de transformação capaz de levar as equações do domínio físico (de coordenadas x e y) ao de referência (de coordenadas X_0 e Y_0) e vice-versa. Este tensor é conhecido como tensor gradiente de deformação \mathbf{F} , e é dado por

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X_0} & \frac{\partial x}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial X_0} & \frac{\partial y}{\partial Y_0} \end{pmatrix}. \quad (3-14)$$

Mais que levar as equações de um domínio à outro, este tensor fornece uma medida do quanto o material se encontra deformado em relação à sua configuração original. Maiores detalhes deste tensor e sua utilização são vistos mais adiante.

Para uma melhor compreensão dos procedimentos realizados, a seguir são apresentadas as equações que governam o comportamento do sólido juntamente com algumas hipóteses simplificadoras, seguido da formulação do problema de elasticidade.

3.4.1

Equações que Governam o Sólido

Analogamente ao fluido, o sólido é governado pela equação de conservação de momento de Cauchy, dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho_S \mathbf{b} = \rho_S \frac{D\mathbf{w}}{Dt} \quad (3-15)$$

onde, \mathbf{T} é o tensor das tensões, ρ_S é a massa específica do sólido, \mathbf{b} é o vetor forças de corpo e D/Dt representa a derivada material do vetor velocidade \mathbf{w} do sólido.

Despresando as forças de corpo, a eq. (3-15) se transforma em

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho_S \frac{D\mathbf{w}}{Dt}. \quad (3-16)$$

A eq. (3-16) apresenta como incógnitas velocidade e tensões, mas no entanto não são estas as grandezas que descrevem o comportamento do sólido. Torna-se então necessário explicitar essas duas variáveis em termos de posição e deformação. Nos termos de velocidade, isto é obtido automaticamente quando as equações são reescritas no domínio de referência, já que não há movimento de corpo rígido no material.

O campo de tensões pode ser escrito em função do campo de deformações através de uma equação constitutiva convenientemente escolhida. É possível encontrar na literatura diversos modelos constitutivos para materiais elásticos; dentre os mais comuns estão os modelos elásticos lineares, hipoeelásticos, viscoelásticos e hiperelásticos. A opção por um destes modelos deve ser tomada com base na resposta do material quando submetido a tensões e na amplitude de deformação do meio. Por exemplo, os modelos de sólidos viscoelásticos são freqüentemente utilizados na modelagem de polímeros e géis, porém seu uso é limitado a pequenas deformações. Os modelos elásticos lineares, por outro lado, não são capazes de reproduzir os efeitos não-lineares, presentes na deformação de polímeros e elastômeros.

Os modelos que melhor se aproximam do comportamento não-linear de elastômeros, e por isso utilizados neste trabalho, são os chamados modelos hiperelásticos. Nestes, o comportamento do material é descrito através de energia de deformação, e tem como qualidade permanecerem válidos ainda que teoria de grandes deformações sejam usadas. A equação constitutiva mais geral de um sólido hiperelástico é dada por (Gurtin (Gurtin)):

$$\mathbf{T} = f(\mathbf{B}) = f_0(I_B, II_B, III_B)\mathbf{I} + f_1(I_B, II_B, III_B)\mathbf{B} + f_2(I_B, II_B, III_B)\mathbf{B}^{-1}. \quad (3-17)$$

onde I_B, II_B e III_B são as invariantes do tensor esquerdo de Cauchy-Green e \mathbf{B} é o tensor de deformação esquerdo de Cauchy-Green, definido pelo produto do tensor gradiente de deformação \mathbf{F} (definido na eq. (3-14)) e o gradiente de deformação transposto:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T. \quad (3-18)$$

Considerando que o sólido seja incompressível, o terceiro invariante é igual à unidade (III_B), e leva a expressão simplificada

$$\mathbf{T} = -\pi\mathbf{I} + \beta_0(I_B, II_B)\mathbf{B} + \beta_1(I_B, II_B)\mathbf{B}^{-1}. \quad (3-19)$$

No caso particular quando os coeficientes β_0 e β_1 são constantes, a equação se reduz à equação de Mooney-Rivlin. Este modelo é bem genérico

na modelagem de sólidos elásticos e modela muito bem certos elastômeros, e por este motivo foi escolhido como modelo para o sólido flexível. A equação constitutiva utilizada é, então, expressa por

$$\mathbf{T} = -\pi\mathbf{I} + \beta_0\mathbf{B} + \beta_1\mathbf{B}^{-1}. \quad (3-20)$$

