A.I
Propagação de ondas elásticas

Uma forma de análise dinâmica de estruturas é através da teoria de propagação de ondas elásticas, uma extensão da teoria da Elasticidade para problemas de vibrações em corpos. As ondas podem ser de esforços, de tensões ou de grandezas cinemáticas. Em sua formação e propagação consideram-se as propriedades do meio onde elas estão inseridas, condições de contorno e estados de carregamento.

Apresentam-se a seguir os principais conceitos sobre ondas unidirecionais, ondas tridimensionais, e por fim, particulariza-se para o caso de ondas planas, adotadas geralmente na análise dinâmica de sistemas solo-estrutura, como é o caso do programa SASSI2000.

A.I.1.
Ondas unidirecionais

A equação de movimento da onda unidirecional é obtida por equilíbrio de forças, compatibilidade de deslocamentos e pelas relações de deslocamento-deformação e tensão-deformação.

De maneira geral, a equação da onda unidirecional é uma equação diferencial parcial da forma:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \tag{1}$$

Onde: V = velocidade de propagação da onda.

E a solução dessa equação diferencial pode ser escrita, como a solução de D'Alembert, da forma:

$$u_x(x,t) = f(Vt - x) + g(Vt + x) \qquad (2)$$

Onde f e g são funções arbitrárias de (Vt - x) e (Vt + x) que satisfazem a Equação (3.21). A solução descreve um deslocamento da onda $[f(Vt - x)]$ propagando-se a uma velocidade V na direção positiva de x e outro $[g(Vt + x)]$ propagando-se com a mesma velocidade, porém na direção negativa. Isso também implica que a forma da onda não varia com a posição nem com o tempo.

Se o meio é sujeito a um estado permanente de tensão harmônica, $s(t) = s_0 \cos(wt)$, onde s_0 é a amplitude da onda de tensão e w é a freqüência circular do carregamento, a solução pode ser expressa usando o número de onda $k = w/V$, na forma:

$$u_x(x,t) = A\cos(wt - kx) + B\cos(wt + kx) \qquad (3)$$

Onde os termos descrevem ondas harmônicas propagando-se nas direções positiva e negativa de x, respectivamente.

O número de onda é relacionado com o comprimento de onda do movimento (λ), por:

$$l = VT = \frac{V}{f} = \frac{2pV}{w} = \frac{2p}{k} \qquad (4)$$

Onde: T - período do carregamento aplicado e $\frac{k}{l} = \frac{w}{T}$.

f – freqüência em Hz.

Nota-se que, para uma dada freqüência, λ aumenta com o aumento de V.

A.I.1.1.
Incidência de ondas unidirecionais

Agora, considere a onda de tensão propagando-se na direção x, como apresentado na Figura A.I.1.

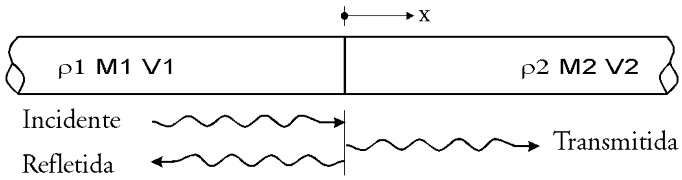


Figura A.I.1 - Incidência de onda unidirecional na interface entre diferentes materiais.

A onda propagando-se no material 1, onda incidente, tem um comprimento de onda $l_1 = 2p / k_1$ e tensão $s_I(x,t) = s_i e^{i(wt - k_1 x)}$. Quando a onda incidente atinge a interface, parte da energia é transmitida para continuar propagando na direção positiva de x, onda transmitida propagando no material 2, com comprimento de onda $l_2 = 2p / k_2$ e tensão $s_T(x,t) = s_t e^{i(wt - k_2 x)}$. A energia restante é refletida através da onda refletida propagando-se na direção negativa de x, no material 1, com comprimento de onda $l_1 = 2p / k_1$ e tensão $s_R(x,t) = s_r e^{i(wt + k_1 x)}$.

Admitindo-se que os deslocamentos associados a cada uma dessas ondas também são harmônicos, relacionando as amplitudes das tensões com as dos deslocamentos, através das relações tensão-deformação e deslocamento-deformação e satisfazendo à compatibilidade de deslocamentos e a continuidade de tensões na interface, com o uso da relação $kM = wrV$, tem-se que as amplitudes refletidas, incidente e refratadas são:

$$A_r = \frac{r_1 V_1 - r_2 V_2}{r_1 V_1 + r_2 V_2} \tag{5a}$$

$$A_i = \frac{1 - r_2 V_2 / r_1 V_1}{1 + r_2 V_2 / r_1 V_1} \tag{5b}$$

$$A_t = \frac{2}{1 + r_2 V_2 / r_1 V_1} A_i \tag{5c}$$

Como o produto da densidade (r) pela velocidade de propagação da onda é a impedância específica do material, tem-se, das Equações (5), que a divisão da energia na interface depende somente da razão entre as impedâncias específicas dos materiais de cada lado da mesma. Definindo-se $a_Z = r_2 V_2 / r_1 V_1$, como o fator de impedância, as amplitudes dos deslocamentos das ondas refletida e transmitida ficam:

$$A_r = \frac{1 - a_Z}{1 + a_Z} A_i \qquad \mathrm{A}_t = \frac{2}{1 + a_Z} A_i \tag{6}$$

E o efeito do fator de impedância nas amplitudes das ondas de tensão é, substituindo as Equações (5) nas Equações (6), igual a:

$$A_i = -\frac{s_i}{ik_1 M_1} \qquad A_r = \frac{s_r}{ik_1 M_1} \qquad A_t = -\frac{s_t}{ik_2 M_2} \tag{7}$$

$$s_r = \frac{a_Z - 1}{1 + a_Z} s_i \qquad s_t = \frac{2a_Z}{1 + a_Z} s_i \tag{8}$$

A.I.2.
Ondas tridimensionais

A análise de ondas tridimensionais utiliza as mesmas relações e condições de equilíbrio da onda unidirecional, porém considerando as três direções.

As Equações de Movimento de um Sólido Elástico, usando a Lei de Hooke para expressá-las em termos de deslocamentos, são:

$$r \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (l + m) \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} + m \nabla^2 u_x \tag{9a}$$

$$r \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = (l + m) \frac{\partial \bar{e}}{\partial y} + m \nabla^2 u_y \tag{9b}$$

$$r \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (l + m) \frac{\partial \bar{e}}{\partial z} + m \nabla^2 u_z \tag{9c}$$

Onde: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

$\bar{e} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ - variação volumétrica de um cubo de aresta unitária, “dilatação” ou fração de variação de volume.

Essas equações podem ser manipuladas para produzirem duas equações de onda. Conseqüentemente somente duas ondas propagam-se através de um sólido ilimitado.

A solução para o primeiro tipo de onda é obtida diferenciando-se cada equação de movimento em relação a x, y e z e adicionando-se os resultados:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{e} = \frac{(l + 2m)}{r}\nabla^2\bar{e} \qquad (10)$$

Onde: l e m - constantes de Lamé, que relacionam tensões com deformações.

