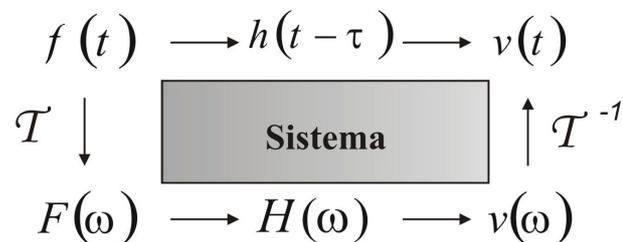


## 2 Revisão bibliográfica

### 2.1. Análise no domínio da frequência

A análise no domínio da frequência é importante quando se está analisando materiais que variam suas propriedades com a frequência, como o solo, por exemplo.

Ela é feita com a transformação de funções temporais em funções dependentes da frequência que, multiplicadas pela função de transferência, detalhada no item 2.1.2, fornecem as respostas que posteriormente são transformadas novamente para o domínio do tempo. Todo esse processo segue o esquema da Figura 2.1:



**Figura 2.1** – Esquema de análise de um sistema nos domínios do tempo e da frequências.

#### 2.1.1. Transformada discreta de Fourier

A transformação de funções temporais contínuas dá-se pela transformada de Fourier ( $\mathcal{T}$ ), utilizando-se a série trigonométrica, Equação (2.1), ou a série exponencial, Equação (2.2), sendo que esta, com a mudança de álgebra, ganha em generalidade e simplicidade e permite sua extensão para emprego em funções não periódicas.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\mathbf{w}_n t) + b_n \text{sen}(\mathbf{w}_n t)) \quad (2.1)$$

$$\text{Onde: } a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt ,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\mathbf{w}_n t) dt \text{ e}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(\mathbf{w}_n t) dt \text{ - amplitudes;}$$

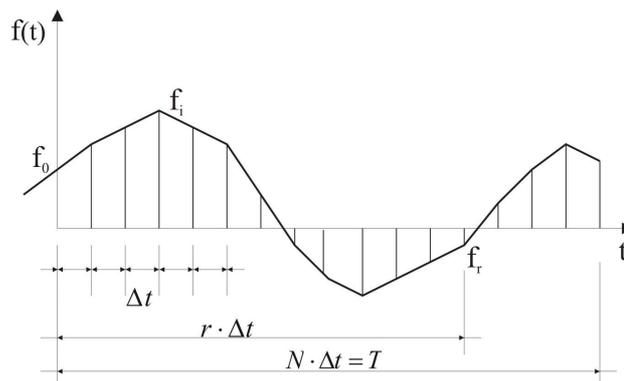
$$\mathbf{w}_n = \frac{2\mathbf{p}}{T} n , \text{ sendo } T \text{ - período da função.}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\mathbf{w}_n t) \quad (2.2)$$

$$\text{Onde: } c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-i\mathbf{w}_n t) dt \quad (2.3)$$

$$\exp(\pm i\mathbf{w}t) = \cos(\mathbf{w}t) \pm i\text{sen}(\mathbf{w}t)$$

Admitindo-se agora que não se conheça a função contínua  $f(t)$  mas sim a série discreta  $\{f_r\}$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ , Figura 2.2; com  $t = r\Delta t$  e  $\Delta t = T/N$ .



**Figura 2.2** – Série discreta.

A transformada discreta de Fourier (TDF) da série torna-se então:

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\mathbf{p} \cdot n \cdot r}{N}\right) \quad (2.4)$$

E pela fórmula inversa, Equação (2.5), obtêm-se os valores discretos da série  $\{f_r\}$ .

$$f_r = \sum_{n=0}^{N-1} F_n \exp\left(\frac{i \cdot 2\mathbf{p} \cdot n \cdot r}{N}\right) \quad (2.5)$$

As componentes de Fourier  $F_n$  são limitadas de  $n = 0 \dots (N-1)$  a fim de se manter a simetria do par de transformadas nas Equações (2.4) e (2.5). Suponha-se agora que se queiram componentes em que  $n$  é maior que  $(N-1)$ , por exemplo  $n = N + l$ . Então:

$$\begin{aligned} F_{N+l} &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\mathbf{p} \cdot r \cdot (N+l)}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\mathbf{p} \cdot r \cdot l}{N}\right) \end{aligned}$$

Pois  $\exp(-i \cdot 2\mathbf{p} \cdot r) = 1 \forall r$  inteiro.

