2
Análise do Controle de Força durante a Transição de Contato

Durante a transição de contato em manipuladores robóticos é tipicamente o controlador de força quem atua sobre o sistema. Em geral, estes controladores não estão preparados para lidar nem com os impactos nem com as perdas de contato que acontecem durante a fase de pré-transição, mas mesmo assim, são usados na prática. Obviamente, espera-se que esta fase seja ultrapassada e que pouco depois o manipulador se encontre exercendo forças de maneira estável e nos valores desejados. Isso normalmente acontece mas o desempenho durante a fase crítica pode ser muito deficiente. Devido a isso, percebe-se a importância e necessidade de estudar a dinâmica do processo de transição sob controladores de força para assim poder identificar os fatores que influenciam o desempenho do controlador, mais ainda quando na literatura não existe uma análise deste tipo. Neste capítulo, essa análise é feita usando modelos simplificados de um e dois graus de liberdade que representam um manipulador rígido e um manipulador flexível respectivamente. Esses modelos capturam a essência do problema e simplificam a análise (que em grande parte pode ser feita de maneira analítica) além de facilitar o entendimento dos resultados dessa tese. Já nos dois próximos capítulos serão desenvolvidos um modelo mais detalhado para um manipulador robótico incluindo flexibilidade e modelos de contato mais complexos que os usados nesse capítulo.

2.1
Modelo Dinâmico de Manipuladores Rígidos

A configuração de um manipulador rígido com n graus de liberdade fica determinada por um vetor coordenadas generalizadas $\mathbf{q} \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$. Este vetor está composto pelas posições das juntas (ângulos, no caso de juntas rotativas, e posições, no caso de juntas lineares). Por isso, o conjunto Θ é chamado de espaço das juntas e $\mathbf{q}$ é chamado de vetor de coordenadas generalizadas no espaço das juntas. As coordenadas da posição de qualquer ponto do manipulador podem ser determinadas usando o vetor **q**. Em particular, o vetor de posição da extremidade do manipulador, que é composto no caso mais geral por três coordenadas cartesianas e três ângulos de Euler, denotado aqui por **x**, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \tag{2-1}$$

A transformação $\mathbf{R} : \Theta \rightarrow X$ é geralmente não-linear e $X \subset \mathbb{R}^n$ [1]. O conjunto X é denominado espaço de trabalho ou espaço operacional. Derivando a eq. (2-1) em relação ao tempo, obtém-se uma relação para a velocidade da extremidade:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ \dot{\mathbf{q}} \tag{2-2}$$

onde $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é conhecido como Jacobiano do manipulador e é definido pela seguinte expressão:

$$\mathbf{J} \doteq \partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{q} \tag{2-3}$$

Derivando a eq.(2-2) em relação ao tempo, podemos obter a seguinte relação cinemática adicional:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\ \dot{\mathbf{q}} \tag{2-4}$$

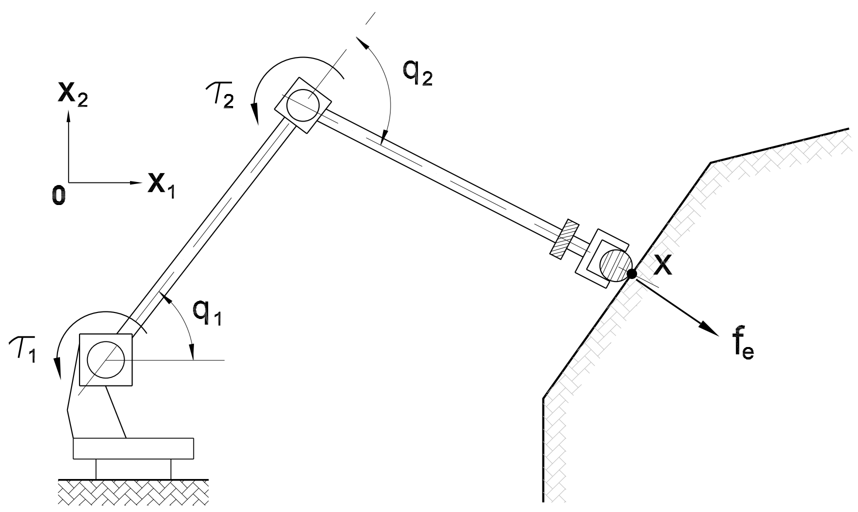


Figura 2.1: Manipulador robótico em contato com o meio de trabalho.

[1]No caso de manipuladores não redundantes.

A energia cinética do manipulador pode sempre ser expressa pela seguinte forma quadrática simétrica e positiva definida [88]:

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{q}}^t\,\mathbf{M_q}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j \tag{2-5}$$

onde $\mathbf{M_q} = [m_{ij}]$ é a matriz de inércia do robô. A equação de movimento de manipuladores rígidos pode ser obtida através das equações de Lagrange [43]. Definindo a função Lagrangiano:

$$L = T - V \tag{2-6}$$

onde V representa a energia potencial do manipulador rígido a qual é devida apenas à gravidade, mas se consideramos que este se movimenta em um plano horizontal podemos considerar $V = 0$. As equações de Lagrange são:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1\ldots n \tag{2-7}$$

onde Q_k representa as forças generalizadas, não-conservativas, que no caso dos manipuladores são as forças dos atuadores das juntas e a força de interação na extremidade (fig. 2.1). Substituindo o Lagrangiano em (2-7) obtém-se a equação de movimento para um manipulador rígido [4]:

$$\mathbf{M_q}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B_q}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C_q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^t(\mathbf{q})\,\mathbf{f_e} = \boldsymbol{\tau}_\mathbf{u} \tag{2-8}$$

sendo $\mathbf{B_q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz de amortecimento viscoso nas juntas, que é diagonal e positiva semi-definida, $\boldsymbol{\tau}_\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torques de controle aplicados pelos atuadores nas juntas do manipulador, $\mathbf{f_e} \in \mathbb{R}^n$ é a força que o manipulador faz sobre o meio de trabalho quando estes estão em contato. O termo $\mathbf{C_q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,\dot{\mathbf{q}}$ representa o vetor de forças centrífugas e de Coriolis e os elementos c_{ij} da matriz $\mathbf{C_q}$ são dados pela seguinte expressão [58]:

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i}\right\}\dot{q}_k\,, \qquad i,j = 1\ldots n \tag{2-9}$$

A equação de movimento apresentada na eq.(2-8) está em termos do vetor de coordenadas $\mathbf{q}$ e portanto é a equação de movimento no espaço das juntas. Usando as eqs.(2-2) e (2-4), pode-se reescrever essa equação no espaço de trabalho (ou seja, em função da variável $\mathbf{x}$):

$$\mathbf{M_x}(\mathbf{x})\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B_x}(\mathbf{x})\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C_x}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f_e} = \mathbf{f_u} \tag{2-10}$$

onde $\mathbf{M_x} = \mathbf{J}^{-t}\mathbf{M_q}\mathbf{J}^{-1}$ é a matriz de inércia no espaço do trabalho, $\mathbf{B_x} = \mathbf{J}^{-t}\mathbf{B_q}\mathbf{J}^{-1}$, $\mathbf{C_x} = \mathbf{J}^{-t}\mathbf{C_q}\mathbf{J}^{-1} - \mathbf{M_x}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}$, $\mathbf{f_e}$ é a força de interação do manipulador sobre o meio de trabalho (veja-se fig. 2.1) e $\mathbf{f_u}$ é a força de controle no espaço de trabalho e é definida através da seguinte relação:

$$\boldsymbol{\tau}_\mathbf{u} = \mathbf{J}^t\ \mathbf{f_u} \tag{2-11}$$

ou

$$\mathbf{f_u} = \mathbf{J}^{-t}\ \boldsymbol{\tau}_\mathbf{u} \tag{2-12}$$

O termo não-linear de forças centrípetas e de Coriolis pode ser compensado ativamente ou simplesmente desprezado quando o manipulador encontra-se em contato com o meio de trabalho [2]. Também, durante a fase de contato, as matrizes $\mathbf{M_x}$ e $\mathbf{B_x}$ não experimentam grandes variações no seu valor e portanto podem ser consideradas constantes [81]. Assim, sob essas considerações, a equação da dinâmica do manipulador da eq.(2-10) é a seguinte:

$$\mathbf{M}\ \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\ \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f_e} = \mathbf{f_u} \tag{2-13}$$

com

$$\mathbf{M} = \mathbf{M_x}(\mathbf{x}^*) \tag{2-14}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B_x}(\mathbf{x}^*) \tag{2-15}$$

$\mathbf{x}^*$ a posição da extremidade do manipulador durante o contato, que é considerada constante para propósitos do cálculo das matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$. Adicionalmente, quando o manipulador tem apenas um grau de liberdade a eq.(2-13) resulta escalar:

$$\mathrm{M}\ \ddot{x} + \mathrm{B}\ \dot{x} + \mathrm{f_e} = \mathrm{f_u} \tag{2-16}$$

Uma representação gráfica para a eq. (2-16) é apresentada na fig.2.2.

---

[2] Pode-se demonstrar que $\|\mathbf{C_q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|$, $k_c > 0$ [3], então quando $\dot{\mathbf{q}}$ é pequeno, ou seja $\|\dot{\mathbf{q}}\| \to 0 \Rightarrow \|\mathbf{C_q}\dot{\mathbf{q}}\| \approx k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \to 0$.

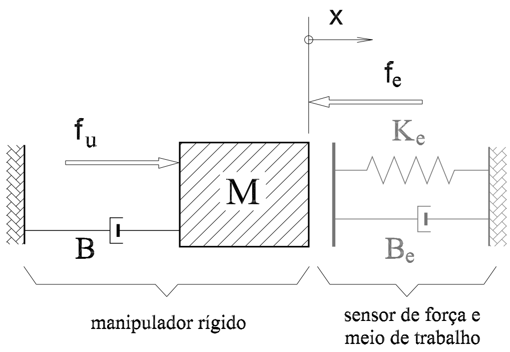


Figura 2.2: **Modelo Simplificado 1.** Manipulador rígido de um grau de liberdade fazendo contato com um meio de trabalho elástico (a força f_e é conseqüência do contato com o meio).

2.2
Modelagem Simplificada de Manipuladores Flexíveis

Todos os manipuladores são flexíveis em certo grau e mais ainda quando estes estão sujeitos a forças de contato e impacto já que estas forças tendem a excitar os modos flexíveis do manipulador. Para estudar a influência flexibilidade dos manipuladores durante a período de transição de contato usaremos um modelo simplificado dos manipuladores flexíveis. A fig.2.3 apresenta dois manipuladores elásticos em operação tal que a flexibilidade não possa ser ignorada.

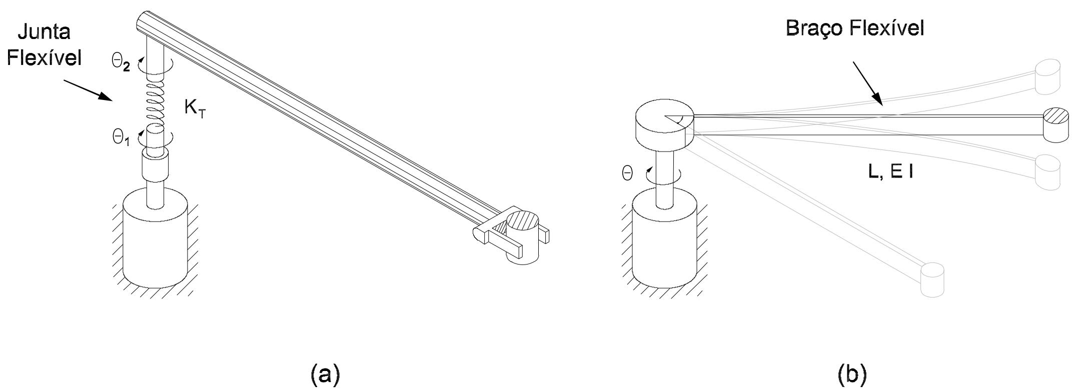


Figura 2.3: Manipuladores robóticos flexíveis. (a) Devido a uma junta flexível. (b) Devido à elasticidade no braço do manipulador.

O elemento flexível no manipulador da fig.2.3-(a) está na transmissão. Manipuladores elásticos deste tipo são mais freqüentes em aplicações industriais onde transmissões flexíveis (como por exemplo as transmissões do tipo harmônico [53]) são implementadas nas juntas. Já no manipulador da fig.2.3-(b) temos uma transmissão rígida mas um braço flexível. Este tipo manipulador flexível é mais freqüente em aplicações aeroespaciais pois nelas os braços são longos e além disso, o peso é um fator importante a ser levado em conta no projeto e construção dos manipuladores. No entanto, manipuladores com braços flexíveis também podem ser encontrados em aplicações industriais, já que a redução de peso com a finalidade de reduzir a potência de acionamento ou aumentar a velocidade de operação é um fator que leva a projetar manipuladores cada vez mais leves com a conseqüência de se ter um aumento do grau de flexibilidade dos braços. A continuação será deduzida a equação da dinâmica para estes dois tipos de manipuladores.