A Equação (10) descreve uma onda irrotacional ou dilatacional, com velocidade de propagação (V_p) igual a:

$$V_P = \sqrt{\frac{l + 2m}{r}} \qquad (11)$$

Essa onda é comumente conhecida como onda P.

Usando as relações: $G = m$ (módulo de deformação transversal) e $n = \frac{l}{2(l + m)}$ (coeficiente de Poisson), V_p pode ser reescrita como:

$$V_P = \sqrt{\frac{G(2 - 2n)}{r(1 - 2n)}} \qquad (12)$$

O que relaciona a velocidade da onda dilatacional P com o comportamento transversal.

Para obter a solução do segundo tipo de onda, $\bar{e}$ é eliminado diferenciando-se as Equações (9b) e (9c) em relação a z e y respectivamente e subtraindo-se um resultado do outro. E, com as definições de rotação: $\Omega_x = 2\left(\frac{du_z}{dy} - \frac{du_y}{dz}\right)$, $\Omega_y = 2\left(\frac{du_x}{dz} - \frac{du_z}{dx}\right)$, $\Omega_z = 2\left(\frac{du_y}{dx} - \frac{du_x}{dy}\right)$, a equação que descreve uma onda de distorção ou equivoluminal de rotação em torno do eixo x torna-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega_x = \frac{m}{r}\nabla^2\Omega_x \tag{13}$$

Obtêm-se fórmulas similares para as rotações em torno de y e z.

A velocidade de propagação da onda de distorção é:

$$V_S = \sqrt{\frac{m}{r}} = \sqrt{\frac{G}{r}} \tag{14}$$

Essa onda é conhecida como onda S e possui duas componentes, uma com movimento da partícula só na horizontal (onda SH) e outra com movimento na vertical (onda SV). O movimento arbitrário de uma partícula é representado pelo vetor soma das componentes.

A velocidade da onda P excede a da onda S numa quantidade que depende da compressibilidade do corpo.

$$\frac{V_P}{V_S} = \sqrt{\frac{(2-2n)}{(1-2n)}} = \sqrt{\frac{1-n}{0{,}5-n}} \tag{15}$$

A.I.2.1.
Incidência de ondas tridimensionais inclinadas

Em geral, as ondas não se aproximam da interface a 90º e a orientação das mesmas influencia muito na maneira como a energia é refletida e refratada ao cruzar a interface.

Considere o caso de dois semi-espaços de materiais diferentes em contato. Como as ondas P e SV envolvem movimento das partículas perpendicular ao plano da interface, ambas produzirão ondas P e SV refletidas e refratadas. Já, como a onda SH incidente não envolve movimento perpendicular à interface, ela só produzirá ondas SH, refletidas e refratadas. As direções e amplitudes relativas das ondas produzidas na interface dependem da direção e da amplitude da onda incidente e são determinadas pelas relações de equilíbrio e compatibilidade, aplicando-se a Lei de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{U}=\frac{\operatorname{sen} b}{V}=\frac{\operatorname{sen} c}{U}=\frac{\operatorname{sen} d}{V}=\frac{\operatorname{sen} e}{Y}=\frac{\operatorname{sen} f}{Z} \tag{16}$$

Onde:

Tipo de Onda	Velocidade	Amplitude	Ângulo com a normal
P incidente	U	A	a
S incidente	V	B	b
P refletida	U	C	c
S refletida	V	D	d
P refratada	Y	E	e
S refratada	Z	F	f

Como as ondas incidente e refletida propagam-se no mesmo material $a=c$ e $b=d$, mostrando que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

O ângulo de refração relaciona-se com o de incidência pela razão das velocidades de onda dos materiais de cada lado da interface. A lei de Snell indica que ondas propagando-se de um material com maior velocidade para um material com menor velocidade serão refratadas próximas da normal da superfície. O ângulo de incidência crítico, i_c, é aquele que produz uma onda refratada propagando-se paralelamente à interface (e ou $f = 90º$).

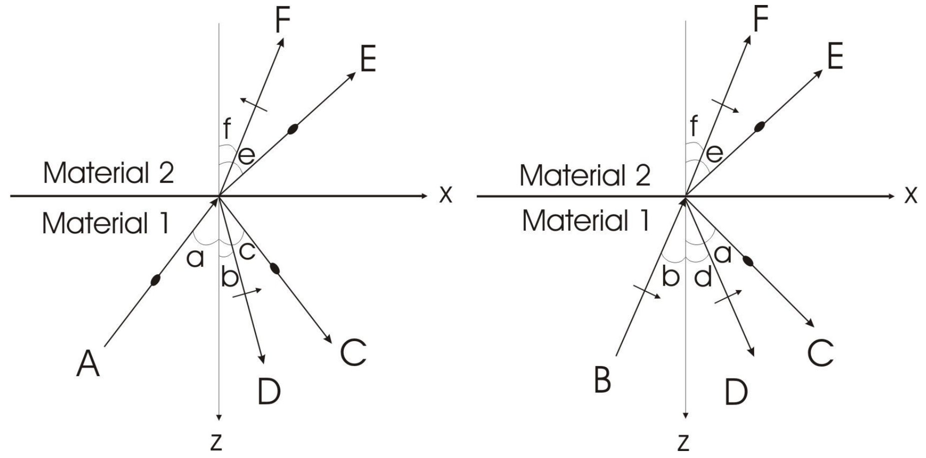
$$i_c = sen^{-1}\left(\frac{U}{Y}\right) = sen^{-1}\left(\frac{V}{Z}\right) = sen^{-1}\left(\frac{U}{V}\right) \qquad (17)$$

Assumindo-se onda incidente harmônica e satisfazendo-se as condições de equilíbrio e compatibilidade na interface, escrevem-se as amplitudes das ondas refletidas e refratadas em termos da onda incidente.

Uma onda dilatacional incidindo em uma superfície que divide dois meios com materiais diferentes, Figura A.I.2(a), deve, na interface (z = *0*) atender às seguintes condições de contorno e equilíbrio:

$$\begin{aligned} &(i)\sum u_{x_1} = \sum u_{x_2} \\ &(ii)\sum u_{y_1} = \sum u_{y_2} \\ &(iii)\sum (s_{zz})_1 = \sum (s_{zz})_2 \\ &(iv)\sum (s_{xz})_1 = \sum (s_{xz})_2 \end{aligned} \qquad (18)$$

Onde as componentes com sufixo 1 correspondem às componentes agindo no material 1 e as com sufixo 2 às componentes atuando no material 2.



(a) (b)

Figura A.I.2– Reflexão e refração de ondas em uma interface plana: (a) onda dilatacional incidente; (b) onda de distorção incidente.

