4
Modelagem de Impacto

O presente capítulo tem como objetivo a descrição das principais metodologias para a modelagem de impacto. Como foi visto na revisão bibliográfica, existem basicamente duas abordagens: O Método do Balanço de Momentum e o Método do Elemento de Contato. Aqui, além de revisar estes métodos, estendemos alguns resultados da literatura, combinando as duas abordagens. Exemplos de aplicação são considerados, incluindo o impacto de um manipulador flexível.

4.1
Método do Balanço de Momentum

A teoria clássica de impacto chamada também *Estereomecânica* é baseada na lei de impulso-momentum e foi desenvolvida específicamente para corpos rígidos, mesmo assim, na literatura encontramos aplicações deste método envolvendo impacto em estruturas flexíveis [37][30][123]. Nesta metodologia o impacto é considerado como um evento que acontece instantaneamente durante o qual cada um dos corpos rígidos recebe um impulso $\mathbf{I}$ devido à força de impacto. A hipótese do impacto ser um evento instantâneo permite uma formulação matemática muito simples conduzindo a uma solução numérica computacionalmente eficiente.

Para a análise considere o movimento de dois corpos rígidos como apresentados na fig. 4.1. O vetor $\mathbf{d}$ identifica a separação dos pontos $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, os quais no instante da colisão coincidirão com o ponto de contato. Inicialmente os corpos rígidos estão dotados de velocidade angular e velocidade linear do seu centro de massa. O movimento destes corpos pode ser especificado através de um vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$. Por exemplo, se não existirem vínculos, ou seja, se os corpos estiverem livres, uma escolha adequada para este vetor é dada pela posição dos centros de massas e as orientações dos corpos:

$$\mathbf{q} = \left[\begin{array}{cccccc} x_1 & y_1 & \theta_1 & x_2 & y_2 & \theta_2 \end{array}\right]^t \tag{4-1}$$

Em geral, para um sistema com n de graus de liberdade de liberdade, teremos um vetor de coordenadas $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$

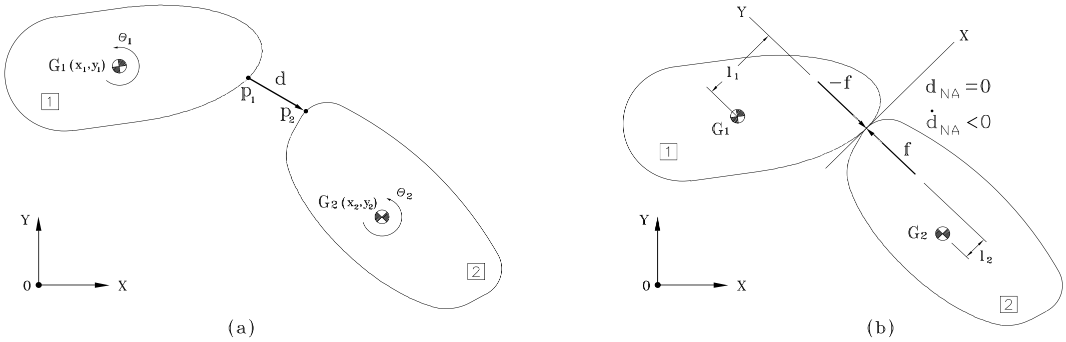

Figura 4.1: Colisão de um par de corpos rígidos.

Agora, usando as coordenadas generalizadas podemos formular a equação de movimento do sistema através da equação de Lagrange [73]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_{ext} \tag{4-2}$$

onde $\mathbf{r}$ representa o vetor de forças generalizadas de impacto e $\mathbf{r}_{ext}$ o vetor de forças externas. Integrando esta equação num intervalo $[t, t+\tau]$:

$$\int_t^{t+\tau} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) dt - \int_t^{t+\tau} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\, dt + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}\, dt = \int_t^{t+\tau} \mathbf{r}\ dt + \int_t^{t+\tau} \mathbf{r}_{ext}\ dt \tag{4-3}$$

No limite quando $\tau \to 0$ e tomando em consideração que os deslocamentos são sempre contínuos no tempo, as velocidades são limitadas e sob a hipótese de que as forças externas $\mathbf{r}_{ext}$ são contínuas no tempo, a eq. (4-3) se reduz a:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]_t^{t+\tau} = \mathbf{I}_g \tag{4-4}$$

onde $\mathbf{I}_g$ é o impulso generalizado da força de impacto definido como:

$$\mathbf{I}_g \doteq \int_t^{t+\tau} \mathbf{r}\ dt \tag{4-5}$$

Expressando a energia cinética em função da matriz de massa:

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{q}}^t\ \mathbf{M}\ \dot{\mathbf{q}} \tag{4-6}$$

a eq. (4-4) fica:

$$\mathbf{M}\ (\dot{\mathbf{q}}_D - \dot{\mathbf{q}}_A) = \mathbf{I}_g \tag{4-7}$$

onde os sub-índices $(.)_A$ e $(.)_D$ serão usados aqui para referenciar as variáveis antes e depois do impacto respectivamente. Esta equação é a lei de quantidade de movimento para o sistema, mas ainda está em termos de coordenadas e impulsos generalizados. No entanto, podemos também escrever esta equação em termos da velocidade de aproximação dos corpos tomando em conta a definição de coordenada generalizada, a qual permite que expressar a posição $\mathbf{p}$ de qualquer ponto dos corpos rígidos como função das coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$. Ou seja:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1(\mathbf{q}) \quad e \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2(\mathbf{q})$$

e a aproximação dos corpos

$$\mathbf{d}(\mathbf{q}) \doteq \mathbf{p}_2(\mathbf{q}) - \mathbf{p}_1(\mathbf{q})$$

das duas últimas equações e a regra da cadeia de derivação podemos verificar a seguinte relação:

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{W}\ \dot{\mathbf{q}} \tag{4-8}$$

com

$$\mathbf{W} \doteq \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \mathbf{q}} \tag{4-9}$$

Note que o vetor $\dot{\mathbf{d}}$ na eq. (4-8) representa a velocidade relativa de aproximação dos corpos durante o impacto. As forças generalizadas de impacto podem ser obtidas através do princípio do trabalho virtual e podem ser mostrado que elas estão relacionadas com as forças reais da seguinte maneira [51]:

$$\mathbf{r} = \mathbf{W}^t\ \mathbf{f} \tag{4-10}$$

e dessa última equação e da definição de impulso linear obtemos diretamente a relação entre o impulso real de impacto $\mathbf{I}$ e o impulso generalizado $\mathbf{I}_g$:

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{W}^t\ \mathbf{I} \tag{4-11}$$

usando as relações (4-8) e (4-11) na eq. (4-7) tem-se:

$$\dot{\mathbf{d}}_D - \dot{\mathbf{d}}_A = \tilde{\mathbf{M}}_L\ \mathbf{I} \tag{4-12}$$

sendo

$$\tilde{\mathbf{M}}_L \doteq \mathbf{W}\ \mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{W}^t \tag{4-13}$$

a qual é uma matriz de 2×2. Podemos escrever a eq.(4-12) também como:

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}_L\ (\dot{\mathbf{d}}_D - \dot{\mathbf{d}}_A) \tag{4-14}$$

onde $\mathbf{M}_L$ é uma matriz 2×2 chamada de massa local definida assim:

$$\mathbf{M}_L \doteq \tilde{\mathbf{M}}_L^{-1} \tag{4-15}$$

A eq. (4-14) é a lei de impulso-momentum para o sistema de corpos rígidos que foi expressada em função do impulso $\mathbf{I}$ devido à força de impacto e a velocidade relativa $\dot{\mathbf{d}}$. Esta relação tem analogia com a expressão da equação de quantidade de movimento para o impacto de dois massas pontuais [43].

Se tomamos as direções dos eixos coordenados alinhados com as direções radial e tangencial como apresentado na fig. 4.1, podemos decompor o impulso $\mathbf{I}$ e a velocidade de aproximação dos corpos $\dot{\mathbf{d}}$ nas suas componentes normal e tangencial I_N, I_T e d_N, d_T. Usando a eq. (4-14) tem-se:

$$I_N = M_{L1,1}\ (\dot{d}_{ND} - \dot{d}_{NA}) + M_{L1,2}\ (\dot{d}_{TD} - \dot{d}_{TA}) \tag{4-16}$$

$$I_T = M_{L2,1}\ (\dot{d}_{ND} - \dot{d}_{NA}) + M_{L2,2}\ (\dot{d}_{TD} - \dot{d}_{TA}) \tag{4-17}$$

Logo, temos quatro incognitas $\dot{d}_{ND},\ \dot{d}_{TD},\ I_N,\ I_T$ e apenas duas equações (4-16) e (4-17). Portanto, para poder resolver este problema precisamos de mais duas relações. No caso de impacto sem atrito, o impulso na direção tangencial será nulo ($I_T = 0$) e as variáveis desconhecidas são reduzidas a apenas três: $\dot{d}_{ND},\ \dot{d}_{TD},\ I_N$. No caso de impacto elástico, a equação de conservação de energia mecânica proporcionará a relação faltante para definir unívocamente as velocidade finais dos corpos rígidos e assim desta maneira determinar a dinâmica resultante após o impacto. Num caso mais geral, as relações adicionais necessárias para a solução do problema de impacto são proporcionadas de uma maneira simples pelos coeficientes de restituição [82][11]. O coeficiente de restituição mais popular foi definido por Newton. Este é um coeficiente de restituição normal e é definido da seguinte maneira:

$$e_n = -\frac{\dot{d}_{ND}}{\dot{d}_{NA}} \tag{4-18}$$

onde $\dot{d}_{NA}$ e $\dot{d}_{ND}$ são as velocidades relativas dos corpos na direção normal, antes e depois do impacto respectivamente. Existem também outros tipos de coeficientes testados na literatura [14][15][16][17].

