



**Henrique Pinheiro Saraiva**

**Projeto e avaliação de desempenho de  
controladores para quadricópteros**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Eduardo Costa da Silva

Coorientador: Prof. Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro  
Outubro de 2020



**Henrique Pinheiro Saraiva**

**Projeto e avaliação de desempenho de  
controladores para quadricópteros**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

**Prof. Eduardo Costa da Silva**

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Prof. Mauro Speranza Neto**

Coorientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. Carlos Roberto Hall Barbosa**

Departamento de Metrologia – PUC-Rio

**Prof. Karla Tereza Figueiredo Leite**

UERJ

**Prof. Antonio Candea Leite**

NMBU

Rio de Janeiro, 7 de Outubro de 2020

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Henrique Pinheiro Saraiva**

Graduou-se em Bacharel em Engenharia Elétrica com ênfase em Eletrônica na PUC-RIO ( Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro) em 2018.

#### Ficha Catalográfica

Saraiva, Henrique Pinheiro

Projeto e avaliação de desempenho de controladores para quadricópteros / Henrique Pinheiro Saraiva; orientador: Eduardo Costa da Silva; coorientador: Mauro Speranza Neto. – 2020.

175 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2020.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Elétrica – Teses. 2. Engenharia de Controle e Automação – Teses. 3. Controle Moderno. 4. Controle Clássico. 5. Quadricóptero. 6. Regulador Quadrático Linear. 7. PID. I. Silva, Eduardo Costa da. II. Speranza Neto, Mauro. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDD: 621.3

A minha família que sempre me apoiou  
e sempre esteve comigo.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador pela assistência e ensinamentos. Agradeço também ao meu co-orientador por ter me ajudado e ter me dado a ideia de realizar esse trabalho.

Agradeço também as agências CNPq, FAPERJ pelo apoio ao desenvolvimento e pesquisa . Agradeço especialmente a CAPES que subsidiou os meus estudos e, conseqüentemente, esse trabalho.

Gostaria de agradecer à todos os professores que tive durante a minha trajetória acadêmica. Sem eles não teria o conhecimento e a paixão por aprender e pesquisar que tenho.

Agradeço também aos funcionários do departamento de Engenharia Elétrica da PUC-RIO, especialmente aos técnicos dos laboratórios.

Por fim, à todos os integrantes da equipe AeroRIO especialmente a equipe do *IMAV*, fica minha gratidão pelos ensinamentos e pelas experiências de construir, testar e ganhar nossos prêmios com os nossos pequenos quadricópteros.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

## Resumo

Saraiva, Henrique Pinheiro; Silva, Eduardo Costa da; Speranza Neto, Mauro. **Projeto e avaliação de desempenho de controladores para quadricópteros**. Rio de Janeiro, 2020. 175p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Quadricópteros vêm sendo o objeto de estudo de inúmeras pesquisas ao redor do mundo. Diversas técnicas de controle já foram desenvolvidas, cada uma com seus prós e contras, objetivando o aprimoramento do desempenho destes veículos aéreos na consecução de tarefas específicas. Este trabalho foca na comparação de características de desempenho de técnicas de controle aplicadas a quadricópteros. Este trabalho mostra o projeto de controles modernos aplicados à quadricópteros apresentando tais técnicas, iniciando com a realimentação de estados com polos dominantes, passando pelo controle *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Por sua vez, visando otimizar o desempenho das técnicas de controle aqui estudadas, foram aplicadas técnicas de inteligência computacional para resolver um problema de otimização do LQR e para auxiliar no controle de forças dos rotores. Apresenta-se o projeto de um controle PID, que será usado como referência para as demais técnicas analisadas. O controle por realimentação de estados citado anteriormente obteve bons resultados. O tempo de assentamento foi o menor para o eixo Z, *overshoots* e o erro em regime permanente, os menores para os eixos X e Y. O controlador Fuzzy conseguiu fazer seu papel auxiliando a movimentação do quadricóptero. O GA otimizou o tempo de assentamento do LQR. Esse controle conseguiu alcançar os menores tempos de assentamento para os eixos X e Y, sendo mais rápido que a configuração original do LQR, escolhida por heurísticas. Com esse trabalho foi possível notar que os controladores modernos, realimentação de estado e LQR, tem um desempenho melhor que o controle PID de referência.