2.2.1 Manipulador com Junta Flexível

Modelando a transmissão flexível como uma mola torsional elástica linear e usando as equações de Euler, podemos escrever as equação de movimento do manipulador da fig.2.3-(a) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathrm{J_a}\, \ddot{\theta}_1 + \mathrm{B_a}\, \dot{\theta}_1 + \mathrm{K_T}\, (\theta_1 - \theta_2) &= \tau_\mathrm{u} \\ \mathrm{J_b}\, \ddot{\theta}_2 + \mathrm{K_T}\, (\theta_2 - \theta_1) &= -\tau_\mathrm{e} \end{aligned} \tag{2-17}$$

$\mathrm{J_a}$ e $\mathrm{B_a}$ o momento de inércia e o atrito viscoso da junta de acionamento, respectivamente, $\mathrm{J_b}$ é o momento de inércia do braço em relação ao centro da junta, $\mathrm{K_T}$ a rigidez torsional da junta, τ_u é o torque de acionamento do motor-atuador na junta e τ_e é o torque devido à força na extremidade exercida pelo manipulador sobre o meio com o qual faz contato, em relação ao centro da junta, ou seja, $\tau_\mathrm{e} = \mathrm{L}\ \mathrm{f_e}$, sendo $\mathrm{f_e}$ a força da extremidade e L o comprimento do braço.

2.2.2 Manipulador com Braço Flexível

A dedução da equação de movimento para o manipulador com braço flexível representado na fig.2.3-(b) será baseada na fig.2.4 e sob a hipótese de pequenos deslocamentos angulares (valores pequenos de θ) e pequena deformação do braço flexível (valores pequenos de δ). Estas hipóteses são válidas sobretudo quando o manipulador está restringido pelo meio de trabalho[3].

[3]Uma modelagem mais detalhada será feita no capítulo 3

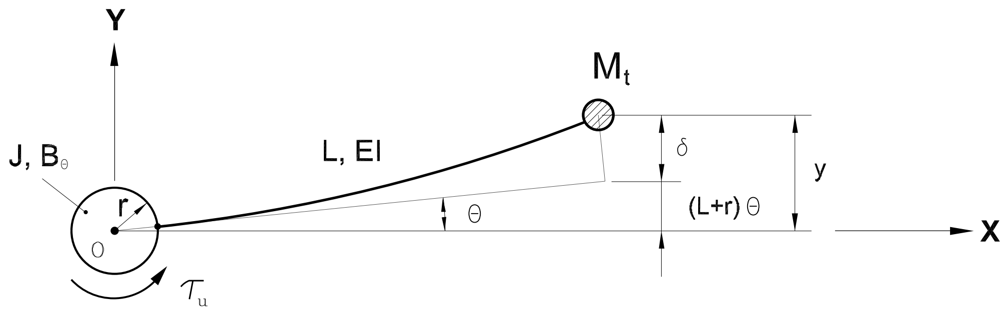


Figura 2.4: Manipulador robótico com braço flexível.

Considera-se também que a massa do braço é desprezível ou que ela foi adicionada à inércia do rotor e/ou massa da extremidade. Sob estas hipóteses, usando as equações de Newton e Euler, podemos escrever as equações de movimento tanto para o rotor como para a massa da extremidade:

$$\begin{aligned} \mathrm{J}\ \ddot{\theta} + \mathrm{B}_\theta\ \dot{\theta} &= \mathrm{K_b}\ \delta\ (\mathrm{L}+\mathrm{r}) + \tau_\mathrm{u} \\ \mathrm{M_t}\ \ddot{y} &= -\mathrm{K_b}\ \delta - \mathrm{f_e} \end{aligned} \tag{2-18}$$

J e B_θ o momento de inércia de massa e o atrito viscoso do rotor, respectivamente, $\mathrm{m_t}$ a massa da extremidade, τ_u é o torque de acionamento do atuador na junta e $\mathrm{f_e}$ é a força na extremidade exercida pelo manipulador sobre o meio com o qual faz contato. A constante elástica $\mathrm{K_b}$ representa a constante elástica do braço flexível o qual pode ser modelado como uma viga flexível e portanto podemos determinar esta constante elástica através da seguinte equação [7]:

$$\mathrm{K_b} = \frac{3\ \mathrm{EI}}{\mathrm{L}^3} \tag{2-19}$$

sendo L o comprimento do braço flexível e EI a rigidez do braço (representado pelo produto do módulo de Young do material e o momento de inércia da seção transversal). Considerando a seguinte relação geométrica:

$$y = (\mathrm{L}+\mathrm{r})\ \theta + \delta \tag{2-20}$$

e as seguintes variáveis:

$$x_1 \doteq (\mathrm{L}+\mathrm{r})\ \theta \tag{2-21}$$

$$x_2 \doteq y \tag{2-22}$$

as eqs.(2-18) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{J}}{(\mathrm{L}+\mathrm{r})^2}\,\ddot{x}_1 + \frac{\mathrm{B}_\theta}{(\mathrm{L}+\mathrm{r})^2}\,\dot{x}_1 + \mathrm{K_b}\,(x_1 - x_2) &= \frac{\tau_\mathrm{u}}{\mathrm{L}+\mathrm{r}} \\ \mathrm{M_t}\,\ddot{x}_2 + \mathrm{K_b}\,(x_2 - x_1) &= -\mathrm{f_e}\end{aligned} \tag{2-23}$$

Examinando as eqs.(2-17) e (2-23), podemos ver que ambos os dois tipos de manipuladores flexíveis da fig.2.3 podem ser representados de uma maneira geral pela seguinte equação de movimento:

$$\mathrm{M_1}\,\ddot{x}_1 + \mathrm{B_1}\,\dot{x}_1 + \mathrm{B_m}\,(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mathrm{K_m}\,(x_1 - x_2) = \mathrm{f_u} \tag{2-24}$$

$$\mathrm{M_2}\,\ddot{x}_2 + \mathrm{B_m}\,(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \mathrm{K_m}\,(x_2 - x_1) + \mathrm{f_e} = 0 \tag{2-25}$$

O termo $\mathrm{B_m}$ foi acrescentado para representar o atrito que pudesse existir devido ao deslocamento angular, no caso da junta flexível, e o amortecimento estrutural que pudesse existir, no caso do braço flexível.

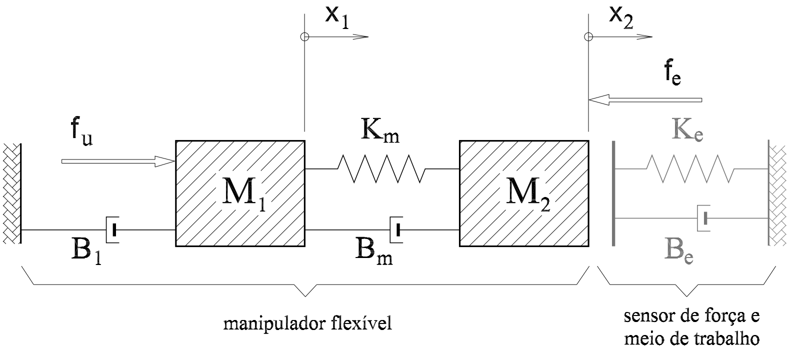


Figura 2.5: **Modelo Simplificado 2.** Manipulador robótico flexível fazendo contato com um meio de trabalho elástico (a força $\mathrm{f_e}$ é conseqüência do contato com o meio).

Podemos escrever a eq.(2-25) também na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{M_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{B_1}+\mathrm{B_m} & -\mathrm{B_m} \\ -\mathrm{B_m} & \mathrm{B_m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \tag{2-26}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K_m} & -\mathrm{K_m} \\ -\mathrm{K_m} & \mathrm{K_m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{f_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{f_u} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uma representação gráfica para esta equação é apresentada na fig.2.5. Nesta figura, $\mathrm{K_m}$ e $\mathrm{K_e}$ representam a rigidez do manipulador e do meio de trabalho, respectivamente. $\mathrm{M_1}$ e $\mathrm{M_2}$ representam a inércia do braço do manipulador incluindo a junta e a inércia ferramenta de trabalho da extremidade, respectivamente. $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_m}$ e $\mathrm{B_e}$ são os coeficientes de amortecimento da junta, parte flexível e meio de trabalho.

2.3 Controle de Força

Como já foi mencionado antes, a execução de tarefas em robótica não somente inclui o movimento da extremidade do manipulador através de uma trajetória específica desejada, mas também a interação do manipulador com um meio de trabalho. Durante a execução de tarefas do segundo tipo, altos valores de forças de contato são em geral indesejáveis já que estas podem causar dano estrutural tanto no manipulador como no meio que se faz contato. Por outro lado, valores de forças de contato abaixo de certo limite são também indesejadas pois isto pode evitar a que execução da tarefa seja satisfatória ou causar que o contato seja perdido diante de algum distúrbio externo. Portanto, pode-se deduzir que durante a interação é necessária uma estratégia para controlar a força de contato.

Talvez a primeira estratégia que podemos imaginar é continuar usando um controle de posição da extremidade durante a interação do manipulador com o meio e assim desta maneira controlar implicitamente o valor das forças de contato. No entanto, isto requereria que a trajetória da extremidade do manipulador fosse planejada com altíssima precisão. Além disso, o sistema de controle deveria garantir que o erro de posicionamento da extremidade fosse o menor possível ao longo da trajetória planejada. Seria necessário então se ter um modelo detalhado de ambos, do manipulador (cinemática e dinâmica) e do meio de trabalho (características mecânicas e geometria). No caso de manipuladores rígidos, o modelo pode ser conhecido com precisão suficiente, mas na prática, uma descrição detalhada do meio seria difícil de se ter. A ocorrência inevitável de erros de planejamento poderia fazer que a trajetória de referência especificada não fosse mais a adequada para a execução satisfatória da tarefa. Além disso, já que o manipulador estaria governado por algoritmos baseados somente em posição, qualquer desvio da trajetória real em relação à trajetória de referência provocaria uma reação em termos de forças de contato. Quanto maior a rigidez do meio de trabalho, maior seria a possibilidade de um contato instável, pois neste caso pequenos desvios da trajetória planejada originariam grandes desvios nas forças de interação. Estas desvantagens do controle baseado puramente em posição limitam a sua aplicação prática.

A execução satisfatória de tarefas que envolvem interação requer a medição explícita das forças de contato e o seu uso na estratégia de controle. A estratégia de controle que usa a medição da força de contato na fase de interação é chamada de *Controle Explícito de Força*. Existe também uma outra estratégia de controle para a fase de interação que não regula diretamente a força de contato, mas sim a impedância mecânica entre a força e a posição da extremidade. Esta estratégia é chamada de *Controle de Impedância*.

2.3.1
Controle Explícito de Força

O controle explícito de força descreve uma estratégia que compara os sinais de força medidos com os de referência, processa-os e então provê um sinal de atuação diretamente ao sistema. A força de referência pode também ser incluída como alimentação direta ao sinal que é enviado ao sistema. O diagrama geral do controle explícito de força é apresentado na fig.2.6.

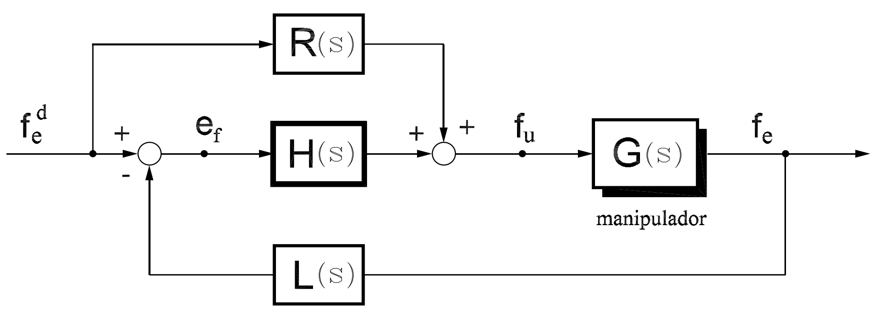


Figura 2.6: Estrutura geral dos controladores explícitos de força.

