

2 Modelo

Vamos estudar um modelo de equilíbrio geral com mercados financeiros potencialmente incompletos e um número finito de agentes, $i \in I$. A economia analisada possui dois estágios, com dois períodos de tempo no segundo estágio.

Existe um número finito de ativos reais, $j \in J$ que, tendo seus valores de face exogenamente fixados, serão negociados no segundo estágio. Vamos permitir a possibilidade de *default* nas promessas, e para proteger os compradores do risco de crédito futuro, os próprios agentes determinarão, antes da negociação dos ativos, garantias reais para as vendas a descoberto.

Assim, no primeiro estágio, cada agente vai agir de forma estratégica, escolhendo o ambiente financeiro preferível, através da determinação de requerimentos de colateral. Os requerimentos de colateral que um dado agente vai escolher serão determinados utilizando uma regra exógena, que vai associar a cada consumidor, $i \in I$, e a cada ativo, $j \in J$, o agente $\rho(i, j) \in I$ que fixará as garantias, as quais denotaremos por C_j^i .

No segundo estágio, os agentes serão tomadores de preços, e demandarão, de forma anônima, bens e ativos, em uma economia *Walrasiana* com dois períodos, onde as promessas, ao estarem sujeitas a *default*, serão protegidas pelas garantias $(C_j^i)_{i \in I, j \in J}$.

Vamos supor, em analogia com a literatura de jogos sequenciais com informação completa, que os agentes conseguem adiantar perfeitamente a correspondência entre as estruturas financeiras e as possíveis alocações de equilíbrio. Mesmo sob esta hipótese, a função objetivo de cada agente poderá não estar bem definida, devido a multiplicidade de equilíbrios, no segundo estágio, para uma dada estrutura de colateral $(C_j^i)_{i \in I, j \in J}$.

Para contornar esta dificuldade vamos garantir a existência de uma seleção aleatória mensurável dos possíveis payoffs de equilíbrio, de modo a obter uma função objetivo, para o primeiro estágio, bem definida.

Neste modelo, o risco de crédito estará diretamente ligado à relação entre o total da dívida de cada agente e o valor de mercado do colateral. Em

outras palavras, ao não quitar suas dívidas, dando assim *default* no ativo referente, o agente estará sujeito somente à perda do colateral.¹

O modelo será resolvido através do *algoritmo de Kuhn*, começando por resolver o equilíbrio para o segundo estágio, dada uma estrutura de colateral, e então, computando retroativamente a estrutura de colateral ótima para o primeiro estágio.

2.1

O Segundo Estágio

A seguir vamos especificar a estrutura de incerteza e caracterizaremos os agentes que negociam bens e ativos na economia Walrasiana do segundo estágio.

Como já foi dito, os requerimentos de colateral associados a cada ativo real $j \in J$, $(C_j^i)_{i \in I}$, estarão previamente fixados, sendo assim um parâmetro *exógeno* na definição de equilíbrio.

Portanto, embora no nosso modelo as garantias ao crédito sejam personalizadas, a economia Walrasiana do segundo estágio é similar à estudada por Geanakoplos e Zame (2002) ou Araujo, Páscoa e Torres-Martínez (2002).

2.1.1

Incerteza

No segundo estágio existem dois períodos. Na data $t = 0$ (primeiro período) um conjunto finito de agentes transacionam um conjunto finito de bens e ativos, sendo estes sujeitos a *default* e protegidos pelas cestas de colateral previamente estabelecidas. Existe incerteza sobre o estado da natureza a se realizar no segundo período, $s \in S$. Entre as datas $t = 0$ e $t = 1$ o estado da natureza é revelado e na data $t = 1$ (segundo período) os ativos dão seus respectivos retornos e, mais uma vez, existe consumo por parte dos agentes.

¹Portanto, caso o modelo fosse estendido para mais de dois períodos, não vão existir implicações à reputação do indivíduo, limitando a sua capacidade futura de acessar os mercados de crédito.

2.1.2

Bens

Nesta economia existem, para cada combinação de data e estado da natureza, L bens disponíveis para troca e consumo. Logo, o espaço de bens será denotado por $\mathbb{R}_+^n$, onde $n = (S + 1)L$ a partir de agora.

Os bens disponíveis em $t = 0$ poderão ser utilizados para consumo ou estoque. O preço dos bens será especificado por um vetor $p = (p_0; p_1, \dots, p_S) \in \mathbb{R}_+^n$.