Embora o Método do Balanço de Momentum seja muito atrativo devido a sua simplicidade e eficiência computacional, existem duas desvantagens que limitam seu amplo uso: 1) Não é possível determinar nem a força nem as deformações produzidas durante o impacto, e 2) É introduzida uma mudança descontínua no estado do sistema. Isto pode ser um fator limitante devido a que em alguns casos é preciso estimar a máxima força durante o impacto com finalidades de projeto e/ou por razões de segurança e, em alguns outros casos se quer ser capaz de conhecer o comportamento entre as fases de contato e não contato para um melhor entendimento do controle durante essa transição.

4.2
Método do Elemento de Contato

Nesta abordagem, o impacto é considerado como um evento de duração finita e também supõe-se que acontece uma deformação local na região de contato. Isto permite conhecer o valor das forças de impacto, mas para isto é preciso conhecer o comportamento elástico na região de contato. Neste trabalho somente serão considerados choques frontais ou sem atrito na direção tangencial.

4.2.1
Lei de Hertz

A primeira análise satisfatória para prever forças, esforços e deformações no contato de corpos é devida a Hertz, que visualizou o contato entre corpos como um problema equivalente em eletrostática. Uma solução foi obtida na forma de um potencial que descreve as forças, esforços e deformações perto do ponto de contato como uma função das propriedades geométricas e elásticas dos corpos. A lei de impacto de Hertz é a seguinte:

$$f = K_H\ \delta^{\frac{3}{2}} \tag{4-19}$$

onde f é a força de contato, δ é a aproximação relativa entre os deslocamentos dos corpos (ver fig. 4.2), e K_H é a constante de Hertz e deve ser obtida en função da geometria e propriedades elásticas dos corpos em contato.

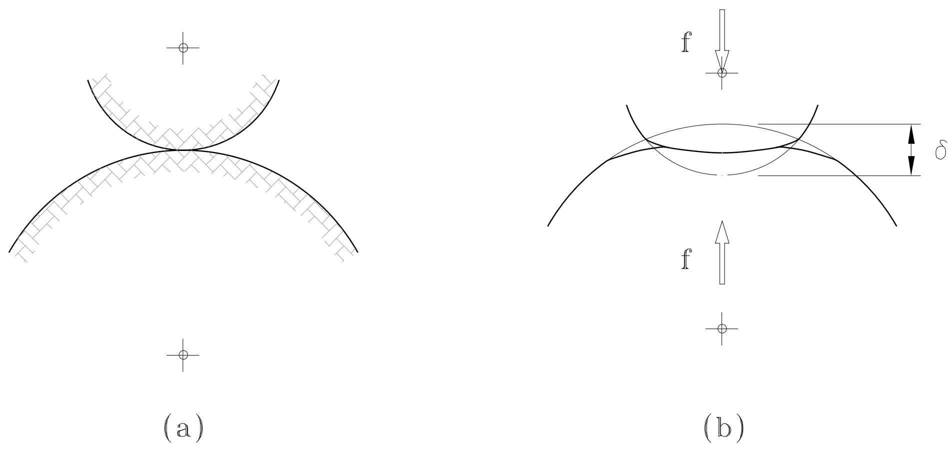

Figura 4.2: Deformação de dois corpos elásticos na região de contato. (a) Justo antes do contato. (b) Durante o contato..

É importante notar aqui que mesmo que a lei de Hertz seja de natureza estática, pode ser aplicada em problemas envolvendo impacto a relativa baixa velocidade [49].

4.2.2 Impacto de Corpos Deformáveis Apenas Localmente

A lei de Hertz pode ser usada para determinar as forças de impacto. Para mostrar isto, aqui nesta seção é considerada a colisão de dois corpos que são considerados deformáveis apenas localmente, ou seja é suposto que não existem deformações nos corpos fora da região de contato. Já que a única elasticidade considerada está ao redor do ponto de colisão, não existirão vibrações induzidas nos corpos. Esse modelo é equivalente a considerar uma mola (de natureza não-linear devido à forma da eq. (4-19)) que é comprimida e restaurada entre dois corpos rígidos, algo parecido a dois caminhões que impactam com pára-choques feitos de mola. Chamaremos aqui aos corpos com este tipo de comportamento de *corpos compactos* ou *corpos deformáveis apenas localmente*. Na literatura encontramos uma análise similar mas apenas para o caso de choque central de duas esferas, ou seja aquele onde no instante da colisão os centros de massa dos dois corpos passam pela linha normal de impacto e, apenas para o caso de corpos livres [49]. Aqui neste trabalho será feita uma dedução mais geral, estendendo o resultados da literatura para que sejam válidos mesmo no caso de choque excêntrico (ou seja com linha de choque passando pelo centros de massa ou não) e/ou quando os corpos impactantes tem alguns graus de liberdade restringidos (como no caso de sistemas multicorpos interconectados). Para fazer isto combinaremos algumas relações obtidas na seção anterior com o Método de Balanço de Momentum.

A equação de movimento destes corpos podem ser deduzidas através das equações de Lagrange, de maneira análoga ao Método do Balanço de Momentum exposto na seção 4.1, obtendo-se:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_{ext} \tag{4-20}$$

usando as equações (4-8) e (4-10), e considerando ausência de forças externas chegamos à seguinte relação:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{M}}_L\,\mathbf{f} \tag{4-21}$$

com a matriz $\tilde{\mathbf{M}}_L$ definida na eq.(4-13). Note de que já que os corpos são considerados localmente deformáveis, a magnitude do vetor de aproximação $\mathbf{d}$, logo após que o contato é iniciado, é também a deformação δ indicada na equação de lei de Hertz (4-19) e apresentada na fig. 4.2. Portanto, considerando esta última equação na direção normal e desprezando as forças de atrito no contato temos:

$$\ddot{\delta} = -\tilde{M}_{L_{1,1}}\;f \tag{4-22}$$

onde o escalar $\tilde{M}_{L_{1,1}}$ é o primeiro elemento da matriz $\tilde{\mathbf{M}}_L$ já definida na seção 4.1. Para calcular este termo, consideremos a matriz $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{2\times n}$ particionada em dos vetores linha ($\mathbf{w}_N$, a componente normal e $\mathbf{w}_T$, a componente tangencial):

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_N \\ \hline \mathbf{w}_T \end{bmatrix}_{2\times n} \tag{4-23}$$

sendo

$$\mathbf{w}_N = \frac{\partial(\mathrm{p}_{N2} - \mathrm{p}_{N1})}{\partial \mathbf{q}} \quad e \quad \mathbf{w}_T = \frac{\partial(\mathrm{p}_{T2} - \mathrm{p}_{T1})}{\partial \mathbf{q}} \tag{4-24}$$

Substituindo na eq.(4-13), obtemos a seguinte expressão para $\tilde{M}_{L_{1,1}}$:

$$\tilde{M}_{L_{1,1}} = \mathbf{w}_N \; \mathbf{M}^{-1} \; \mathbf{w}_N^t \tag{4-25}$$

A eq. (4-22) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$K_M \; \ddot{\delta} = -f \tag{4-26}$$

sendo

$$K_M \doteq 1/\tilde{M}_{L_{1,1}} \tag{4-27}$$

É importante notar aqui que a constante K_M dependerá tanto das massas dos corpos como das restrições nos graus de liberdade dos corpos impactantes. Como exemplo, considere-se a determinação da constante K_M, no caso particular de ter ambos os corpos impactantes livres como apresentado na fig.4.1. Neste caso, uma escolha adequada para o vetor de coordenadas generalizadas adequado é $\mathbf{q} = [x_1 \; y_1 \; \theta_1 \; x_2 \; y_2 \; \theta_2]^t$. Usando este vetor pode-se achar o vetor $\mathbf{w}_N$ usando a primeira das eqs. (4-24), e levando em conta que neste caso a matriz de massa é dada por $\mathbf{M} = diag(m_1, m_2)$, onde m_1 e m_2 são as massas dos corpos impactantes, da eq. (4-25) o valor de $\tilde{M}_{L_{1,1}}$ pode ser determinado. Logo, do termo $\tilde{M}_{L_{1,1}}$ obtém-se a constante de massa K_M usando a eq. (4-27). Seguindo este procedimento, obtém-se:

$$K_M = 1/\tilde{M}_{L_{1,1}} = \frac{m_{1,eq} \; m_{2,eq}}{m_{1,eq} + m_{2,eq}} \tag{4-28}$$

com

$$m_{i,eq} = m_i \; \frac{{k_{g,i}}^2}{{k_{g,i}}^2 + l_i^2} \quad , \qquad i = 1, 2 \tag{4-29}$$

sendo que $k_{g,i}$ são os raios de giro polar dos corpos e as dimensões l_i são a distâncias dos centros de massa dos corpos até a linha normal de impacto (ver fig. (4.1)). Estas distâncias l_i aparecerão nos casos de choque excêntrico e são neste sentido uma correção ao resultado na literatura [49].