Portanto  $F_{N+l} = F_l$ , os coeficientes repetem-se para  $n > N-1$ . E, ao se plotarem as amplitudes  $|F_n|$  ao longo do eixo das freqüências  $\mathbf{w}_n = 2\mathbf{p} \cdot n/N \cdot T$ , o gráfico repete-se periodicamente e é simétrico em relação à origem. Assim, a parte não afetada pelo “dobramento” ocupa a faixa de freqüências  $|\mathbf{w}| \leq \mathbf{p} / \Delta t (\text{rad} / s)$ . Freqüências maiores apresentam coeficientes de Fourier espúrios que são repetições daqueles aplicáveis a freqüências abaixo de  $\mathbf{p} / \Delta t (\text{rad} / s)$ . Verifica-se que os coeficientes  $F_n$ , calculados pela TDF, são corretos somente para freqüências com  $n \leq \frac{N}{2} \left( n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \right)$ .

Se  $\mathbf{w}_0$  for a máxima componente de freqüência presente em  $f(t)$ , então o “dobramento” pode ser evitado assegurando-se que o intervalo de amostragem  $\Delta t$ , seja pequeno suficiente de modo a se ter:

$$\frac{\mathbf{p}}{\Delta t} = \mathbf{w}_0, \text{ ou } f_0 = \frac{\mathbf{w}_0}{2\mathbf{p}}, \quad (2.6)$$

Assegurando-se que:

$$\frac{1}{2\Delta t} > f_0 \quad (2.7)$$

A frequência  $(1/2\Delta t)Hz$  é chamada frequência de dobramento e é a máxima frequência que pode ser detectada de dados amostrados com espaçamento de  $\Delta t$  segundos. Ela precisa ser suficientemente alta para cobrir a completa faixa de frequências da série contínua. Às vezes a única maneira de se garantir isso é filtrar a série temporal para remoção das frequências superiores à de dobramento, antes do início da análise.

A implementação numérica da integral de Fourier foi muito facilitada com a publicação do algoritmo da transformada rápida de Fourier (TRF) por Cooley-Tuckey (1965). A TRF divide a série  $\{f_r\}$  em seqüências menores para as quais a TDF é calculada, Equação (2.8), e depois estas seqüências menores são combinadas convenientemente, Equação (2.9), para obtenção da TDF de toda a série.

$$Y_n = \frac{1}{N/2} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} y_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\mathbf{p} \cdot n \cdot r}{N/2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \quad (2.8)$$

$$Z_n = \frac{1}{N/2} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} z_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\mathbf{p} \cdot n \cdot r}{N/2}\right)$$

$$F_n = \frac{1}{2} \left[ Y_n + \exp\left(-\frac{i \cdot 2\mathbf{p} \cdot n}{N}\right) Z_n \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \quad (2.9)$$

Se o número original de intervalos  $N$  na seqüência for uma potência de 2, então as  $1/2$  seqüências  $\{y_r\}$  e  $\{z_r\}$  podem ser divididas ainda em  $1/4$  de seqüências, e assim por diante, até as ultimas subseqüências ficarem com um único termo.

Como a Equação (2.9) aplica-se somente à metade dos coeficientes da série e são necessários os valores de  $F_n$  para  $n = 0 \dots (N - 1)$ , aproveita-se do fato de  $Y_n$  e  $Z_n$  serem periódicas em  $n$  e se repetirem com período  $N/2$  para escrever:

$$Y_{n-\frac{N}{2}} = Y_n \quad \text{e} \quad Z_{n-\frac{N}{2}} = Z_n \quad (2.10)$$

O esquema computacional completo, permitindo que  $n$  varie somente de 0 a  $N/2$  é:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2} \left[ Y_n + \exp\left(-\frac{i \cdot 2\mathbf{p} \cdot n}{N}\right) Z_n \right] \\ F_{n+\frac{N}{2}} &= \frac{1}{2} \left[ Y_n + \exp\left(-\frac{i \cdot 2\mathbf{p} \cdot (n + N/2)}{N}\right) Z_n \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Fazendo-se uso da relação  $\exp(-i \cdot \mathbf{p}) = -1$  e definindo-se outra variável complexa, Equação (2.12), obtém-se a chamada “borboleta computacional”, Equação (2.13), que ocorre nos programas para cálculo da TRF, (Newland, 1975).

