Bibliografia

[1] ALLEN, B., DUTTA J., POLEMARCHAKIS H.M.(2002). **Equilibrium Selections** Essays in Honor of E. Drandakis, Edward Elgar.

[2] ARAUJO, A., PÁSCOA, M. R., TORRES-MARTÍNEZ, J. P. (2002). **Collateral Avoids Ponzi Schemes in Incomplete Markets** Econometrica, Vol. 70, No. 4, 1613-1638.

[3] ARAUJO, A., FAJARDO J. B., PÁSCOA, M. R. (2003). **Endogenous Collateral: Arbitrage and Equilibrium** Ibmec Working Paper.

[4] ARROW, K.J. (editor), INTRILIGATOR, M.D. (editor) (1982). **Handbook of Mathematical Economics Vol. II**.

[5] BORDER, K. (1999) **Fixed Point Theorems With Applications to Economics and Game Theory** Cambridge University Press.

[6] BRAIDO, L. H. B. (2003). **Trading Constraints Penalizing Default: A Recursive Approach** Working Paper FGV.

[7] BRAIDO, L. H. B. (2003). **General Equilibrium with Endogenous Securities and Moral Hazard** Aceito para publicação em Economic Theory.

[8] DEBREU, G. (1952). **A Social Equilibrium Existence Theorem** Proceedings of The National Academy of Sciences of the U.S.A., 16, 105-137.

[9] DUBEY, P., J. GEANAKOPLOS, J., M. SHUBIK (1995). **Default in a General Equilibrium Model with Incomplete Market** Cowles Foundation, Discussion Paper No. 1247.

[10] DUBEY, P., GEANAKOPLOS, J., ZAME, W. R. (1995). **Default, Collateral and Derivatives** Yale University Mimeo.

[11] ELUL, R. (1999). **Collateral, Credit History and the Financial Decelerator** Brown University, Department of Economics Working Paper Number 98-10.

[12] FAIAS, M. (2000). **General Equilibrium and Endogenous Creation of Asset Markets** Mimeo, Universidade Nova de Lisboa.

[13] GEANAKOPLOS, J., ZAME W. R. (2002). **Collateral and the Enforcement of Intertemporal Contracts** Mimeo Yale University.

[14] LEVINE, D. K., ZAME W. R. (1996). **Debt Constraints and Equilibrium in Infinite Horizon Economies with Incomplete Markets** Journal of Mathematical Economics 26, 103-131.

[15] MARSCHAK, J., RADNER R.(1972). **Economic Theory of Teams** Yale University Press, New Haven.

[16] MARTINS-DA-ROCHA, V.F., TORRES-MARTÍNEZ, J.P. (2003). **Endogenous Collateral** Working Paper, Université Paris I.

[17] MAS-COLLEL, A., NACHBAR, J. (1991). **On the Finiteness of the Number of Critical Equilibria with an Application to Random Selections** Journal of Mathematical Economics 20, 397-409.

[18] SIMON, L., ZAME W. (1990). **Discontinuous Games and Endogenous Sharing Rules** Econometrica 58, 861-872.

Anexos

Neste apêndice vamos provar a existência de equilíbrio do segundo estágio. A prova é essencialmente uma extensão do resultado de existência de equilíbrio para uma economia com *colateral exógeno* e horizonte de tempo finito, provado em Araujo, Páscoa e Torres-Martínez (2002).

Proposição 5.1 *Fixados níveis de colateral* $\left(C_j^i\right)_{\{i\in I,\ j\in J\}}$*, sempre existe um equilíbrio para a economia Walrasiana no segundo estágio.*

De modo a provar a Proposição 5.1 são necessários alguns resultados prévios

Proposição 5.2 *Todo vetor* $\left(x^i, y^i, \theta_j^i, \varphi_j^i\right)_{(i,j)\in I\times J}$ *que satisfaz as condições de factibilidade dadas pelas equações (9)- (12) é limitado.*

Demonstração: Seja $\left(x^i, y^i, \theta_j^i, \varphi_j^i\right)_{(i,j)\in I\times J}$ uma alocação que satisfaz as condições de factibilidade, então, em $t = 0$, temos que

$$\sum_{i\in I}\left(x_0^i + y_0^i + \sum_{j\in J} C_j^i \varphi_j^i\right) = \sum_{i\in I}\omega_0^i \tag{5-1}$$

Como todos os elementos do lado esquerdo da equação acima são não-negativos, e o processo de dotação ω_0^i tem norma limitada, segue-se que a quantidade de bens consumida, a quantidade de bens estocada, assim como a quantidade agregada de colateral, são limitadas.