Assim, as relações de amplitudes e ângulos são:

$$(A+C)sen(a) + D\cos(b) - Esen(e) + F\cos(f) = 0 \qquad (19)$$

$$(A-C)\cos(a) + Dsen(b) - E\cos(e) - Fsen(f) = 0 \qquad (20)$$

$$(A+C)\cos(2b) - D\frac{V}{U}sen(2b) - E\frac{Y}{U}\mathrm{K}\cos(2f) - F\frac{Z}{U}\mathrm{K}sen(2f) = 0 \qquad (21)$$

$$(A-C)sen(2a)-D\frac{U}{V}\cos(2b)-E\frac{U}{Y}\frac{Z^2}{V^2}\mathrm{K}sen(2e)+F\frac{U}{Z}\frac{Z^2}{V^2}\mathrm{K}\cos(2f)=0 \tag{22}$$

onde $\mathrm{K} = r_2 / r_1$ (razão entre as densidades dos dois meios)

Toma-se agora a incidência de uma onda de distorção, Figura A.I.2b). Deve ser especificada a direção de vibração da onda incidente. Quando a direção for paralela ao eixo-y, onda SH, não há movimento normal na interface e não são geradas ondas dilatacionais. Como $\frac{sen(f)}{sen(b)}=\frac{Z}{V}$ e as condições de contorno relevantes:

$$\begin{aligned}&(i)\sum u_{y_1} = \sum u_{y_2}\\ &(ii)\sum(s_{yx})_1 = \sum(s_{yx})_2\end{aligned} \tag{23}$$

As relações que satisfazem as condições acima são:

$$B+D-F=0 \tag{24}$$

$$(B-D)r_1 sen(2b)-Fr_2 sen(2f)=0 \tag{25}$$

Já quando a vibração for no plano x-z (ondas SV), são geradas quatro ondas, ver Figura A.I.2b). Na interface (z=*0*) as condições (18) devem ser satisfeitas, assim:

$$(B+D)\cos(b)+Csen(a)-Esen(e)-F\cos(f)=0 \tag{26}$$

$$(B-D)sen(b)+C\cos(a)+E\cos(e)-Fsen(f)=0 \tag{27}$$

$$(B+D)sen(2b)-C\frac{U}{V}\cos(2b)+E\frac{Y}{V}\mathrm{K}\cos(2f)-F\frac{Z}{V}sen(2f)=0 \tag{28}$$

$$(B-D)\cos(2b)-C\frac{V}{U}sen(2a)-E\frac{Z^2}{YV}sen(2e)-F\frac{Z}{V}\mathrm{K}\cos(2f)=0 \tag{29}$$

A.I.3.
Ondas Planas

A Terra é idealizada como um corpo semi-infinito com uma superfície plana livre, desconsidera-se a curvatura da terra.

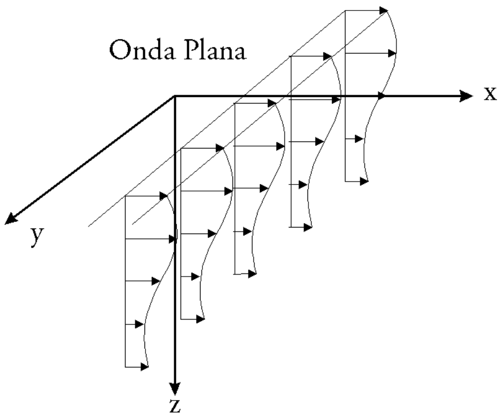


Figura A.I.3 - Movimento induzido por uma típica onda plana propagando na direção x, sem movimento na direção y. Fonte: Kramer,1996

Um terreno pode ser representado por camadas horizontais onde se formam ondas superficiais (Rayleigh e Love) devidas a ondas de corpo (P, SV e SH) incidentes em um semi-espaço.

As ondas em questão formam a excitação sísmica e são admitidas planas, Figura A.I.3, para fins de análise.

A.I.3.1.
Ondas de corpo

As ondas de corpo incidentes geram componentes de deslocamentos em três direções, porém não variam na direção y, sendo os problemas resolvidos no plano x-z. Com isso, para uma excitação harmônica, as Equações (9) podem ser reescritas, segundo Chen (1980), como:

$$\left(M^* - G^*\right)\frac{\partial \bar{e}}{\partial x} + G^*\nabla^2 u_x = r\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \qquad (30a)$$

$$\left(M^* - G^*\right)\frac{\partial \bar{e}}{\partial z} + G^*\nabla^2 u_z = r\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \qquad (30b)$$

$$G^*\nabla^2 u_y = r\,\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \qquad (30c)$$

Onde M^* e G^* - módulos complexos.

As Equações (30a e b) são acopladas e governam o movimento no plano vertical x-z, enquanto que a Equação (30c) governa o movimento perpendicular a esse plano.

As primeiras equações são resolvidas expressando-se os deslocamentos em termos de deslocamentos potenciais f e y , Equações (31a e b), associados às ondas P e SV, respectivamente, e devem satisfazer as equações da onda correspondente.

$$u_x = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z} \tag{31a}$$

$$u_z = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \tag{31b}$$

Como os deslocamentos são admitidos harmônicos na freqüência ω, os potenciais também o devem ser, podendo-se assim reescrever as equações da onda independentemente do tempo:

$$\nabla^2 \Phi + k_P^2 \Phi = 0 \tag{32a}$$

$$\nabla^2 \Psi + k_S^2 \Psi = 0 \tag{32b}$$

Onde: Φ e Ψ - amplitudes potenciais complexas.

$k_P = w / V_P^*$ e $k_S = w / V_S^*$ - números complexos de ondas P e S, respectivamente.

A solução particular dessas equações corresponde a ondas planas propagando-se na direção positiva de x com o número de onda complexo *k*. Esse número de onda pode ser encontrado por separação de variáveis e tem a seguinte relação com as ondas P e S:

$$k = k_P sen(a) = k_S sen(b) \tag{33}$$

Onde: *a* e *b* – ângulos formados entre a normal e as ondas incidentes.

As soluções para as Equações (32) são:

$$\Phi = \left(A(w)e^{ik_f z} + C(w)e^{-ik_f z}\right)e^{-ikx} \quad (34a)$$

$$\Psi = \left(B(w)e^{ik_y z} + D(w)e^{-ik_y z}\right)e^{-ikx} \quad (34b)$$

Sendo:

$$k_f = k_P \cos(a) = k \cot(a) \quad (35a)$$

$$k_y = k_S \cos(b) = k \cot(b) \quad (35b)$$

A Equação (30c) descreve o movimento de ondas SH. A solução para esses movimentos harmônicos propagando-se com número de onda *k* na direção positiva de x é:

$$u_y = U_y e^{iwt} \quad (36)$$

Sendo:

$$U_y = \left(Be^{ik_y z} + De^{-ik_y z}\right)e^{ikx} \quad (37)$$

Onde: *B* e *D* – constantes complexas arbitrárias.

A.I.3.1.1.
Incidência de ondas de corpo

Considera-se primeiramente a solução para o caso de ondas incidindo obliquamente na superfície livre de um semi-espaço viscoelástico, Figura A.I.4, o que servirá de base para estudos mais complexos, como o de sistemas estratificados.