Neste diagrama, **G** representa o sistema a controlar ou seja, o manipulador, **H** é o controlador de realimentação, **R** é a função de transferência da alimentação direta, e **L** é o filtro para o sinal de força medido. O sinal $\mathbf{f_e}^d$ é a força de contato desejada e usada como sinal de referência pelo sistema de controle, $\mathbf{f_u}$ é a força de controle, $\mathbf{f_e}$ é a força de contato real e $\mathbf{e_f}$ é o erro entre a força real de contato e o valor desejado. Amortecimento ativo, se for incluído, é considerado em $\mathbf{G}$. Baseados no diagrama da fig.2.6 temos as seguinte relação geral para o controle explícito de força:

$$\mathbf{f_u} = \mathbf{H}(s)\ \mathbf{e_f} + \mathbf{R}(s)\ \mathbf{f_e}^d \tag{2-27}$$

com

$$\mathbf{e_f} \doteq \mathbf{f_e}^d - \mathbf{L}(s)\ \mathbf{f_e} \tag{2-28}$$

Controle Explícito de Força Proporcional

Se tomamos o controlador $\mathbf{H}$ da fig.2.6 como constante, a ação de controle resulta proporcional ao erro da força de contato medida $\mathbf{f_e}$ com relação à força de contato de referencia $\mathbf{f_e}^d$. Considerando os seguintes valores:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{K_{pf}} = cte \tag{2-29}$$

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{0} \tag{2-30}$$

$$\mathbf{L}(s) = \mathbf{I} \tag{2-31}$$

das eqs.(2-27)-(2-28), temos que a lei de controle é a seguinte:

$$\mathbf{f_u} = \mathbf{K_{pf}}\ (\ \mathbf{f_e}^d - \mathbf{f_e}\ ) \tag{2-32}$$

Para melhorar o desempenho deste controlador, uma ação derivativa poderia ser necessária. Adicionando um termo derivativo, a lei de controle ficaria:

$$\mathbf{f_u} = [\ \mathbf{K_{pf}} + s\ \mathbf{K_{df}}\ ]\ \left(\ \mathbf{f_e}^d - \mathbf{f_e}\ \right) \tag{2-33}$$

No entanto, na prática, o sinal da força medida está sempre sujeita a ruído e deriva-lo numericamente pode não ser uma boa idéia. Uma alternativa é usar um filtro passa-baixa para eliminar as componentes de altas freqüências do ruído no sinal de força medido antes deriva-lo [110][83]. Para isto escolhemos:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{K_{pf}} + s\ \mathbf{K_{df}} \tag{2-34}$$

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{0} \tag{2-35}$$
$$\mathbf{L}(s) = \frac{a}{s+a}\,\mathbf{I} \tag{2-36}$$

Neste caso a lei de controle resulta:

$$\mathbf{f_u} = [\ \mathbf{K_{pf}} + s\ \mathbf{K_{df}}\ ]\ \left[\mathbf{f_e}^d - \left(\frac{a}{s+a}\right)\mathbf{f_e}\right] \tag{2-37}$$

$\mathbf{K_{df}}$ é o ganho derivativo e a a freqüência de corte do filtro. Infelizmente este filtro introduz um retardo no sistema o que faz que o sistema controlado se torne instável para pequenos ganhos de controle [110]. Uma melhor solução para proporcionar amortecimento ativo ao sistema, sem usar derivadas da força de contato é o uso de derivadas da velocidade do manipulador. Neste caso, a lei de controle é a seguinte:

$$\mathbf{f_u} = \mathbf{K_{pf}}\ (\ \mathbf{f_e}^d - \mathbf{f_e}\ ) - \mathbf{K_v}\ \dot{\mathbf{x}} \tag{2-38}$$

A derivada da posição manipulador $\dot{\mathbf{x}}$ pode ser obtida usando a relação dada na eq.(2-2) de maneira que só seriam necessárias as velocidades das juntas do manipulador $\dot{\mathbf{q}}$, as quais podem ser obtidas via medição sem muito ruído [88]. A dinâmica em malha fechada de um manipulador cuja equação de movimento é dada pela eq.(2-13), sujeito à lei de controle definida na eq.(2-38) é a seguinte:

$$\mathbf{M}\ \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\ \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f_e} = \mathbf{K_{pf}}\ (\ \mathbf{f_e}^d - \mathbf{f_e}\ ) - \mathbf{K_v}\ \dot{\mathbf{x}} \tag{2-39}$$

Como pode-se observar daqui, no estado de equilíbrio, ou seja quando $\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} = 0$, temos a seguinte relação para a força de contato:

$$\mathbf{f_{e}}_{(t\,\to\,\infty)} = \left[\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{K_{pf}})^{-1}\right]\ \ \mathbf{f_e}^d \tag{2-40}$$

ou seja, o valor final da força de contato não é igual à força desejada a não ser para $\|\mathbf{K_{pf}}\| \ \to \infty$. No entanto, valores altos para o ganho proporcional, mesmo que possam melhorar o desempenho do sistema, geram problemas práticos quando implementados devido basicamente às limitações de hardware e problemas de sensibilidade a ruído [105]. Além disso, tem-se reportado na literatura, através de trabalhos experimentais e numéricos, que quando o manipulador tem certo grau de flexibilidade, o ganho proporcional não pode ser aumentado indefinidamente sem tornar o sistema instável[4] [20].

Uma alternativa para atingir erro estacionário zero na lei de controle de força com ganho proporcional é usar um termo de alimentação direta unitária em relação ao valor da força de referencia $\mathbf{f_e}^d$. Em outra palavras, com relação à fig.2.6, escolhemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{K_{pf}} = cte && (2\text{-}41) \\ \mathbf{R}(s) &= \mathbf{I} && (2\text{-}42) \\ \mathbf{L}(s) &= \mathbf{I} && (2\text{-}43) \end{aligned}$$

com esses parâmetros, a lei de controle é a seguinte:

$$\mathbf{f_u} = \mathbf{K_{pf}} \left(\mathbf{f_e}^d - \mathbf{f_e} \right) + \mathbf{f_e}^d - \mathbf{K_v}\,\dot{\mathbf{x}} \tag{2-44}$$

e a equação do sistema em malha fechada com esse tipo de controle de força implementado resulta:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + [\,\mathbf{B} + \mathbf{K_v}\,]\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f_e} = \mathbf{K_{pf}} \left(\mathbf{f_e}^d - \mathbf{f_e} \right) + \mathbf{f_e}^d \tag{2-45}$$

Foi adicionado onde o termo derivativo $\mathbf{K_v}\,\dot{\mathbf{x}}$ ao termo de atrito viscoso do manipulador $\mathbf{B}\,\dot{\mathbf{x}}$ devido a que os dois contém a velocidade $\dot{\mathbf{x}}$, mas é importante ressaltar que existe uma diferença física entre eles pois o atrito viscoso é um amortecimento passivo entanto que o termo $\mathbf{K_v}\,\dot{\mathbf{x}}$ é gerado pelos próprios atuadores do manipulador e portanto é um amortecimento ativo. Pode-se verificar da equação eq.(2-45) que no equilíbrio:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{e}(t \to \infty)} = \mathbf{f_e}^d \tag{2-46}$$

A lei de controle dada na eq.(2-44) define o *Controle Explícito de Força com Ganho Proporcional e Alimentação Direta Unitária*. Vale a pena mencionar que o torque que os atuadores deverão aplicar nas juntas do manipulador pode ser obtido substituindo a eq.(2-44) na eq.(2-11). Assim,

[4] Contudo, na literatura não se há reportado uma expressão analítica para o ganho limite que torna o sistema controlado instável. Mas, neste trabalho, na seção 2.4.2, será deduzida a expressão analítica para este ganho limite.

a lei de controle no espaço das juntas é dado por:

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{u}} = \mathbf{J}^t \; \left[\; \mathbf{K}_{pf} \; (\; \mathbf{f_e}^d - \mathbf{f_e} \;) + \mathbf{f_e}^d \; \right] - \mathbf{K_{vq}} \; \dot{\mathbf{q}} \tag{2-47}$$

sendo

$$\mathbf{K_{vq}} = \mathbf{J}^t \; \mathbf{K_v} \; \mathbf{J} \tag{2-48}$$

Controlador Explícito de Força Integral

Para eliminar o erro estacionário, para uma força de referência constante, uma outra alternativa é o uso de um controle com ação integral. Este tipo de controle tem demonstrado ter como característica básica um bom acompanhamento do sinal de força de referência, no entanto o ganho integral não pode ser aumentado indefinidamente pois existe um limite que gera instabilidade na dinâmica do sistema em malha fechada [38]. Com referência à fig.2.6 temos para o controle explícito de força com ação integral:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{K_{if}} \; \frac{1}{s} \tag{2-49}$$

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{0} \tag{2-50}$$

$$\mathbf{L}(s) = \mathbf{I} \tag{2-51}$$

com isso, a lei de controle resulta:

$$\mathbf{f_u} = \mathbf{K_{if}} \int_0^t (\mathbf{f_e}^d - \mathbf{f_e}) \; dt \;\; - \;\; \mathbf{K_v} \; \dot{\mathbf{x}} \tag{2-52}$$

e a dinâmica do sistema em malha fechada:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \; \ddot{\mathbf{x}} + [\; \mathbf{B} + \mathbf{K_v} \;] \; \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f_e} &= \mathbf{f_u} \\ \dot{\mathbf{f}}_{\mathbf{u}} &= \mathbf{K_{if}} \; (\mathbf{f_e}^d - \mathbf{f_e}) \end{aligned} \tag{2-53}$$

Controle de Força em Malha Aberta

Depois de descrever as estratégias de controle de força em malha fechada, vejamos um tipo de controle que não precisa realimentação. Este controle é possível pois, em malha aberta, a dinâmica dos manipuladores em contato com o meio de trabalho é estável. Para ver isso considere-se a eq.(2-13) e que a força de contato é dada pela seguinte relação: $\mathbf{f_e} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\delta})$ sendo $\boldsymbol{\delta}$ a deformação na região de contato que pode ser definida como $\boldsymbol{\delta} \doteq \mathbf{x} - \mathbf{x_e}$, $\mathbf{x_e}$ é a posição não deformada do meio de trabalho que sem perda de generalidade pode ser considerada zero, i.e. $\mathbf{x_e} = 0$, e $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x}$; $\mathbf{g}(\cdot)$ é uma função positiva definida e monotonicamente crescente, ou seja: $\mathbf{g}(0) = 0$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} > 0$. Assim temos a seguinte equação para a dinâmica do manipulador:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f_u} \tag{2-54}$$

A lei de contato $\mathbf{f_e} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ pode ser linearizada ao redor de cada posição $\mathbf{x}$ do sistema, ou seja, podemos considerar $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{K_e}\,\mathbf{x}$, sendo $\mathbf{K_e} > 0$ (já que $\mathbf{g}(\cdot)$ é uma função monotonicamente crescente). Neste caso a dinâmica do sistema resulta:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K_e}\,\mathbf{x} = \mathbf{f_u} \tag{2-55}$$

Considerando que as matrizes $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{K_e}$ são positivas definidas podemos deduzir que o sistema da eq.(2-55) é estável, supondo que $\mathbf{f_u}$ não depende da variável $\mathbf{x}$. Considere-se agora a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{f_u} = \mathbf{f_e}^d \tag{2-56}$$

onde $\mathbf{f_e}^d$ é a força de contato desejada. Como pode-se ver esta é uma lei de controle sem realimentação e portanto em malha aberta. Em termos simples podemos interpretar esta lei de controle como um comando que faz que o manipulador encoste contra o meio atuado por uma força $\mathbf{f_e}^d$ sem importar a dinâmica do transiente. Usando esta lei de controle na eq.(2-13) temos a equação dinâmica do sistema controlado:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f_e} \;=\; \mathbf{f_e}^d \tag{2-57}$$

Daqui podemos deduzir que na condição de equilíbrio ($\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} = 0$) teremos uma força de contato igual à força desejada, ou seja $\mathbf{f_e}_{(t \to \infty)} = \mathbf{f_e}^d$. No entanto esta é somente a força de equilíbrio, e a dinâmica do transiente dependerá das matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$ do manipulador.