Como estamos trabalhando com bens duráveis e estocáveis, é necessário definir uma estrutura de depreciação. Tal estrutura é dada exogenamente pelas transformações $Y_s^C, Y_s^W : \mathbb{R}_+^L \rightarrow \mathbb{R}_+^L$, que representam a depreciação de uma cesta consumida e estocada, respectivamente. Vamos denotar por $Y_s^C(x_0)$ a quantidade obtida em $t = 1$ se uma cesta de bens $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ é consumida em $t = 0$. Analogamente, se uma cesta de bens $y_0 \in \mathbb{R}_+^n$ é estocada em $t = 0$, denotamos por $Y_s^W(y_0)$ o que é obtido em $t = 1$, caso o estado da natureza $s \in S$ ocorra. Ao fazer isto, esperamos permitir que o modelo inclua mecanismos observáveis nos mercados de crédito, como a utilização da própria casa como garantia para algum tipo de empréstimo, ao mesmo tempo que continua-se a inferir a utilidade de morar no imóvel.

2.1.3

Agentes

Existem I consumidores. O consumidor $i \in I$ é representado pelo seu conjunto de consumo $X^i = \mathbb{R}_+^n$, suas dotações iniciais $\omega^i \in \mathbb{R}_{++}^n$, e as suas preferências, que serão representadas por funções de utilidade, $u_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$. Em $t = 0$ cada consumidor vai escolher cestas de consumo, x_0^i , e estoque, y_0^i , as quais não serão usadas como colateral, e vai fazer planos contingentes de consumo $x_s^i \in \mathbb{R}_+^L$ para cada estado da natureza em $t = 1$.

2.1.4

Ativos

Um conjunto de J ativos reais está disponível para transação no primeiro período do segundo estágio, cujos retornos são pagos no segundo período. Como estamos supondo a possibilidade de *default* no mercado financeiro, cada promessa (venda de um ativo) $j \in J$ deve ser garantida por um colateral, que consiste de uma cesta de bens duráveis e/ou estocáveis.

Vamos denotar por A_s^j o que o ativo j promete entregar (em caso de não acontecer *default*) em $t = 1$, se o estado s ocorre. O vetor de preços dos ativos será denotado por $q \in \mathbb{R}_+^J$.

As escolhas de colateral, feitas no primeiro período, são dadas por $C_j^i = (C_j^{C,i} + C_j^{W,i}) \in \mathbb{R}_{++}^L$ onde $C_j^{C,i}$ denota a parte do colateral que permanece com o tomador de recursos (o agente $i \in I$) e $C_j^{W,i}$ denota a parte que irá a ser estocada.

Como não estamos levando em conta questões ligadas à restrições de crédito à agentes que incorreram previamente em *default*, o colateral é o único mecanismo de obrigar o cumprimento das promessas, de modo que nenhum agente fará entregas positivas sobre ativos que não são colateralizados.

Os agentes podem decidir entre quitar a dívida ou aceitar a perda do colateral depreciado. O comportamento maximizador dos agentes, e a monotonia das preferências, vai implicar que o retorno entregue por um agente $i \in I$, que vende a descoberto uma unidade do ativo $j \in J$, no estado s , será dado pelo mínimo entre o valor de face do ativo e o valor depreciado do colateral,

$$D_{j,s}^i = \min \left\{ p_s A_s^j, p_s \left[Y_s^C \left(C_j^{C,i} \right) + Y_s^W \left(C_j^{W,i} \right) \right] \right\}. \quad (2-1)$$

A decisão de repudição da dívida é estritamente motivada pela comparação entre o valor das promessas feitas e o valor de mercado do colateral depreciado. O fato de ter ou não recursos necessários para pagar as promessas não é considerado. Assim, como foi mencionado na introdução, os agentes incorrerão em *default estratégico*.