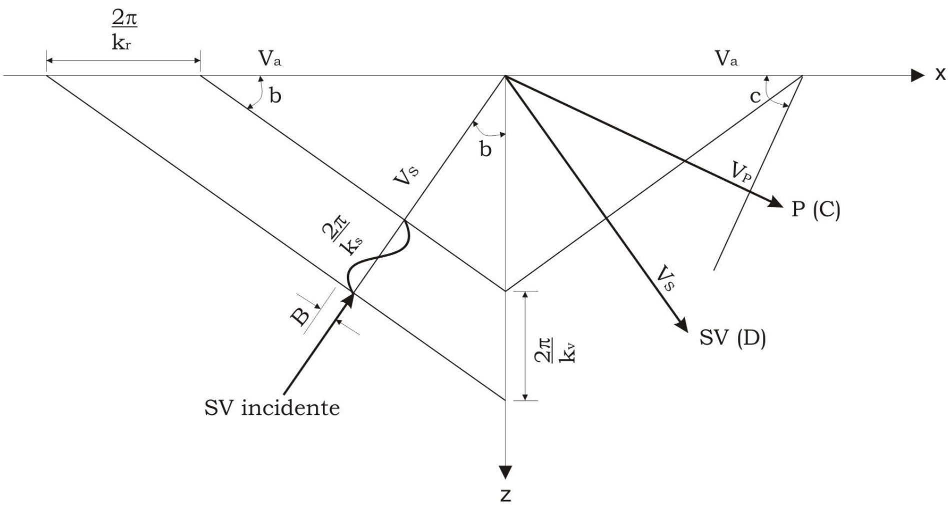


Figura A.I.4– Incidência e reflexão de uma onda SV incidindo na superfície-livre. Fonte: Chen, 1980.

Resolve-se o problema para onda SV incidente, porém a resolução para onda P segue o mesmo raciocínio. No caso em questão, como não há onda P incidente, a solução é conseguida atribuindo-se $A = 0$ na Equação (34a). E o termo C, que representa a onda P refletida, só existirá quando o ângulo de incidência da onda SV for menor que o ângulo crítico, pois $sen(c) > 1$ para $b > b_c$, onde c é o ângulo da onda P refletida. Pela lei de Snell o ângulo crítico é:

$$b_c = \frac{V_S^*}{V_P^*} \tag{38}$$

As amplitudes das ondas refletidas são encontradas pela condição de que não há tensões na superfície livre. Introduzindo a notação: $m = \cot(c)$ e $n = \cot(b)$, pelas Equações (31), (34) e (35), tem-se que as amplitudes dos deslocamentos são:

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_z \end{Bmatrix} = ike^{-ikx}[\mathrm{Z}]\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \tag{39}$$

Onde:

$$[\mathrm{Z}] = \begin{bmatrix} -e^{imkz} & -ne^{inkz} & -e^{-imkz} & ne^{-inkz} \\ me^{imkz} & -e^{inkz} & -me^{-imkz} & -e^{-inkz} \end{bmatrix} \tag{40}$$

E, na superfície (x = z = 0)

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_z \end{Bmatrix}_0 = ik \begin{bmatrix} -1 & -n & -1 & n \\ m & -1 & -m & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \tag{41}$$

As deformações são obtidas diferenciando-se a Equação (39) e as tensões pela aplicação da lei de Hooke. Como A = 0 e B é conhecido, chega-se a um sistema de equações lineares, cuja solução fornece C e D, da forma:

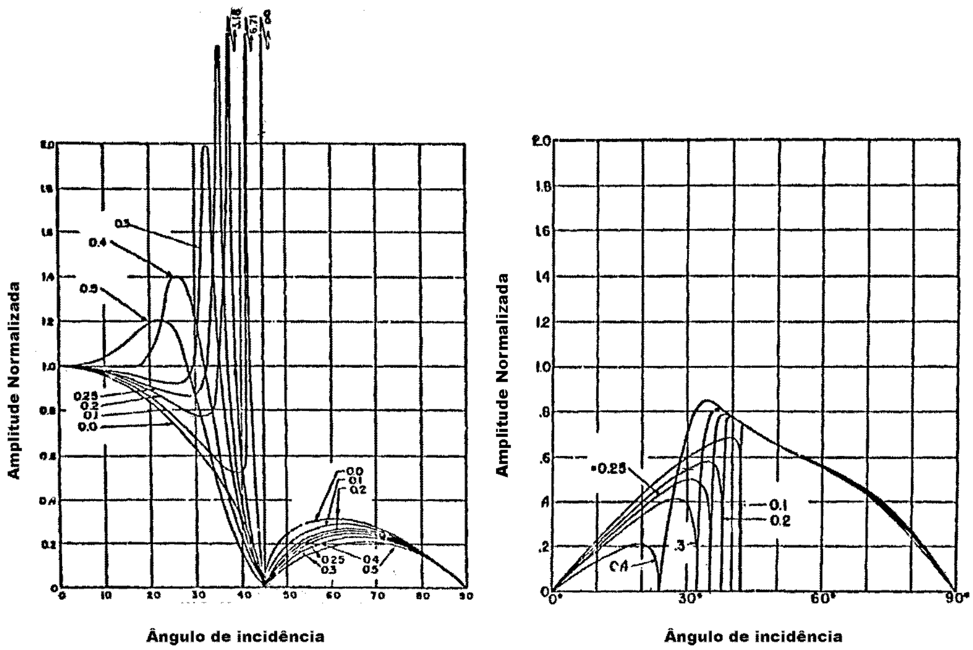
$$C = \frac{-4n(1-n)^2}{4mn + (1-n^2)^2} B \tag{42}$$

$$D = \frac{4mn - (1-n^2)^2}{4mn + (1-n^2)^2} B \tag{43}$$

Pode-se observar que para $b = 0º$, $C = 0$ e $D = -1$; e que para $b = 45º$, $C = 0$ e $D = 1$, ou seja, não há onda P refletida em nenhum dos casos. Nota-se também que não há deslocamento vertical na superfície para $b = 0º$, nem horizontal no caso de $b = 45º$. Os deslocamentos para os demais ângulos de incidência são obtidos pela Equação (41).

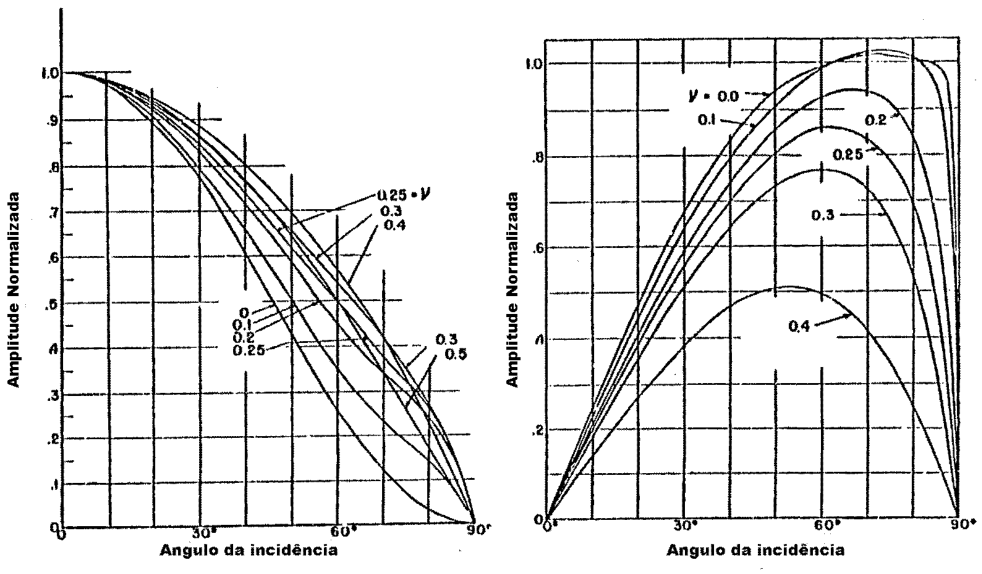
O caso de onda P incidente resolve-se da mesma forma, porém fazendo-se $B = 0$ na Equação (34b). No caso de onda P incidente, pela lei de Snell, nota-se que não há ângulo critico, uma vez que V_P^* é sempre superior a V_S^*.