2.3.2
Controle de Impedância

O controle de impedância é uma estratégia de controle que se baseia na idéia da "impedância mecânica" entre a extremidade do manipulador e o meio de trabalho, ou seja, na relação dinâmica entre a posição da extremidade e as forças de interação que atuam sobre ela. Essa relação dinâmica, ou impedância, é definida em termos de uma matriz de inércia, amortecimento e rigidez que devem ser especificadas pelo projetista. O objetivo do controlador de impedância é chegar à seguinte relação para o sistema em malha fechada:

$$\mathbf{M}^d\ \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{B}^d\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}^d\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f_e} \tag{2-58}$$

onde $\mathbf{M}^d$, $\mathbf{B}^d$ e $\mathbf{K}^d$ são os parâmetros da impedância e $\tilde{\mathbf{x}}$ é o erro da posição da extremidade $\mathbf{x}$ em relação a um valor usado como referência $\mathbf{x}^d$:

$$\tilde{\mathbf{x}} \doteq \mathbf{x}^d - \mathbf{x} \tag{2-59}$$

Logo, nesta abordagem, o controle da força de interação é realizado implicitamente através da especificação da impedância objetivo ($\mathbf{M}^d$, $\mathbf{B}^d$ e $\mathbf{K}^d$) e de uma referência para a posição da extremidade: $\mathbf{x}^d$. Resta agora determinar qual é a lei de controle para o vetor $\mathbf{f_u}$ que permita atingir em malha fechada à eq.(2-58) a partir da equação de movimento do manipulador eq.(2-13). Considere-se a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{f_u} = \mathbf{M}\ \mathbf{v} + \mathbf{B}\ \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f_e} \tag{2-60}$$

onde $\mathbf{v}$ é um sinal de controle auxiliar. Substituindo esta última equação na eq.(2-13), temos:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \tag{2-61}$$

comparando esta equação com a relação objetivo, eq.(2-58), podemos deduzir a expressão para o sinal de controle auxiliar $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{x}}^d + \mathbf{M}^{d^{-1}} \left\{ \mathbf{B}^d\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}^d\ \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{f_e} \right\} \tag{2-62}$$

Finalmente, a lei de controle para o controlador de impedância é dada pelas eqs.(2-60) e (2-62). A fig.2.7 apresenta o diagrama de blocos do controlador. Uma vantagem do controle de impedância é que pode ser utilizado tanto para controle de interação como para controle de posição, já que quando $\mathbf{f_e} = \mathbf{0}$ na eq.(2-58), a equação resultante é:

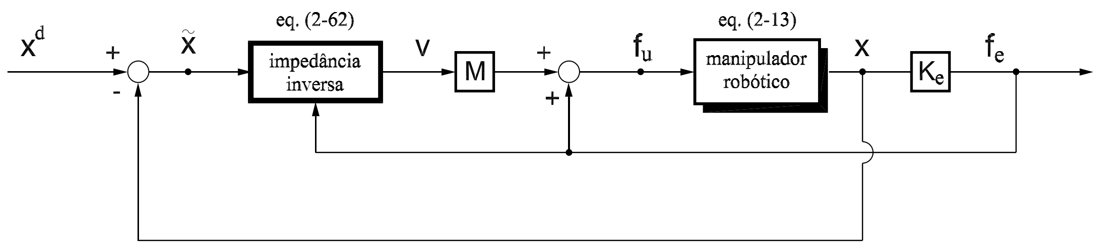


Figura 2.7: Estrutura do controlador de impedância.

$$\mathbf{M}^d\ \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{B}^d\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}^d\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \tag{2-63}$$

O maior problema com o controle de impedância é a sensibilidade do valor da força de contato diante de erros na posição e características mecânicas (por exemplo a rigidez) do meio de trabalho [89]. Estes problemas ocorrem porque o método de controle não utiliza o erro na força de contato para realimentação.

2.3.3 Exemplo de Aplicação - Controle de Força

Consideremos um exemplo de aplicação para comparar três tipos de controladores de força: Controle Explícito de Força Proporcional com Alimentação Direta Unitária, Controlador Explícito de Força Integral e Controlador de Impedância. Para o manipulador consideramos os seguintes parâmetros:

$$\mathrm{M} = 2\ kg \tag{2-64}$$

$$\mathrm{B} = 10\ Ns/m \tag{2-65}$$

As figs.2.8-2.10 apresentam o resultado da simulação para a resposta dinâmica da força de contato do manipulador com cada um dos controladores. Nestas simulações foi suposto que não houve impacto (ou seja, o contato inicial aconteceu com velocidade zero em $t = 0$). Os gráficos mostram a resposta para dois valores de rigidez do meio de trabalho. Observa-se que em geral, quando a rigidez do meio aumenta, as oscilações dos valores da força de contato também aumentam, o que é esperado. Mas, quando a rigidez de contato aumenta, vemos que somente no caso do controlador de impedância existe um erro no valor final da força de contato, o que não acontece nos dois controladores explícitos. Isto é também esperado pois o controlador de impedância não usa o erro da força de contato na realimentação.

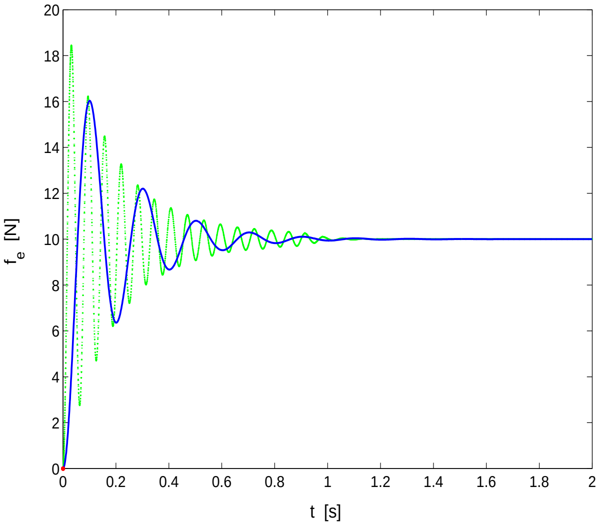


Figura 2.8: Resposta dinâmica sem impacto sob controle de força explícito proporcional com alimentação direta unitária para dois materiais diferentes do meio de trabalho (linha azul: $\mathrm{K_e} = 1 \times 10^3\ N/m$, linha verde: $\mathrm{K_e} = 1 \times 10^4\ N/m$). Parâmetros do controlador: $\mathrm{K_{pf}} = 1,\ \mathrm{K_v} = 10,\ \mathrm{f_e}^d = 10N$.

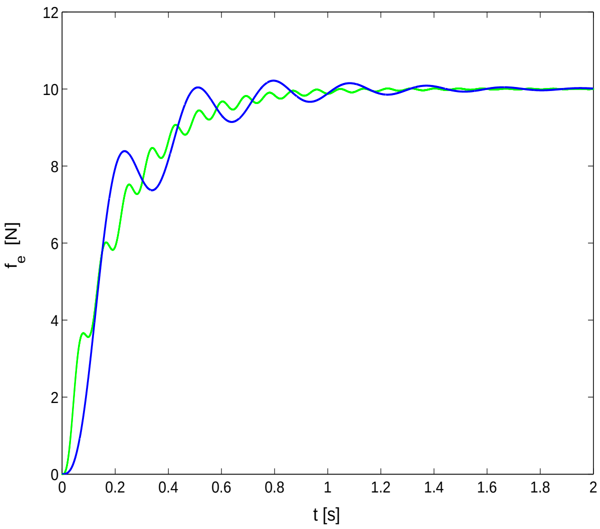


Figura 2.9: Resposta dinâmica sem impacto sob controle de força explícito integral para dois materiais diferentes do meio de trabalho (linha azul: $\mathrm{K_e} = 1 \times 10^3\ N/m$, linha verde: $\mathrm{K_e} = 1 \times 10^4\ N/m$). Parâmetros do controlador: $\mathrm{K_{fi}} = 0.5,\ \mathrm{K_v} = 10,\ \mathrm{f_e}^d = 10N$.

As figs.2.11-2.13 apresentam o resultado da simulação para a resposta dinâmica da força de contato do manipulador para os mesmos controladores mas neste caso supondo que houve impacto (ou seja, o contato inicial

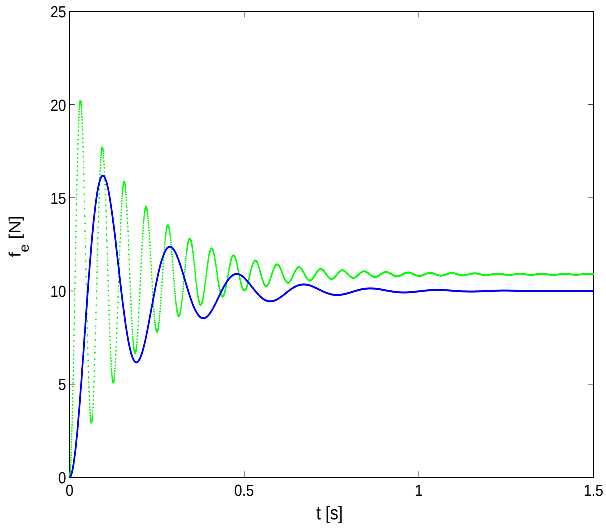


Figura 2.10: Resposta dinâmica sem impacto sob controle de impedância para dois materiais diferentes do meio de trabalho (linha azul: $\mathrm{K_e} = 1 \times 10^3\ N/m$, linha verde: $\mathrm{K_e} = 1 \times 10^4\ N/m$). Parâmetros do controlador: $\mathrm{M}^d = 1\ Kg,\ \mathrm{B}^d = 10\ N - s/m,\ \mathrm{K}^d = 10\ N/m,\ \mathrm{x}^d = 0.11\ m$.

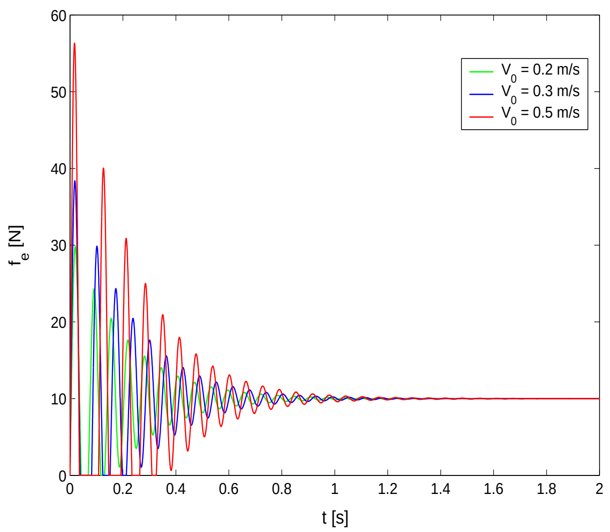


Figura 2.11: Resposta dinâmica com impacto sob controle de força explícito proporcional com alimentação direta unitária para diferentes velocidades de impacto $\mathrm{v_0}$. Parâmetros do controlador: $\mathrm{K_{pf}} = 1,\ \mathrm{K_v} = 10,\ \mathrm{f_e}^d = 10N$. $\mathrm{K_e} = 1 \times 10^4\ N/m$.

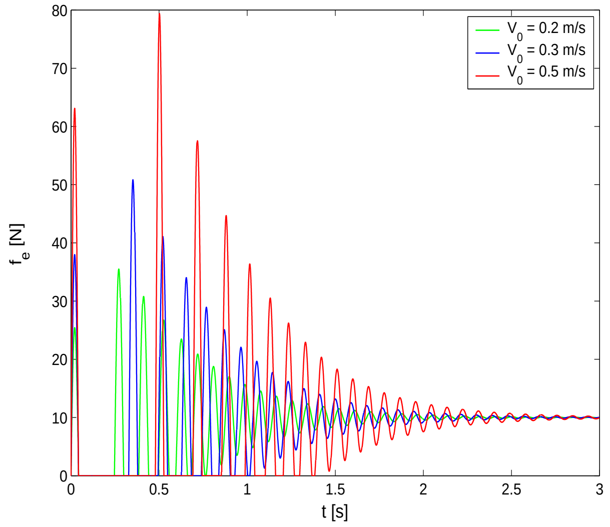


Figura 2.12: Resposta dinâmica com impacto sob controle de força explícito integral para diferentes velocidades de impacto v_0. Parâmetros do controlador: $K_{fi} = 0.5,\ K_v = 10,\ f_e{}^d = 10N$. $K_e = 1 \times 10^4\ N/m$.