## Palavras-chave

Controle Moderno; Controle Clássico; Quadricóptero; Regulador Quadrático Linear; PID.

## Abstract

Saraiva, Henrique Pinheiro; Silva, Eduardo Costa da (Advisor); Speranza Neto, Mauro (Co-Advisor). **Design and performance evaluation of quadcopter controllers**. Rio de Janeiro, 2020. 175p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Quadcopters are researched all over the world. A lot of techniques had been developed and many others a blistering, each one with their pros and cons. The focus of this work is the comparison between the performance of some techniques most used in quadcopters, qualifying these techniques. This work shows the designing process of a quadcopter controllers, starting with state feedback with dominant poles and going to the Linear Quadratic Regulator controller. Focusing on optimizing the performance of those control strategies, computational techniques were used to solve an LQR optimization problem and to help choose the best inputs for the rotors. This work presents a PID controller that will be used as a reference for comparison. The state feedback controller with the Fuzzy position control performed very well, being the fastest one to settle on the Z axis, having the least overshoots and the lowest steady-state errors for the X and Y axes. The Fuzzy controller did what was supposed to do, smoothing and enabling a precise movement for the quadcopter. The GA also did what was supposed to do and improved the settling time for the LQR controller. It showed that it was a nice way to tune the Q and R matrixes, allowing the controller to be the fastest one to settle in the X and Y axes. As a result of this work, the modern control techniques, state feedback and LQR, performance better than the classic PID controller, used as reference.

## Keywords

Modern Control; Classic Control; Quadcopter; Linear Quadratic Regulator; PID.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>16</b>
1.1	Motivação	21
1.2	Objetivo	22
1.3	Estrutura textual	22
<b>2</b>	<b>Modelagem matemática de um quadricóptero</b>	<b>24</b>
2.1	Modelagem a partir das equações de Newton-Euler	24
2.2	Modelagem dos atuadores	27
2.3	Particularização do modelo	30
2.3.1	Torques aplicados em um quadricóptero	30
2.3.2	Forças aplicadas em um quadricóptero	34
2.3.3	Modelo de um quadricóptero	36
<b>3</b>	<b>Estratégias de controle</b>	<b>38</b>
3.1	Controle Clássico	38
3.1.1	Ações de controle	40
3.1.2	PID de referência	47
3.2	Controle moderno	52
3.2.1	Linearização do modelo	55
3.2.1.1	Modelo linearizado do quadricóptero	58
3.2.2	Controle por realimentação de estados com polos dominantes e controle de posição por Lógica Fuzzy	60
3.2.2.1	Realimentação de estados	61
3.2.2.2	Polos dominantes	63
3.2.2.3	Controle fuzzy de posição	66
3.2.3	Controle LQR	75
3.2.3.1	Otimização do controle: uma alocação de polos direcionada	75
3.2.3.2	Escolha ótima de <b>Q</b> e <b>R</b>	79
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>83</b>
4.1	Controle PID	83
4.2	Controle por realimentação de estados com polos dominantes e controle de posição por Lógica Fuzzy	101
4.3	Controle LQR	109
4.3.1	LQR com escolha manual das matrizes de custo	110
4.3.2	LQR com escolha inteligente das matrizes de custo usando GA na primeira configuração	119
4.3.3	LQR com escolha inteligente das matrizes de custo usando GA na segunda configuração	130
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>141</b>
5.1	Trabalhos futuros	146
<b>A</b>	<b>Conceitos e Ferramentas</b>	<b>153</b>

A.1	Matriz de rotação e Ângulos de Euler	153
A.2	Correção de aceleração para referenciais não inerciais	164
A.2.1	Correção da derivada vetor quantidade de movimento linear para equação de Newton em referencial móvel	173
A.2.2	Correção da derivada vetor quantidade de movimento angular para equação de Euler em referencial móvel	174

