

2

Modelos analíticos para veículos deformáveis

Apresenta-se a seguir algumas formas de modelagem analítica de colisões entre veículos deformáveis, de modo a caracterizar o problema e estabelecer uma base teórica para sua compreensão antes de se descrever os modelos computacionais e desenvolver o tratamento a ser dado a este problema no presente trabalho.

2.1.

Modelo analítico (Genta – 1997 / Macmillan - 1983)

Uma modelagem analítica baseada em elementos flexíveis não lineares, desenvolvida em Genta – 1997 e Macmillan – 1983, é discutida nos itens seguintes. Considerou-se esta primeira abordagem ideal para um primeiro contato com o complexo problema de análise estrutural e dinâmica não linear, no qual diferentes tipos de materiais e componentes estão presentes.

2.1.1.

Colisão frontal contra um obstáculo fixo

Considerando uma colisão frontal contra um obstáculo fixo, tal como em um teste de impacto, a força exercida pelo obstáculo sobre o veículo varia no tempo como mostrado na Figura 2a, onde se nota que a curva gerada é bastante irregular, já que a estrutura frontal do veículo sofre grandes modificações em sua forma durante o processo de deformação graças a grandes deslocamentos resultantes do dobramento de elementos esbeltos da estrutura. Entretanto, a curva experimental pode ser aproximada por uma função $F(t)$, sem perder as suas características mais importantes no que tange a descrição do comportamento do veículo (curva tracejada na Figura 2a).

A força é relacionada à aceleração do veículo de modo complexo, pois, como a geometria do último varia no tempo, cada um dos seus pontos possui sua própria aceleração. Entretanto, com a exceção da parte frontal que sofre o processo de deformação, o veículo pode ser considerado como um corpo rígido

e a posição do centro de massa como fixa à parte não deformada do veículo. A aceleração pode então ser relacionada proporcionalmente com a força $F(t)$ de acordo com a massa do veículo. Num teste de colisão a aceleração é usualmente medida por acelerômetros localizados no veículo, possibilitando a obtenção direta da força, além da velocidade e da deformação do veículo.

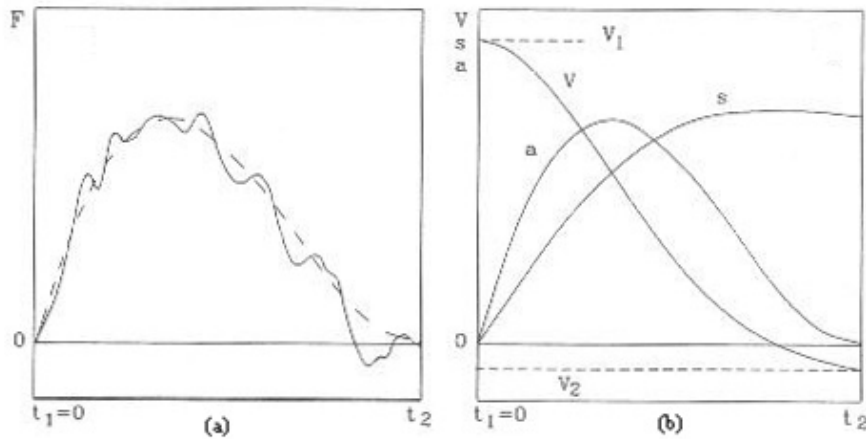


Figura 2: (a) Força que o veículo recebe do obstáculo durante um teste de impacto como uma função de tempo. Curva experimental e lei empírica matemática. (b) Histórico $V(t)$, $a(t)$ e $s(t)$ obtidos através da lei empírica $F(t)$.

Segundo Genta -1997, a seguinte expressão pode ser utilizada para modelar a aceleração do veículo durante o choque:

$$a = \tau(1-\tau)^\beta \frac{cV_1}{t_2}, \quad (1)$$

onde V_1 é a velocidade inicial do veículo (antes do choque), t_2 é a duração do impacto, $\tau = t/t_2$ é um tempo adimensional ($0 \leq \tau \leq 1$) e c e β são constantes adimensionais. Percebe-se que tal expressão possui derivada temporal (JERK) nula no final da colisão ($t = t_2$) e diferente de zero no início da colisão ($t = 0$), confirmando a interpretação física do fenômeno.