Voltando ao caso geral, combinado a eq. (4-26) com a lei de Hertz (4-19) temos:

$$\ddot{\delta} = -\frac{K_H}{K_M} \; \delta^{3/2} \tag{4-30}$$

integrando uma vez,

$$\dot{\delta}^2 = \dot{d}_{NA}^2 - \frac{4}{5}\,\frac{K_H}{K_M}\,\delta^{\frac{5}{2}} \tag{4-31}$$

Essa última relação é a equação diferencial que governa o comportamento da força e da deformação durante o impacto de corpos compactos. A deformação máxima pode ser determinada facilmente fazendo $\dot{\delta} = 0$ na eq. (4-31) resultando:

$$\delta_{max} = \left[\frac{5}{4}\,\frac{K_M}{K_H}\right]^{\frac{2}{5}}\,(\dot{d}_{NA})^{\frac{4}{5}} \tag{4-32}$$

Para determinar a força máxima é só substituir esta relação na lei de Hertz (4-19):

$$f_{max} = K_H{}^{\frac{2}{5}}\,\left[\frac{5}{4}\,K_M\right]^{\frac{3}{5}}\,(\dot{d}_{NA})^{\frac{6}{5}} \tag{4-33}$$

A duração do impacto pode ser também determinada se integramos diretamente a eq. (4-31) que resulta:

$$t = \frac{\delta_{max}}{\dot{d}_{NA}} \int_0^{\delta^*} \frac{d\delta^*}{\sqrt{1-\delta^{*\frac{5}{2}}}} = \left[\frac{5}{4}\,\frac{K_M}{K_H}\right]^{\frac{2}{5}}\,(\dot{d}_{NA})^{-\frac{1}{5}} \int_0^{\delta^*} \frac{d\delta^*}{\sqrt{1-\delta^{*\frac{5}{2}}}} \tag{4-34}$$

No lado direito da equação foi usado também a eq. (4-32) e δ^* é a deformação adimensional definida por:

$$\delta^* \doteq \frac{\delta}{\delta_{max}} \tag{4-35}$$

Tomando em conta que a deformação máxima acontece na metade do período de duração do contato devido à natureza elástica do impacto podemos substituir $t = \tau/2$ quando $\delta^* = 1$ na eq. (4-34), obtendo-se:

$$\tau \approx 3.2180\,\left[\frac{K_M}{K_H}\right]^{\frac{2}{5}}\,(\dot{d}_{NA})^{-\frac{1}{5}} \tag{4-36}$$

Como podemos observar, obtivemos relações matemáticas que permitem calcular de maneira aproximada a força máxima, a duração do impacto e a deformação local máxima. Estas relações podem também ser usadas para uma análise qualitativa da influência dos parâmetros que governam a colisão de corpos deformáveis apenas localmente. Para obter a deformação (e daqui a força) ao longo de todo o período de impacto τ, deve-se integrar a eq. (4-31) ou equivalentemente usar a eq. (4-34). Uma sugestão é a adimensionalização desta equação através do uso de números adimensionais tais como a deformação δ^* já definida na eq. (4-35) e uma escala de tempo adimensional que poderia ser definido da seguinte maneira:

$$t^* \doteq \frac{t}{\tau} \tag{4-37}$$

Assim, a versão adimensional da eq. (4-34) é:

$$t^* = \frac{1}{2.9432} \int_0^{\delta^*} \frac{d\delta^*}{\sqrt{1 - \delta^{*\frac{5}{2}}}} \tag{4-38}$$

Desta forma não é necessário resolver a equação diferencial (4-31) para cada caso específico, mas sim apenas resolver a equação adimensional (4-38) apenas uma vez. Uma solução alternativa é usar a seguinte aproximação:

$$\int_0^{z} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{\frac{5}{2}}}} \approx \frac{1}{1,0674}\, arcsen(z) \tag{4-39}$$

a qual pode ser substituída na versão adimensional (4-38), obtendo-se:

$$\delta^* \approx sen(\pi\; t^*) \tag{4-40}$$

substituindo na equação de Hertz temos a força de impacto em função do tempo:

$$f^* \approx sen^{\frac{3}{2}}(\pi\; t^*) \tag{4-41}$$

com

$$f^* \doteq \frac{f}{f_{max}} \tag{4-42}$$

Exemplo de Aplicação. (Impacto de um manipulador robótico)
Como exemplo aplicativo dos resultados obtidos nesta seção, consideremos o impacto do manipulador rígido de dois elos da fig.4.3
O primeiro passo será estimar a constante de massa efetiva K_M, a partir das eqs. (4-27) e (4-25). Se fazemos as simplificações necessárias na matriz de

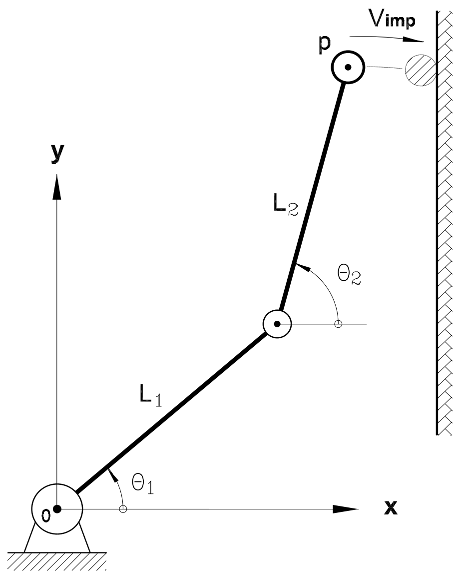

Figura 4.3: Impacto de um manipulador robótico de dois elos.

massa do manipulador de dois elos deduzido no capítulo anterior, eq. (3-74), podemos ver que no caso deste exemplo, a matriz de massa é a seguinte:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1 & J_3 \ \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ J_3 \ \cos(\theta_2 - \theta_1) & J_2 \end{bmatrix} \tag{4-43}$$

onde J_1, J_2 e J_3 são inércias cujas expressões foram já definidas no capítulo anterior. Para a determinação do vetor linha $\mathbf{w}_N$ temos a seguinte expressão:

$$\mathbf{w}_N = \frac{\partial p_N}{\partial \boldsymbol{\theta}} \tag{4-44}$$

sendo p_N a posição da extremidade do manipulador, na direção normal à parede, ou seja:

$$p_N = L_1 \ cos\theta_1 + L_2 \ cos\theta_2 \tag{4-45}$$

e portanto,

$$\mathbf{w}_N = [-L_1 \ \operatorname{sen}\theta_1 \qquad - L_2 \ \operatorname{sen}\theta_2 \ ] \tag{4-46}$$

Consideremos as seguintes dimensões do manipulador: $L_1 = 1 \ m$ $L_2 = 1 \ m$. O valores para as inércias do manipulador (obtidas com expressões deduzidas no capítulo anterior) são: $J_1 = 3,5 \ kg - m^2$, $J_2 = J_3 = 2,3 \ kg{-}m^2$. Considere-se também que, no instante da colisão, a configuração do manipulador é a seguinte: $\theta_1 = 45°$ e $\theta_2 = 80°$. Que antes da colisão, as velocidades angulares das juntas são: $\dot{\theta}_1 = -20°/s$ e $\dot{\theta}_2 = -20°/s$.

Com estes valores, podemos calcular a constante K_M usando as eqs. (4-27) e (4-25). Para o exemplo aqui, resulta: $K_M = 2,2\ kg$ e a velocidade antes do impacto: $\dot{d}_{NA} = \mathbf{w}_N\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = 0,62\ m/s$. Considere-se que a constante de Hertz de contato é $K_H = 1 \times 10^5$. Logo, com estes três valores, podemos calcular a duração do impacto τ e o valor máximo da força de impacto f_{max} através das eqs. (4-36) e (4-33). O perfil da força é dado pela eqs. (4-41), (4-42) e (4-37). A fig.4.4 apresenta o resultado obtido (linha contínua, vermelha).