## Lista de figuras

Figura 1.1	Comportamento do controle <i>on-off</i> .	18
Figura 1.2	Diagrama de blocos do controle PID.	19
Figura 1.3	Diagrama de blocos do controle SFB.	20
Figura 2.1	Esquema simplificado de um drone apresentando as forças $F$ , o braço $L$ e a velocidade angular $\omega$	29
Figura 3.1	Diagrama de blocos de um sistema genérico.	39
Figura 3.2	Diagrama de blocos dos controles <b>P</b> , <b>I</b> e <b>D</b> .	41
Figura 3.3	Diagrama de blocos do controle PID em paralelo.	45
Figura 3.4	Diagrama de blocos do controle PID proposto nesta seção.	48
Figura 3.5	Diagrama de blocos do controle PID para a <i>Atitude</i> .	50
Figura 3.6	Rede RLC.	53
Figura 3.7	Sistema massa-mola.	54
Figura 3.8	Diagrama de blocos do sistema de controle com realimentação de estados ( <i>state feedback</i> ) proposto nesta seção.	61
Figura 3.9	Diagrama de blocos de um sistema de controle com o <i>state feedback</i> .	62
Figura 3.10	Funções de pertinência para o eixo X.	70
Figura 3.11	Funções de pertinência para o eixo Y.	71
Figura 3.12	Funções de pertinência para o eixo Z.	72
Figura 3.13	Representação do veículo alinhado, à esquerda, e o veículo inclinado, à direita. Demonstrando a decomposição de forças;	73
Figura 3.14	Diagrama de blocos do sistema de controle LQR.	79
Figura 4.1	Gráfico de posição do veículo para o controle PID.	85
Figura 4.2	Inclinação de <i>roll</i> em função do tempo para o controle PID.	86
Figura 4.3	Inclinação de <i>pitch</i> em função do tempo para o controle PID.	87
Figura 4.4	Inclinação de <i>yaw</i> em função do tempo para o controle PID.	88
Figura 4.5	Deslocamento no eixo X em função do tempo para o controle PID.	89
Figura 4.6	Deslocamento no eixo Y em função do tempo para o controle PID.	90
Figura 4.7	Deslocamento no eixo Z em função do tempo para o controle PID.	91
Figura 4.8	Erro de posição do veículo para o controle PID.	92
Figura 4.9	Erro de inclinação do veículo para o controle PID.	93
Figura 4.10	Erro quadrático de posição do veículo para o controle PID.	94
Figura 4.11	Erro quadrático de inclinação do veículo para o controle PID.	95
Figura 4.12	Erro acumulado de posição do veículo para o controle PID.	97

Figura 4.13 Erro acumulado de inclinação do veículo para o controle PID.	98
Figura 4.14 Erro quadrático acumulado de posição do veículo para o controle PID.	99
Figura 4.15 Erro quadrático acumulado de posição do veículo para o controle PID.	100
Figura 4.16 Trajetória adotada pelo veículo visando se deslocar da origem (marcador circular) até o ponto alvo (marcador em forma de losango), para o controle por realimentação de estados.	102
Figura 4.17 Posição em relação ao eixo X em função do tempo, para o controle por realimentação de estados.	103
Figura 4.18 Posição em relação ao eixo Y em função do tempo, para o controle por realimentação de estados.	104
Figura 4.19 Posição em relação ao eixo Z em função do tempo, para o controle por realimentação de estados.	105
Figura 4.20 Erro de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle por realimentação de estados.	106
Figura 4.21 Erro quadrático de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle por realimentação de estados.	107
Figura 4.22 Erro acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle por realimentação de estados.	108
Figura 4.23 Erro quadrático acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle por realimentação de estados.	109
Figura 4.24 Trajetória adotada pelo veículo visando se deslocar da origem (marcador circular) até o ponto alvo (marcador em forma de losango), para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.	111
Figura 4.25 Erro de posição em relação ao eixo X em função do tempo, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.	112
Figura 4.26 Erro de posição em relação ao eixo Y em função do tempo, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.	113
Figura 4.27 Erro de posição em relação ao deslocamento no eixo Z em função do tempo, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.	114
Figura 4.28 Erro de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.	115
Figura 4.29 Erro quadrático de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.	116
Figura 4.30 Erro acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.	117
Figura 4.31 Erro quadrático acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.	118
Figura 4.32 Resultados das aptidões dos melhores indivíduos de cada geração, para o GA na primeira configuração	120