Como estamos supondo que, no segundo estágio, os mercados de crédito são anônimos, e cada agente vai constituir requerimentos personalizados de colateral, um agente que compra o ativo $j \in J$ não conhece as garantias totais em caso de *default*, pois não tem informação sobre a sua contraparte financeira.²

Vamos assim, supor que cada prestador toma como dada a taxa de retorno do ativo $j \in J$ em cada estado da natureza $s \in S$, $R_{j,s}$ (em termos nominais) e, mais ainda, ele consegue, *em equilíbrio*, adiantar perfeitamente a taxa média de retornos dos ativos.³ Assim, o preço do ativo $j \in J$

²Mesmo conhecendo os requerimentos unitários de colateral para o ativo $j \in J$, os quais, dependendo da regra de escolha das garantias, podem ter sido determinados por ele no primeiro estágio, um comprador do ativo não conhece o volume de vendas a descoberto feitas pelos outros agentes, o que o impede de conhecer exatamente a taxa de retorno a ser recebida.

³Apesar de utilizarmos um número finito de tipos de agentes, podemos pensar neles

estará incorporando a expectativas sobre os retornos médios feitas pelos emprestadores.

Vamos denotar por $\theta, \varphi \in \mathbb{R}_+^J$ os portfólios de ativos adquiridos e vendidos, respectivamente.

Em resumo, uma economia $\mathcal{E} \left[(C_j^i)_{i \in I, j \in J} \right]$ consiste em consumidores $(u^i, \omega^i)_{i \in I}$, uma família finita de ativos previamente colateralizados, $\{(A_j^i, C_j^i) : \forall i \in I; j \in J\}$, e estruturas de depreciação $Y_s^C, Y_s^W : \mathbb{R}_+^L \rightarrow \mathbb{R}_+^L$.

2.1.5

Problema do Consumidor

Fixados os requerimentos de colateral C_j^i , e dado o vetor de preços para os bens e os ativos $(p, q) \in \mathbb{R}_+^{n+J}$ e as taxas médias de retorno $R_{j,s}$, cada agente $i \in I$ vai fazer planos para consumo $x^i = (x_0^i, x_1^i, \dots, x_S^i) \in \mathbb{R}_+^n$, e para estocagem $y_0^i \in \mathbb{R}_+^L$, além do colateral, e vai constituir portfólios para a compra e venda de ativos (θ^i, φ^i) de tal forma que,

$$p_0 x_0^i + p_0 y_0^i + p_0 \sum_{j \in J} C_j^i \varphi_j^i + \sum_{j \in J} q_j (\theta_j^i - \varphi_j^i) \leq p_0 \omega_0^i, \quad (2-2)$$

$$\begin{aligned} p_s x_s^i &\leq p_s \omega_s^i + \sum_{j \in J} (R_{j,s} \theta_j^i - D_{j,s}^i \varphi_j^i) + p_s Y_s^W \left(y_0^i + \sum_{j \in J} C_j^{W,i} \varphi_j^i \right) \\ &\quad + p_s Y_s^C \left[x_0^i + \sum_{j \in J} (C_j^{C,i}) \varphi_j^i \right] \quad \forall s \in S. \end{aligned} \quad (2-3)$$

A primeira equação orçamentária diz que os gastos com consumo, estocagem, aquisição de colateral e de ativos não podem exceder a renda total, derivada da dotação e da venda de ativos em $t = 0$. A segunda equação orçamentária mostra que os gastos com consumo, para cada estado da natureza, não podem exceder a renda derivada da dotação, do resultado financeiro líquido do agente e do valor depreciado do que foi demandado em $t = 0$.

Ao longo do trabalho vamos sempre normalizar o vetor de preços, dos bens e ativos, de tal forma que $(p_0, q) \in \Delta_+^{L+J-1}$ e $p_s \in \Delta_+^{L-1}$, $\forall s \in S$, onde $\Delta_+^K = \{v \in \mathbb{R}_+^{K+1} : \sum_{k \in K} v_k = 1\}$ denota o simplex K -dimensional.

como sendo representantes de um *tipo* de consumidor, onde por tras de cada representante existe um contínuo de agentes, de modo que, como eles possuem expectativas racionais, pela Lei dos Grandes Números antecipam perfeitamente a entrega média.