Assim, segue da equação anterior que, para todo bem $l \in L$

$$\sum_{i\in I} x_{0,l}^i \leq W_l = \sum_{i\in I}\omega_{0,l}^i. \tag{5-2}$$

$$\sum_{i\in I} y_{0,l}^i \leq W_l. \tag{5-3}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{j,l}^i \varphi_j^i \leq W_l. \tag{5-4}$$

Portanto, as alocações de consumo e estoque de bens para cada agente são limitadas, em $t = 0$. Mais ainda, definindo $\underline{c} = \inf_{C\in\Gamma} ||C||_{\Sigma}$, segue da desigualdade anterior que, para todo agente $i \in I$, e para cada ativo $j \in J$,

$$\varphi_j^i \leq \frac{1}{\underline{c}} \sum_{l \in L} W_l. \tag{5-5}$$

Portanto, as posições curtas nos ativos são uniformemente limitadas por cima no primeiro período. A condição de factibilidade do mercado de ativos, dada pela equação (11), vai nos garantir que as posições longas também serão limitadas por cima.

Agora, a condição de oferta igual a demanda, no segundo período, nos garante que, dada a linearidade e monotonia das transformaç oes de depreciação (Hipótese H-2),

$$x_{s,l}^i \leq M + Y_s^C(M) + Y_s^W(M) < +\infty, \tag{5-6}$$

onde M é a cota superior sobre a dotação agregada. $\square$

É interessante perceber que, apesar de não impormos limites exógenos às vendas a descoberto, tal restrição surge *endogenamente* em equilíbrio, devido à modelagem de colateral. Este resultado é muito importante pois são tais restrições ao endividamento que permitem garantir a existência de equilíbrio em modelos com mercados incompletos.

Tendo as alocações factíveis limitadas, vamos definir um jogo generalizado, no qual os agentes maximizam as suas utilidades, fazendo escolhas em conjuntos compactos de alocações admissíveis, e existem leiloeiros que tem por objetivo maximizar o valor do excesso da demanda nos mercados.

Provaremos a existência de equilíbrio para tal jogo e, em seguida, utilizaremos este resultado para provar que todo equilíbrio da economia original é de fato um equilíbrio deste jogo, concluindo assim a prova da Proposição 5.1.

5.0.1
Jogo Generalizado

A Proposição 5.2 nos garante que existe uma constante positiva Ψ, tal que, toda alocação factível, $\left(x^i, y^i, \theta_j^i, \varphi_j^i\right)_{(i,j) \in I \times J}$, pertence ao conjunto

$$A(\Psi) = \left\{ z \in \mathbb{R}_+^{2(l+J)} : \max_k z_k \leq \Psi \right\} \tag{5-7}$$

Considere um jogo generalizado $G\left((C_j^i)_{i \in I,\, j \in J}\right)$ com $(I+1)+S(J+1)$ jogadores no qual,

– Dados os níveis de preço (p,q) e as taxas de retorno $R_{s,j}$, cada jogador $i \in \{1,2,\ldots,I\}$ maximiza sua utilidade dentro do conjunto orçamentário truncado, dado por

$$B^{i,\Psi}_{C^i}(p,q,R_j) := B^{i}_{C^i}(p,q,R_j) \cap A(2\Psi).$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \max U^i\left(x^i,y^i,\theta^i,\varphi^i\right) \\ s.t.\left(x^i,y^i,\theta^i,\varphi^i\right) \in B^{i,\Psi}_{C^i}(p,q,R_j) \end{aligned} \tag{5-8}$$

– Existe um leiloeiro em $t=0$ que, dadas as escolhas de consumo, estoque e portfólio dos agentes no primeiro período, tem por objetivo escolher preços (p_0,q) de tal forma que,

$$\max_{\left\{(p_0,q)\,\in\,\triangle_+^{L+J-1}\right\}}\left\{\begin{array}{c}\left[p_0\sum_{i\in I}\left(x_0^i+y_0^i+\sum_{j\in J}C_j^i\varphi_j^i-\omega_0^i\right)\right]\\ +\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}q_j\left(\theta_j^i-\varphi_j^i\right)\end{array}\right\} \tag{5-9}$$

– Existe um leiloeiro em cada estado da natureza em $t=1$ que, dadas as escolhas de consumo dos agentes, tem por objetivo escolher preços p_s de tal forma que,

$$\max_{\left\{(p_s)\,\in\,\triangle_+^{L-1}\right\}}\left\{p_s\sum_{i\in I}\left[\begin{array}{c}x_s^i-\omega_s^i-\sum_{j\in J}Y_s^W\left(y_0^i+C_j^{W,i}\varphi_j^i\right)\\ -\sum_{j\in J}Y_s^C\left(x_0^i+C_j^{C,i}\varphi_j^i\right)\end{array}\right]\right\} \tag{5-10}$$

– Finalmente, para cada $(j,s)\in J\times S$, existe um leiloeiro que tem por objetivo escolher a taxa de retorno $R_{j,s}$ [1]

$$\max_{R_{j,s}\in[0,\lambda]}\left\{R_{j,s}\sum_{i\in I}\theta_j^i-\sum_{i\in I}D_{j,s}^i\varphi_j^i\right\}$$

Vamos agora estabelecer a existência de equilíbrio para o jogo generalizado G^1_{ex} e mostrar que todo equilíbrio do jogo é um equilíbrio da economia original ε^1_{ex}.