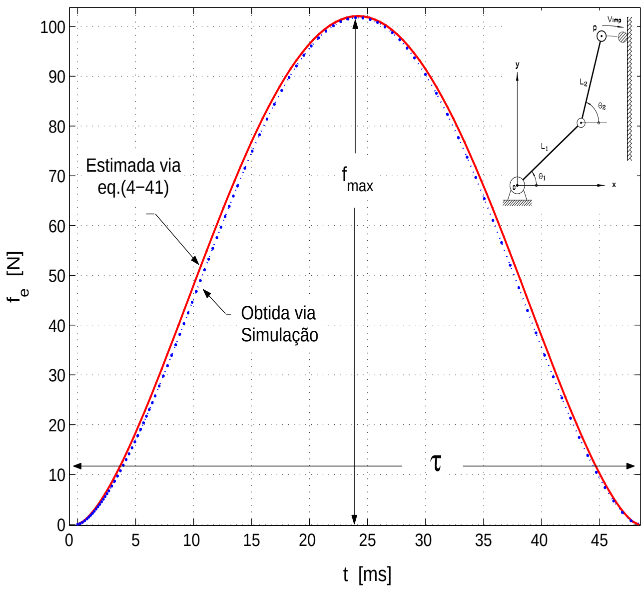

Figura 4.4: Comparação da força de impacto estimada (sem simulação, via eqs.(4-33),(4-36) e (4-41)), e a força de impacto obtida via simulação, para o caso de um manipulador robótico de dois elos.

Nesse mesmo gráfico apresenta-se também o resultado para o perfil de força obtida via simulação do manipulador robótico com uma lei de contato de Hertz (linha descontínua, azul. Observação: Cada ponto corresponde a um passo de integração). Como pode-se observar, os resultados preditos pelas equações de aproximação acima batem muito bem com os obtidos via simulação, tanto no perfil, como nos valores máximo da força e tempo de duração do contato. Isso valida o desenvolvimento aqui apresentado no qual foi feita uma extensão dos resultados da literatura, para que possam ser aplicados também a sistemas multicorpos (como o manipulador aqui estudado) e não apenas ao impacto de duas esferas com choque central.

Finalmente, também podemos deduzir que as eqs. (4-36) e (4-33) podem ser usadas para identificar o parâmetro de contato K_H a partir dos valores de f_{max}, τ, $\dot{d}_{NA}$ e K_M, logo, o método aqui apresentado pode ser uma ferramenta muito poderosa para identificar a rigidez do meio de trabalho após um impacto de um manipulador. O valor identificado de K_H poderia ser usado na estratégia de controle de força.

4.2.3
Modelo de Impacto incluindo Perdas de Energia

O modelo de impacto baseado na lei de Hertz, não considera a dissipação de energia que acontece durante o impacto. Devido a isto, um modelo mais completo que a lei de Hertz parece ser necessário. Na literatura podemos encontramos abordagens que modificam a lei de contato de Hertz para levar em conta a dissipação de energia. A seguir revisaremos alguns desses modelos.

Modelo de Impacto com Amortecimento

Uma maneira de modelar impactos com perda de energia é através do modelo de Kelvin-Voight, que pode ser pensado como um conjunto mola-amortecedor em paralelo, algo parecido ao apresentado na fig. 4.5. A deformação conjunta dos corpos em contato δ pode ser expressa em função de ε, que é a distância de separação entre os pontos em contato, da seguinte forma:

$$\delta = \begin{cases} \varepsilon \ , & \text{durante o impacto} \\ 0 \ , & \text{antes ou depois do impacto} \end{cases} \tag{4-47}$$

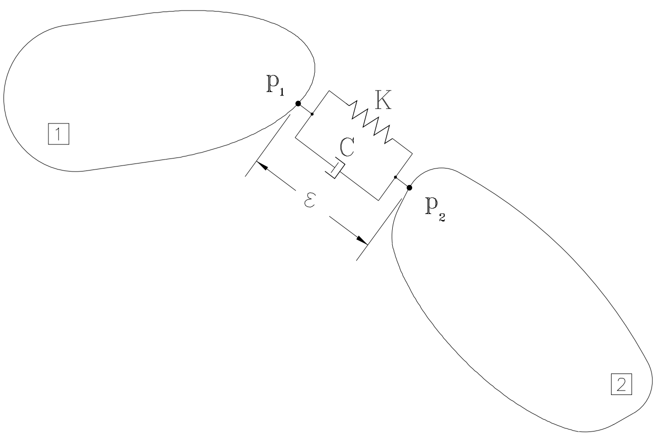

Figura 4.5: Modelo de impacto com amortecimento.

Logo, a lei de contato para o modelo de Kelvin-Voight é obtida acrescentando o termo de amortecimento na lei de Hertz da seguinte forma [85]:

$$\mathrm{f} = \mathrm{K}\ \delta^n + \mathrm{C}\ \dot{\delta} \tag{4-48}$$

Este modelo pode funcionar muito bem em alguns casos mas tem o inconveniente de conduzir a uma força de amortecimento não-nula para uma deformação relativa δ zero, e também a soma da força da mola e da força de amortecimento pode ser negativa durante a fase de restituição do impacto. Para superar essas deficiências, uma modificação do modelo da eq. (4-48) é feita da seguinte maneira [57]:

$$\mathrm{f} = \mathrm{K}\ \delta^n + \mathrm{C}(\delta)\ \dot{\delta} \tag{4-49}$$

sendo

$$\mathrm{C}(\delta) = \mu\ \delta^n \tag{4-50}$$

ou equivalentemente,

$$\mathrm{f} = \mathrm{K}\ \delta^n\ \left[\ 1 + \frac{\mu}{\mathrm{K}}\ \dot{\delta}\ \right] \tag{4-51}$$

Uma lei de impacto como a eq. (4-51) garante que a força seja nula tanto ao começo como no final do impacto. Além disso, devido à presença de $\dot{\delta}$, existirá um laço de histerese na curva f vs δ onde a área interior é a perda de energia durante o impacto. Resta por último a determinação do valor do coeficiente de amortecimento μ. Através de equações de balanço de energia, Lankahani [56][91] determinou a seguinte expressão para esse coeficiente:

$$\mu = \frac{3\ \mathrm{K}(1 - e^2)}{4\ \dot{\delta}^-} \tag{4-52}$$

sendo $\dot{\delta}^-$ a velocidade relativa entre os corpos, justamente antes do impacto acontecer e e o coeficiente de restituição o qual pode ser achado de tabelas em função das propriedades dos materiais dos corpos em contato e da velocidade relativa antes do impacto. Substituindo a eq. (4-52) em (4-51) tem-se finalmente:

$$\mathrm{f} = \mathrm{K}\ \delta^n\ \left[1 + \frac{3\ (1 - e^2)}{4}\ \frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}^-}\right] \tag{4-53}$$

A continuação são apresentados os resultados de utilizar este método na simulação do impacto de duas esferas de 1 kg cada. Na primeira simulação

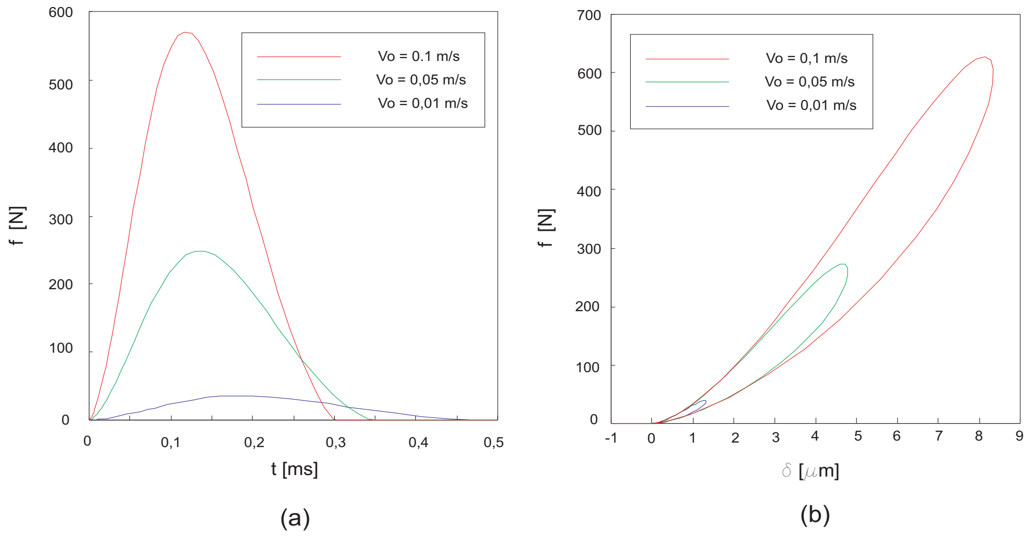

Figura 4.6: Força de impacto produzida na colisão de duas esferas usando modelo com amortecimento não-linear e para diferentes valores das velocidade de aproximação entre as esferas ($e = 0,7$, $m_1 = m_2 = 1kg$). (a) Variação da força de impacto no tempo. (b) Relação força-deformação.