Assim, para cada consumidor i , na economia $\mathcal{E} \left[(C_j^i)_{i \in I, j \in J} \right]$, o conjunto orçamentário será dado por

$$B_{C^i}^i(p, q, R_j) := \left\{ \begin{array}{l} (x^i, y^i, \theta^i, \varphi^i) \in \mathbb{R}_+^{L(S+2)+(2+L)J} : \\ (2-2) \text{ e } (2-3) \text{ são respeitadas} \end{array} \right\} \quad (2-4)$$

Vamos definir

$$U^i(x^i, y^i, \theta^i, \varphi^i) \equiv u_i \left[\left(x_0^i + \sum_{j \in J} (C_j^{C,i}) \varphi_j^i \right); (x_{\{s \in S\}}^i) \right] \quad (2-5)$$

Finalmente, dado um vetor de preços e retornos médios $(p, q_j, R_{s,j})_{j \in J, s \in S}$, cada agente $i \in I$ tem por objetivo

$$\max_{(x^i, y^i, \theta^i, \varphi^i) \in B_{C^i}^i(p, q, R_j)} U^i(x^i, y^i, \theta^i, \varphi^i). \quad (2-6)$$

2.1.6

Equilíbrio no Segundo Estágio

Um equilíbrio com colateral, para a economia no segundo estágio, vai ser um vetor de preços e retornos médios junto com alocações $(\bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{\theta}^i, \bar{\varphi}^i, \bar{R}_j)_{i \in I, j \in J}$ que resolvem o problema de maximização de utilidade para cada agentes i , e que satisfazem as seguintes condições de factibilidade,

- O mercado de bens está em equilíbrio na data 0

$$\sum_{i \in I} \left(x_0^i + y_0^i + \sum_{j \in J} C_j^i \varphi_j^i \right) = \sum_{i \in I} \omega_0^i \quad (2-7)$$

- O mercado de bens está em equilíbrio para cada estado $s \in S$ no primeiro período

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} x_s^i &= \sum_{i \in I} \left[\omega_s^i + Y_s^C \left(x_0^i + \sum_{j \in J} C_j^{C,i} \varphi_j^i \right) \right] \\ &+ \sum_{i \in I} \left[Y_s^W \left(y_0^i + \sum_{j \in J} C_j^{W,i} \varphi_j^i \right) \right], \forall s \in S \end{aligned} \quad (2-8)$$

- Equilíbrio no mercado de ativos

$$\sum_{i \in I} \theta_j^i = \sum_{i \in I} \varphi_j^i, \forall j \in J \quad (2-9)$$

- Os retornos efetivos se igualam aos pagamentos feitos no agregado⁴

$$R_{j,s} \sum_{i \in I} \theta_j^i = \sum_{i \in I} D_{j,s}^i \varphi_j^i, \forall j \in J \quad (2-10)$$

2.1.7

Observações

- Devemos ressaltar que o consumidor $i \in I$ repudia a sua dívida (dá *default*) no ativo j no estado s quando

$$D_{j,s}^i = p_s \left[Y_s^C \left(C_j^{C,i} \right) + Y_s^W \left(C_j^{W,i} \right) \right], \quad (2-11)$$

e o valor do seu *default* se torna

$$\left(p_s A_s^j - p_s \left[Y_s^C \left(C_j^{C,i} \right) + Y_s^W \left(C_j^{W,i} \right) \right] \right) \varphi_j^i. \quad (2-12)$$

Os compradores do ativo sofrem *default* no ativo j , no estado s , quando eles recebem $R_{j,s}$ e $p_s A_s^j - R_{j,s} > 0$. Dessa forma, o *default* sofrido, por unidade de ativo adquirido, torna-se o valor de face do ativo menos o valor do que ele efetivamente recebeu, isto é, $p_s A_s^j - R_{j,s}$.

- Nosso modelo é consistente com oportunidades limitadas de arbitragem, o que é observado em economias reais. De fato, de acordo com as escolhas de colateral, pode existir uma forma através da qual um determinado agente pode implementar uma arbitragem limitada.

Se, em equilíbrio, para algum agente i , $R_{j,s} \geq D_{j,s}^i, \forall s \in S$, e, em pelo menos um estado da natureza $\bar{s}$, $R_{j,\bar{s}} > D_{j,\bar{s}}^i$, vai existir uma oportunidade de arbitragem, pois este indivíduo, ao comprar e vender unidades do ativo $j \in J$, irá receber um retorno que será sempre igual ou superior ao valor de suas obrigações.

⁴Esta condição implica que, no agregado, o *default* sofrido deve ser igual ao *default* dado para todo estado da natureza. Mais ainda, podemos notar que esta condição de equilíbrio é coerente com a existência de uma medida martingal equivalente. De fato, para qualquer agente, o retorno de cada ativo, em cada estado da natureza, é dado pelo pagamento esperado sob tal medida (construída através da participação relativa do agente no mercado de ativo referente).