As soluções para o caso de semi-espaço elástico foram publicadas por Knopoff et all e Meissner (apud Chen, 1980), A Figura A.I.5 apresenta a variação das amplitudes das componentes horizontal (a) e vertical (b), na superfície, normalizadas pela amplitude horizontal de uma onda SV vertical incidente. E, na Figura A.I.6 têm-se as amplitudes normalizadas vertical (a) e horizontal (b) no caso de onda P incidente. Também é apresentada uma análise da influência do coeficiente de Poisson, tanto no caso de onda SV quanto da onda P incidente.



(a) (b)

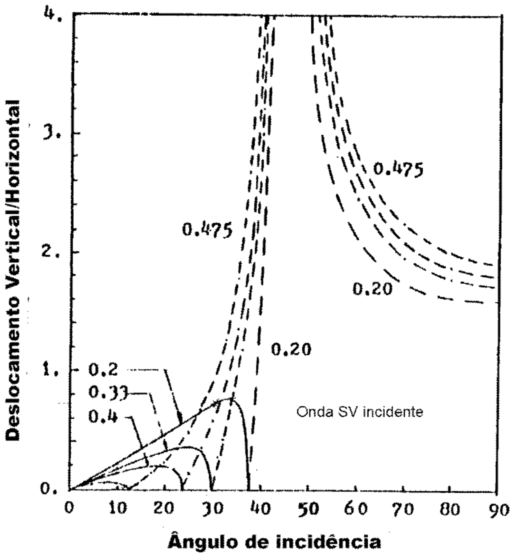
Figura A.I.5 - Movimento superficial para onda SV incidente, componentes: (a) horizontal; (b) vertical. Fonte: Chen, 1980.



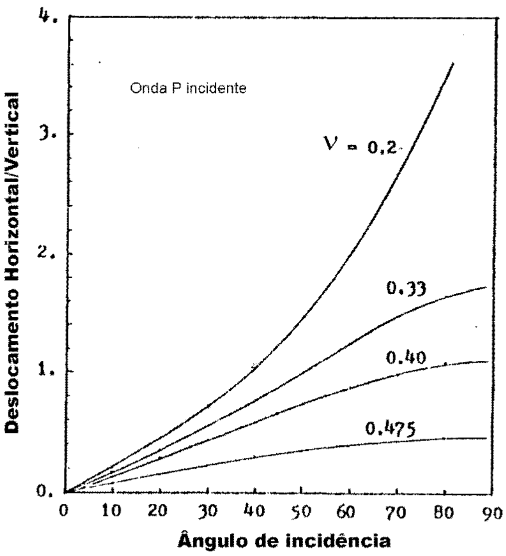
(a) (b)

Figura A.I.6- Movimento superficial para onda P incidente, componentes: (a) vertical; (b) horizontal. Fonte: Chen, 1980.

Comparações entre as amplitudes dos movimentos superficiais vertical e horizontal para onda SV e, horizontal e vertical para onda P incidente são mostradas na Figura A.I.7 (a) e (b), respectivamente.



(a)



(b)

Figura A.I.7 - Razão entre os deslocamentos superficiais: (a) vertical pelo horizontal para onda SV incidente; (b) horizontal pelo vertical para onda P incidente. Fonte: Chen, 1980.

Trata-se agora do caso de uma camada de espessura H sobre o semi-espaço. Para tal, os deslocamentos potenciais das ondas P e SV no semi-espaço e na camada são, respectivamente, denotados por:

$$\Phi = \left(Ae^{imkz} + Ce^{-imkz}\right)e^{-ikx} \qquad (44a)$$

$$\Psi = \left(Be^{inkz} + De^{-inkz}\right)e^{-ikx} \qquad (44b)$$

Onde:

$$m = \sqrt{\left(V_a^* / V_P^*\right)^2 - 1} \quad \text{e} \quad n = \sqrt{\left(V_a^* / V_S^*\right)^2 - 1}$$

E

$$\Phi' = \left(E_1 e^{irkz} + E_2 e^{-irkz}\right)e^{-ikx} \qquad (45a)$$

$$\Psi' = \left(F_1 e^{iskz} + F_2 e^{-iskz}\right)e^{-ikx} \qquad (45b)$$

Onde:

$$r = \sqrt{\left(V_a^* / V_P^{*'}\right)^2 - 1} \quad \text{e} \quad s = \sqrt{\left(V_a^* / V_S^{*'}\right)^2 - 1}$$

As constantes, A, B, C, D, E_1, E_2, F_1 e F_2, são determinadas aplicando-se as condições de contorno (46) e adotando-se as seguintes hipóteses:

- somente uma onda incidente;

- ângulo de incidência real

- velocidade aparente da fase complexa da onda na superfície livre $V_a^* = V_S^* / sen(b)$.

$$z = 0 \rightarrow U_x = U_x^{'} \quad U_z = U_z^{'} \quad t_{xz} = t_{xz}^{'} \quad s_{zz} = s_{zz}^{'} \quad \text{e} \quad z = -H \rightarrow t_{xz}^{'} = 0 \quad s_{zz}^{'} = 0 \tag{46}$$

Com isso, os deslocamentos na superfície da camada, para qualquer expansão de campo de ondas da Equação (31), são:

$$\begin{aligned} u_x^{'} &= U_x^{'} e^{i(wt-kx)} \\ u_z^{'} &= U_z^{'} e^{i(wt-kx)} \end{aligned} \tag{47}$$

Onde:

$$\begin{aligned} U_x^{'} &= -ik\left\{\left(E_1^{'} e^{ikrz} + E_2^{'} e^{-ikrz}\right) + s\left(F_1^{'} e^{iksz} - F_2^{'} e^{-iksz}\right)\right\} \\ U_z^{'} &= ik\left\{r\left(E_1^{'} e^{ikrz} - E_2^{'} e^{-ikrz}\right) - \left(F_1^{'} e^{iksz} + F_2^{'} e^{iksz}\right)\right\} \end{aligned} \tag{48}$$

Os deslocamentos na base do semi-espaço são dados pela Equação (41).

Finalmente, considera-se o caso de n camadas sobre um semi-espaço elástico, teoria apresentada por Chen (1980) e aplicada na resolução de campo livre do programa SASSI.

Considerando-se variação linear dos deslocamentos em cada camada, os deslocamentos em qualquer ponto do sistema, para uma onda harmônica propagando-se na direção horizontal x com uma freqüência ω, são:

$$d_x = aU_x(z)e^{i(wt-kx)} \tag{49a}$$

$$d_z = i a U_z(z) e^{i(wt-kx)} \tag{49b}$$

Onde: α- fator de participação modal relativo ao movimento de controle fornecido.