foi considerado um coeficiente de restituição constante de $e = 0,7$ e a foram consideradas diferentes valores da velocidade de aproximação. Os resultados são apresentados na fig. 4.6. Podemos ver que este modelo fornece resultados coerentes, assim por exemplo, quanto maior foi a velocidade de impacto, maior foi a força de impacto, maior a perda de energia (área dentro da curva de histerese) e menor a duração da força de impacto. Logo após, uma simulação adicional foi considerada mantendo um mesmo valor para a velocidade de aproximação entre as esferas e para diferentes valores do coeficiente de restituição. Os resultados são apresentados na fig. 4.7. Também aqui podemos ver a coerência dos resultados. Quanto mais próximo de 1 for o coeficiente de restituição, as curvas tenderam mais a aquelas que seriam obtidas através de apenas a lei de Hertz, produzindo uma força de impacto simétrica e sem laço de histerese.

Lei de Hertz Modificada com Deformações Elásticas-Plásticas

O modelo do amortecimento provê um método prático de modelar impacto considerando as perdas de energia devido às deformações locais. No entanto, fisicamente essas perdas de energia não são devidas principalmente a algum mecanismo de amortecimento interno, e sim às deformações plásticas na região do contato dos corpos impactantes [27]. Neste sentido, um modelo que considera deformações plásticas é mais realista. Além disso, nesse caso, não seria necessário conhecer o coeficiente de restituição de an-

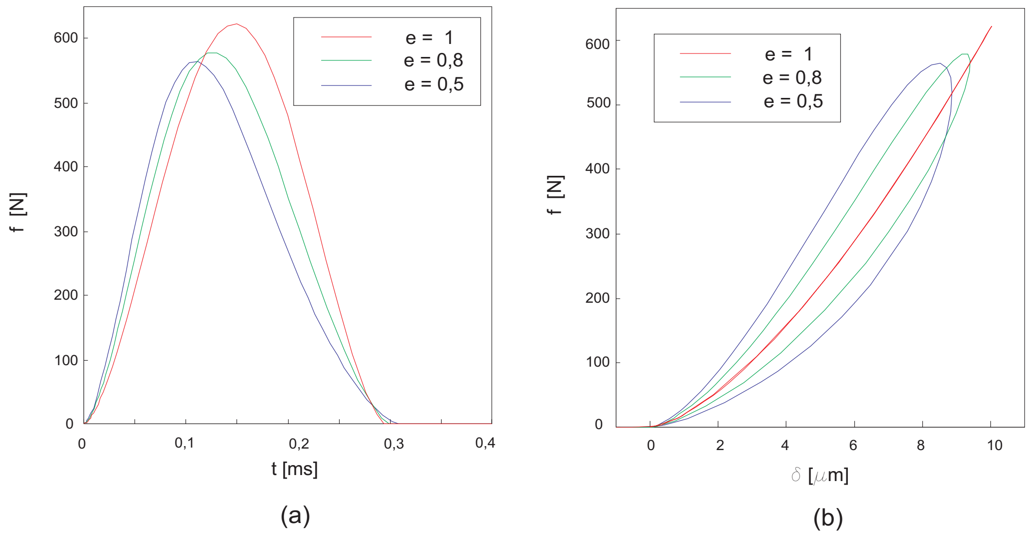

Figura 4.7: Força de impacto produzida na colisão de duas esferas usando modelo com amortecimento não-linear e para diferentes valores do coeficientes de restituição ($v = 0,1m/s$, $m_1 = m_2 = 1kg$). (a) Variação da força de impacto no tempo. (b) Relação força-deformação.

temão pois este será um resultado do modelo ao invés de um parâmetro de entrada como no caso do modelo de amortecimento anteriormente revisado [101].

Para isto é suposto que o impacto acontece em três fases. A primeira fase é o carregamento elástico onde o contato é suposto Hertziano. A segunda fase é o carregamento elástico-plástico onde o ponto de escoamento do material é excedido mas a deformação é contida pela expansão elástica do meio ao redor da região de contato [49]. Finalmente a terceira fase é a descarga elástica (restituição), onde o contato é suposto Hertziano. A fig. 4.8 apresenta graficamente essas três fases do impacto.

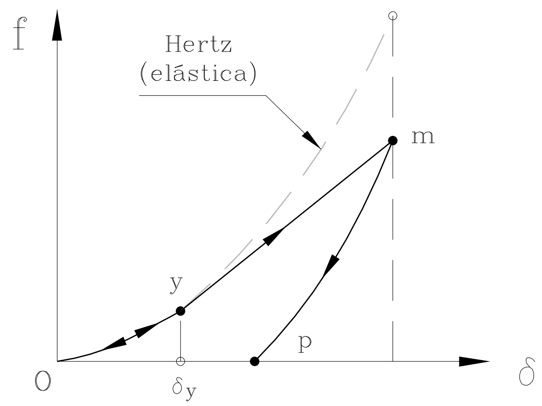

Figura 4.8: Lei de Hertz modificada para considerar deformações plásticas.

As equações correspondentes a essas fases são as seguintes [101]:

Fase I: *Carregamento Elástico* $(O \leftrightarrow y)$

$$\mathrm{f}(\delta) = \mathrm{K}_H \ \delta^{1.5} \ , \qquad 0 \leq \delta \leq \delta_y \tag{4-54}$$

Fase II: *Carregamento Elástico-Plástico* $(y \rightarrow m)$

$$\mathrm{f}(\delta) = \mathrm{K}_H \ {\delta_y}^{1.5} + \mathrm{K}_y \ (\delta - \delta_y) \ , \qquad \delta_y \leq \delta \leq \delta_m \tag{4-55}$$

Fase III: *Descarregamento Elástico - Restituição* $(m \rightarrow p)$

$$\mathrm{f}(\delta) = \mathrm{K}_H \ {\delta_y}^{1.5} + \mathrm{K}_y \ (\delta_m - \delta_y) + \mathrm{K}_H \ (\delta^{1.5} - {\delta_m}^{1.5}) \tag{4-56}$$

onde

$$K_y = \left[\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \delta} \right]_{\delta = \delta_y} = 1.5 \ K_H \ {\delta_y}^{0.5} \tag{4-57}$$

Este método foi testado no impacto de duas esferas de aço ($S_Y = 253 \times 10^6$ N/m, $E = 210 \times 10^9$ N/m) de 1 kg cada. A fig. 4.9 apresenta os resultados obtidos na simulação.

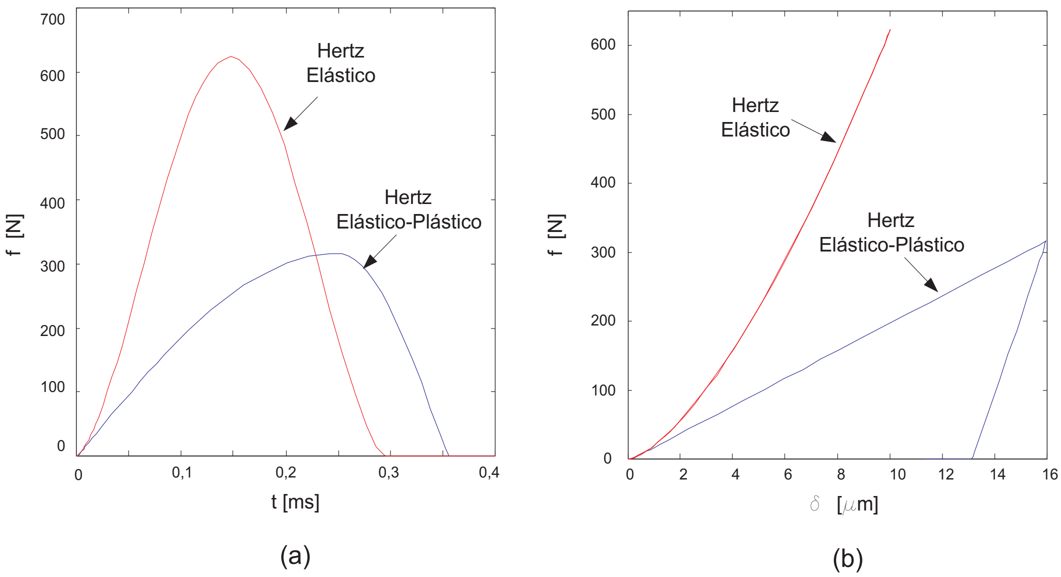

Figura 4.9: Força de impacto produzida na colisão de duas esferas usando modelo de Hertz com deformações elásticas e elásticas-plásticas ($v = 0,1m/s$, $m_1 = m_2 = 1kg$). (a) Variação da força de impacto no tempo. (b) Relação força-deformação.