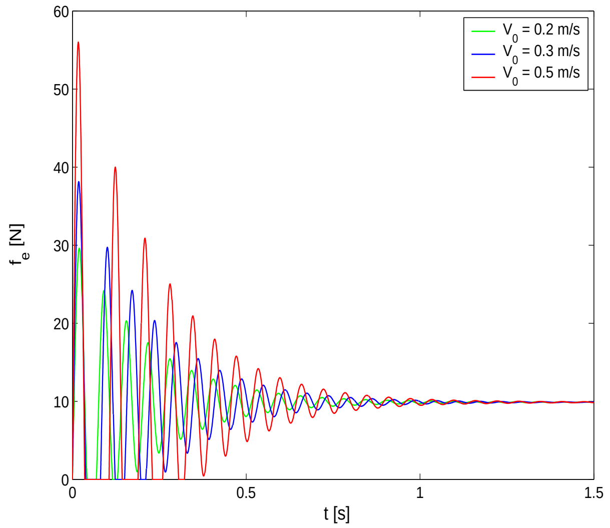


Figura 2.13: Resposta dinâmica com Impacto sob controle de impedância para diferentes velocidades de impacto v_0. Parâmetros do controlador: $M^d = 1\ Kg,\ B^d = 10\ N - s/m,\ K^d = 10\ N/m,\ x^d = 0.10\ m$. $K_e = 1 \times 10^4\ N/m$.

aconteceu com uma velocidade $v_0 > 0$). Como pode se observar, nos três casos o contato é perdido mais de uma vez existindo também forças de impacto com valores de até 8 vezes o valor final desejado. Também podemos observar que no caso do primeiro controlador e do último, os impactos posteriores acontecem sempre com um valor da força máximo menor que o da força no impacto anterior, devido a dissipação da energia. O fato interessante é que isso não acontece com o controlador de explícito de força integral no qual observa-se que o segundo impacto acontece com uma severidade muito maior do que o primeiro. Acredita-se que isto seja devido ao *windup* de integração.

2.4 Análise da Estabilidade do Controle de Força

Nesta seção é feita uma análise da estabilidade dos manipuladores robóticos em malha fechada, i.e. com as implementações de controle de força. A análise de estabilidade será baseada nos modelos simplificados apresentados nas fig.2.2 e fig.2.5. É importante enfatizar aqui que as leis de controle de força foram desenvolvidas para o caso de manipuladores rígidos, no entanto, em presença de forças de contato e impacto é difícil manter válida a hipótese de rigidez e portanto o caso de manipuladores flexíveis com estas leis de controle também deve ser pesquisado.

2.4.1 Ponto de Equilíbrio

Antes de fazer a análise de estabilidade é preciso identificar os pontos de equilíbrio do sistema. Considere-se a lei de controle de força proporcional com alimentação direta unitária. No caso do manipulador rígido a equação em malha fechada é dada pela eq.(2-45) e como foi visto antes, no estado de equilíbrio temos:

$$\mathrm{f_e}^{eq} = \mathrm{f_e}^{d} \qquad (2\text{-}66)$$

sendo $\mathrm{f_e}^{eq}$ a força de contato no estado de equilíbrio. Esta relação é válida independentemente dos valores de M, B, $\mathrm{K_{pf}}$, $\mathrm{K_v}$ ou do modelo de contato.

Para o caso do manipulador flexível, a equação dinâmica em malha fechada com o mesmo controle de força implementado é obtida substituindo a eq.(2-44) na eq.(2-27):

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{B_1 + B_m} & -\mathrm{B_m} \\ -\mathrm{B_m} & \mathrm{B_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K_m} & -\mathrm{K_m} \\ -\mathrm{K_m} & \mathrm{K_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{f_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{K_{pf}}\ (\mathrm{f_e}^d - \mathrm{f_e}) + \mathrm{f_e}^d \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-67}$$

onde o termo da realimentação de velocidade da junta na lei de controle: $\mathrm{K_v}\ \dot{x}_1$, foi considerado como parte do valor da variável de amortecimento da junta $\mathrm{B_1}$. Se consideramos, por simplicidade, um modelo de contato linear da seguinte maneira:

$$\mathrm{f_e} = \mathrm{K_e}\ (x_2 - x_e) \tag{2-68}$$

onde x_e é a posição não deformada do meio elástico, que pode ser considerada sem perda de generalidade como zero, ou seja, $x_e = 0$. Neste caso, a equação da força de contato pode ser escrita como:

$$\mathrm{f_e} = \mathrm{K_e}\ x_2 \tag{2-69}$$

com essa última equação, a dinâmica do sistema em malha fechada resulta:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{B_1 + B_m} & -\mathrm{B_m} \\ -\mathrm{B_m} & \mathrm{B_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K_m} & -\mathrm{K_m} + \mathrm{K_{pf}}\ \mathrm{K_e} \\ -\mathrm{K_m} & \mathrm{K_m} + \mathrm{K_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{K_{pf}} + 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{f_e}^d \tag{2-70}$$

No estado de equilíbrio temos $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, então:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K_m} & -\mathrm{K_m} + \mathrm{K_{pf}}\ \mathrm{K_e} \\ -\mathrm{K_m} & \mathrm{K_m} + \mathrm{K_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}^{eq} \\ {x_2}^{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{K_{pf}} + 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{f_e}^d$$

Resolvendo para ${x_1}^{eq}$ e ${x_2}^{eq}$, temos:

$$x_1{}^{eq} = \left(\frac{1}{\mathrm{K_e}} + \frac{1}{\mathrm{K_m}}\right) \mathrm{f_e}{}^{d} \tag{2-71}$$

$$x_2{}^{eq} = \frac{1}{\mathrm{K_e}} \mathrm{f_e}{}^{d} \tag{2-72}$$

usando estas expressões, podemos deduzir que no equilíbrio

$$\mathrm{f_e}{}^{eq} = \mathrm{f_u}{}^{eq} = \mathrm{K_m}\ (x_1{}^{eq} - x_2{}^{eq}) = \mathrm{f_e}{}^{d} \tag{2-73}$$

O que indica que no estado de equilíbrio de um manipulador flexível, teremos uma força de contato igual à desejada, uma força do atuador igual à força de contato desejada, e internamente, entre as massas $\mathrm{M_1}$ e $\mathrm{M_2}$, uma força interna também igual à força de contato desejada.

2.4.2 Estabilidade Sem Considerar a Perda de Contato (Análise Linear)

- **Manipulador Rígido**

Considere-se como modelo de contato a eq.(2-69). Substituindo esta na eq.(2-45), temos:

$$\mathrm{M}\ \ddot{x} + (\ \mathrm{B} + \mathrm{K_v}\ )\ \dot{x} + \mathrm{K_e}\ x\ =\ \mathrm{K_{pf}}\ (\ \mathrm{f_e}{}^{d} - \mathrm{K_e}\ x\ ) + \mathrm{f_e}{}^{d} \tag{2-74}$$

rearranjando termos,

$$\mathrm{M}\ \ddot{x} + (\ \mathrm{B} + \mathrm{K_v}\ )\ \dot{x} + (\ \mathrm{K_{pf}} + 1\ )\ \mathrm{K_e}\ x\ =\ (\ \mathrm{K_{pf}} + 1\ )\ \mathrm{f_d} \tag{2-75}$$

já que $\mathrm{K_e} > 0$, temos a seguinte condição para estabilidade:

$$\mathrm{B} + \mathrm{K_v} > 0 \tag{2-76}$$

$$\mathrm{K_{pf}} + 1 > 0 \tag{2-77}$$

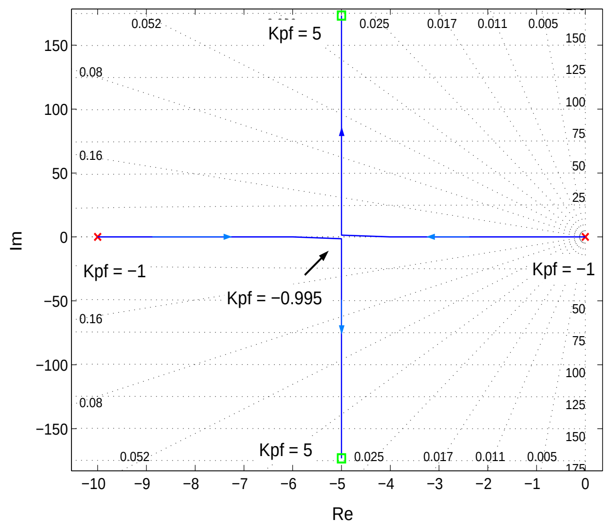


Figura 2.14: Diagrama do lugar geométrico das raízes para um manipulador rígido controle explícito de força proporcional, variando K_{pf} de -1 até 5.

A fig.2.14 apresenta o diagrama do lugar geométrico das raízes para o sistema em malha fechada, eq.(2-75). Como pode-se observar da figura, o sistema é sempre estável para valores ganho proporcional K_{pf} maiores de -1. Valores menores conduzem a instabilidade dinâmica (pois nestes casos, os pólos ficariam do lado direito do plano complexo).

- **Manipulador Flexível**

As estratégias de controle de força foram desenvolvidos para manipuladores rígidos. No entanto, todo manipulador é flexível em certo grau, e mais ainda nas fases de contato. É necessário portanto investigar a estabilidade e o desempenho do controle de força na presença de flexibilidade. Na literatura tem-se reportado comportamento instável durante a execução de tarefas de contato em manipuladores supostamente rígidos sob controle de força explícito. Através de experiências de laboratório, os pesquisadores têm apontado à flexibilidade como a causa da instabilidade confirmando esta hipótese através de simulações numéricas [21]. No entanto, eles não deduziram uma relação analítica da condição limite para garantir estabilidade com controle explícito de força proporcional no caso de manipuladores flexíveis. Nesta seção é deduzida tal relação, que julgamos ser inédita.

Analisando a equação de um manipulador flexível em malha fechada dada pela eq.(2-70) observamos que quando $K_{pf} = 0$, temos uma matriz de rigidez simétrica e positiva definida. Logo, a estabilidade é garantida. No entanto, para $K_{pf} \neq 0$ o termo $K_{pf}\ K_e$ na terceira matriz faz que esta matriz não seja simétrica e por tanto não podemos ver diretamente da equação de movimento se o sistema é estável ou não. Neste caso precisamos analisar a equação característica do sistema. Para isto reescrevamos a equação diferencial homogênea associada à eq.(2-70) da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\,\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\,\mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{2-78}$$

Supondo que a solução para essa equação é da forma $\mathbf{z} = \mathbf{u}\ e^{\lambda\ t}$, onde $\mathbf{u}$ é um vetor de constantes, temos:

$$\left(\ \lambda^2\ \mathbf{M} + \lambda\ \mathbf{B} + \mathbf{K}\ \right)\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2-79}$$

essa última expressão pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\Delta}(\lambda)\ \ \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2-80}$$

Para a existência de soluções não-triviais para essa última equação, a matriz $\boldsymbol{\Delta}(\lambda)$ deve ser não-singular, assim temos:

$$\det\left(\boldsymbol{\Delta}(\lambda)\right) = 0 \tag{2-81}$$

essa equação é a equação característica do sistema. As raízes λ dessa equação são os autovalores do sistema. Para o sistema considerado aqui dado pela eq.(2-70), e considerando $\mathrm{B_m} \approx 0$, podemos determinar a equação característica do sistema em malha fechada. Assim temos que:

$$\det\begin{bmatrix} \mathrm{M_1}\ \lambda^2 + \mathrm{B_1}\ \lambda + \mathrm{K_m} & -\mathrm{K_m} + \mathrm{K_{pf}}\ \mathrm{K_e} \\ -\mathrm{K_m} & \mathrm{M_2}\ \lambda^2 + \mathrm{K_m} + \mathrm{K_e} \end{bmatrix} = 0 \tag{2-82}$$

aplicando o determinante,

$$\begin{gathered}\left[\ \mathrm{M_1}\ \mathrm{M_2}\ \right]\ \lambda^4\ +\ \left[\ \mathrm{B_1}\ \mathrm{M_2}\ \right]\ \lambda^3\ +\ \left[\ \mathrm{M_1}\ (\mathrm{K_m} + \mathrm{K_e}) + \mathrm{M_2}\ \mathrm{K_m}\ \right]\ \lambda^2\ + \\ \left[\ \mathrm{B_1}\ (\mathrm{K_m} + \mathrm{K_e})\ \right]\ \lambda\ +\ \mathrm{K_m}\ \mathrm{K_e}\ (1 + \mathrm{K_{pf}})\ =\ 0\end{gathered} \tag{2-83}$$

Podemos escrever esta mesma equação da seguinte maneira:

$$\lambda^4 \ + \ a_3 \, \lambda^3 \ + \ a_2 \, \lambda^2 \ + \ a_1 \, \lambda \ + \ a_0 \ = \ 0 \tag{2-84}$$

onde

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\mathrm{B_1}}{\mathrm{M_1}} \\ a_2 &= \frac{\mathrm{M_1} \ (\mathrm{K_m} + \mathrm{K_e}) + \mathrm{M_2} \ \mathrm{K_m}}{\mathrm{M_1} \ \mathrm{M_2}} \\ a_1 &= \frac{\mathrm{B_1} \ (\mathrm{K_m} + \mathrm{K_e})}{\mathrm{M_1} \ \mathrm{M_2}} \\ a_0 &= \frac{\mathrm{K_m} \ \mathrm{K_e} \ (1 + \mathrm{K_{pf}})}{\mathrm{M_1} \ \mathrm{M_2}} \end{aligned}$$