Quando β_1 é igual a zero na eq. (3-20), esta se transforma na equação constitutiva que modela sólidos Neo-Hookeanos (3-21).

$$\mathbf{T} = -\pi\mathbf{I} + \beta_0\mathbf{B}. \quad (3-21)$$

A segunda equação que modela o sólido é a equação de conservação de massa (equação da continuidade), que devido a consideração de incompressibilidade tem a seguinte forma:

$$\det(\mathbf{F}) = 1. \quad (3-22)$$

3.4.2

Formulação do Problema de Elasticidade do Sólido

As equações de conservação de momento (3-16) e constitutiva (3-20) estão escritas em sua formulação Euleriana, isto é, as equações estão formuladas no domínio físico parametrizadas pelo vetor posição em coordenadas espaciais (ou Eulerianas) \mathbf{x} . O tratamento do problema de elasticidade exige que as funções sejam transferidas do domínio físico para o de referência, colocando-as em uma formulação Lagrangeana, onde estas passam a ser parametrizadas pelo vetor posição em coordenadas Materiais (ou Lagrangeanas) \mathbf{X}_0 . Em outras palavras o domínio físico que é a própria incógnita do problema, passa a ser mapeado num domínio de referência de configuração igual aquela que o corpo possuiria caso este se encontrasse livre da ação de tensões externas (Figura 3.6).

A teoria clássica de elasticidade mostra que esta transformação pode ser obtida mediante a utilização de um dos dois tensores de tensão de Piola-Kirchhoff (Malvern (Malvern)). Estes dois tensores representam definições alternativas do tensor de tensões. O primeiro destes tensores é o de mais simples definição, porém possui a desvantagem de ser assimétrico. Sua expressão em função do gradiente de deformação é dada por:

$$\mathbf{T}^0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}. \quad (3-23)$$

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff é simétrico, porém leva a equação de conservação de quantidade de movimento linear a uma expressão mais complexa que o primeiro. Este pode ser encontrado em função de \mathbf{F} por:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T. \quad (3-24)$$

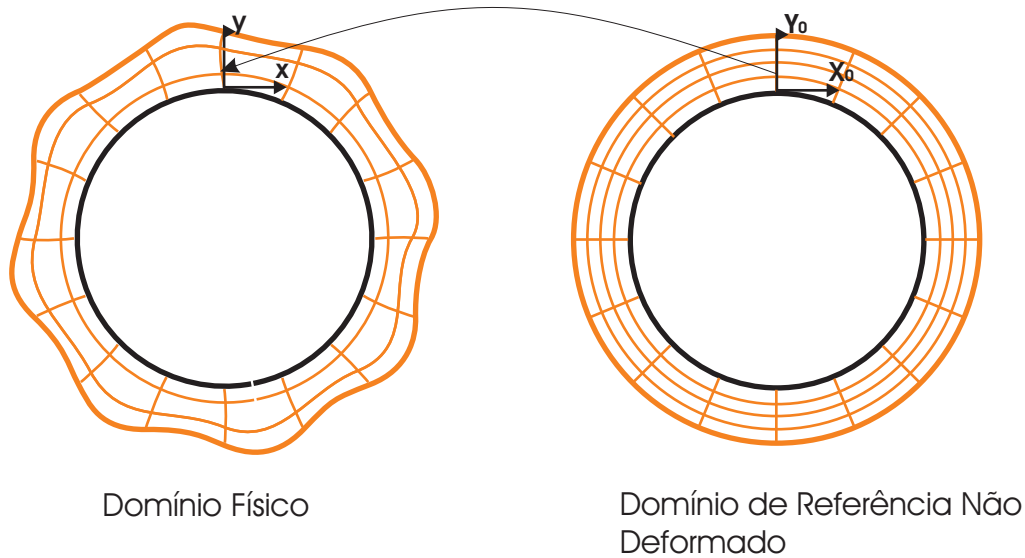


Figura 3.6: Mapeamento do domínio físico (deformado) no domínio de referência (não deformado).