Note que, a compatibilidade desta oportunidade de arbitragem, com o conceito de equilíbrio, implica na existência de pelo menos um outro vendedor do ativo $k \in I$, que tenha uma disposição à pagar, $D_{j,\bar{s}}^k$, maior que o retorno medio, $R_{j,\bar{s}}$.

Esta oportunidade de arbitragem é limitada pois, o próprio colateral que deve ser estabelecido pelo agente de modo a adquirir o portfólio que implementa a arbitragem é custoso e, os recursos individuais são, por hipótese, limitados.

2.2

O Primeiro Estágio: A Escolha do Colateral

No primeiro estágio os consumidores escolhem os requerimentos personalizados de colateral para cada ativo $j \in J$, $(C_j^i)_{i \in I}$.

A regra que vai determinar quais são os requerimentos de colateral escolhidos por cada agente será dada, *exogenamente*, por uma função $\rho : I \times J \rightarrow I$, de tal forma que os requerimentos de colateral, que deverão ser constituídos pelo agente $i \in I$, ao vender a descoberto o ativo $j \in J$, serão determinados pelo agente $\rho(i, j) \in I$. Em outras palavras, os requerimentos escolhidos pelo agente $k \in I$ são $\{C_j^i : k = \rho(i, j)\}$.

Note que, fixado o conjunto de consumidores I , existe um número finito de funções ρ . De fato, vão existir exatamente $I^{I \times J}$ possíveis regras de escolha.

Por exemplo, caso existam somente dois agentes, $i = 1, 2$, e um único ativo, j , quatro regras serão compatíveis com o modelo,

- (1) Cada agente determina o seu próprio coeficiente de colateral, $\rho(i, j) = i$;
- (2) Cada agente k determina o coeficiente de colateral da sua contraparte, $\rho(i, j) = k$, $i \neq k$;
- (3) E duas regras distintas, onde um dos agentes k vai determinar todos os coeficientes de colateral da economia, $\rho(i, j) = k$, $\forall(i, j)$.

A regra (1) é autárquica, no sentido que cada agente tem autonomia para determinar as suas garantias. Para um nível de preços e retornos (p, q, R) do segundo estágio, esta regra é ótima caso o agente venha a se comportar como um vendedor do ativo, pois permite que ele escolha requerimentos de colateral tão baixos quanto possível.

Em relação à regra (2), ela será ótima para os agentes que comprem o ativo no segundo estágio, pois garante uma proteção alta em relação

ao default futuro. Esta forma de determinação das garantias é similar a utilizada pelo sistema de crédito bancário.

Finalmente, as regras descritas no item (3) permitem que um dos agentes se cubra perfeitamente em relação ao risco de crédito futuro, e ao mesmo tempo escolha, de forma ótima, sua própria taxa de default.⁵

Vamos permitir que os agentes determinem tanto garantias que poderão ser consumidas, quanto requerimentos de colateral que terão que ser estocados. Assim, um agente $k = \rho(i, j)$ fará uma dupla escolha para determinar C_j^i . Escolherá a parte a ser consumida, $C_j^{C,i}$, e a parte a ser estocada, $C_j^{W,i}$.

Antes de definir os conjuntos de possíveis requerimentos de colateral, para um dado ativo, é importante notar que, caso a regra (1) seja utilizada, e as preferências individuais sejam monotônicas, o vendedor de um ativo gostaria de tornar o seu *default* tão alto quanto possível, o que seria atingido diminuindo os coeficientes de colateral ao máximo. Portanto, caso não existam limites inferiores para as garantias ao crédito, isto vai expor os compradores a riscos excessivos, e pode inviabilizar a negociação de ativos em equilíbrio.

Analogamente, caso alguma das regras descritas no item (3) seja utilizada, o agente que tem o direito de determinar todos os colaterais pode fixar garantias excessivas para os outros consumidores, limitando assim, no segundo estágio, o seu default sofrido, independente do nível dos preços de equilíbrio. Neste caso, sem limites superiores para os colaterais, as vendas a descoberto poderão vir a ser fortemente limitadas.