A equação de movimento para o sistema discretizado é:

$$\left([K]-w^2[M]\right)\{U\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ P_b \end{Bmatrix} \tag{50a}$$

Onde:

$$[K]=[A]k^2+[\overline{B}]k+[G] \tag{50b}$$

$[A], [\overline{B}], [G] e [M]$ - matrizes (2n+2)x(2n+2), de propriedades dos materiais das camadas e do semi-espaço.

$\{P_b\}$ - vetor de cargas na interface entre as camadas e o semi_espaço.

$\{U\}$ - vetor dos deslocamentos u_x *e* u_z na interface de cada camada.

Para facilitar a obtenção das equações no topo do semi-espaço, divide-se a Equação (50a) da forma:

$$\left(\begin{bmatrix} K_l & K_c \\ K_c^T & K_b \end{bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} M_l & M_c \\ M_c^T & M_B \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} U_l \\ U_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ P_b \end{Bmatrix} \tag{51}$$

Onde os sufixos: *l*, *b* e *c* denotam quantidades referentes às camadas, ao topo do semi-espaço e à interação entre as camadas e o semi-espaço.

Definindo-se $[\overline{K}]=[K]-w^2[M]$, através de condensação encontram-se os deslocamentos das camadas em função dos deslocamentos do topo do semi-espaço, Equação (52), e a relação dos deslocamentos e forças na interface das camadas com o semi-espaço, Equação (53).

$$\{U_l\}=-[\overline{K}_l]^{-1}[\overline{K}_c]\{U_b\} \qquad l=1,2,\ldots,2n \tag{52}$$

$$[L]\{U_b\} = \{P_b\} \quad (53)$$

Onde:

$$[L] = -[\overline{K}_c]^T [\overline{K}_l]^{-1} [\overline{K}_c] + [\overline{K}_b] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

Os deslocamentos e forças na interface são dados pela Equação (41) e pela relação de tensões.

$$\{U_b\} = ik\begin{bmatrix} -1 & -n \\ m & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} + ik\begin{bmatrix} -1 & n \\ -m & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} \quad (54)$$

e

$$\{P_b\} = G^* k^2 \begin{bmatrix} 2m & (n^2-1) \\ -(n^2-1) & 2n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} + G^* k \begin{bmatrix} -2m & (n^2-1) \\ -(n^2-1) & -2n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} \quad (55)$$

Substituindo-se as Equações (54) e (55) em (53), tem-se um sistema linear com duas equações e quatro incógnitas. Especificando-se um tipo de onda incidente, as amplitudes das ondas refletidas normalizadas pela da onda incidente são encontradas por:

$$\begin{Bmatrix} C_N \\ D_N \end{Bmatrix} = [N]^{-1}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (56)$$

Onde:

$$[N] = \begin{bmatrix} (N_{11} - N_{12}) & (N_{13} - N_{14}) \\ (N_{21} - N_{22}) & (N_{23} - N_{24}) \end{bmatrix} \quad (57)$$

e

$$N_{11} = ikL_{11} \qquad N_{21} = -ikL_{21} - (n^2-1)G^* k^2$$
$$N_{12} = kmL_{12} + 2mG^* k^2 \qquad N_{22} = kmL_{22}$$
$$N_{13} = -kL_{12} + (n^2-1)G^* k^2 \qquad N_{23} = kL_{23}$$
$$N_{14} = iknL_{11} \qquad N_{24} = -i(knL_{21} + 2nG^* k^2)$$

As quantidades Q_1 e Q_2 dependem da onda incidente, sendo:

$$\begin{matrix} Q_1 = -(N_{11} + N_{14}) \\ Q_2 = -(N_{23} + N_{24}) \end{matrix}, \text{ para onda SV incidente} \tag{58}$$

e

$$\begin{matrix} Q_1 = -(N_{11} + N_{12}) \\ Q_2 = -(N_{21} + N_{22}) \end{matrix}, \text{ para onda P incidente} \tag{59}$$

O caso de ondas SH inclinadas é resolvido de maneira similar. Os deslocamentos são perpendiculares ao plano x-z e descritos como:

$$d_y = aU_y(z)e^{i(wt-kx)} \tag{60}$$

A equação de movimento tem a mesma forma da Equação (50a), porém a matriz de rigidez, agora da ordem (n+1)x(n+1), é:

$$[K] = [A]k^2 + [G] \tag{61}$$

Seguindo os procedimentos já adotados para ondas P e SV, através das Equações (51) a (53) estabelecem-se as relações entre as forças e os deslocamentos na interface, derivadas das Equações (36) e (37), de forma similar à adotada para a onda SV, normalizando-as pela amplitude da onda incidente e expressado-as em termos do número de onda, módulo de deformação transversal e coeficientes de reflexão. Determinados os coeficientes normalizados, estes são substituídos na equação dos deslocamentos da interface e as amplitudes dos deslocamentos de cada camada encontradas por um conjunto de equações lineares para cada freqüência fornecida, de forma similar a já apresentada.

A.I.3.2.
Ondas superficiais

As condições de contorno associadas à superfície livre da terra permitem soluções adicionais às equações de movimento que descrevem ondas cujo movimento concentra-se em uma zona rasa, próxima à superfície terrestre, por isso ondas superficiais. Duas delas têm principal relevância: as ondas de Rayleigh e as ondas de Love.

As ondas de Rayleigh são uma combinação de ondas P e SV que satisfazem certas condições de contorno. Se a onda é harmônica com freqüência w e número de onda k_R, então ela propaga-se com velocidade de Rayleigh $V_R = w/k_R$, e as amplitudes das funções potenciais harmônicas de movimento podem ser expressas como:

$$\Phi = Ae^{-qz}e^{-ikx} \tag{62a}$$

$$\Psi = Be^{-sz}e^{-ikx} \tag{62b}$$

Onde: $q = \sqrt{k_R^2 - k_P^2}$ e $s = \sqrt{k_R^2 - k_S^2}$

A e B – constantes complexas desconhecidas.

A velocidade e a forma dos deslocamentos da onda são obtidas, então, pela introdução das condições de contorno, tensões nulas na superfície livre, nas Equações (31) e (62). Assim, a velocidade da onda R, em relação à V_S, pode ser encontrada pela equação cúbica:

$$X^3 - 8X^2 + (24 - 16Y)X + 16(Y - 1) = 0 \tag{63}$$

Onde: $X = \left(\frac{k_S}{k_R}\right)^2 = \left(\frac{V_R^*}{V_S^*}\right)^2$ e $Y = \left(\frac{k_S}{k_P}\right)^2 = \left(\frac{V_P^*}{V_S^*}\right)^2$

Sendo os movimentos, com $B = -\frac{2iqk_R}{k_R^2 + s^2}A$, descritos como:

$$u_x = A\left(ik_R e^{-qz} + \frac{2iqk_R s}{k_R^2 + s^2}e^{-sz}\right)e^{i(wt - k_R x)} \tag{64a}$$

$$u_z = A\left(\frac{2qk_R^2}{k_R^2 + s^2} e^{-sz} - qe^{-qz}\right)e^{i(wt - k_R x)} \qquad (64b)$$

Onde os termos entre parênteses descrevem a variação da amplitude de u_x e u_z com a profundidade e indicam que u_x e u_z estão com defasagem de 90º.