Figura 4.33 Resultados das aptidões médias de cada geração, para o GA na primeira configuração	121
Figura 4.34 Trajetória adotada pelo veículo visando se deslocar da origem (marcador circular) até o ponto alvo (marcador em forma de losango), para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração	122
Figura 4.35 Posição em relação ao eixo X em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.	123
Figura 4.36 Posição em relação ao eixo Y em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.	124
Figura 4.37 Posição em relação ao eixo Z em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.	125
Figura 4.38 Erro de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.	126
Figura 4.39 Erro quadrático de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.	127
Figura 4.40 Erro acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.	128
Figura 4.41 Erro quadrático acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.	129
Figura 4.42 Resultados das aptidões dos melhores indivíduos de cada geração, para o GA na segunda configuração	131
Figura 4.43 Resultados das aptidões médias de cada geração, para o GA na segunda configuração	132
Figura 4.44 Trajetória adotada pelo veículo visando se deslocar da origem (marcador circular) até o ponto alvo (marcador em forma de losango), para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração	133
Figura 4.45 Posição em relação ao eixo X em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.	134
Figura 4.46 Posição em relação ao eixo Y em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.	135
Figura 4.47 Posição em relação ao eixo Z em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.	136
Figura 4.48 Erro de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.	137

Figura 4.49 Erro quadrático de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.	138
Figura 4.50 Erro acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.	139
Figura 4.51 Erro quadrático acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.	140
Figura A.1 Representação da transformação do referencial <b>A</b> para o referencial <b>B</b> .	153
Figura A.2 Representação dos referenciais adotados ao longo deste trabalho. O referencial à esquerda, <b>W</b> , é o global e à direita, <b>D</b> , o local.	155
Figura A.3 Dois dos referenciais mais utilizados por grande parte dos trabalhos em aeronáutica. A esquerda está a convenção adotada ao longo do presente trabalho.	157
Figura A.4 Representação dos movimentos de <i>Roll</i> , <i>Pitch</i> e <i>Yaw</i> .	158
Figura A.5 Representação do eixo original com um rotação de $\phi$ graus.	158
Figura A.6 Representação de uma rotação de $\theta$ graus em torno do eixo y original.	160
Figura A.7 Representação de uma rotação de $\psi$ graus em torno do eixo z original.	161
Figura A.8 Deslocamento de um corpo no espaço bidimensional.	165
Figura A.9 Decomposição dos vetores de deslocamento de um corpo no espaço bidimensional.	166
Figura A.10 Decomposição dos vetores unitários para um referencial móvel.	168

## Lista de tabelas

Tabela 2.1	Parâmetros que serão utilizados nesse trabalho	37
Tabela 3.1	Definições dos parâmetros para o método de Ziegler-Nichols.	44
Tabela 3.2	Arranjo tubular de Routh.	46
Tabela 3.3	Arranjo tubular de Routh para a planta $T_1$ .	51
Tabela 3.4	Forças de saída para o eixo x para cada rotor do quadricóptero	74
Tabela 3.5	Forças de saída para o eixo y para cada rotor do quadricóptero	74
Tabela 3.6	Forças de saída para o eixo z para cada rotor do quadricóptero	75
Tabela 3.7	Parâmetros da primeira configuração do GA.	81
Tabela 3.8	Parâmetros da segunda configuração do GA.	82
Tabela 4.1	Ganhos do controlador PID para os ângulos.	84
Tabela 4.2	Ganhos do controlador PID para as posições.	84
Tabela 4.3	Erros de inclinação do veículo, para o controle PID.	96
Tabela 4.4	Erros de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle PID.	96
Tabela 4.5	Resumo dos parâmetros para o controle PID.	101
Tabela 4.6	Erros de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle por realimentação de estados.	108
Tabela 4.7	Resumo dos parâmetros para o controle por realimentação de estados.	109
Tabela 4.8	Erros de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.	117
Tabela 4.9	Resumo dos parâmetros para o controle LQR com escolha manual das matrizes de custo.	118
Tabela 4.10	Erros de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.	127
Tabela 4.11	Resumo dos parâmetros para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.	130
Tabela 4.12	Erros de posição do veículo nos eixos errosLQRga2, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.	138
Tabela 4.13	Resumo dos parâmetros para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.	140
Tabela 5.1	Comparação de desempenho entre os controladores avaliados: tempo de subida, tempo de assentamento e <i>overshoots</i> .	142
Tabela 5.2	Comparação dos erros obtidos pelos controladores avaliados.	142