$$W = \exp\left(-\frac{i \cdot 2\mathbf{p}}{N}\right) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2} [Y_n + W^n Z_n] \\ F_{n+\frac{N}{2}} &= \frac{1}{2} [Y_n - W^n Z_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.1.2. Função de transferência

A função de transferência é a função resposta a um harmônico unitário que multiplicada pela transformada de Fourier de uma função no tempo fornece as respostas, na frequência. Ela é de fundamental importância na análise dinâmica no

domínio da frequência. Pode ser transferência de acelerações, de velocidades, de deslocamentos, de esforços.

Na seqüência apresenta-se a função de transferência e a resposta de um sistema com um grau de liberdade submetido a uma excitação com componentes harmônicas como uma função discreta, da forma:

$$E_n = E_0 \exp(i\mathbf{w}_n t) \quad (2.14)$$

Onde:  $E_n$  - n-ésima componente da excitação.

Admitido  $E_0 = 1$  e  $\mathbf{w}_n = n\mathbf{w}$ , a equação de movimento torna-se:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \exp(i\mathbf{w}_n t) \quad (2.15)$$

Para se obter a função de transferência  $H(\mathbf{w}_n)$ , Equação (2.17), toma-se a solução permanente da equação de movimento, Equação (2.16) e a substitui na Equação (2.15):

$$u(t) = H(\mathbf{w}_n) \exp(i\mathbf{w}_n t) \quad (2.16)$$

Assim:

$$H(\mathbf{w}_n) = \frac{1}{k - m\mathbf{w}_n^2 + ic\mathbf{w}_n} \quad (2.17)$$

Fazendo-se  $\mathbf{b}_n = \mathbf{w}_n / \mathbf{w}_0$  e  $\mathbf{x} = c / c_{cr} = c / 2\sqrt{km}$ , a Equação (2.17) torna-se:

$$H(\mathbf{w}_n) = \frac{1}{k(1 - \mathbf{b}_n^2 + 2i\mathbf{b}_n \mathbf{x})} \quad (2.18)$$

Portanto a resposta total  $u_n(t_r)$  no tempo  $t_r = r\Delta t$  devida às N componentes harmônicas de força, indicadas na Equação (2.5), é:

$$u_n(t_r) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{F_n \exp\left(\frac{i \cdot 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \cdot r}{N}\right)}{k(1 - \mathbf{b}_n^2 + 2i\mathbf{b}_n \mathbf{x})} \quad (2.19)$$

Como a componente de força com frequência  $n$  é igual à componente obtida com o negativo da frequência de ordem  $N-n$ ,  $\mathbf{b}_n = \mathbf{w}_n/\mathbf{w}_0$ , onde  $\mathbf{w}_0 = \sqrt{k/m}$ , deve ser avaliado como:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n &= n\mathbf{w} & \text{para } n \leq \frac{N}{2} \\ e \\ \mathbf{w}_n &= -(N-n)\mathbf{w} & \text{para } n > \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

A frequência correspondente a  $n = N/2$ , é a maior frequência que pode ser considerada na série discreta de Fourier, como já mencionado.

## 2.2. Propagação de ondas elásticas

A análise dinâmica de estruturas pode ser conduzida pela teoria de propagação de ondas, principalmente para resolução de problemas geológicos, que variam muito suas propriedades e devem ser tratados como contínuos (Kramer, 1996).

As ondas podem ser dilatacionais, distorcionais ou de flexão, dependendo da vibração a que o material está submetido. As duas primeiras são de principal interesse para a engenharia. Como onda dilatacional tem-se a onda de corpo P e distorcionais as ondas, também de corpo, SV (movimento no plano vertical) e SH (movimento no plano horizontal).

Os parâmetros definidores da onda são velocidade de propagação, número de onda, amplitude e ângulo de incidência. As velocidades são calculadas pelas propriedades dos materiais da seguinte forma:

$$V_P = \sqrt{\frac{l + 2m}{r}} \quad (2.21a)$$

e

$$V_S = \sqrt{\frac{m}{r}} = \sqrt{\frac{G}{r}} \quad (2.21b)$$

Onde:  $V_P$  e  $V_S$  - velocidades das ondas P e S, respectivamente.

