3
Existência de Equilíbrio

Neste capítulo vamos enunciar as principais hipóteses sobre os primitivos da economia e provar que sempre existe um equilíbrio para o modelo sequencial.

Para garantir a existência de equilíbrio no segundo estágio precisamos que, caso as condições de factibilidade sejam satisfeitas, as compras e vendas de ativos sejam limitadas. Para isto é suficiente impor limites inferiores nos possíveis requerimentos de colateral, como já foi feito na seção anterior,

$(H-1)$ $\Gamma_\rho^h \subset \left(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n\right)^{b_\rho^h}$ é um conjunto compacto e diferente de vazio, para todo $h \in H(\rho)$.

Para manter a convexidade dos conjuntos de restrições orçamentárias (e poder assim aplicar as técnicas usuais de jogo generalizado na prova de equilíbrio para o segundo estágio) é suficiente exigir que as funções de depreciação sejam lineares e monotônicas. Isto é

$(H-2)$ $Y_s^C,\ Y_s^W : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}_+^L$, são transformações lineares e monotônicas, para cada $s \in S$. Mais ainda, independente do estado da natureza, $Y_s^C(0) = Y_s^W(0) = 0$.

Para garantir que a correspondência de alocações admissíveis de cada indivíduo, dada pela restrição orçamentária, sejam semicontínuas inferiores é suficiente exigir que as dotações inicias sejam pontos interiores do espaço de consumo,

$(H-3)$ $w^i \in \mathbb{R}_{++}^n,\ \forall i \in I$.

Finalmente, como de costume em modelos de equilíbrio geral, vamos supor que as utilidades dos agentes são bem comportadas, no sentido que, para cada agente $i \in I$,

$(H-4)$ u^i é contínua, estritamente crescente e estritamente quase-cônvava, com $u^i(0)=0$.

Estamos agora em condições de enunciar o principal resultado deste trabalho,

Teorema 3.1 *Sob as condições estabelecidas nas hipóteses* $(H-1)-(H-4)$, *sempre existe um equilíbrio para o modelo sequencial.*

Prova: Queremos garantir a existência de uma seleção mensurável f da correspondência de payoffs $\Pi_{H(\rho)}\left[EU(\mathcal{C})\right]$, junto com um equilíbrio de Nash do jogo $G_f = [f^h, \Gamma_\rho^h]_{h\in H(\rho)}$.

Segue da hipótese $(H-1)$ e do Teorema I em Simon e Zame(1990, pág. 865)) que é suficiente garantir que a correspondência de payoffs $\Pi_{H(\rho)}\left[EU(\mathcal{C})\right]$ seja limitada, semicontinua superior, com valores compactos, convexos, e diferentes de vazio.

Agora, como $\Pi_{H(\rho)}$ é uma função continua, e a correspondência EU tem, por definição valores convexos, é suficiente garantir que a correspondência EU é limitada, s.c.s, com valores compactos e diferentes de vazio (veja Border(1999), Capítulo 11).

Passo 1. ***EU* é limitada e tem valores diferentes de vazio.** Segue da Proposição $(A.1)$ no Apêndice que Eu tem valores diferentes de vazio. Mais ainda, a continuidade das funções utilidade dos agentes garante que os níveis ótimos de satisfação (que dependem das alocações de consumo em equilíbrio, as quais são limitadas pela oferta agregada de recursos) são uniformemente limitados. Assim, EU é limitada.

Passo 2. ***EU* tem valores compactos.** Dado um requerimento de colateral $\mathcal{C}\in\Gamma$ o conjunto de equilíbrios é compacto (pois coincide com os pontos fixos da correspondência de alocações ótimas do jogo generalizado definido no Apendice). Portanto, segue da continuidade das funções objetivo dos agentes que $\Omega(\mathcal{C})$ é compacto,

$$\Omega(\mathcal{C}) = \left\{v\in\mathbb{R}_+^I\ :\ \left[v^i = U^i(w^i)\right]\wedge\left[\exists(p,q,R):\ z=(p,q,(w^i)_{i\in I},R)\in E\left(\mathcal{C}\right)\right]\right\}.$$

O Teorema de Charatheodory (Border, Capitulo 1) nos garante que o *convex hull* de um conjunto compacto é ainda compacto. Segue que $EU(\mathcal{C}) = ConvexHull\ \Omega(\mathcal{C})$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}_+^I$, para todo $\mathcal{C}\in\Gamma$.

Passo 3. ***EU* é semicontinua superior.** A correspondência EU é limitada e tem contradominio compacto. Portanto é suficiente, para garantir a semicontinuidade superior, provar que EU tem gráfico fechado.

Assim, considere uma sequência $(\mathcal{C}_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma \times \mathbb{R}^I_+$, tal que,

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in EU(\mathcal{C}_n)$,
- $(\mathcal{C}_n, u_n)$ converge, quando n vai para infinito, a $(\mathcal{C}, u) \in \Gamma \times \mathbb{R}^I_+$.

Queremos provar que $u \in EU(\mathcal{C})$. Como $u_n \in EU(\mathcal{C}_n)$, existe um equilíbrio de $\mathcal{E}(\mathcal{C}_n)$, $z_n = [(p_n, q_n, R_n); (x_n, y_n, \theta_n, \varphi_n)]$, tal que $u_n = (u^i_n)_{i\in I} = (U^i(x^i_n, y^i_n, \theta^i_n, \varphi^i_n))_{i\in I}$.

Mais ainda, a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, e portanto existe uma subsequência convergente $z_{n(k)} \to z = [(\overline{p}, \overline{q}, \overline{R}); (\overline{x}, \overline{y}, \overline{\theta}, \overline{\varphi})]$.

A continuidade das funções utilidade dos indivíduos nos garante que u_n converge para $\left(U^i(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\theta}, \overline{\varphi})\right)_{i\in I}$. Logo, segue da compacidade do conjunto de escolhas de colateral que $\mathcal{C} \in \Gamma$ e $u = \left(U^i(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\theta}, \overline{\varphi})\right)_{i\in I}$.

Para finalizar a demonstração é suficiente garantir que $\overline{z} \in E(\mathcal{C})$.

Como cada $z_{n(k)}$ é uma alocação de equilibrio, satisfaz as condições de factibilidade. Assim, no limite, z satisfaz as condições de oferta igual a demanda, necessarias ao equilibrio. Mais ainda, como as funções objetivo sao continuas, as alocações limitadas e as restrições orçamentârias determinam correspondências continuas em preços e requerimentos de colateral, segue do Teorema do Maximo de Berge que as funções utilidade indireta $(\mu^i)_{i\in I}$ são continuas. Portanto, $\mu^i(p_{n(k)}, q_{n(k)}, R_{n(k)}, \mathcal{C}_{n(k)})$ converge para $\mu^i(\overline{p}, \overline{q}, \overline{R}, \mathcal{C})$. Logo,

$$\begin{aligned} U^i(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\theta}, \overline{\varphi}) &= \lim_{k\to+\infty} U^i(x_{n(k)}, y_{n(k)}, \theta_{n(k)}, \varphi_{n(k)}) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \mu^i(p_{n(k)}, q_{n(k)}, R_{n(k)}, \mathcal{C}_{n(k)}) \\ &= \mu^i(\overline{p}, \overline{q}, \overline{R}, \mathcal{C}), \end{aligned}$$

o que finaliza a prova.