A velocidade pode ser obtida integrando-se a Equação 1:

$$V = -cV_1 \left[\frac{(1-\tau)^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{(1-\tau)^{\beta+2}}{\beta+2} \right] + K \quad (2)$$

A constante de integração K pode ser computada fazendo-se $t = 0$ e $V=V_1$:

$$K = V_1 \left[1 + \frac{c}{(\beta+1)(\beta+2)} \right] \quad (3)$$

Calculando-se as velocidades nos instantes t_1 e t_2 (V_1 e V_2) pela Equação 2 e igualando a razão entre ambas ao coeficiente de restituição ($e^* = -V_2/V_1$), tem-se:

$$c = -(1 + e^*)(\beta + 1)(\beta + 2) \quad (4)$$

A expressão da velocidade é portanto:

$$V = V_1 \{ (1 + e^*) [1 + \tau(\beta + 1)] (1 - \tau)^{\beta+1} - e^* \} \quad (5)$$

Da integral da expressão anterior tem-se a posição s :

$$s = V_1 t_2 \left\{ -(1 + e^*) \left[(1 - \tau)^{\beta+2} - \frac{\beta + 1}{\beta + 3} (1 - \tau)^{\beta+3} \right] - e^* \tau + K_1 \right\} \quad (6)$$

Se no instante $t = 0$ a distância for assumida nula, s representará a deformação da parte frontal do veículo e pode-se, então calcular o valor da constante de integração K_1 :

$$K_1 = \frac{2(1 + e^*)}{\beta + 3} \quad (7)$$

A expressão final da deformação é portanto:

$$s = V_1 t_2 \left(\frac{1 + e^*}{\beta + 3} \{ 2 - (1 - \tau)^{\beta+2} [2 + (\beta + 1)\tau] \} - e^* \tau \right) \quad (8)$$

Para $\tau = 1$, o deslocamento fornecido representa a deformação residual do veículo s_2 :

$$s_2 = V_1 t_2 \left[\frac{2(1 + e^*)}{\beta + 3} - e^* \right] \quad (9)$$

No caso de uma colisão elástica ($V_2 = -V_1$) a deformação residual deve se anular: Logo, se $e^* = 1$ então $s_2 = 0$, o que gera uma primeira relação entre β e e^* : $\beta = 1$ se $e^* = 1$.

Os parâmetros β e e^* que caracterizam o impacto dependem de vários fatores, que vão desde as características estruturais do veículo até o tipo de impacto e, no caso de colisão frontal contra um obstáculo fixo, da velocidade de impacto V_1 e do instante t_2 .

Uma característica importante do veículo é a sua rigidez no instante em que entra em contato com o obstáculo, isto é, seu módulo de deformação $K = (dF/ds)_{\tau=0}$ (Figura 3). Com algumas considerações cinemáticas tem-se:

$$K = m \left(\frac{da}{ds} \right)_{\tau=0} = m \left(\frac{da}{dt} \right)_{\tau=0} \left(\frac{ds}{dt} \right)_{\tau=0}^{-1} = \frac{m}{V_1} \left(\frac{da}{dt} \right)_{\tau=0} \quad (10)$$

das Equações 1 e 10, tem-se:

$$K = \frac{m(1+e^*)(\beta+1)(\beta+2)}{t_2^2} \quad (11)$$

O valor de K pode ser obtido através dos testes de colisão, de onde se extraí valores entre 1 e 2 MN/m registrados na literatura. Uma representação gráfica qualitativa da variação força F com a deformação s é mostrada na Figura 3. O comportamento inelástico do veículo e o ciclo de histerese são claramente apresentados. A área abaixo da linha compreendida entre os pontos A e B é a energia absorvida pelo veículo do instante t_1 ao instante t_i no qual a deformação máxima é alcançada e, no caso da colisão contra um obstáculo rígido fixo, se iguala à energia cinética do veículo.

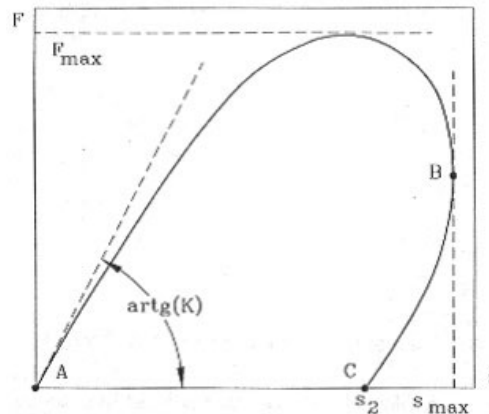


Figura 3: Força recebida pelo veículo durante uma colisão frontal contra o obstáculo como uma função da deformação s .

A área abaixo da linha do ponto B ao ponto C é a energia que é restituída na forma de energia cinética durante o choque, no intervalo desde o instante t_i ao instante t_2 . Se $e^* = 0$ tal área se anula e $s_2 = s_{\text{máx}}$. Se ao contrário $e^* = 1$ a linha BC é sobreposta à linha AB e a área do ciclo de histerese se anula.

O gráfico $F \times s$ é normalmente obtido através de testes de colisão, quer sejam realizados em laboratório ou simulados por modelos numéricos. A simulação numérica é uma tarefa muito complexa, devido, conforme já destacado, à geometria da parte frontal do veículo e às não linearidades envolvidas.