Como estamos interessados em modelos nos quais, em equilíbrio, os ativos sejam negociados e possa surgir default, será necessário que sejam introduzidos incentivos à oferta de colateral que garantam proteção para os compradores sem inibir as vendas a descoberto.⁶ Vamos portanto, impor

⁵Note que a descrição anterior sobre o comportamento dos agentes em relação as diferentes regras, depende do vetor de preços e retornos esperados na economia Walrasiana do segundo estágio. De fato, é somente fixando os preços que podemos fazer esta análise comparativa entre os efeitos das diferentes regras, sobre o nível de satisfação dos agentes.

Para fazer a estática comparativa entre as diferentes funções ρ levando também em consideração o efeito sobre os preços de equilíbrio, é necessário considerar as expectativas dos agentes sobre os níveis de utilidade futuros. Discutiremos isto, na seção seguinte.

⁶Existem outros mecanismos de limitar as possíveis escolhas de colateral. Em um trabalho recente, Araujo, Fajardo e Páscoa (2003) estudam um modelo estático de colateral endógeno, no qual não existem limites exógenos para os possíveis requerimentos de colateral, os agentes comprem derivativos que têm como ativo subjacente as promessas feitas no mercado. Assim, impondo algumas restrições sobre os retornos dos ativos, eles conseguem provar que sempre existe equilíbrio, em uma economia com um contínuo de agentes.

exogenamente limites superiores e inferiores aos conjuntos de possíveis escolhas de colateral. Deste modo, os possíveis coeficientes de colateral para os ativos $j \in J$ serão

$$\Gamma^C = \left\{ c \in \mathbb{R}_{++}^L : \alpha^C \leq \sum_k c_k \leq \beta^C \right\} \quad (2-13)$$

$$\Gamma^W = \left\{ c \in \mathbb{R}_{++}^L : \alpha^W \leq \sum_k c_k \leq \beta^W \right\} \quad (2-14)$$

Onde Γ^C e Γ^W denotam os conjuntos de escolhas das garantias a serem consumidas e estocadas, respetivamente. Os coeficientes α^C , β^C , α^W e β^W são positivos e exogenamente dados.⁷

Agora, dados coeficientes de colateral $\mathcal{C} = (C_j^{C,i}, C_j^{W,i})_{i \in I, j \in J} \in \Gamma = (\Gamma^C)^{(I \times J)} \times (\Gamma^W)^{(I \times J)}$ poderá existir uma indeterminação sobre o número de equilíbrios em $\mathcal{E}[\mathcal{C}]$, impedindo assim os agentes de adiantarem perfeitamente o resultado das trocas e negociações financeiras feitas no segundo estágio.

Para contornar esta dificuldade, vamos supor, como em Simon e Zame (1990), que os agentes que escolhem os requerimentos de colateral vão adiantar perfeitamente, em equilíbrio, a utilidade esperada associada a cada distribuição possível de colateral, através de uma seleção mensurável dos payoffs compatíveis com as alocações de equilíbrio do segundo estágio. Esta seleção, que será endogenamente determinada, permitirá que a função objetivo de cada agente esteja bem definida no primeiro estágio.

Mais formalmente, dada a regra de escolha ρ , vamos denotar por $H(\rho) \subset I$ o conjunto dos agentes que determinam os coeficientes de colateral no primeiro estágio. Isto é,

$$H(\rho) \equiv \{i \in I : \rho^{-1}(i) \neq \emptyset\}.$$

O conjunto de *estratégias puras* (escolhas de colateral), para o agente $h \in H(\rho)$ será denotado por $\Gamma_\rho^h = (\Gamma^C \times \Gamma^W)^{b_\rho^h}$, onde b_ρ^h é a cardinalidade do conjunto $\rho^{-1}(h)$.

Como de costume em teoria dos jogos, o conjunto de estratégias mistas do agente $h \in H(\rho)$ é dado pelo conjunto de medidas de probabilidade sobre Γ_ρ^h , o qual será denotado por $\mathcal{M}(\Gamma_\rho^h)$.

⁷Poderíamos ser ainda mais genéricos ao requerer que somente que um dos coeficientes de colateral seja estritamente positivo sem modificar os nossos resultados; ou permitir diferentes conjuntos de escolha, para ativos diferentes. Por conveniência de notação, trabalharemos com as estruturas acima.