$l$  e  $m$  - constantes de Lamé, que relacionam tensões com deformações.

$r$  - densidade do material onde a onda propaga-se.

As velocidades de propagação recaem em formulação complexa, quando considerado o efeito do amortecimento.

O número de onda é obtido pela razão da frequência angular do carregamento pela velocidade da onda:

$$k = \frac{\omega}{V} \quad (2.22)$$

Para fins de análise utilizam-se ondas planas, que são uma simplificação das ondas tridimensionais. Considera-se que as ondas variam somente em um plano principal, mas podem provocar movimentos fora desse plano, caso da onda SH.

Os problemas são resolvidos por propagação, reflexão e refração de ondas, observando-se as condições de contorno, a equação diferencial governante (equação da onda), além da lei de Snell. Ondas P ou SV incidentes geram ondas P e SV refratadas e refletidas. Já ondas SH só geram ondas SH refratadas e refletidas. Como a velocidade da onda P é maior que a da onda SV, esta quando incidente, apresenta um ângulo crítico ( $b_c$ ), para o qual não há onda P refletida. Esse ângulo é dado por:

$$b_c = \text{sen}^{-1}\left(\frac{V_S}{V_P}\right) \quad (2.23)$$

E influencia muito na resposta do sistema sujeito a ondas SV incidentes.

Os modelos de simulação de terreno consideram o solo estratificado em camadas sobre um semi-espço. As ondas de corpo são consideradas incidindo no semi-espço e formulações são feitas para considerar as reflexões e refrações por elas sofridas e que provocam os deslocamentos das camadas. Como a camada superior apresenta uma superfície livre, onde não deve haver tensões, surgem ondas superficiais formadas pelas ondas de corpo. Duas têm principal importância na engenharia de terremotos, as ondas de Rayleigh, formadas por ondas P e SV, e as ondas de Love, formadas por ondas SH. Essas ondas influenciam principalmente na superfície e decaem rapidamente com a profundidade.

Mais detalhes sobre formação, incidência, equações de movimento e de propagação de ondas em meios elásticos e visco-elásticos, são encontrados no Apêndice I deste trabalho.

### **2.3. Excitação sísmica**

Um sismo ou terremoto é um conjunto de ondas de tensão originadas em um ponto de liberação de energia na linha de encontro de placas tectônicas. Como os diferentes tipos de ondas sísmicas propagam-se através da terra, elas são refletidas e refratadas nos contornos entre diferentes camadas, alcançando diferentes pontos na superfície da terra por caminhos distintos.

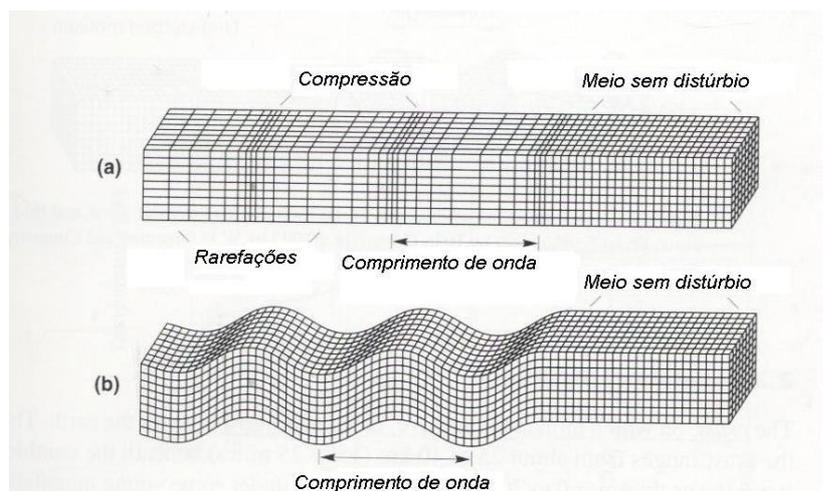
Quando ocorre um terremoto, ondas de corpo e ondas superficiais são produzidas. As ondas de corpo viajam através do interior da Terra e são de dois tipos: ondas P e ondas S.