A função $F(s)$, obtida a partir do gráfico empírico $F(t)$, é considerada independente da taxa de deformação ds/dt . Apesar de tal hipótese não possuir fundamento teórico, segundo Genta-1997, é justificada pelo fato de não ser contradita pelos dados experimentais para os casos em que a taxa de deformação não é muito elevada.

O valor médio da força recebida pelo veículo $\bar{F} = \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} F dt$ pode ser computado facilmente levando-se em conta que o impulso total recebido pelo veículo é igual à variação da quantidade de movimento:

$$\bar{F} = m \frac{V_2 - V_1}{t_2} = -m \frac{V_1}{t_2} (1 + e^*) \quad (12)$$

Para um valor médio da força $\bar{F}$ pequeno as deformações permanentes são desprezíveis e o impacto é quase elástico, ou seja, $e^* \approx 1$. Com o aumento da força a colisão se torna mais inelástica, isto é, e^* diminui. Com estas características, uma possível aproximação da dependência do coeficiente de restituição e^* com relação à força média $\bar{F}$ é através de uma exponencial (Figura 4):

$$e^* = e^{-\bar{F}/K_r}, \quad (13)$$

onde K_r , chamado de *módulo de resistência do impacto*, é o valor de $-F$ para o qual o coeficiente de restituição assume o valor $e^* = 1/e = 0,368$. O parâmetro K_r também pode ser obtido através de um teste de impacto. Pelas Equações 10 e 11, tem-se que:

$$K_r = m \frac{V_1(1 + e^*)}{t_2 \ln(1/e^*)}, \quad (14)$$

e, segundo Genta-1997, valores entre 40 e 100 kN para K_r são encontrados.

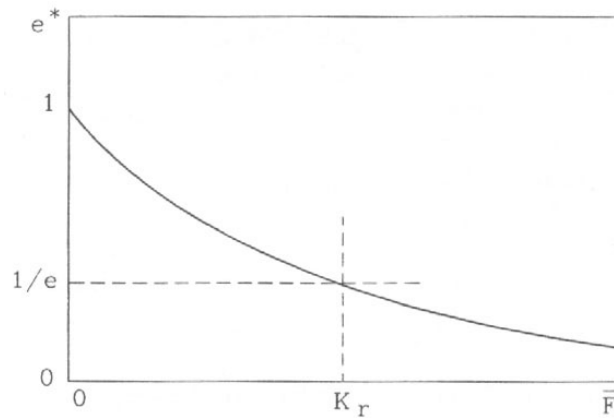


Figura 4: Gráfico $e^*(\bar{F})$ aproximado pela Equação 13.

Conforme já ressaltado, a constante β depende de e^* , assumindo valor unitário quando $e^* = 1$ e aumentando quando e^* diminui. Assume-se que, ao menos para caso de impactos fortemente inelásticos, isto é, $e^* \cong 0$, $\beta(e^*)$ pode ser aproximado como:

$$\beta = \beta_0 - (\beta_0 - 1)e^* \quad (e^* \ll 1), \quad (15)$$

que, embora seja definida para $e^* \approx 0$, fornece o resultado correto também para $e^* = 1$ ($\beta=1$).

Assim como $\beta > 1$, β_0 também é sempre maior que a unidade e adimensional, e pode ser considerado como característica do veículo, sendo referido como *índice estrutural*. Um grande valor de β_0 caracteriza veículos com uma parte dianteira com rigidez elevada. Segundo Genta, seus valores são normalmente próximos a 2.

Os parâmetros K , K_r e β_0 caracterizam completamente um veículo em uma colisão frontal contra um obstáculo rígido. Uma vez aferidos estes valores, é possível se determinar $F(t)$, $a(t)$ e $s(t)$ através das condições de colisão, a saber a velocidade V_1 e a massa do veículo m .

Genta-1997 apresenta as Tabelas 1 e 2 com valores obtidos em testes de colisão publicados por fabricantes americanos e europeus.

	BMC Mini	BMC 1100	Ford Anglia	BMC 1800
m [kg]	720	950	1000	1250
V ₁ [m/s]	14	11,5	14	14
e*	0,10	0,08	0,5	0,11
t ₂ [ms]	92	102	103	97
β ₀	2,35	2,79	2,89	2,16
K [MN/m]	1,27	1,67	1,81	1,80
K _τ [kN]	52,3	45,8	47,6	90,7

Tabela 1: Parâmetros obtidos através de testes de colisão em alguns veículos de passageiros europeus.

	Sub Compacto	Compacto	Intermediário	Standard 71/72	Standard 73/74
m [kg]	1135	1545	1820	2045	2045
V ₁ [m/s]	12	12	10,5	10	10,3
e*	0,01	0,01	0,20	0,20	0,20
t ₂ [ms]	102	102	151	147	143
β ₀	2,50	2,50	2,00	2,00	2,00
K [MN/m]	1,60	2,17	1,03	1,09	1,16
K _τ [kN]	28,6	38,8	96,7	93,6	108,8

Tabela 2: Parâmetros obtidos através de testes de colisão em alguns veículos de passageiros americanos.