## Lista de Abreviaturas

UAV – *unmanned aerial vehicle*, Veículo aéreo não tripulado

VANT – Veículo Aéreo Não Tripulado

GPS – *Global Positioning System*, Sistema de Posicionamento Global

SS – *State-Space*, Espaço-estado

SLIT – Sistema Linear Invariante no Tempo

SPE – Semi-Plano lateral Esquerdo

LQR – *Linear Quadratic Regulator*, Regulador Quadrático Linear

$c(\alpha)$  – Cosseno do ângulo  $\alpha$ , com  $\alpha$  em radianos

$s(\alpha)$  – Seno do ângulo  $\alpha$ , com  $\alpha$  em radianos

PID – Proporcional, Integral e Derivativo

GA – *Genetic Algorithm*, Algoritmo Genético

SFB – *State Feedback*, Realimentação de estados

# 1

## Introdução

Os crescentes avanços na área de robótica, microeletrônica e computação vêm, concomitantemente com o desejo do ser humano de cada vez mais fazer grandes feitos, proporcionando grandes descobertas e desafios, principalmente para os engenheiros, além de resolver problemas e oferecer alternativas que proporcionem segurança, conforto e bem estar. Os robôs estão cada vez mais rápidos, úteis e presentes no cotidiano mundial. Seja no tempo de lazer ou de trabalho, é comum notar o aumento dessas máquinas nos mais diversos ambientes. Na indústria, desde a criação da linha de montagem de carros por Henry Ford houve sempre um desejo de se tornar mais eficiente e precisa a execução de determinadas tarefas.

Por sua vez, um grande fascínio da humanidade sempre foi a conquista do ar. Desde Santos Dumont, com a invenção dos aviões, o ser humano conseguiu atingir um novo patamar de exploração. Com a criação desta máquina, foi possível tornar mais rápidas as viagens entre longas distâncias, acessar locais mais afastados, conectar o mundo, conhecer novos horizontes, explorar novos desafios.

Atualmente, os robôs que têm ganhado mais destaque são os *Unmanned Aerial Vehicles* (UAVs) ou Veículos Aéreos Não-Tripulados (VANTs). Militarmente, os UAVs já são conhecidos e famosos. Desde a segunda guerra mundial, forças armadas de diversos países já faziam uso dessas máquinas, como bombas teleguiadas. Naquela época, estes dispositivos não tinham acurácia muito elevada, mas já geravam grandes vantagem competitivas, para quem fazia uso deles. Nos dias de hoje, além de serem utilizados como “aviões de guerra” teleguiados, também são utilizados no âmbito militar em tarefas de mapeamento e inspeções em áreas de interesses.

Entretanto, como o fascínio pela conquista do ar não é algo exclusivo da área militar, outros UAVs de pequeno porte e menos poderosos, em relação aos modelos militares, têm ganhando grande destaque recentemente, como observa-se em [1, 2]. O uso de quadricópteros, ou quadricópteros como são popularmente chamados, vem crescendo imensamente, principalmente nas áreas de agricultura, cinema e entretenimento, e na indústria em geral. Comercialmente, há uma forte tendência para o uso de quadricópteros em

atividades de mapeamento de áreas, principalmente no setor agrícola [3–6].

O mapeamento e manutenção de grandes áreas pode ser custoso, tanto monetariamente, pois devem ser utilizadas diversas pessoas para avaliar a área a ser analisada, quanto no âmbito do tempo, uma vez que usualmente áreas de grandes plantações não são de fácil acesso para pessoas. Por outro lado, quadricópteros podem facilmente sobrevoar a área a fim de encontrar mais rapidamente focos de pragas, queimadas e áreas onde a saúde da plantação não está adequada.

No entanto, essas atividades apenas se tornam possíveis devido aos controladores de voo utilizados nestes veículos. Quadricópteros são aeronaves intrinsecamente instáveis por natureza. Caso seus rotores parem, essas máquinas não têm como se sustentar no ar. Com o desenvolvimento de técnicas eficientes de controle, associadas a grande evolução na velocidade de microcontroladores e miniaturização dos componentes eletrônicos, é possível, hoje, controlar essas máquinas, que apesar de não serem tão grandes e complexas quanto os UAVs militares, são extremamente úteis para o ser humano.