Resolver a equação de quarta ordem eq.(2-84) para achar as raízes λ e poder determinar uma condição para a estabilidade do sistema resulta muito complicado de se fazer sobretudo analiticamente. No entanto, podemos aplicar o Critério de Routh-Hurtwitz para estabilidade o qual nos dá uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema dinâmico linear conhecendo os coeficientes do polinômio da equação característica [36]. Baseados no polinômio (2-84), após alguma manipulação algébrica, podemos chegar à seguinte condição (necessária e suficiente) para a estabilidade do sistema:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3 \quad > \quad 0 \tag{2-85}$$

$$a_1 \ a_2 \ a_3 - {a_1}^2 - a_0 \ {a_3}^2 \quad > \quad 0 \tag{2-86}$$

Considerando que $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$, $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{K_m}$, $\mathrm{K_e} \ > \ 0$, temos que a primeira condição é satisfeita sempre que:

$$\mathrm{K_{pf}} + 1 \quad > \quad 0 \tag{2-87}$$

após algumas contas, poderemos ver que a segunda condição nos leva a:

$$\mathrm{K_{pf}} \ < \ \frac{\mathrm{K_m}}{\mathrm{K_e}} \tag{2-88}$$

Resumindo, usando as relações (2-87) e (2-88), temos que a condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema linear em malha fechada é a seguinte:

$$-1 \ < \ \mathrm{K_{pf}} \ < \ \frac{\mathrm{K_m}}{\mathrm{K_e}} \tag{2-89}$$

Esta relação obtida analiticamente é *inédita* na literatura. Podemos verificar através dela que quanto maior é a flexibilidade do maninulador ($\mathrm{K}_m \rightarrow 0$), ou equivalentemente, quanto maior é a rigidez do contato ($\mathrm{K}_e \rightarrow \infty$), menor é o máximo valor possível do ganho de realimentação $\mathrm{K_{pf}}$. Isto explica por que quando existe certo grau de flexibilidade nos manipuladores sob controle de força, a instabilidade acontece quando é ultrapassado um certo valor do ganho de realimentação.

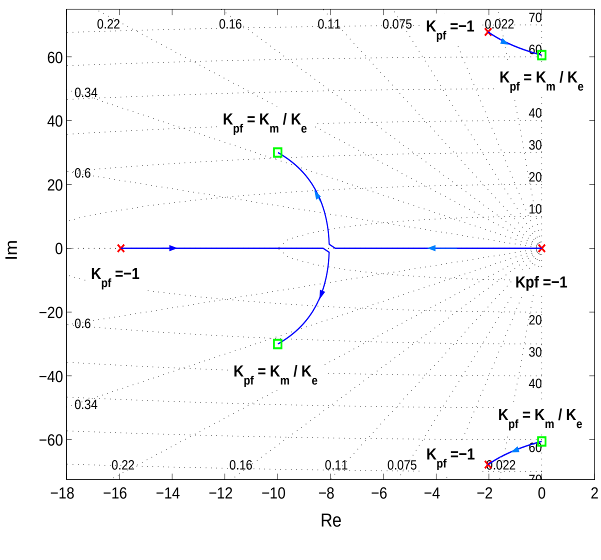


Figura 2.15: Diagrama do lugar geométrico das raízes para um manipulador flexível controle explícito de força proporcional, variando $\mathrm{K_{pf}}$ de -1 até $\mathrm{K_m/K_e}$.

A fig.2.15 apresenta o diagrama do lugar geométrico das raízes para um manipulador flexível em malha fechada, eq.(2-70). Como pode-se observar da figura, o sistema é estável somente para valores de ganho proporcional

K_{pf} maiores que -1 e menores que K_m/K_e. Valores fora desta faixa levarão o sistema à instabilidade dinâmica (pois nestes casos, os pólos ficariam do lado direito do plano complexo). Na fig.2.16, obtida via simulação, verifica-se esse fato.

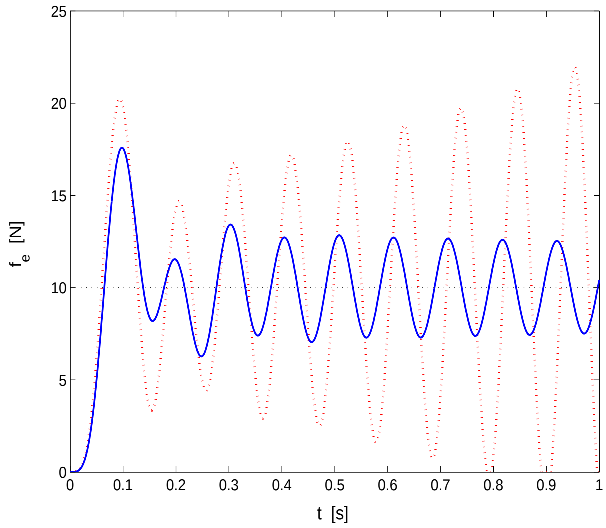


Figura 2.16: Resposta dinâmica da força de contato para um manipulador flexível com controle explícito de força proporcional (linha contínua: $K_{pf} = 0$, linha pontilhada: $K_{pf} = 3\ K_m/K_e$).

2.4.3 Estabilidade Considerando Perda de Contato: Estabilidade Global

Na seção anterior foi considerado que o manipulador nunca perde contato com o meio de trabalho. Esta simplificação foi necessária para fazer uma análise linear da estabilidade do sistema em malha fechada. No entanto, na prática é difícil que isto aconteça se a velocidade de aproximação não é nula. Uma análise de estabilidade mais realista deve considerar estas perdas de contato. Neste caso, a dinâmica do manipulador resulta não-linear (linear por partes) e as técnicas da estabilidade para sistemas lineares não são mais aplicáveis. A teoria de estabilidade de Lyapunov provê a ferramenta adequada para a análise da estabilidade de sistemas não-lineares [52].

Considere-se a seguinte lei de contato unilateral (linear por partes):

$$\mathrm{f}_e = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \mathrm{K}_e\, x & ; \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{2-90}$$

Esta equação indica que a força de contato é zero quando o contato é perdido ($x < 0$) e linear quando o contato é reestabelecido ($x \geq 0$). Usando esta lei de contato na equação da dinâmica em malha fechada de um manipulador rígido, eq.(2-45), temos:

Em Contato (quando $x \geq 0$):

$$\mathrm{M}\ \ddot{x} + (\mathrm{B} + \mathrm{K_v})\ \dot{x} + (\mathrm{K_{pf}} + 1)\ \mathrm{K_e}\ x = (\mathrm{K_{pf}} + 1)\ \mathrm{f_e}^d \tag{2-91}$$

Sem Contato (quando $x < 0$):

$$\mathrm{M}\ \ddot{x} + (\mathrm{B} + \mathrm{K_v})\ \dot{x} = (\mathrm{K_{pf}} + 1)\ \mathrm{f_e}^d \tag{2-92}$$

Pode-se observar aqui que quando o manipulador perde contato, a dinâmica do sistema tem um pólo na origem e por tanto o sistema é condicionalmente estável. Felizmente existe o termo $\mathrm{f_e}^d > 0$ o qual fará que o manipulador retome contato com o meio de trabalho (mesmo que esta retoma de contato seja com velocidade não nula e por tanto havendo a possibilidade de acontecer um segundo impacto).

Como vamos a estudar a estabilidade em torno ao ponto de equilibrio $x^{eq} = \mathrm{f_e}^d/\mathrm{K_e}$, é conveniente reescrever as eqs.(2-91)-(2-92) de forma que a origem seja o ponto de equilíbrio. Para isto definamos uma nova variável:

$$\tilde{x} \doteq x - x^{eq}$$

Em Contato (quando $\tilde{x} \geq -x^{eq}$):

$$\mathrm{M}\ \ddot{\tilde{x}} + (\mathrm{B} + \mathrm{K_v})\ \dot{\tilde{x}} + (\mathrm{K_{pf}} + 1)\ \mathrm{K_e}\ \tilde{x} = 0 \tag{2-93}$$

Sem Contato (quando $\tilde{x} < -x^{eq}$):

$$\mathrm{M}\ \ddot{\tilde{x}} + (\mathrm{B} + \mathrm{K_v})\ \dot{\tilde{x}} = (\mathrm{K_{pf}} + 1)\ \mathrm{K_e}\ x^{eq} \tag{2-94}$$

Por conveniencia vamos juntar as eqs.(2-93)-(2-94) em uma só, assim:

$$\mathrm{M}\ \ddot{\tilde{x}} + (\mathrm{B} + \mathrm{K_v})\ \dot{\tilde{x}} + g(\tilde{x}) = 0 \tag{2-95}$$

sendo $g(\tilde{x})$ a seguinte função não-linear:

$$g(\tilde{x}) = \begin{cases} (\mathrm{K_{pf}} + 1)\ \mathrm{K_e}\ \tilde{x} & ;\ \tilde{x} \geq -x^{eq} \\ -(\mathrm{K_{pf}} + 1)\ \mathrm{K_e}\ x^{eq} & ;\ \tilde{x} < -x^{eq} \end{cases} \tag{2-96}$$

A fig2.17 mostra a representação gráfica para esta função não-linear quando $K_{pf} > -1$.

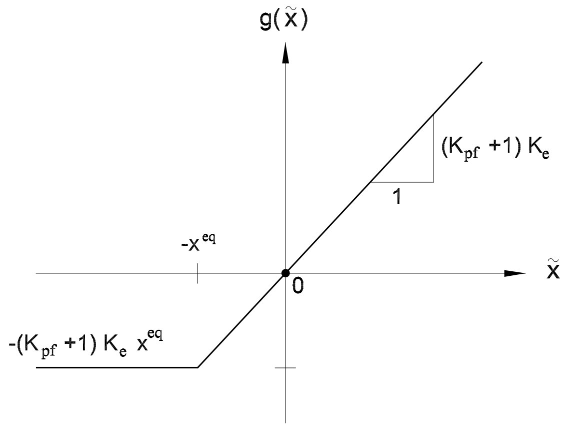


Figura 2.17: Função não-linear $g(\tilde{x})$ para $K_{pf} > -1$.

Reescrevamos a equação de movimento do sistema, eq.(2-95), como um sistema de primeira ordem. Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$z_1 \doteq \tilde{x} \tag{2-97}$$
$$z_2 \doteq \dot{\tilde{x}} \tag{2-98}$$

temos

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{2-99}$$

sendo

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{1}{\mathrm{M}} \ \{ \ g(z_1) + (\mathrm{B} + \mathrm{K_v}) \ z_2 \ \} \end{bmatrix} \tag{2-100}$$

Agora que a equação de movimento está em uma forma padrão, vamos usar o Teorema de LaSalle para provar a estabilidade do sistema.

Teorema de LaSalle [52]
Considere-se o sistema dinâmico definido pela eq.(2-99) onde $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ é um ponto de equilíbrio deste sistema. Seja $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável, radialmente ilimitada ($\|\mathbf{z}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{z}) \rightarrow \infty$) e positiva definida, tal que $\dot{V}(\mathbf{z}) \leq 0$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. Seja $S : \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}(\mathbf{z}) = 0 \right\}$ e suponha nenhuma solução pode permanecer no conjunto S para sempre, a não ser a solução trivial. Então, a origem é

globalmente assintoticamente estável.

Para nosso sistema, definamos a candidata a função de Lyapunov:

$$V(\mathbf{z}) = \int_0^{z_1} g(y)\ dy + \frac{1}{2}\ \mathrm{M}\ {z_2}^2 \tag{2-101}$$

Da fig.2.17 podemos ver que $V(\mathbf{z})$ é uma função positiva definida (sempre que $\mathrm{K_{pf}} > -1$). Da mesma figura podemos ver que $V(\mathbf{z})$ é radialmente ilimitada ($\|z_1\| \to \infty \Rightarrow V(\mathbf{z}) \to \infty$ e $\|z_2\| \to \infty \Rightarrow V(\mathbf{z}) \to \infty$) e também $V(\mathbf{z})$ é continuamente diferenciável pois:

$$\frac{\partial V(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = [\ g(z_1) \quad \mathrm{M}\ z_2\ ] \tag{2-102}$$

A derivada da função $V(\mathbf{z})$ ao longo da trajetória do sistema é:

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = \frac{\partial V(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\ \mathbf{f}(\mathbf{z}) = -(\mathrm{B} + \mathrm{K_v})\ {z_2}^2 \leq 0 \tag{2-103}$$

Daqui também vemos que conjunto

$$S : \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}(\mathbf{z}) = 0 \right\} = \{ z_1 \in \mathbb{R}, z_2 = 0 \} \tag{2-104}$$

para uma solução que permanece no conjunto S, temos que $z_2 = 0$ sempre $\Rightarrow \dot{z}_2 = 0$, substituindo estes valores nas eqs.(2-99)-(2-100), deduzimos que necessáriamente $g(z_1) = 0 \Rightarrow z_1 = 0$ por observação da fig.2.17. Portanto podemos afirmar que a única solução do sistema que pode permanecer no com junto S para sempre é a solução trivial (i.e. $S : \{z_1 = z_2 = 0\}$), e com isto, de acordo ao Teorema de LaSalle, temos provado a estabilidade Global Assintótica do Sistema. Isto quer dizer que para um manipulador com contato unilateral, não importa qual a condição inicial do sistema, o equilíbrio sempre será atingido! (mesmo que aconteçam múltiplos impactos, sob a hipótese que $\mathrm{K_{pf}} > -1$).