Para a resolução do problema direto, isto é, obter as condições após a colisão, com destaque para s₂ e V₂, a partir de V₁. É possível eliminar t₂ pela substituição da Equação 14 na Equação 11, obtendo-se:

$$KmV_1^2 = K_r^2 \left[\ln\left(\frac{1}{e^*}\right) \right] \frac{(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 + e^*} \quad (16)$$

Substituindo-se a Equação 15 na Equação 2 se tem:

$$\frac{KmV_1^2}{K_r^2} = \ln\left(\frac{1}{e^*}\right) \frac{(\beta_0 + 1)(\beta_0 + 2) - e^*(\beta_0 - 1)(2\beta_0 + 3) + e^{*2}(\beta_0 - 1)^2}{1 + e^*}, \quad (17)$$

que pode ser resolvida numericamente em e^* e, portanto, permite solucionar completamente o problema direto.

O problema inverso, isto é, obter as condições antes da colisão, com destaque para V_1 , através da deformação s_2 é também facilmente resolvido. Pelas Equações 7, 11 e 14, tem-se:

$$s_2 \frac{K}{K_r} = \frac{\ln(1/e^*)(\beta + 1)(\beta + 2)[2(1 + e^*) - (\beta + 3) + e^*]}{\beta_0 + 3} \quad (18)$$

Substituindo-se a Equação 15 na expressão acima, obtém-se:

$$s_2 \frac{K}{K_r^2} = \ln\left(\frac{1}{e^*}\right) [e^{*2}(\beta_0 - 1)^2 - e^*(2\beta_0^2 + \beta_0 - 3) + 3\beta_0 + \beta_0 + 2] \frac{e^*(e^* - 1)(\beta_0 - 1) + 2}{-e^*(\beta_0 - 1) + \beta_0 + 3} \quad (19)$$

que resolvida numericamente em e^* permite a solução do problema inverso.

Considerando o exemplo apresentado em Genta-1997, onde um veículo com $\beta_0=2$, $K=1,2$ MN/m, $K_r=65$ kN e $m=1000$ kg colide contra um obstáculo a 20 m/s, a solução numérica da Equação 17 leva a $e^*= 0,0416$, logo $\beta= 1,958$ e $t_2= 0,1$ s. Os gráficos $F(t)$, $a(t)$, $V(t)$ e $s(t)$ são mostrados na Figura 5.

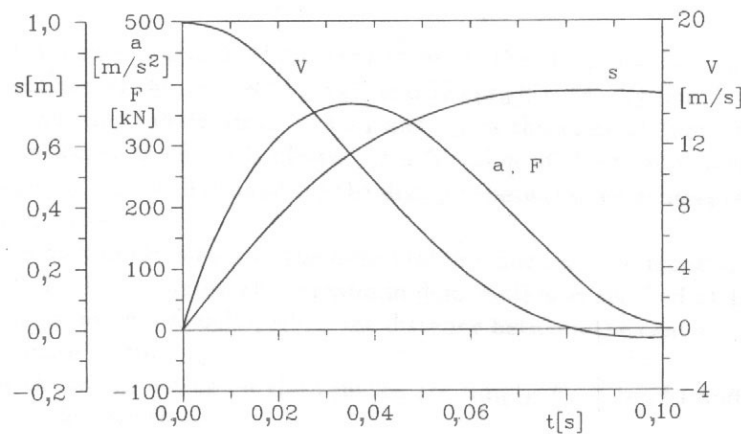


Figura 5: Gráficos $F(t)$, $a(t)$, $V(t)$ e $s(t)$.

2.1.2. Colisão frontal entre veículos

A colisão frontal entre dois veículos também pode ser modelada da mesma forma, assumido-se, para tal, que a superfície de contato é plana e as características do impacto, particularmente a $F(s)$, são independentes da taxa de deformação. Cada veículo pode então ser modelado como uma massa pontual, provido de uma mola não-linear, cujas características (K , K_t e β_0) são as mesmas vistas para a colisão contra um obstáculo fixo.