A utilização desses tensores vai além de uma mera troca de variáveis, como ocorre no fluido. Deseja-se uma expressão para força por unidade de área não deformada. Neste contexto cada um dos tensores tem um significado físico. O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{T}^0 fornece a força atual $d\mathbf{P}$ aplicada sobre a área deformada dS mas calculada por unidade de área não deformada dS_0 , e expressa força em termos do vetor \hat{N} normal a dS_0 . Isto significa que

$$(\hat{N} \cdot \mathbf{T}^0)d\bar{\Gamma} = d\mathbf{P} = (\hat{n} \cdot \mathbf{T})d\Gamma. \quad (3-25)$$

O segundo tensor $\tilde{\mathbf{T}}$ tem um significado mais complexo. Este fornece a força $d\tilde{\mathbf{P}}$ que está relacionada a $d\mathbf{P}$ da mesma maneira que o vetor posição em coordenadas materiais $d\mathbf{X}_0$ está relacionado pela deformação ao correspondente em coordenadas espaciais $d\mathbf{x}$. De uma outra maneira

$$(\hat{N} \cdot \tilde{\mathbf{T}})dS_0 = (\hat{n} \cdot \mathbf{T}) \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (3-26)$$

O tratamento do termo relativo à derivada material leva a uma mesma expressão no domínio de referência, independente do tensor escolhido. Contudo o termo de gradiente de tensões assume uma expressão bem mais simples quando utilizado o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, e por este motivo foi este o escolhido para representar as tensões no domínio de referência.

O procedimento para reescrever a eq. (3-16) no domínio de referência é iniciado integrando-a no domínio físico

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} - \rho_S \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} d\Omega - \int_{\Omega} \rho_S \frac{D\mathbf{w}}{Dt} d\Omega = 0 \Rightarrow \\ \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} d\Gamma - \int_{\Omega} \rho_S \frac{D\mathbf{w}}{Dt} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3-27)$$

Substituindo-se a eq. (3-25) em (3-27) tem-se que:

$$\int_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} d\Gamma - \int_{\Omega} \rho_S \frac{D\mathbf{w}}{Dt} d\Omega = 0 = \int_{\bar{\Gamma}} \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} d\bar{\Gamma} - \int_{\bar{\Omega}} \rho_S \det(\mathbf{F}) \frac{D\mathbf{w}}{Dt} d\bar{\Omega} \quad (3-28)$$

Mas $\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}$ é o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{T}^0 . Lembrando-se que a velocidade no sólido deve-se unicamente a sua deformação, e fazendo $\rho_S \det(\mathbf{F}) = \rho_{S_0}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Gamma}} \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} d\bar{\Gamma} - \int_{\bar{\Omega}} \rho_{S_0} \frac{D^2 \mathbf{x}}{Dt^2} d\bar{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \int_{\bar{\Gamma}} \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{T}^0 d\bar{\Gamma} - \int_{\bar{\Omega}} \rho_{S_0} \frac{D^2 \mathbf{x}}{Dt^2} d\bar{\Omega} = 0 \Rightarrow \\ \int_{\bar{\Omega}} \nabla_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{T}^0 d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}} \rho_{S_0} \frac{D^2 \mathbf{x}}{Dt^2} d\bar{\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (3-29)$$

Levando à:

$$\nabla_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{T}^0 - \rho_{S_0} \frac{D^2 \mathbf{x}}{Dt^2} = 0 \quad (3-30)$$

onde, $\nabla_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{T}$ é o divergente em coordenadas materiais do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e $D^2 \mathbf{x}/Dt^2$ é a derivada material segunda da posição de cada ponto. Este último termo representa a taxa de variação da quantidade de movimento linear ao longo do tempo que cada partícula experimenta, e é responsável pela descrição do comportamento transiente do meio. Em casos onde seja considerado equilíbrio estático, este termo desaparece da eq. (3-30), transformando-a na equação de equilíbrio, já implementada no software de Elementos Finitos da PUC-Rio. Restando apenas, a inclusão do termo transiente ($D^2 \mathbf{x}/Dt^2$).