4.3
Aplicação: Manipulador Flexível com Impacto

O impacto de corpos totalmente flexíveis (localmente e globalmente) requer atenção especial devido a que nesse tipo de problema acontecem alguns fenômenos que não acontecem nem no impacto de corpos rígidos nem no impacto de corpos deformáveis apenas localmente. Assim por exemplo, durante o impacto de estruturas flexíveis existe uma transferência de energia à estrutura em forma de vibrações mecânicas as quais podem influenciar consideravelmente a resposta dinâmica do sistema após o impacto e inclusive, a vibração mecânica induzida pode mudar os valores da força e duração do impacto. Uma outra característica do impacto de corpos flexíveis é a existência de múltiplos impactos que é devido à excitação dos modos flexíveis de alta freqüência. De fato, o que é percebido como um impacto simples, na verdade é uma sucessão de impactos.

A modelagem deste tipo impacto pode ser feita combinando as equações de movimento das estruturas flexíveis contínuas com a lei de Hertz. Esta modelagem conduz a equações que em geral são equações integrais e portanto devem ser resolvidas através de métodos numéricos especiais [116]. No entanto, aqui será considerada uma abordagem diferente que evitará a solução de tais equações integrais. Assim, a modelagem do impacto em estruturas totalmente flexíveis pode ser solucionado numericamente durante a simulação. Um algoritmo simples para detecção do primeiro contato do impacto será necessário.

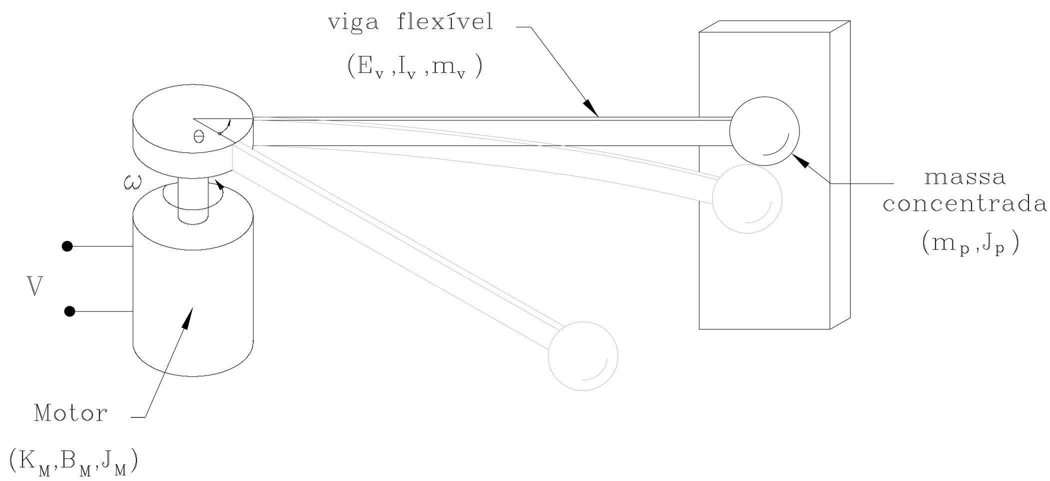

Figura 4.10: Braço flexível de robô sujeito a impacto.

Considere-se como exemplo um manipulador robótico flexível de apenas um membro, sujeito a um impacto devido à aproximação do manipulador a uma superfície rígida (ver fig.4.10 e fig.4.11). Através deste exemplo, serão observadas características importantes do fenômeno de impacto em estruturas flexíveis.

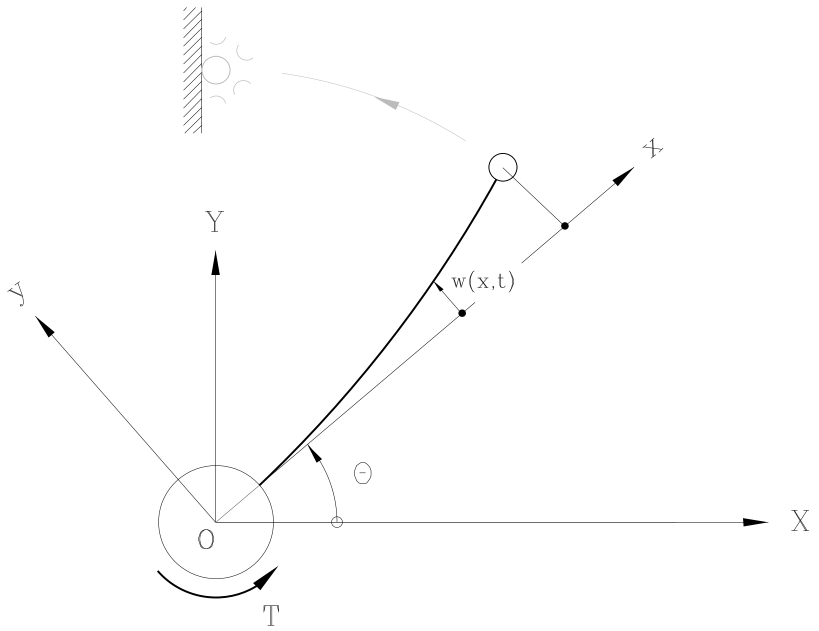

Figura 4.11: Sistemas de referências usados na modelagem do braço flexível de robô.

A equação de movimento deste manipulador pode ser obtida fazendo as simplificações correspondentes na equação de movimento do manipulador do capítulo anterior, eq. (3-73).

Tabela 4.1: Parâmetros usados na simulação do impacto de um manipulador robótico flexível.

Variável	Descrição	Valor
L_b	comprimento da viga flexível	$300\ mm$
EI_b	rigidez à flexão da viga	$11,25\ kg-N-m$
A_b	área da seção da viga flexível	$75\ mm^2$
ρ_b	densidade da viga	$7860\ kg/m^3$
m_b	massa por unidade de comprimento da viga	$0,59\ kg-N-m$
ξ	fator de amortecimento modal na viga (todos os modos)	$0,001$
M_t	massa na ponta	$0,031\ kg$
J_e	inércia do motor	$5\ kg-m^2$
K_e	constante do motor elétrico	$10^{-2}\ N-m/A$
B_e	atrito viscoso no eixo motriz	$0\ N-m-s/rad$

Os valores numéricos dos parâmetros usados na simulação estão na tabela 4.1. Como condição inicial o sistema foi considerado totalmente em repouso e na posição $\theta = 45°$ (ver fig. 4.11). O sistema foi então acionado através de um pulso retangular de torque no eixo do motor de valor $0,5\ N - m$, atuando apenas durante os primeiros 0,1 segundos. A força de impacto foi calculada de maneira on-line a cada passo de integração. É importante fazer notar aqui que no programa foi necessário usar um algoritmo especial para poder capturar o começo de cada impacto com uma boa precisão e detectar prováveis múltiplos impactos. Este algoritmo é descrito brevemente a continuação: integrar as equações diferenciais com um passo Δt razoável até detectar o contato (deformação $\delta^- = 0$ e $\delta^+ > 0$). Neste ponto o algoritmo faz que o integrador regresse até o passo anterior e refaça os cálculos mas com um novo passo diminuído. Se com este novo passo a nova deformação é ainda maior do que uma tolerância pré-estabelecida (se $\delta^+ > tol$), o integrador terá que voltar novamente e tentar com um passo ainda menor e assim sucessivamente até conseguir uma valor menor do que a tolerância. O procedimento para detectar o ponto no qual o contato acaba é análogo. Paralelamente, e com a finalidade de poder comparar os resultados obtidos, um manipulador rígido foi simulado. Os resultados da simulação são apresentados nas figs.4.12-4.18.