As taxas de deformação são positivas quando as molas são comprimidas:

$$\begin{aligned} v_{kA} &= v_b - v_A \\ v_{kB} &= -v_b + v_B \end{aligned}$$

onde v_{kA} e v_{kB} são as taxas de deformação dos veículos A e B respectivamente, v_b é a velocidade da área de contato entre os veículos e v_A e v_B são as velocidades dos veículos correspondentes. A velocidade relativa V_R é portanto:

$$V_R = v_B - v_A = -(v_{kA} + v_{kB})$$

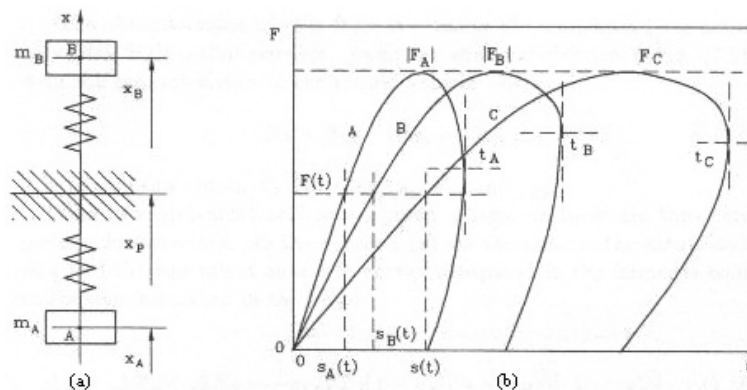


Figura 6: Colisão frontal entre veículos. (a) modelo físico; (b) forças como funções da deformação dos veículos.

Se as curvas $F(s)$ para os dois veículos são conhecidas, um gráfico do tipo mostrado na Figura 6(b) pode ser esboçado. Como a força total atuante no obstáculo virtual deve ser nula, ou seja, em cada instante $|F_A| = |F_B|$, os valores de s nas curvas $|F_A(s_A)|$ e $|F_B(s_B)|$ para um mesmo valor de força fornecem as deformações s_A e s_B em um mesmo instante. Uma terceira curva, $F_C(s)$, na qual a força é representada como uma função da deformação total $s = s_A + s_B$, isto é, da variação da distância entre os centros de massa, pode ser obtida.

Ressalta-se que os valores máximos das deformações não ocorrem necessariamente no mesmo instante: na Figura 6(b) a deformação máxima é obtida em instantes t_A e t_B para os respectivos veículos, enquanto a distância entre seus centros de massa é mínima no instante t_C .

Como as forças atuantes nos veículos são $F_A = m_A \ddot{x}_A$ e $F_B = m_B \ddot{x}_B$, tem-se que:

$$F_A = -F_B = \dot{V}_R \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \quad (20)$$

Assume-se que a derivada da velocidade relativa V_R possui uma variação de tempo do mesmo tipo considerado para a aceleração no choque contra barreira fixa expressa na Equação 1,

$$\dot{V}_R = -\frac{cV_{R1}}{t_2} \tau(1-\tau)^\beta, \quad (21)$$

onde $\tau = t/t_2$,

Em vez de m , K , V e s , utilizados na modelagem de choque contra obstáculo fixo, as equações agora contêm:

$$m_c = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}, \quad K_c = \frac{K_A K_B}{K_A + K_B}, \quad V_R, \quad s_c = s_A + s_B$$

Assumindo-se que as características dos veículos e a deformação residual de um deles, s_{A2} , são conhecidas, como a curva $F(s)$ é a mesma que caracteriza o impacto contra a barreira fixa, através de s_{A2} é possível obter-se diretamente e_A^* da Equação 16 e conseqüentemente a velocidade V_{A1}' , que causa deformação residual equivalente s_{A2} em um impacto contra obstáculo rígido, da Equação 19, levando-se em conta que $\beta_A = \beta_{0A} - (\beta_{0A} - 1)e_A^*$.

O problema inverso, com conhecimento da deformação residual dos veículos, pode ser resolvido de maneira iterativa, arbitrando um valor para tal deformação e calculando o respectivo valor para a velocidade relativa até a convergência com o valor desejado.

Genta – 1997 apresenta os resultados fornecidos pelo modelo para uma colisão frontal entre dois veículos, sendo o primeiro com massa de 720 kg

($m_A=720$ kg) a uma velocidade de 96 km/h ($V_{A1}=26,7$ m/s) e o segundo com uma massa de 1250 kg ($m_B=1250$ kg) a uma velocidade de 47 km/h ($V_{B1}=13,1$ m/s). Os respectivos coeficientes são relacionados abaixo:

$$\beta_{0A} = 2,35, \beta_{0B} = 2,16$$

$$K_A = 1,27 \text{ MN/m}, K_B = 1,80 \text{ MN/m};$$

$$K_{\tau A} = 52,3 \text{ kN}, K_{\tau B} = 90,7 \text{ kN};$$

O coeficiente de restituição e as velocidades após o choque dos dois veículos estão reproduzidos abaixo e são posteriormente comparados com os resultados da simulação de choque similar no item 5.3.3:

$$e_B^* = 0,048, V_{A2} = 0,234 \text{ m/s}, V_{B2} = 2,144 \text{ m/s}$$

2.1.3. Colisão oblíqua entre Veículos

Segundo Genta – 1997, se for possível encontrar os valores relevantes para impactos laterais ou traseiros, a dependência das características K , K_τ e β_0 em relação ao ângulo de impacto θ (Figura 7) pode ser aproximada por dois arcos de elipse, com eixos iguais aos valores aferidos K_f , para as características da região frontal, K_l , para a região lateral e K_p para a parte posterior do veículo.