Agora, dados requerimentos de colateral $\mathcal{C} = (C_j^{C,i}, C_j^{W,i})_{i \in I, j \in J}$, vamos a denotar o conjunto de equilíbrios para a economia $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ por

$$Eq(\mathcal{C}) \equiv \left\{ z = (p, q, x^i, y^i, \theta^i, \varphi^i, R_j)_{i \in I, j \in J} : z \text{ é um equilíbrio de } \mathcal{E}(\mathcal{C}) \right\}.$$

O conjunto dos níveis de utilidade esperados (*expected utility payoffs*), $EU(\mathcal{C})$, será dado pela *envoltória convexa* dos níveis de satisfação associados aos equilíbrios da economia $\mathcal{E}(\mathcal{C})$,⁸

Isto é,

$$\mathcal{E}(\mathcal{C}) \equiv CHull \left\{ v \in \mathbb{R}_+^I : [v^i = U^i(w^i)] \wedge [\exists(p, q) : z = (p, q, (w^i)_{i \in I}) \in E(\mathcal{C})] \right\}$$

Uma *seleção mensurável (da correspondência) dos níveis de utilidade esperada* para os agentes em $H(\rho)$, $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+^{H(\rho)}$, é uma função Borel mensurável tal que $f(\mathcal{C}) \in \Pi_{H(\rho)}[EU(\mathcal{C})]$, $\forall \mathcal{C} \in \Gamma$.⁹ Note que, no nosso modelo são somente os agentes em $H(\rho)$ que tomam decisões estratégicas no primeiro estágio, e portanto, a única informação relevante, no momento da determinação dos coeficientes de colateral, é a dada pelos níveis de utilidade destes agentes, pois no segundo estágio, as negociações serão feitas de forma anônima.

Para cada seleção mensurável $f = (f^h)_{h \in H(\rho)}$ dos níveis de utilidade esperada, o problema de cada consumidor $h \in H(\rho)$ no primeiro estágio esta bem definido. De fato, fixada uma seleção f , cada agente $h \in H(\rho)$ vai escolher uma estratégia (possivelmente mista) $\bar{\sigma}^h$ que maximize a sua utilidade esperada, dadas as escolhas dos outros agentes, Isto é, dado um vetor de estratégias para os outros agentes, σ_{-h} , o agente h vai escolher uma medida de probabilidade sobre Γ_ρ^i para solucionar

$$\max_{\sigma \in \mathcal{M}(\Gamma_\rho^h)} \int_{\Gamma} f^h(\mathcal{C}) d(\sigma \times \sigma_{-h})(\mathcal{C}).$$

2.2.1

Equilíbrio no Modelo Sequencial

Um Equilíbrio com Colateral Endógeno, para nosso modelo sequencial, é dado por uma seleção mensurável f , da correspondência de níveis de

⁸Esses são os níveis de utilidade atingíveis para uma dada estratégia mista sobre as escolhas de colateral.

⁹Dado um subconjunto $H \subset I$ e um conjunto $A \in \mathbb{R}_+^I$, $\Pi_H[A]$ denota a projeção do conjunto A em relação as coordenadas de H .

utilidade esperada $\Pi_{H(\rho)} [EU(\mathcal{C})]$, junto com um vetor de estratégias mistas para os agentes em $H(\rho)$, $(\bar{\sigma}^h)_{h \in H(\rho)}$, tal que

$$\sigma^h \in \text{Argmax}_{\sigma \in \mathcal{M}(\Gamma_\rho^h)} \int_{\Gamma} f^h(\mathcal{C}) d(\sigma \times \bar{\sigma}_{-h})(\mathcal{C}).$$

Note que a definição anterior diz simplesmente que, fixada uma regra de escolha ρ , um equilíbrio para nosso modelo é dado por uma seleção mensurável de utilidades esperadas, junto com um Equilíbrio de Nash do jogo $G_f = [f^h, \Gamma_\rho^h]_{h \in H(\rho)}$.

É importante salientar que o jogo G_f pode não ter equilíbrio de Nash, mesmo em estratégias mistas, para uma dada seleção mensurável f , pois esta função pode não ser contínua, e portanto, a função objetivo dos agentes em $H(\rho)$ não vai satisfazer as hipóteses usuais dos teoremas de existência de equilíbrio de Nash.

Para garantirmos a existência de uma solução para nosso modelo sequencial vamos utilizar um resultado provado por Simon e Zame (1990), que garante que, sob certas hipóteses em relação à correspondência de utilidades esperadas, é possível garantir que existe um seleção mensurável e um Equilíbrio de Nash do jogo induzido, mesmo sem a hipótese de continuidade sobre a seleção aleatória.