2.5
Desempenho do Controle de Força em Presença de Impacto

Nesta seção, será estudado o desempenho dos controladores de força em manipuladores robóticos rígidos e flexíveis sujeitos a impactos. A análise apresentada aqui, é inédita na literatura.

2.5.1
Manipulador Rígido

Durante o contato, a equação de movimento do manipulador rígido com controle explícito de força com ação proporcional e ganho de alimentação direta unitária é dada na (2-91). Para facilitar a análise vamos reescrever essa equação da seguinte maneira:

$$\ddot{x} + 2\ \zeta\ \omega\ \dot{x} + \omega^2\ x = \omega^2\ x_{eq} \tag{2-105}$$

com

$$\begin{aligned} \omega &\doteq \sqrt{\frac{(\mathrm{K_{pf}}+1)\ \mathrm{K_e}}{\mathrm{M}}} \\ \zeta &\doteq \frac{\mathrm{B}+\mathrm{K_v}}{2\ \mathrm{M}\ \omega} = \frac{\mathrm{B}+\mathrm{K_v}}{2\ \sqrt{\mathrm{M}\ (\mathrm{K_{pf}}+1)\ \mathrm{K_e}}} \end{aligned} \tag{2-106}$$

e

$$x_{eq} = \frac{\mathrm{f_e}^{\mathrm{d}}}{\mathrm{K_e}} \tag{2-107}$$

Vamos analisar o comportamento do sistema em presença de impacto, ou seja, quando o contato inicial entre o manipulador e o meio de trabalho acontece com velocidade relativa não nula. Para isto consideramos as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= v_C \ ; \quad v_C \geq 0 \end{aligned} \tag{2-108}$$

a velocidade v_C será chamada aqui de velocidade de contato inicial ou simplesmente a velocidade de contato.

A solução analítica para a eq.(2-105) no caso sub-amortecido ($\zeta < 1$) é dada pela seguinte equação:

$$x(t) = x_{eq} + A\ e^{-\zeta\ \omega\ t}\ \mathrm{sen}\,(\omega_d\ t + \beta) \tag{2-109}$$

com

$$\omega_d = \omega\ \sqrt{1-\zeta^2} \tag{2-110}$$

É importante notar que essa solução é o resultado da soma de uma solução particular (primeiro termo do lado direito) e uma solução da equação homogênea associada (segundo termo do lado direito) e os coeficientes A e β devem ser determinados usando as condições iniciais dadas nas eqs.(2-108). Fazendo isto obtemos:

$$A = \frac{\sqrt{{v_C}^2 - 2\ \zeta\ \omega\ x^{eq} + (x^{eq}\ \omega)^2}}{\omega_d} > 0 \tag{2-111}$$

$$\beta = \text{atan2}\left[-x^{eq}, \frac{v_C - \zeta\ \omega\ x^{eq}}{\omega_d}\right] \tag{2-112}$$

Para diminuir os número de parâmetros envolvidos, vamos escrever a eq.(2-109) na seguinte forma adimensional:

$$\phi^c(\tau) = 1 + \alpha\ e^{-\zeta\ \tau}\ \text{ sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\ \tau + \beta\right) \tag{2-113}$$

com

$$\phi^c \doteq \frac{x}{x_{eq}} \tag{2-114}$$

$$\tau \doteq \omega\ t \tag{2-115}$$

$$\alpha \doteq \sqrt{\frac{{\nu_C}^2 - 2\ \zeta\ \nu_C + 1}{1-\zeta^2}} \tag{2-116}$$

$$\beta = \text{atan2}\left[-1, \frac{\nu_C - \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] \tag{2-117}$$

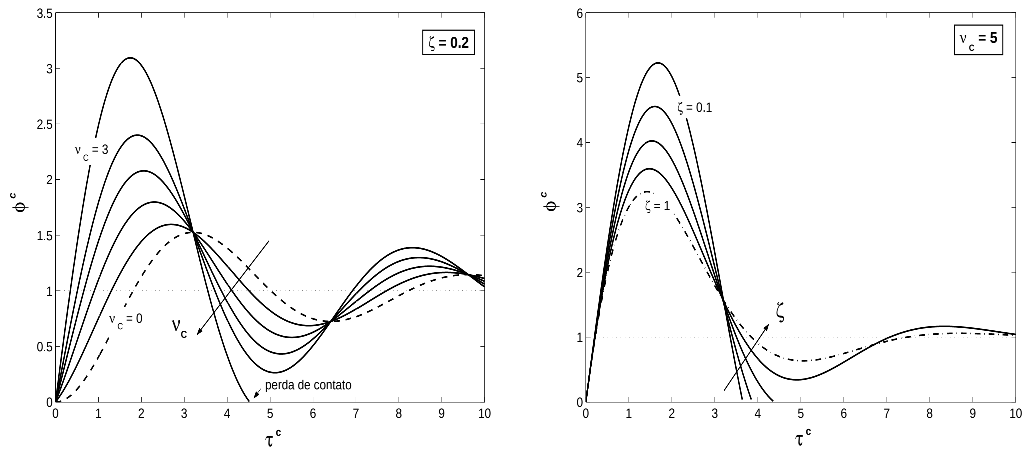
$$\nu_C \doteq \frac{v_C}{\omega\ x^{eq}} = \frac{v_C}{{\mathrm{f_e}}^d}\sqrt{\mathrm{M\ K_e\ (K_{pf}+1)}} \tag{2-118}$$

Logo, podemos dizer que a posição adimensional (ϕ^c) é função de três variáveis (tempo adimensional e dois parâmetros):

$$\phi^c = f(\tau, \nu_C, \zeta) \tag{2-119}$$

Usando essas equações adimensionais podemos construir o gráfico da posição da extremidade adimensional (ϕ^c) em função do tempo adimensional (τ)

para vários valores dos parãmetros velocidade de contato adimensional (ν_C) e fator de amortecimento do sistema (ζ). A fig.2.18 apresenta os resultados obtidos.



(a) (b)

Figura 2.18: Força de contato adimensional ϕ^c depois de um impacto em $t = 0$. (a) Para diferentes valores da velocidade de contato inicial adimensional ν_C. (b) Para diferentes valores do fator de amortecimento ζ.

Como pode ser observado da fig.2.18-a, onde a velocidade de contato adimensional toma vários valores, no caso de se ter uma velocidade $\nu_C = 0$ o contato não será perdido. Conforme essa velocidade adimensional aumenta, a possibilidade de perda de contato aumenta, e como pode-se ver como o valor de $\nu_C = 3$ o contato é perdido. Na fig.2.18-b temos uma análise similar quando o valor do amortecimento do sistema é alterado. Observamos aqui o importância do amortecimento do sistema, pois quanto menor seja esse, maior será a possibilidade de perda de contato e também maior o valor pico da força de contato.

Vamos agora deduzir algumas implicações importantes dos resultados obtidos. Como concluímos dos gráficos da fig.2.18, para não perder contato o ideal é ter valores de ν_C pequenos e ζ altos. Observando a segunda das eqs.(2-106) e a eq.(2-118), deduzimos que valores altos da rigidez do meio ($\mathrm{K_e}$) são indesejados (pois aumenta ν_C e diminui ζ). Isto quer dizer, uma estratégia de controle de impacto poderia consistir em diminuir a rigidez de contato, no entanto, como foi mencionado antes, isto pode não ser possível em muitas operações robóticas tais como as de usinagem, nas quais o contato metal-metal é necessário. Outra solução pode ser aumentar o valor do amortecimento B ou $\mathrm{K_v}$ para com isso aumentar o valor de ζ, mas isto tem suas vantagens e limitações [79]. Podemos também, quando isso for possível, diminuir o valor da velocidade de contato v_C (primeiro impacto) para assim diminuir o valor adimensional ν_C. No entanto, existe outro parâmetro que pode ser utilizado para melhorar o desempenho do controlador em presença de impacto. Olhando de novo para as eqs. (2-106) e eq.(2-118) vemos que um valor menor do ganho proporcional do controlador de força ($\mathrm{K_{pf}}$) é desejado pois isto diminui ν_c e aumenta ζ o que, desde o ponto de vista de diminuir a severidade do impacto, é benéfico. Na análise de estabilidade da seção anterior deduzimos que $\mathrm{K_{pf}}$ tem que ser sempre maior que -1, logo, valores próximos de -1 (mais acima deste valor) podem resultar adequados para controlar impactos. Isto explica os resultados do trabalho de Volpe e Khosla [112] onde valores próximos de -1 resultaram benéficos para o controle de impacto, no entanto, esses autores chegaram a essa conclusão através de outra forma (simulações numéricas e usando uma equivalência entre o controlador explícito de força proporcional e o controle de impedância) e não através de uma análise como a apresentada aqui. A desvantagem de ter um ganho perto de -1 pode ver-se se substituímos este valor na eq.(2-44), assim temos $\mathrm{f_u} = \mathrm{f_e}$ [5], ou seja, teremos um controlador exercendo uma força igual à força de contato, a qual durante o impacto pode ser elevada e isto pode originar saturação nos atuadores.

Condição de Perda de Contato

Vamos avançar com nossa análise e deduziremos a condição matemática dos parâmetros ν_C e ζ para que a perda de contato aconteça. A fig.2.19 mostra a situação limite da perda de contato.

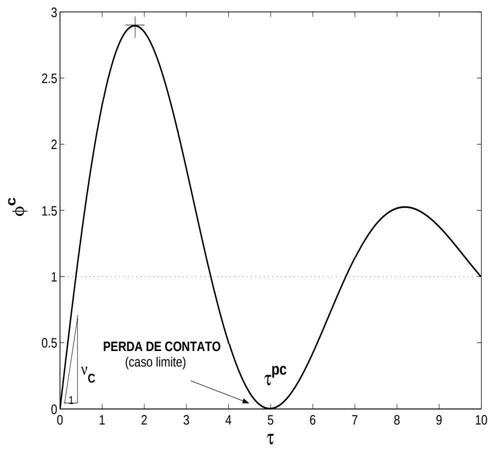


Figura 2.19: Situação limite para perda de contato.

[5]Ignorando a influência do termo $\mathrm{K_v}\ \dot{x}$.

Para o caso limite da perda de contato, temos a seguinte condição:

$$\Delta(\nu_C, \zeta) \doteq \phi^c(\tau = \tau^{pc}, \nu_C, \zeta) = 0 \tag{2-120}$$

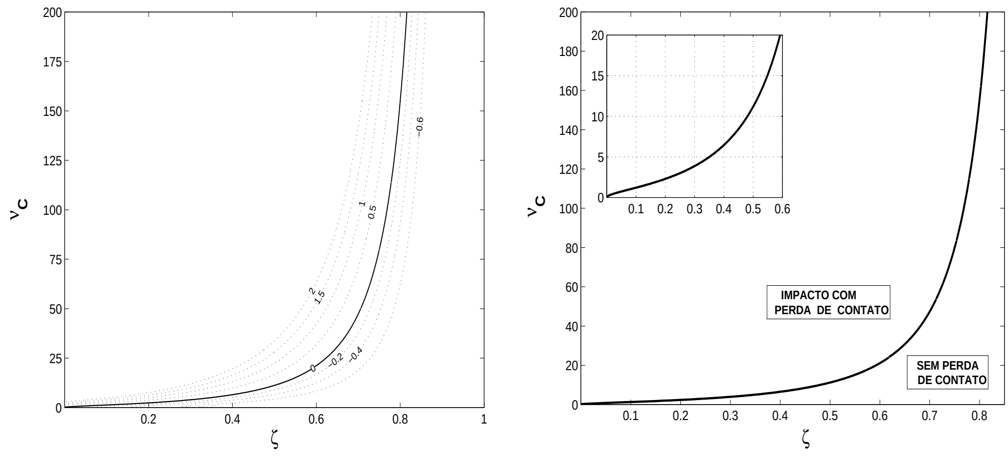
onde τ^{pc}, como indicado na fig.2.19, é o instante da perda de contato. A eq.(2-120) é a condição para perda de contato. Para determinar τ^{pc} usamos a seguinte relação:

$$\left[\frac{d\phi^c}{d\tau}\right]_{\tau=\tau^{pc}} = 0 \tag{2-121}$$

usando a eq.(2-113) na equação acima, após algumas contas, chegamos à seguinte relação:

$$\tau^{pc}(\nu_C, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left\{ \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) + \pi - \beta \right\} \tag{2-122}$$

Substituindo este resultado na eq.(2-120), temos finalmente o valor de Δ em função de dois parâmetros ν_C e ζ. A fig.2.20-a apresenta o gráfico da função $\Delta(\nu_C, \zeta)$ para vários valores dos parâmetros ν_C e ζ. Daqui podemos isolar curva para $\Delta(\nu_C, \zeta) = 0$ (fig.2.20-b). Esta curva representa então os valores limites dos parâmetros adimensionais do sistema ν_C e ζ para perda de contato. Valores acima da curva implica que haverá perda de contato, valores embaixo da curva implica que isto não acontecerá.