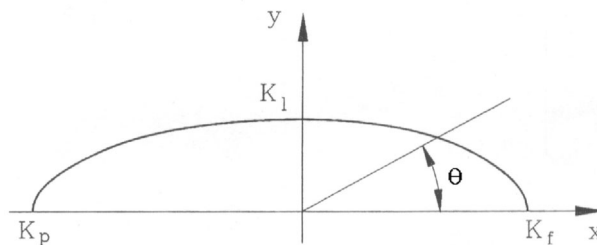


Figura 7: Diagrama polar $K(\theta)$ aproximado por dois arcos de elipse.

Seguindo a notação da figura, a função $K(\theta)$ pode ser expressa por:

$$K = \begin{cases} \frac{K_f K_l}{\sqrt{K_f \sin^2(\theta) + K_l \cos^2(\theta)}}, & \text{para } 0 \leq \theta \leq 90^\circ \\ \frac{K_p K_l}{\sqrt{K_p \sin^2(\theta) + K_l \cos^2(\theta)}}, & \text{para } 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \end{cases}$$

Exemplos de colisões oblíquas, onde poder-se-ia aplicar estas relações são dados na Figura 8.

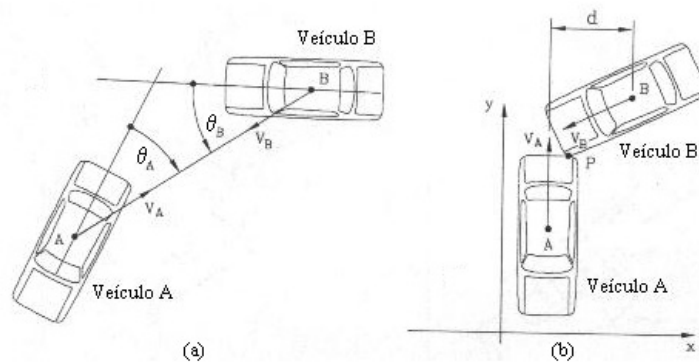


Figura 8: (a) Colisão oblíqua central. (b) Colisão oblíqua na qual o veículo A colide com a parte frontal do veículo B.

Em Macmillan – 1983 é apresentado um estudo mais detalhado deste modelo, onde inclui-se a determinação dos parâmetros dos veículos e comparação com outros modelos analíticos.

2.2. Modelo Maxwell (Huang – 2002)

Para uma melhor compreensão do problema de colisão foi empregado inicialmente um modelo conhecido na literatura como *Modelo de Maxwell*, no qual faz-se uso de um elemento massa–mola–amortecedor em série para representar o choque de um veículo contra uma barreira rígida (Figura 9) e onde a mola representa a deformação elástica sofrida e o amortecedor a deformação plástica. Devido a seu comportamento, detalhado a seguir, este modelo se torna adequado a representações de colisões que atingem tanto parcialmente quanto completamente uma região de um veículo, possibilitando a discretização utilizada no modelo bidimensional criado (Item 4.3), sendo, então seus elementos elastoplásticos a base para os modelos mais complexos subsequentes.

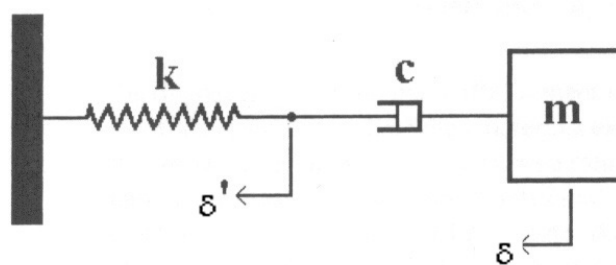


Figura 9: Representação física do modelo utilizado.

As equações que definem a dinâmica deste modelo são:

$$m\ddot{\delta} = -c(\dot{\delta} - \dot{\delta}') \\ c(\dot{\delta} - \dot{\delta}') = k\delta'$$

cujas derivadas levam a:

$$m\ddot{\delta} = -c(\ddot{\delta} - \ddot{\delta}') \\ c(\ddot{\delta} - \ddot{\delta}') = k\dot{\delta}'$$

que finalmente somadas definem o modelo matemático dado por:

$$\ddot{\delta} + \frac{k}{c}\ddot{\delta} + \frac{k}{m}\dot{\delta} = 0$$

cuja equação característica é:

$$s(s^2 + \frac{k}{c}s + \frac{k}{m}) = 0$$

Dependendo do coeficiente de amortecimento, este modelo pode apresentar características assintóticas. O valor de amortecimento abaixo do qual obtém-se este comportamento do sistema é chamado de *coeficiente de amortecimento de transição* ($c^* = \sqrt{km} / 2$).