Proposição 5.3 *Sob as condições estabelecidas nas hipóteses* $(H-1)-(H-4)$, *existe um equilíbrio em estratégias puras para o jogo generalizado*

[1] Se o ativo é negociado em equilíbrio, temos que $\sum_{i\in I}\theta_j^i \neq 0$. Logo, $R_{j,s} = E^P\left(D_{j,s}\right) \le \sup_{i\in I}\varphi_j^i\left\|C_j^i\right\|$ Assim, $\exists\ 0<\lambda<+\infty$, tal que, $R_{j,s}\in[0,\lambda]$. Dessa forma, sem perda de generalidade, vamos assumir que a escolha dos leiloeiros (um para cada ativo) é feita no conjunto compacto $[0,\lambda]$.

G^1_{ex}.*Mais ainda, tal equilíbrio é um equilíbrio da economia* ε^1_{ex}. *Reciprocamente, todo equilíbrio da economia original é um equilíbrio do jogo generalizado, e o conjunto de equilíbrios e portanto compacto.*

Prova:

Primeiro Passo: Existência de equilíbrio para o Jogo Generalizado.

A existência de equilíbrio para o jogo segue da prova do Teorema de existência de equilíbrio em um jogo generalizado de Debreu (1952). Este resultado também pode ser encontrado em Arrow e Intriligator (1982). Na realidade, as funções objetivo dos agentes e dos leiloeiros são contínuas e quase-côncavas nas estratégias. A correspondência de estratégias admissíveis para os agentes e leiloeiros possui um domínio compacto e valores convexos e não-vazios. Ccomo tais correspondências são semi-contínuas superior (pois possuem valores compactos e gráfico fechado). A semi-continuidade inferior das correspondência advém do fato de que $\omega^i \in \mathbb{R}^n_{++}$. Como o fecho de uma correspondência semi-contínua inferior também é semi-contínuo inferior, a continuidade de tais funções é garantida. Podemos então aplicar o Teorema do ponto fixo de Kakutani para a correspondência de estratégias ótimas de modo a encontrar o equilíbrio.

Segundo Passo: Equivalencia de Equilíbrios Vamos começar mostrando que todo equilíbrio para o jogo generalizado é um equilíbrio da economia original:

Factibilidade

Seja $\left[\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}, \overline{C}\right); \left(\bar{p}, \bar{q}, \bar{R}\right)\right]$ um equilíbrio para o jogo generalizado G^1_{ex}, temos então que, como as restrições orçamentárias são respeitadas, somando ao longo dos agentes e utilizando o fato de que, em equilíbrio, o volume total de *default* sofrido deve ser igual ao volume total de *default* dado pelos agentes, temos que

$$\bar{p}_0 \sum_{i\in I}\left(\bar{x}^i_0 + \bar{y}^i_0 - \omega^i_0 + \sum_{j\in J} C^i_j \bar{\varphi}^i_j\right) + \sum_{i\in I}\left[\sum_{j\in J} \bar{q}_j\left(\bar{\theta}^i_j - \bar{\varphi}^i_j\right)\right] \leq 0 \tag{5-11}$$

E, para todo estado da natureza $s \in S$, temos que

$$\bar{p}_s \sum_{i\in I} \bar{x}^i_s \leq \bar{p}_s \sum_{i\in I}\left[\begin{array}{c} \omega^i_s + Y^C_s\left(\bar{x}^i_0 + C^{C,i}_j \bar{\varphi}_j\right) \\ +Y^W_s\left(\bar{y}^i_0 + C^{W,i}_j \bar{\varphi}^i_j\right)\end{array}\right] \tag{5-12}$$

Como (p_0, q_0) e (p_s, q_s) resolvem os respectivos problemas dos leiloeiros e, como a alocação de equilíbrio é limitada, temos que

$$\sum_{i\in I}\left(\bar{x}_0^i+\bar{y}_0^i-\omega_0^i+\sum_{j\in J}C_j^i\bar{\varphi}_j^i\right)\leq 0 \tag{5-13}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\left(\bar{\theta}_j^i-\bar{\varphi}_j^i\right)\leq 0 \tag{5-14}$$

E

$$\sum_{i\in I}\bar{x}_s^i\leq\sum_{i\in I}\left[\omega_s^i+Y_s^C\left(\bar{x}_0^i+C_j^{C,i}\bar{\varphi}_j^i\right)+Y_s^W\left(\bar{y}_0^i+C_j^{W,i}\bar{\varphi}_j^i\right)\right],\forall s\in S$$

Então, como $\left(\bar{x}^i,\bar{y}^i,\bar{\theta}^i,\bar{\varphi}^i\right)\in B_{ex}^{t,i}\left(\bar{p},\bar{q},C^i,R_j,2\Psi\right)$ e, devido ao fato de que as funções de utilidade são monotônicas, temos que as desigualdades acima são, efetivamente, igualdades.