As ondas dilatacionais P também conhecidas como ondas primárias, compressivas ou longitudinais, envolvem contração e extensão sucessivas dos materiais através dos quais elas passam. São análogas às ondas sonoras. O movimento de uma partícula individual propagando-se através de uma onda P é

paralelo à direção de propagação da onda. Essas ondas propagam-se através de sólidos e líquidos.

Já as ondas distorcionais S, também conhecidas como ondas secundárias, cisalhantes ou transversais, causam deformações cisalhantes quando se propagam através de um material. O movimento de uma partícula individual é perpendicular à direção de propagação da onda S. A direção do movimento da partícula pode classificar a onda S em duas componentes, como já visto: onda SV e onda SH. Flúídos que não têm rigidez ao cisalhamento não comportam ondas S. A Figura 2.3 apresenta os deslocamentos causados pelas ondas P e SV.

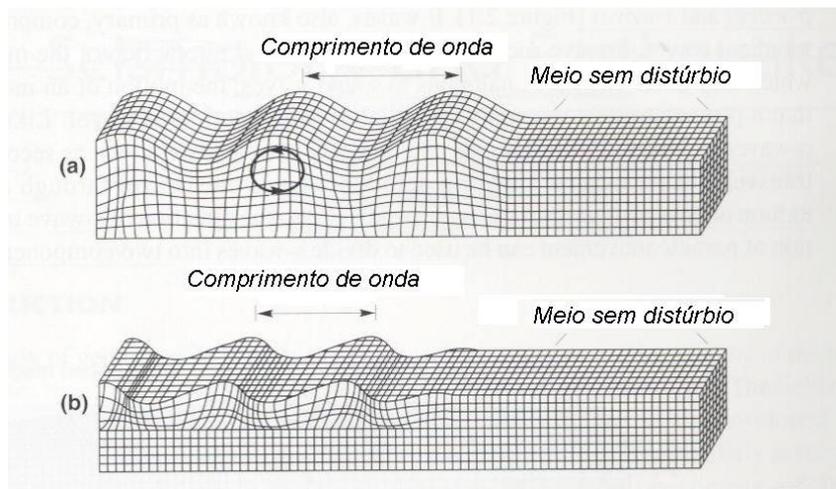
A velocidade de propagação das ondas de corpo varia com a rigidez do material onde elas estão se propagando. Como os materiais geológicos são meios elásticos, as ondas P propagam-se mais rápido que outras ondas S e são, portanto, as primeiras a chegar em um sítio particular.



**Figura 2.3** - Deslocamentos produzidos pelas ondas de corpo: (a) ondas P; (b) ondas SV. Fonte: W. H. Freeman and Company, apud Kramer 1996.

As ondas de superfície resultam da interação entre as ondas de corpo e a superfície da Terra. Elas propagam-se ao longo da superfície da terra com amplitudes que decrescem exponencialmente com a profundidade. Devido à natureza da interação requerida para produzi-las, as ondas superficiais são mais proeminentes em distâncias mais afastadas da fonte do terremoto. A distâncias superiores a duas vezes a espessura da crosta terrestre ondas superficiais, ao invés de ondas de corpo, produzirão picos de movimento do terreno, (Kramer, 1996). Como já mencionado, as ondas superficiais mais importantes para a engenharia de terremotos são as ondas de Rayleigh e as de Love.

As ondas de Rayleigh, produzidas pela interação de ondas P e SV com a superfície da terra, envolvem ambos movimentos, vertical e horizontal da partícula. As ondas de Love resultam da interação de ondas SH com uma camada superficial flexível e não têm componente vertical de movimento da partícula. A Figura 2.4 apresenta os deslocamentos causados pelas ondas de Rayleigh e de Love.



**Figura 2.4** - Deslocamentos causados pelas ondas superficiais: (a) ondas de Rayleigh; (b) ondas de Love. Fonte: W. H. Freeman and Company, apud Kramer 1996.

O programa SASSI considera a excitação sísmica composta por ondas de corpo planas incidindo no topo de semi-espaco, na vertical do ponto de controle, isto é, de definição dessa excitação, e que podem ser combinadas com ondas superficiais. Dois conjuntos de ondas são possíveis: ondas P ou SV mais R, para respostas no plano vertical; e ondas SH mais L, para resposta fora desse plano.