Para um amortecimento $c < c^*$, tem-se $(\frac{k}{c})^2 > 4\frac{k}{m}$ e, da equação característica, encontra-se um pólo nulo ($s_0=0$) e dois reais negativos $s_1=a+b$ e $s_2=a-b$, onde :

$$a = \frac{-k}{2c} \quad e \quad b = \sqrt{(\frac{k}{2c})^2 - \frac{k}{m}}$$

Se $s_1 > s_2$:

$$\begin{aligned} \delta &= d_0 e^{-s_0 t} + d_1 e^{-s_1 t} + d_2 e^{-s_2 t} \\ \dot{\delta} &= -d_0 s_0 e^{-s_0 t} - d_1 s_1 e^{-s_1 t} - d_2 s_2 e^{-s_2 t} \\ \ddot{\delta} &= -d_0 s_0^2 e^{-s_0 t} + d_1 s_1^2 e^{-s_1 t} + d_2 s_2^2 e^{-s_2 t} \end{aligned}$$

Para uma aceleração inicial nula e velocidade inicial v , determinam-se as constantes que definem a solução para a deformação dinâmica do sistema:

$$d_0 = \frac{v(s_1 + s_2)}{s_1 s_2} \quad d_1 = \frac{v s_2}{s_1(s_1 - s_2)} \quad d_2 = \frac{v s_1}{s_2(s_1 - s_2)}$$

A resposta do sistema é, então, a integração de um comportamento sobreamortecido não ocorrendo restituição de parte da deformação, conforme mostrado na Figura 10.

Para um amortecimento $c > c^*$, $(\frac{k}{c})^2 < 4 \frac{k}{m}$ e, da equação característica, tem-se um pólo nulo (s_0) e dois complexos negativos $s_1 = a + bi$ e $s_2 = a - bi$, onde:

$$a = \frac{-k}{2c} \text{ e } b = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{k}{2c}\right)^2}, \text{ logo:}$$

$$\delta = d_0 e^{s_0 t} + e^{at} [d_1 \sin(bt) + d_2 \cos(bt)]$$

$$\dot{\delta} = e^{at} [(ad_1 - bd_2) \sin(bt) + (bd_1 + ad_2) \cos(bt)]$$

$$\ddot{\delta} = e^{at} [(a^2 - b^2)d_1 - 2abd_2) \sin(bt) + ((a^2 - b^2)d_2 - 2abd_1) \cos(bt)]$$

Para as mesmas condições iniciais em $t=0$, determina-se as constantes que definem a deformação do sistema:

$$d_0 = d_2 = \frac{2av}{a^2 + b^2}, \quad d_1 = \frac{v - ad_2}{b}$$

A resposta do sistema é, neste caso, a integração de um comportamento subamortecido, onde ocorre recuperação da deformação elástica

Para um amortecimento igual ao de transição, $c=c^*$, tem-se $(\frac{k}{c})^2 = 4 \frac{k}{m}$ e existe uma única raiz real $s=-w$, onde $w = \sqrt{k/m}$ é a *freqüência natural de oscilação* e a deformação é expressa abaixo:

$$\delta = \frac{v}{w} [2 - (wt + 2)e^{-wt}]$$

O comportamento deste sistema encontra-se ilustrado na Figura 10, onde se observa que o valor c^* é o amortecimento mínimo para que haja representação da restituição da deformação elástica decorrente da colisão. Apesar de normalmente valores de amortecimento maiores que o de transição serem mais representativos, valores de amortecimento menores podem ser usados para a simulação de choques localizados leves, onde quase não há restituição, e em colisões frontais com deslocamento (offset) onde o tempo de contato é elevado.

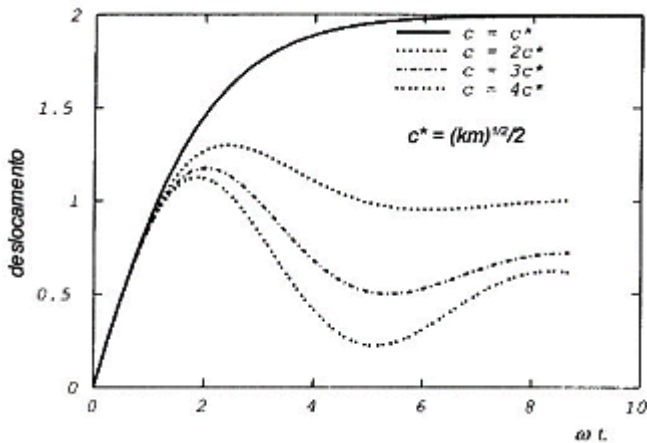


Figura 10: Comportamento dos sistemas mola-amortecedor em série, de acordo com o amortecimento viscoso.