Otimalidade

Desejamos provar que $\left(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\theta},\tilde{\varphi}\right)$ é solução para o problema do consumidor em ε_{ex}^1 a preços $(\bar{p},\bar{q})$. Isto implica que $\left(\tilde{x}^i,\tilde{y}^i,\tilde{\theta}^i,\tilde{\varphi}^i\right)$ é solução de

$$\begin{aligned}&\max U^i\left(x^i,y^i,\theta^i,\varphi^i,C_j^i\right)\\ &s.t.\left(x^i,y^i,\theta^i,\varphi^i\right)\in B^i\left(\bar{p},\bar{q},C^i\right)\end{aligned} \tag{5-15}$$

Sabemos que $\left(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\theta},\tilde{\varphi}\right)$ resolve

$$\begin{aligned}&\max U^i\left(x^i,y^i,\theta^i,\varphi^i,C_j^i\right)\\ &s.t.\left(x^i,y^i,\theta^i,\varphi^i\right)\in B_{ex}^{t,i}\left(\bar{p},\bar{q},C^i,2\chi,2\Psi,2\Phi\right)\subset B^i\left(\bar{p},\bar{q},C^i\right)\end{aligned} \tag{5-16}$$

Isto segue do fato que $\left(\tilde{x}^i,\tilde{y}^i,\tilde{\theta}^i,\tilde{\varphi}^i\right)\in B_{ex}^{t,i}\left(\bar{p},\bar{q},C^i,R_j,2\Psi\right)$ e que tal alocação gera o mesmo nível de consumo para o agente i que a alocação $\left(\bar{x}^i,\bar{y}^i,\bar{\theta}^i,\bar{\varphi}^i\right)$.

Então, suponha que $\left(\tilde{x}^i,\tilde{y}^i,\tilde{\theta}^i,\tilde{\varphi}^i\right)$ não resolve 5-15. Então, como as utilidades são estritamente quase-côncavas, existe uma alocação $\left(\hat{x}^i,\hat{y}^i,\hat{\theta}^i,\hat{\varphi}^i\right)\in B^i\left(\bar{p},\bar{q},C^i,R_j\right)$ suficientemente próxima da alocação original tal que

$$U^i\left(\hat{x}^i,\hat{y}^i,\hat{\theta}^i,\hat{\varphi}^i,C_j^i\right)>U^i\left(\tilde{x}^i,\tilde{y}^i,\tilde{\theta}^i,\tilde{\varphi}^i,C_j^i\right) \tag{5-17}$$

Isto contradiz o fato de que $\left(\tilde{x}^i,\tilde{y}^i,\tilde{\theta}^i,\tilde{\varphi}^i\right)$ é solução para o problema 5-16.

Então, a alocação $\left[\left(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i, \tilde{\theta}^i, \tilde{\varphi}^i\right), (\bar{p}, \bar{q})\right]$ é um equilíbrio para a economia ε^1_{ex}.

Agora provaremos que todo equilíbrio da economia original é um equilíbrio do jogo generalizado.

De fato, é fácil verificar que isto ocorre pois toda alocação de equilíbrio para a economia ε^1_{ex}, é solução para o problema do consumidor, de modo que atende a primeira condição de equilíbrio para o jogo generalizado que afirma que a alocação deve satisfazer ao argumento que maximiza as utilidades de todos os agentes.

Assim, resta analisar se tal alocação é solução para o problema dos leiloeiros. Como estamos partindo de um equilíbrio para a economia original, temos que os mercados estão em equilíbrio, de modo que o excesso de demanda é nulo, tanto para o mercado de bens (em todas as combinações de data e estado da natureza) quanto para o mercado de ativos. Como o problema de maximização dos leiloeiros é sempre menor ou igual a zero, como não existe excesso de demanda, o valor de tal problema é zero, sendo assim máximo.

Terceiro Passo: O conjunto de equilíbrios é compacto.

Sabemos que o conjunto de equilíbrios para a economia original é diferente de vazio e coincide com o conjunto de equilíbrios para o jogo generalizado. Agora, os equilíbrios para o jogo generalizado são os pontos fixos da correspondência de alocações otimas. Portanto, o conjunto de equilíbrios da economia original é compacto (veja Border (1999), Capitulo 11)