Tem-se que a amplitude horizontal decai rapidamente com a profundidade e torna-se zero quando $z \approx l_R/5$ atingindo o valor máximo negativo com $2l_R/5 \leq z \leq l_R/5$, aproximadamente. E a amplitude vertical aumenta levemente com a profundidade, atingindo o máximo com $0{,}05 l_R \leq z \leq 0{,}15 l_R$, exceto para materiais com coeficiente de Poisson nulo para o qual a máxima ocorre na superfície.

No caso de sistemas estratificados Thompson, Haskell e outros pesquisadores (apud Chen 1980), formularam o problema usando álgebra matricial, com base na teoria do contínuo, o que em muitos casos recai em problemas de autovalores não-lineares, dificultando muito a resolução. Uma formulação, de massa concentrada, em elementos finitos sobre base rígida foi desenvolvida por Lysmer e aperfeiçoada para massa contínua por Wass (apud Chen 1980), levando a um problema de autovalor linear bi-dimensional resolvido com aplicação de técnicas padrões.

Neste método consideram-se movimentos somente no plano x-z e dois graus de liberdade em cada ponto do sistema. Também, admite-se o sistema como contínuo horizontalmente e discretizado na direção vertical, assumindo deslocamentos contínuos entre as interfaces das camadas, com variação linear dentro das mesmas. A equação de movimento para um sistema com n camadas é:

$$\left([A]k^2 + i[B]k + [G] - w^2[M]\right)\{W\} = \{0\} \qquad (65)$$

Onde: $[A],[B],[G] e [M]$ - matrizes 2n x 2n com propriedades das camadas.

$\{W\}$ - vetor 2n de deslocamentos nas interfaces.

Para cada freqüência ω, resolve-se o problema de autovalor (determinante do termo entre parênteses da Equação (65) igual a zero) que define os possíveis números de onda k para a onda R em sistemas estratificados. Encontram-se 4n autovalores k_s e seus 4n autovetores $\{W\}_s$ correspondentes. O caso de maior interesse é o de autovalores complexos, sendo necessários apenas os 2n modos com $k_i < 0$. A solução geral é então expressa por:

$$\{d\} = \sum_{s=1}^{2n} a_s \{W\}_s e^{i(wt - k_s x)} \tag{66}$$

Onde: $\{d\}$ - vetor de deslocamentos de cada camada

a_s - fator de participação modal para o modo s.

Porém, situações reais são similares a sistemas estratificados em camadas sobre um semi-espaço viscoelástico, e não sobre base rígida, o que poderia ser aproximado pela consideração de um modelo muito profundo de várias camadas. Porém, isso acarretaria enormes gastos computacionais. Assim, Chen (1980) apresenta métodos de simulação do semi-espaço, a saber:

Contorno Viscoso – simulação do semi-espaço por amortecedores na base das camadas. Adota-se a seguinte relação entre forças e deslocamentos horizontal $\{U_x\}$ e vertical $\{U_z\}$ na interface:

$$[H_C]\begin{Bmatrix} U_x \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{xz} \\ s_{zz} \end{Bmatrix} \tag{67}$$

Onde:

$$[H_C] = iwr\begin{bmatrix} V_S^* & 0 \\ 0 & V_P^* \end{bmatrix} \tag{68}$$

E substituem-se as forças na equação de movimento para o sistema de n camadas, Equação (65), resultando na Equação (69), similar a essa, porém com matrizes da ordem (2n+2)x(2n+2), considerando, agora, as propriedades do semi-espaço.

$$\left([A]k^2 + i[B]k + [G] - w^2[M] + [H]\right)\{W\} = \{0\} \quad (69)$$

Onde:

$$[H] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [H_C] \end{bmatrix}$$

A Equação (69) considera modos mais elevados, que não existem em um semi-espaço perfeito.

Método da Profundidade Variável – adoção da profundidade do semi-espaço variável com a freqüência. Como as ondas de Rayleigh atenuam-se rapidamente com a profundidade e a partir de $z = 1{,}5\, l_R$ não apresentam mais valores significativos, o modo fundamental de Rayleigh, para um modelo discretizado de base rígida com essa profundidade, é similar à onda correspondente propagando-se no semi-espaço. Num sistema típico de solo sobre semi-espaço, a velocidade da onda cisalhante é superior à da onda de Rayleigh, assim, l_R pode ser substituído por l_S e o semi-espaço pode ser simulado por uma camada uniforme de espessura $H = 1{,}5\, l_S = 1{,}5 V_S / f$, sendo f a freqüência em Hz. Subdividindo o semi-espaço em 9 camadas tem-se que cada elemento terá espessura $V_S / 6f$, assegurando a precisão necessária. Esse método também assegura o cálculo de modos mais baixos que são os modos de principal interesse.

Adotado o método da profundidade variável, os movimentos são dados pela Equação (66) que possui 2n fatores de participação modal desconhecidos. Esses podem ser determinados por 2n condições de contorno, ou seja, um conjunto de forças atuando no plano *x = 0*, ou por 2n amplitudes de deslocamento. Porém como só é definido um movimento de controle no ponto de controle, uma só amplitude é conhecida, faz-se então necessária a definição do modo fundamental. Uma solução particular pode ser obtida no ponto de controle reduzindo a Equação (66) a:

$$\{d\} = a_f \{W\}_f e^{i(wt - k_f x)} \tag{70}$$

Onde os termos correspondem ao modo fundamental, o que é razoável, uma vez que, se a onda de Rayleigh existe o modo fundamental é o que contribui principalmente no movimento.

A seleção do modo fundamental tem os seguintes passos, Chen (1980):

1) Calcular as freqüências não amortecidas do sistema (fazendo $k = 0$ na Equação (65)).

2) Determinar m = número de modos naturais abaixo da freqüência de excitação.

3) Resolver o problema de autovalor da Equação (65).

4) Organizar os modos em ordem decrescente de magnitude da parte imaginária do número de onda.

5) Selecionar entre os primeiros m modos o que tem a maior parte real. Este é o modo fundamental.

Outra maneira de se determinar o modo fundamental é pelo modo de menor decaimento, ou seja, o modo com menor coeficiente de decaimento $(-k_i/k_r)$, onde k_r e k_i correspondem às partes real e imaginaria do número de onda, respectivamente. Para tal ordenam-se os modos em ordem crescente do coeficiente de decaimento e se pega o primeiro.

As ondas de Love consistem essencialmente de ondas SH refletidas e existem somente em sistemas estratificados. Elas têm a forma:

$$u_y = U_y(z) e^{i(wt - kx)} \tag{71}$$

Para sistemas viscoelásticos com várias camadas os modos e números de ondas são calculados de forma similar aos de Rayleigh. Assume-se novamente variação linear dos deslocamentos dentro de cada camada e a existência de uma base rígida à profundidade infinita, que pode variar com a freqüência, assegurando uma simulação adequada do semi-espaço. Assim, a equação de movimento é:

$$\left([A]k^2 + [G] - w^2[M]\right)\{W\} = \{0\} \tag{72}$$

Onde: $[A], [G] e [M]$ - matrizes n x n com propriedades das camadas.