A equação constitutiva (3-20) também precisa ser escrita no domínio de referência. No domínio físico esta descreve o campo de tensões em função do tensor de deformação esquerdo de Cauchy \mathbf{B} , que se refere à configuração deformada. Porém, quando esta equação é transferida para o domínio de referência, este deve passar a ser escrita em função do tensor de deformações direito de Cauchy-Green \mathbf{C} , referente à configuração não-deformada do material, dado em função de \mathbf{F} por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (3-31)$$

Esta troca de variáveis é conseguida multiplicando-se toda a eq. (3-20) pela inversa do tensor gradiente de deformação, o que fornece

$$\mathbf{T}^0 \equiv \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} = -\pi \mathbf{F}^{-1} + \beta_0 \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} + \beta_1 \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B}^{-1}, \quad (3-32)$$

que manipulada se transforma em

$$\mathbf{T}^0 = -\pi \mathbf{F}^{-1} + \beta_0 \mathbf{F}^T + \beta_1 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}^{-1}. \quad (3-33)$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$\mathbf{T}^0 = -p^* \mathbf{F}^{-1} + \beta_0 \mathbf{F}^T - \beta_1 [\text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{F}^T - \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}^T], \quad (3-34)$$

onde, $\text{tr}(\mathbf{C})$ é o traço do tensor de deformação direito de Cauchy-Green, p^* é um multiplicador de Lagrange relativo à incompressibilidade do material, que pode ser escrito em termos da pressão no material de Mooney-Rivlin por $p^* = p + \beta_0 - 2\beta_1$.

Resolvendo as eqs. (3-30) e (3-34) encontra-se o mapeamento do domínio físico a partir da sua configuração não-deformada. Observa-se que o procedimento é bem mais simples que o realizado para o fluido, já que não há necessidade de se definir equações próprias para o mapeamento. Basta solucionar diretamente as equações no domínio de referência. Há, porém, uma questão relativa à compatibilidade dos domínios. Como foi dito, o domínio adotado como referência para o fluido possui uma geometria retangular, por ser a geometria mais simples para um domínio de referência, entretanto o domínio de referência do sólido (configuração não deformada) possui uma geometria circular (Figura 3.6). Isto representa um problema para o acoplamento, pois, os domínios onde as equações dos dois meios são resolvidas não se conectam.

Como solução a este problema o domínio de referência não deformado do sólido foi mapeado em um segundo domínio de referência $\bar{\Omega}_S$ de geometria retangular, parametrizado pelo vetor ξ , capaz de se conectar perfeitamente ao domínio do fluido pela interface (Figura 3.7). Este mapeamento é bem mais simples que os demais apresentados pois conecta dois domínios bem conhecidos, o que facilita também a transferência das equações.

A matriz responsável por transferir o domínio não deformado para o domínio computacional \mathbf{J}_{F_0} é dada por:

$$\mathbf{J}_{F_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial \eta} & \frac{\partial X_0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \xi} & \frac{\partial X_0}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (3-35)$$

Com essa matriz pode-se reescrever as equações de elasticidade no domínio computacional $\bar{\Omega}_S$. Maiores detalhes podem ser obtidos em Carvalho (Carvalho96).

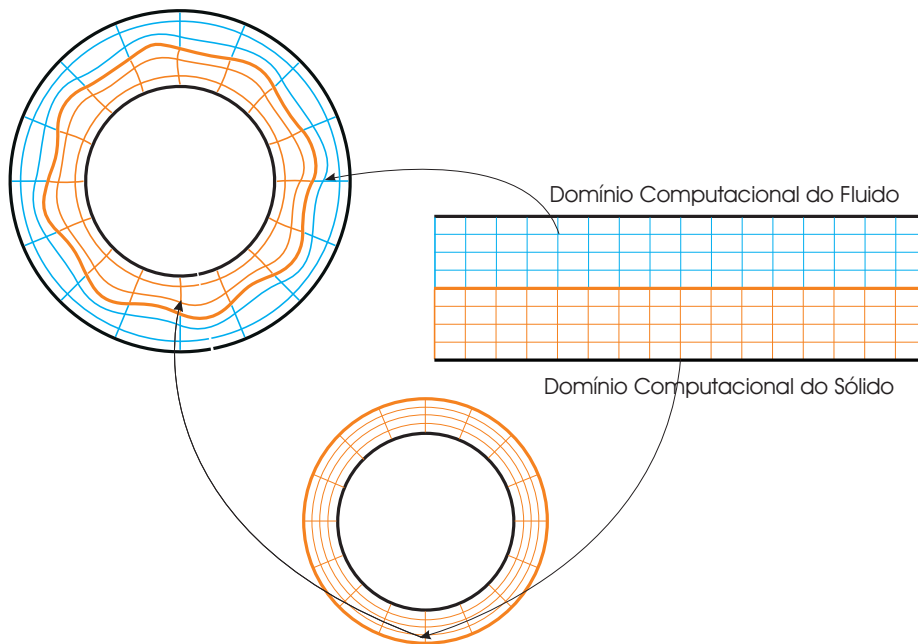


Figura 3.7: Mapeamento do domínio físico (deformado) no domínio de referência (não deformado).