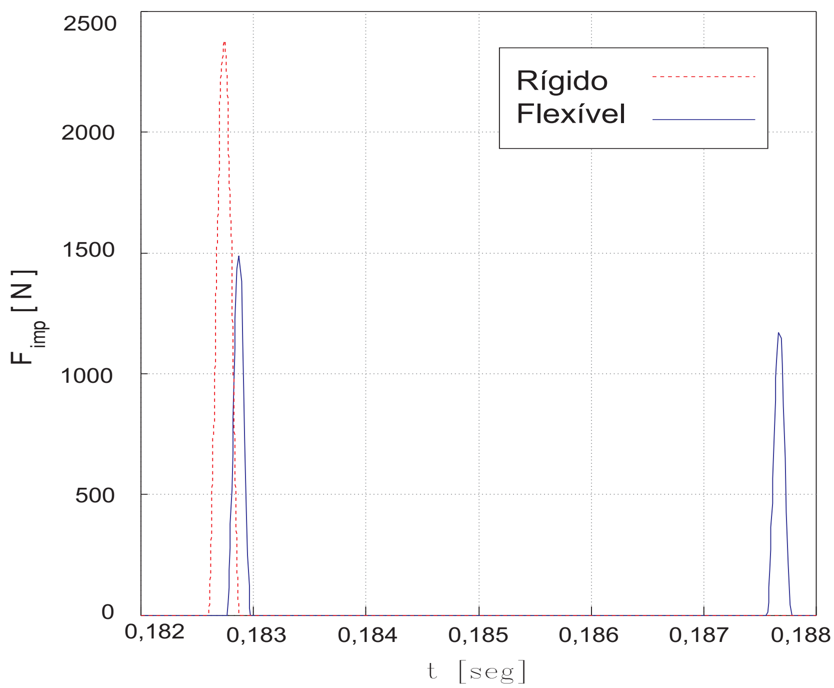

Figura 4.12: Forças de impacto no braço de robô.

Como pode-se observar na fig. 4.12, o programa detectou apenas um impacto no caso de manipulador com membro rígido e dois impactos no

Tabela 4.2: Valores da força de impacto para o caso do impacto de manipulador robótico rígido.

No.	Força Máxima	Duração	Começo
1	2376 N	281μs	$0,1826$ seg

Tabela 4.3: Valores da força de impacto para o caso do impacto de um manipulador robótico flexível.

No.	Força Máxima	Duração	Começo
1	1486 N	209μs	$0,1828$ seg
2	1172 N	231μs	$0,1876$ seg

caso de membro flexível. A presença de um sub-impacto no caso flexível é devido às excitações dos modos flexíveis. Os valores máximos e as respectivas durações são apresentados na tabela 4.2 e 4.3. Estes resultados mostram que a flexibilidade do manipulador diminue a severidade do impacto.

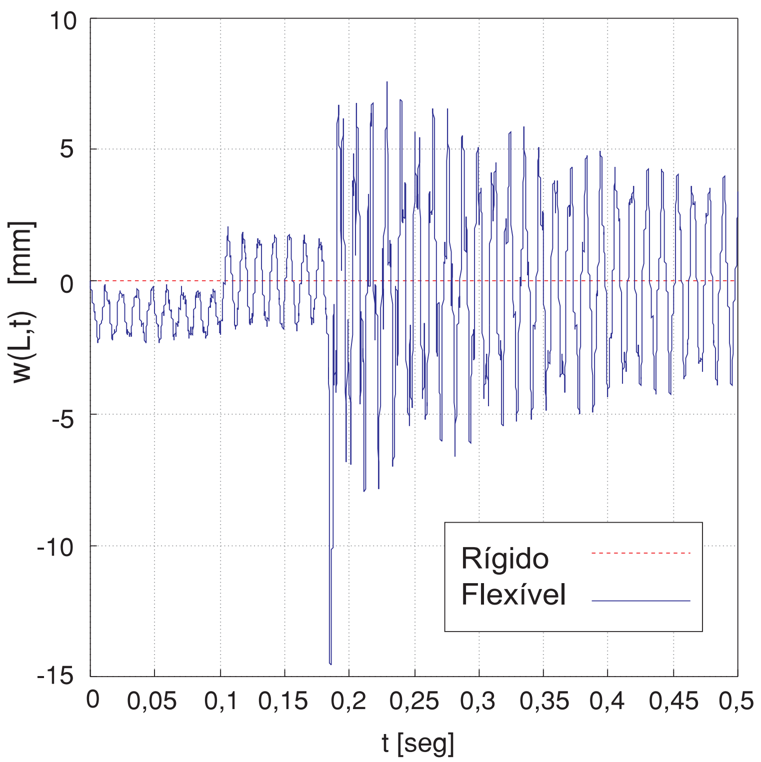

Figura 4.13: Deflexão da ponta do braço robô no sistema de coordenadas relativas.

Na fig. 4.13 é apresentado o deslocamento da ponta do braço de robô medido no sistema relativo $x-y$. Desta figura podemos observar que existem vibrações induzidas na parte flexível da estrutura devido ao acionamento relativamente súbito do manipulador até os $0,1$ seg. No momento em que esse acionamento acaba as vibrações aumentam mais um pouco, mas agora a vibração é ao redor da posição de equilíbrio. No entanto, mesmo assim estas vibrações são pequenas quando comparadas com aquelas induzidas depois do primeiro impacto (em $t = 0,1828$ seg).

Já na figura 4.14 é apresentada a velocidade absoluta do impactor mas apenas na direção X (direção normal ao plano de impacto). Durante a fase prévia ao impacto observamos novamente no caso flexível pequenas vibrações induzidas pelo acionamento súbito do manipulador, mas a tendência é similar ao sistema rígido de forma que no instante de impacto ambos os sistemas chegam aproximadamente com a mesma velocidade relativa de $1,899$ m/s. Em ambos os casos, após o impacto, a velocidade é revertida. Isto é devido a que o impacto foi modelado como elástico o que equivale a um coeficiente de restituição normal de 1. O mesmo ocorre para o segundo impacto que aparece apenas no caso flexível.

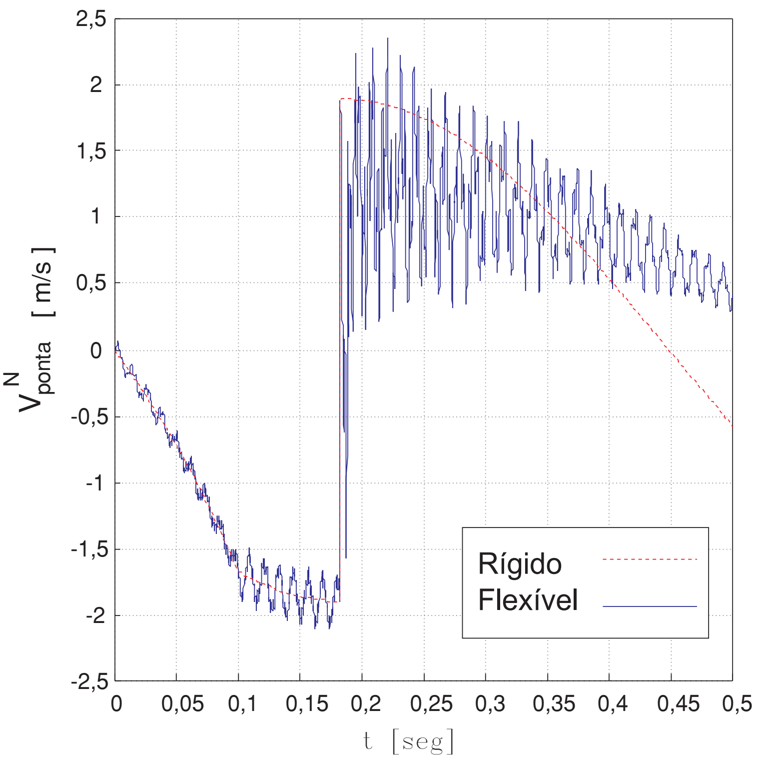

Figura 4.14: Velocidade da ponta do braço normal ao plano de impacto.

O deslocamento angular do eixo θ é apresentado na figura 4.15. Antes do impacto, em termos gerais, a resposta é muito similar ao caso rígido, mas depois do impacto o manipulador rígido consegue deslocar-se angularmente muito mais no mesmo tempo. Acredito que isto seja devido a que durante o impacto do manipulador flexível, parte da energia rotacional do sistema é transferida em forma de vibração à viga. Isto pode ser verificado também da figura 4.16 que mostra a trajetória descrita pela ponta do manipulador nos dois casos considerados. Como pode-se ver o manipulador rígido ressalta e alcança um maior deslocamento angular. A figura 4.17 que apresenta a velocidade angular do eixo também confirma esse fato. A vibração presente neste sinal é devido ao forte acoplamento existente entre a rotação angular e a vibração da viga flexível.

Finalmente, na figura 4.18 é apresentado em detalhe a troca interna de energia entre os modos de vibração que acontecem em cada um dos impactos para o caso do manipulador flexível. Como pode ver-se daqui, inicialmente, i.e. antes do primeiro impacto, quase toda a energia do manipulador está concentrada no "modo" de corpo rígido e logo após do primeiro impacto grande parte da sua energia é transferida em forma de vibrações aos modos flexíveis. O primeiro modo fica com a maior energia logo o segundo modo, terceiro e assim por diante. O "modo" de corpo rígido fica quase sem energia mas a excitação do primeiro modo provoca um segundo impacto (micro-impacto) no qual outra vez acontece a troca de energia. Esse último gráfico resulta particularmente interessante no sentido de que apresenta o fenômeno da troca interna de energia durante o impacto de um corpo flexível.