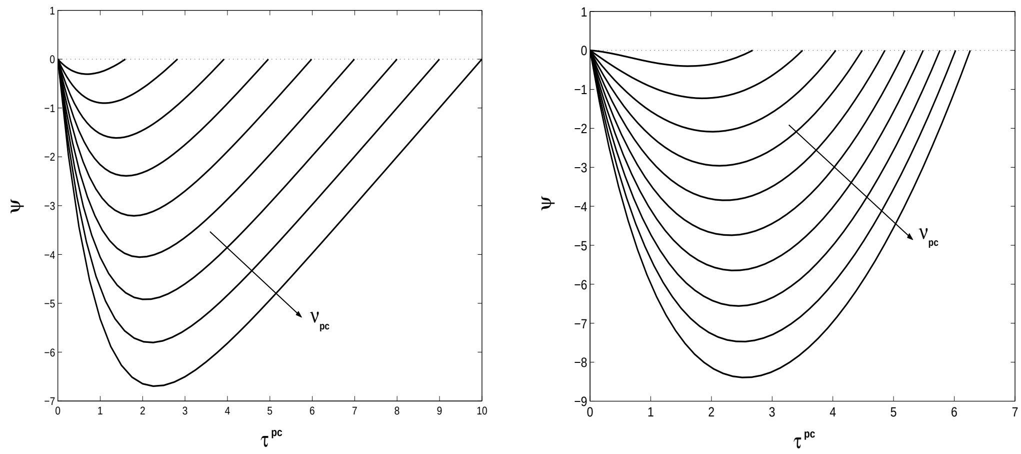


(a) (b)

Figura 2.20: Condição para perda de contato em manipuladores rígidos sob controle de força explícito proporcional (a) Superfícies de nível para a função $\Delta(\nu_C, \zeta)$. (b) Valores críticos para a velocidade de impacto adimensional: $\nu_C(\zeta)$, para o manipulador de um grau de liberdade sob controle explícito de força com alimentação direta unitária.

Recontato

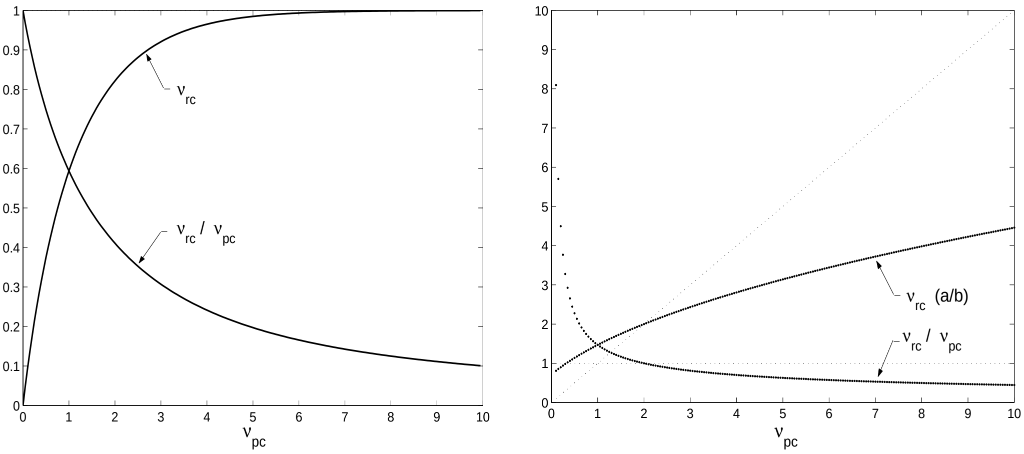
Suponhamos agora que o contato seja inesperadamente perdido. Diante dessa situação, a pergunta que cabe fazer é: como será o recontato do manipulador com o meio ? A velocidade de recontato será maior ou menor ? Para responder as questões é preciso fazer uma análise similar à apresentada acima mas utilizando a equação de movimento sem contato (exemplo, eq.(2-92) para o caso de controlador explícito de força proporcional). Fazendo esta análise com equações de movimento adimensionais tanto para o caso de um controle de força proporcional e de um integral, obtemos os gráficos apresentados na fig.2.21. Esses gráficos apresentam a trajetória adimensionalizada da extremidade para diferentes velocidades de perda de contato adimensional ν_{pc}.



(a) (b)

Figura 2.21: Trajetória durante a perda de contato de uma manipulador rígido para diferentes velocidades de perda de contato adimensional ν_{PC}. (a) Sob controle de força proporcional. (b) Sob controle de força integral.

Como pode-se observar, no caso do controle proporcional (fig.2.21-a), após certo valor da velocidade de perda de contato ν_{pc}, a velocidade de recontato, i.e. a velocidade com a qual o manipulador tocará a superfície pela segunda vez é constante (inclinação da curva da trajetória é a mesma). Isto não acontece com o manipulador sob controle integral (fig.2.21-b) em cujo caso o recontato pode acontecer com velocidades muito grandes. A partir destes resultados, podemos extrair os gráficos apresentados na fig.2.22, nos quais o valor da força de recontato (ν_{rc}) é graficada como função da velocidade de perda de contato (ν_{pc}) tanto para o controlador proporcional como para o controlador integral. Da fig.2.22-a, podemos concluir que no caso de controle de força proporcional, a velocidade de recontato é sempre menor do que a velocidade e perda de contato. Isto não acontece com o manipulador sob controle de força integral (fig.2.22-b). Neste caso, existe uma faixa de ($0 \leq \nu_{pc} \leq 2$) onde o recontato pode acontecer com velocidade maior que da perda. Então, este gráfico está em concordância com os resultados de simulação que foram apresentados na fig.2.12. O autor acredita que a causa de ter um segundo impacto maior do que o primeiro é devido ao *windup* de integração. A minha explicação é a seguinte: quando o manipulador perde o contato inesperadamente, o erro da força de contato é o maior valor positivo possível: $\mathrm{e_f} = \mathrm{f_e}^d - \mathrm{f_e} = \mathrm{f_e}^d$. Logo, esse erro, que é grande e positivo, é integrado pelo controlador durante todo o tempo que o manipulador está sem contato, trazendo como conseqüência que a força de controle, que é calculada desta maneira: $\mathrm{f_u} = \mathrm{K_{fi}} \int_{t^{pc}}^{t^{rc}} \mathrm{f_e}^d dt$, cresça rapidamente acelerando o manipulador contra a superfície.

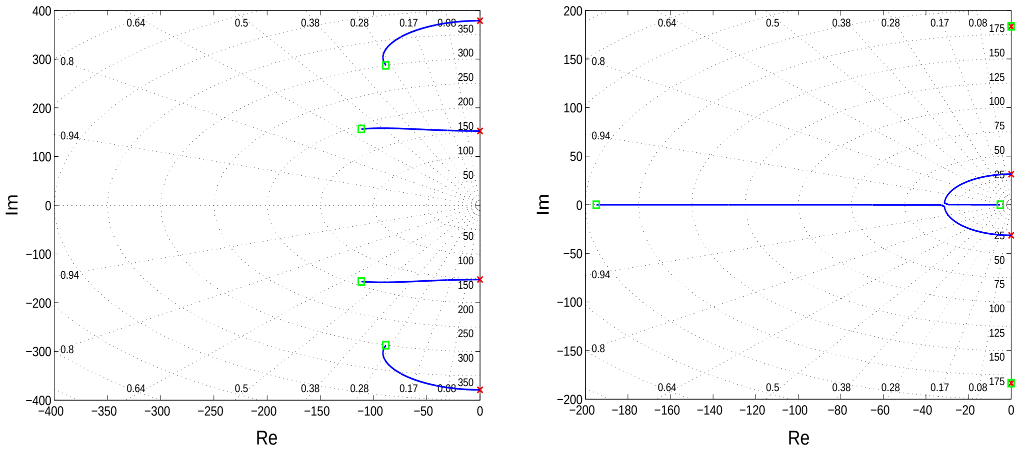


(a) (b)

Figura 2.22: Velocidade de recontato adimensional ν_{RC} como função da velocidade de perda de contato adimensional ν_{PC}. (a) Sob controle de força proporcional. (b) Sob controle de força integral.

2.5.2 Manipulador Flexível

Uma análise para manipuladores flexíveis, como o realizado na subseção anterior para o caso do manipulador rígido, é difícil de se obter de modo analítico. No entanto, a prática, as simulações e os meus resultados prévios indicam que o amortecimento do sistema desempenha um papel crucial durante a transição do contato. Considere-se o manipulador flexível apresentado na fig.2.5. Este manipulador tem dois modos de vibração e portanto também dois coeficientes de amortecimento. Para aumentar estes coeficientes, podemos aumentar o amortecimento da junta ($\mathrm{B_1}$ fig.2.5) de forma ativa ou passiva. Curiosamente, através de simulações verifiquei que este amortecimento B_1 só é efetivo quando o grau de flexibilidade do manipulador é pequeno (K_m/K_e grande), como no manipulador descrito no trabalho de Oh e Chung [79]. Vejamos os resultados obtidos para o lugar geométrico das raízes do manipulador variando o amortecimento da junta B_1 (fig.2.23).



(a) (b)

Figura 2.23: Diagrama do lugar geométrico das raízes para o manipulador flexível do *Modelo Simplificado 2*. (a) Para o caso $K_m/K_e = 1$, variando o amortecimento da junta B_1 de 0 até 400. (b) Para o caso $K_m/K_e = 1 \times 10^{-2}$, variando o amortecimento da junta B_1 de 0 até 200. Parâmetros usados em ambos os casos : $M_1 = 1\ Kg$, $M_2/M_1 = 3$ e $K_e = 1 \times 10^5$.

Inicialmente o manipulador quase não tem amortecimento e portanto os pólos ficam quase sob eixo imaginário. Logo após aumentar o amortecimento B_1, observamos claramente o efeito da flexibilidade. Quando o manipulador é pouco flexível ou seja quando $K_m/K_e = 1$ (fig.2.23-a), o amortecimento da junta B_1 consegue amortecer os dois modos do manipulador flexível. Já quando a flexibilidade do manipulador é maior ou seja, quando $K_m/K_e = 1 \times 10^{-2}$ (fig.2.23-b), o amortecimento da junta só consegue amortecer um dos modos, sendo que o outro praticamente não é afetado. Neste caso, a falta de amortecimento em um dos modos do manipulador fará que o sistema vibre muito após o primeiro impacto e portanto acontecendo após isso muitos outros impactos e por conseguinte tendo a qualidade do pré-transiente de contato muito deteriorada. Uma solução que será proposta neste trabalho para o caso de controle de impacto em manipuladores flexíveis é o amortecimento através de B_m na fig.2.5. Esta variável representa o amortecimento do elemento flexível do manipulador, o qual poderá se aumentado através do uso de pastilhas piezoelétricas, para o caso de uma manipulador com elo flexível. Outro problemas que pode haver durante o controle é o derramamento de modos (Spillover) [105] já que os modos de altas freqüências podem ser excitados facilmente devido aos impactos e com isso provocar instabilidade. O controle a ser projetado terá que levar em consideração esse problema. No próximo capítulo é desenvolvido o modelo mais complexo para um manipulador robótico, incluindo flexibilidade e pastilhas piezoelétricas. Este manipulador será utilizado para testar a efetividade dos novos controladores desenvolvidos no presente trabalho.