3.4.3

Condições de Contorno para o Sólido

Como no estudo de escoamentos a solução das equações diferenciais depende de condições de contorno apropriadas. As condições de contorno para as equações de elasticidade devem fornecer informações a respeito da posição da fronteira ou sobre tensões, como será visto na seção de acoplamento.

A única condição de contorno sobre deformação no sólido é que, na fronteira aonde o sólido se encontra fixo ao cilindro mais interno, a deformação é nula. Ou seja,

$$\mathbf{x} - \mathbf{X}_0 = 0. \quad (3-36)$$

Há logicamente a informação de tensões exercidas na parede deformável, mas esta é melhor explicada na próxima seção sobre acoplamento.

3.4.4

Condições Iniciais para Equações do Sólido

As condições iniciais prescritas para o sólido informam que este se encontra não deformado nos instantes iniciais. Isto significa que para qualquer instante t menor que o instante inicial t_0 , tem-se:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}. \quad (3-37)$$

3.5 Acoplamento

A simples solução das equações de Navier-Stokes, continuidade e geração elíptica de malhas no domínio fluido e das equações de elasticidade e continuidade no domínio sólido não é capaz de descrever o comportamento do sistema como um todo. Além da definição de condições de contorno, precisa-se definir uma condição a ser aplicada na interface, que seja capaz de conectar a dinâmica dos dois meios.

Uma condição de acoplamento bem simples de ser implementada pode ser deduzida considerando-se o comportamento do sistema num instante de tempo arbitrário (Figura 3.8).

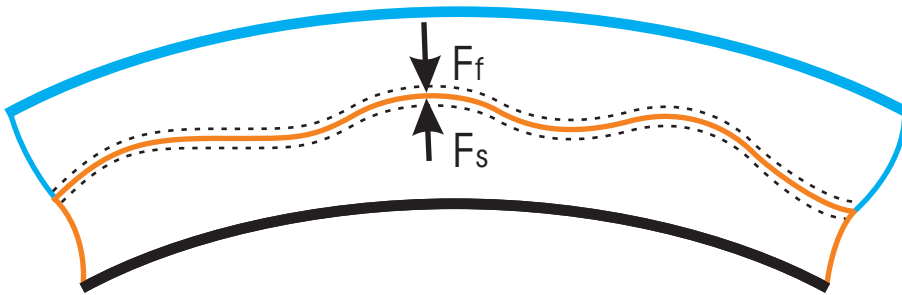


Figura 3.8: Balanço de Forças na interface sólido-fluido.

Fazendo um simples balanço de forças na interface, encontra-se:

$$\mathbf{Q}_S + \mathbf{Q}_L = 0, \quad (3-38)$$

onde, \mathbf{Q}_L é a força que o líquido exerce no sólido e \mathbf{Q}_S é a força que o sólido exerce no fluido. Considerando-se então o equilíbrio de forças normais na interface tem-se como condição de acoplamento:

$$\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{T}^0 = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma, \quad (3-39)$$

onde $\hat{\mathbf{N}}$ é vetor normal no domínio de referência do sólido, \mathbf{T}^0 é o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal no domínio do fluido e σ é o tensor das tensões do fluido.

Uma condição extra que acople a cinemática dos meios na interface também é necessária. Impondo-se condição de não-deslizamento, mas considerando o deslocamento do sólido temos que a velocidade do fluido em um ponto da interface é igual à taxa de variação no espaço deste mesmo ponto, ou seja,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}. \quad (3-40)$$

No entanto, para simplificações de inserção de rotinas no software, consideraremos que o deslocamento do sólido na interface, em um intervalo de tempo pequeno, é desprezível, o que nos leva a:

$$\mathbf{v} = 0. \quad (3-41)$$

A condição de contorno (3-41) não é exata, mas como espera-se que os deslocamentos sejam pequenos entre um instante de tempo e outro esta se torna uma boa aproximação. No capítulo 7 deste trabalho será mostrado que as deformações sofridas no sólido levam à criação de ondas dinâmicas que se propagam ao longo da interface. O principal efeito destas ondas é o deslocamento radial da interface. Pequenos deslocamentos na direção angular são possíveis, contudo, possuem amplitudes insignificantes. Logo, não devemos errar muito em fazer esta simplificação.