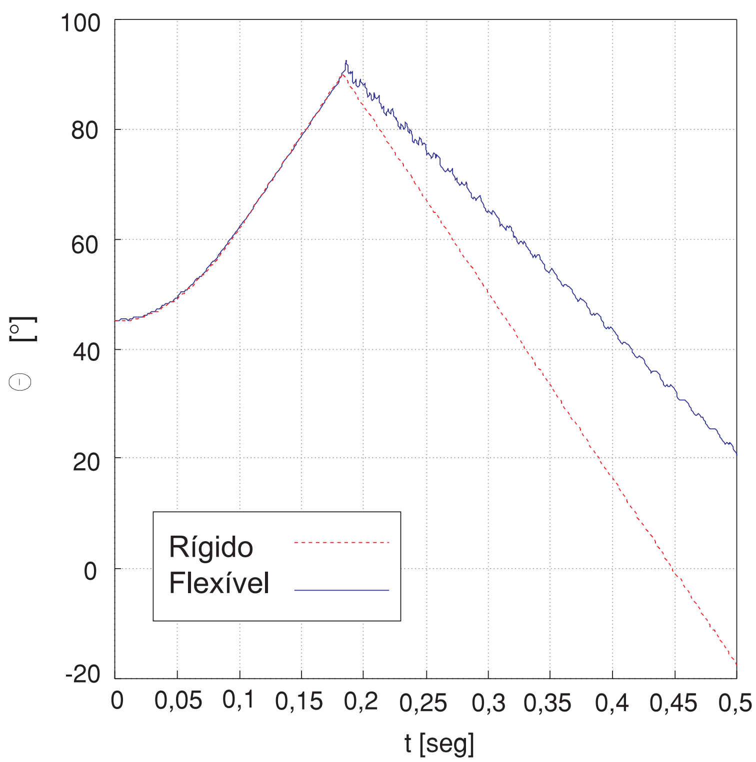

Figura 4.15: Deslocamento angular do eixo.

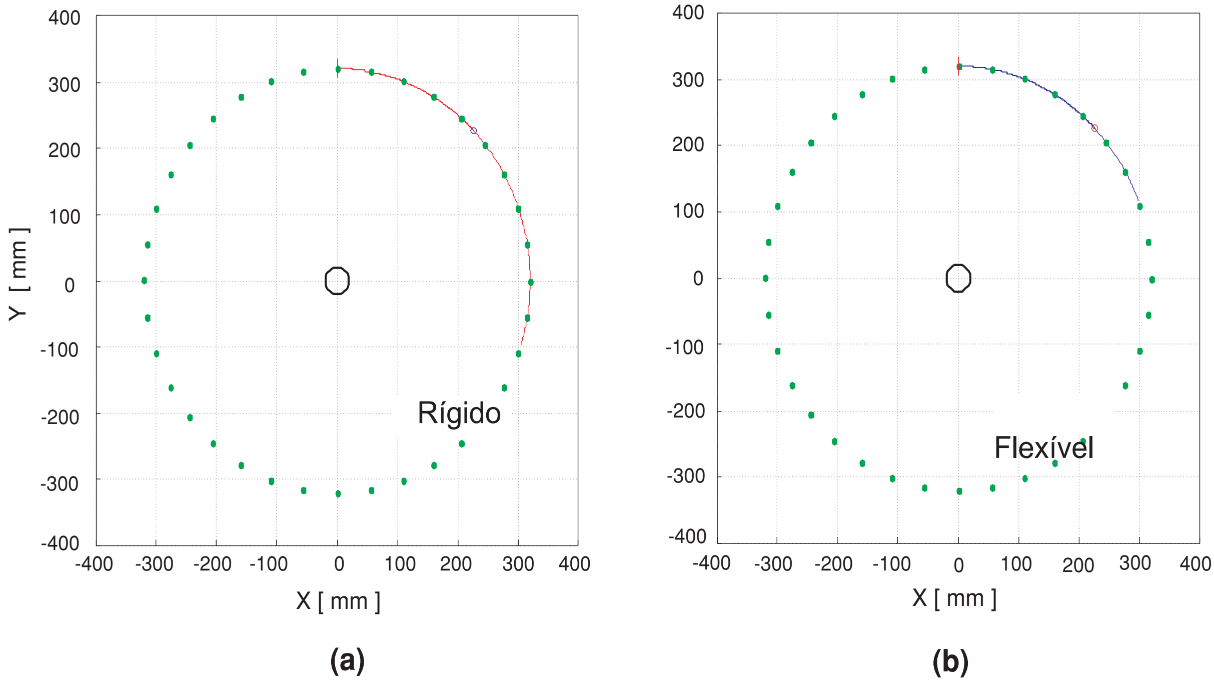

Figura 4.16: Trajetória descrita pela ponta do braço de robô.

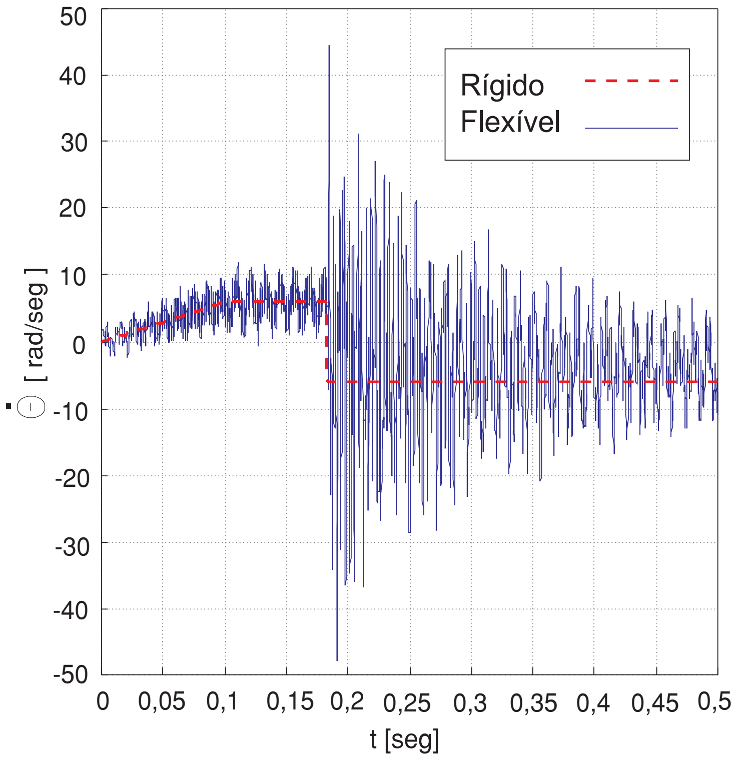

Figura 4.17: Velocidade angular do eixo.

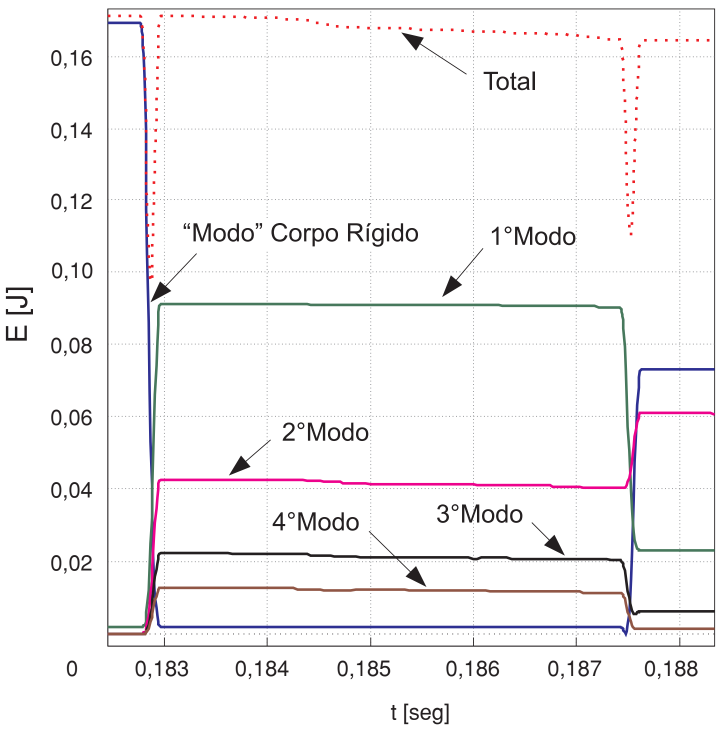

Figura 4.18: Redistribuição da energia em cada modo de vibração devido aos impactos do manipulador flexível.