2.3. Modelo para choque central – frontal entre dois veículos

Considerando um choque unidimensional entre dois veículos, cada um deles é representado por um elemento flexível mola – amortecedor em série ligados ao ponto de contato entre ambos P, suposto com massa m, conforme esquematizado na Figura 11, onde b_1 e K_1 e b_2 e K_2 são os amortecimentos viscosos e os coeficientes de rigidez referentes aos elementos flexíveis dos veículos 1 e 2 respectivamente e M_1 e M_2 as massas dos veículos.

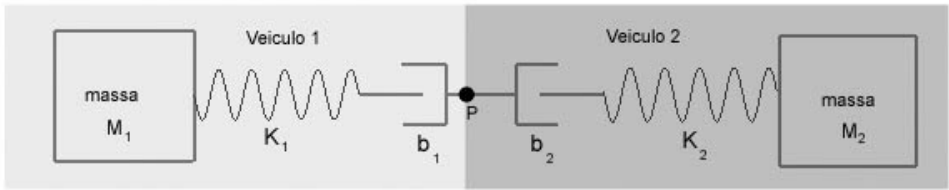


Figura 11: Esquema físico do modelo para colisões unidimensionais entre dois veículos.

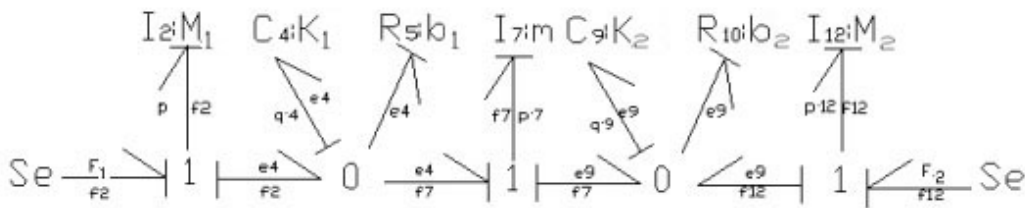


Figura 12: Modelo em grafo de ligação para colisão unidimensional entre dois veículos.

O modelo pode ser representado pelo grafo de ligação da Figura 12, de onde F_1 e F_2 são as forças externas não relacionadas diretamente com o impacto atuantes nos veículos, como tração e frenagem, e se extrai o seguinte equacionamento:

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{p_2}{l_2} & e_4 &= \frac{q_4}{C_4} & f_{12} &= \frac{p_{12}}{l_{12}} & f_5 &= \frac{e_4}{R_5} \\ f_7 &= \frac{p_7}{l_7} & e_9 &= \frac{q_9}{C_9} & f_{10} &= \frac{e_9}{R_{10}} \\ \dot{p}_2 &= F_1 - e_4 = F_1 - \frac{q_4}{C_4} \\ \dot{p}_7 &= e_4 - e_9 = \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_9}{C_9} \\ \dot{p}_{12} &= F_2 - e_9 = F_2 - \frac{q_9}{C_9} \\ \dot{q}_4 &= f_2 - f_5 - f_7 = \frac{p_2}{l_2} - \frac{e_4}{R_5} - \frac{p_7}{l_7} = \frac{p_2}{l_2} - \frac{q_4}{C_4 R_5} - \frac{p_7}{l_7} \\ \dot{q}_9 &= f_{12} + f_7 - f_{10} = \frac{p_{12}}{l_{12}} + \frac{p_7}{l_7} - \frac{q_9}{C_9 R_{10}} \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{p}_7 \\ \dot{p}_{12} \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/C_4 & -1/C_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/C_9 \\ 1/l_2 & -1/l_7 & 0 & -1/C_4 R_5 & 0 \\ 0 & 1/l_7 & 1/l_{12} & 0 & -1/C_4 R_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_7 \\ p_{12} \\ q_4 \\ q_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

ou, na forma de estado “mista”:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x} \\ \ddot{x}_2 \\ \dot{x}_{b1} \\ \dot{x}_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -K_1/M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_1/m & -K_2/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_2/M_2 \\ 1 & -1 & 0 & -K_1/b_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -K_2/b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x} \\ \dot{x}_2 \\ x_{b1} \\ x_{b2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/M_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/M_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde x_1 , x_2 e x são os deslocamentos dos veículos 1 e 2 e do ponto de contato P, respectivamente e x_{b1} e x_{b2} são os deslocamentos dos amortecedores que representam as deformações plásticas sofridas pelos veículos.

Não foram realizadas simulações com este modelo analítico, entretanto ele serviu de base para a análise apresentada posteriormente, que trata do

problema de dinâmicas discrepantes presente na simulação computacional de choque bidimensionais.