$\{W\}$ - vetor n de deslocamentos nas interfaces.

Essa equação apresenta um problema de autovalor similar ao de Rayleigh, porém mais simples. Para cada freqüência ω encontram-se n autovalores k_s^2, números de onda complexos, e seus correspondentes n modos, $\{W\}_s$. Retendo-se somente os números de onda com a parte imaginária negativa, a solução é reescrita como:

$$\{d\} = \sum_{s=1}^{n} a_s \{W\}_s e^{i(wt - k_s x)} \tag{73}$$

Novamente o fator de participação modal não pode ser determinado por um único movimento de controle. Admite-se, então, somente o modo fundamental, selecionado da forma já apresentada. A Equação (73) reduz-se à Equação (74), podendo-se, assim, determinar-se α.

$$\{d\} = a\{W\}e^{i(wt - kx)} \tag{74}$$

A.I.4. Atenuação de ondas de tensão

A propagação de ondas em materiais lineares elásticos homogêneos, nos quais não há mudança de amplitude das ondas, na pratica não ocorre. As amplitudes das ondas de tensão atenuam-se com a distancia, devido ao material onde a onda está propagando-se e à geometria da propagação, (Kramer, 1996).

A.I.4.1.
Amortecimento do material

Parte da energia de uma onda propagando-se é transmitida em calor com decremento da amplitude. Essa dissipação é freqüentemente representada pelo amortecimento viscoso. Para a propagação de uma onda viscoelástica o solo pode ser modelado como sólidos de Kelvin-Voigt, representados na Figura A.I.8.Ou seja, materiais cuja resistência ao cisalhamento é a soma de uma parte elástica e outra viscosa.

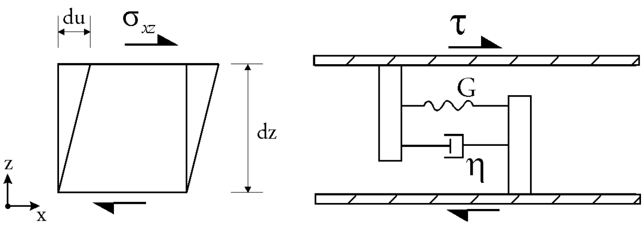


Figura A.I.8 – Sólido de Kelvin-Voigt sujeito a cisalhamento horizontal. A resistência total ao cisalhamento é dada pela soma das componentes elástica (mola) e viscosa (amortecedor).

Considerando deformação harmônica e observando a relação tensão deformação para um sólido desses, a tensão de cisalhamento será:

$$t = Gg_0 \,\mathrm{sen}\, wt + whg_0 \cos wt \qquad (75)$$

Onde: t - tensão cisalhante.

g - deformação ao cisalhamento.

h - viscosidade do material.

A energia elástica dissipada em um único ciclo é dada pela área da elipse formada pelo ciclo de deformação, ou seja:

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_0+\frac{2p}{w}} t\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dt = phwg_0^2$$

Indicando que a energia dissipada é proporcional à freqüência de carregamento.

Um sólido de Kelvin-Voigt para ondas SH propagando verticalmente pode ser representado por uma pilha de elementos como os da Figura A.I.8. A equação unidirecional ordinária que representa o movimento, para uma onda harmônica é:

$$G^* \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -rw^2 U \tag{76}$$

Onde $G^* = G(1+2ix)$ - módulo de cisalhamento complexo.

Que tem a solução:

$$u(z,t) = Ae^{i(wt-k^*z)} + Be^{i(wt+k^*z)} \tag{77}$$

Onde: A e B - constantes que dependem do contorno.

$k^* = w\sqrt{r/G^*}$ - número de onda complexo.

$$k^* = k_1 + ik_2 \tag{78}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{rw^2}{2G(1+4x^2)}\left(\sqrt{1+4x^2}+1\right) \\ k_2^2 &= \frac{rw^2}{2G(1+4x^2)}\left(\sqrt{1+4x^2}-1\right) \end{aligned} \tag{79}$$

E somente a raiz positiva de k_1 e a raiz negativa de k_2 têm significância física. Para o caso não-viscoso $h = x = 0 \rightarrow k_1 = k$ e $k_2 = 0$. Para uma onda propagando na direção positiva de z, a solução pode ser escrita como:

$$u(z,t) = Ae^{k_2 z} e^{i(wt-k_1 z)} \tag{80}$$

Mostrando que se k_2 é negativo o amortecimento do material produz uma atenuação exponencial da amplitude com a distância.

A.I.4.2.
Amortecimento radial

A energia específica (energia elástica por unidade de volume) pode reduzir também por outro mecanismo, ilustrado por uma onda de tensão propagando em uma haste cônica não-amortecida de pequeno ângulo como mostrado na Figura A.I.9.

Admite-se que o comprimento da onda é consideravelmente maior que o diâmetro da haste na área de interesse. Se o ângulo do vértice for suficientemente pequeno, a tensão normal será uniforme em ambas as áreas que contornam a largura dr, e atuarão em uma direção virtualmente paralela ao eixo da haste.

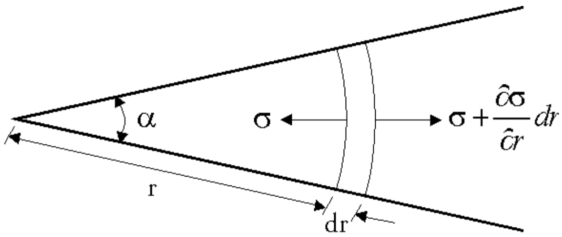


Figura A.I.9 – Haste cônica com um pequeno ângulo do vértice.

Se u representar os deslocamentos paralelos ao eixo da haste, a equação de movimento nessa direção será:

$$rr\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r\frac{\partial s}{\partial r} + 2s \quad (81)$$

Substituindo-se as relações tensão-deformação e deslocamento-deformação e admitindo as extremidades do elemento planas:

$$\frac{\partial^2 (ur)}{\partial t^2} = \frac{E}{r}\frac{\partial^2 (ur)}{\partial r^2} \quad (82)$$

Que é a familiar equação de onda com solução da forma:

$$u(r,t) = \frac{1}{r}\left[f(Vt - r) + g(Vt + r)\right] \quad (83)$$

Onde $V = \sqrt{E/r}$. A Equação (83) indica que a amplitude da onda reduzirá com a distância (embora a energia elástica total permaneça a mesma). A redução tem origem puramente geométrica, resultando do decremento da energia específica que ocorre com o aumento da área da haste.

Embora a energia elástica permaneça a mesma, a redução da amplitude devida ao espalhamento da energia sobre um volume maior de material é denominada amortecimento radial ou geométrico. Difere do amortecimento do material onde a energia é dissipada pela viscosidade.

Ondas de superfície atenuam-se geometricamente mais vagarosamente que as ondas de corpo. Isso explica a maior proporção de movimento de ondas superficiais mais afastadas do epicentro e a vantagem da utilização da magnitude das ondas superficiais para caracterização de terremotos distantes.