Devido a necessidade de se conseguir controlar máquinas, por mais inerentemente instáveis que essas sejam, ao longo do tempo, foram desenvolvidos sistemas capazes de auto-regular os sinais de entrada de uma máquina, sem que fosse necessária a intervenção de um operador. A partir de valores de referência informados pelo usuário, o sistema de controle faz o ajuste dos possíveis sinais de entrada, a fim de possibilitar que a máquina consiga executar a tarefa pretendida sem dificuldade.

Para fins industriais, o primeiro controle clássico a ser desenvolvido e utilizado foi o controlador *on-off* [7–9], que é um controle bastante rudimentar, bem simples, que liga e desliga a máquina com base em dois referenciais, um valor máximo e um valor mínimo, sendo utilizado até os dias atuais. Na Figura 1.1, apresenta-se um exemplo de operação de um controlador desse tipo.

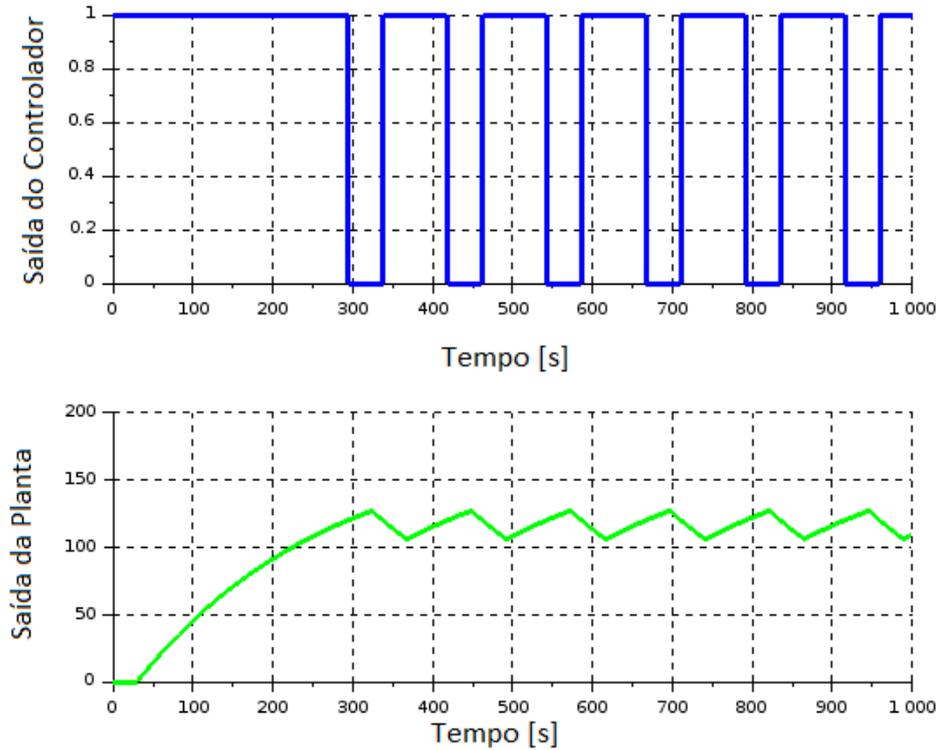


Figura 1.1: Comportamento do controle *on-off*.

Na Figura 1.1, observa-se que o sinal de controle (representado em azul) é binário, ou liga (nível lógico “1”), ou desliga (nível lógico “0”). Por sua vez, a curva verde representa a saída da planta, permitindo observar os pontos onde a fonte de entrada liga (105) e onde desliga (125), por meio da comparação entre o comportamento da curva verde com o da azul. Conseqüentemente, nota-se que essa variável é utilizada para definir o estado do controlador. Enquanto a saída do sistema for inferior ao valor máximo, a saída do controle é 1. Por sua vez, ao atingir o valor máximo, o controle responde com a saída 0 e altera o critério de comparação. Se a saída do sistema for superior ao valor mínimo, o controle permanece em 0. Por sua vez, ao atingir o valor mínimo, o controle responde com 1 e troca o valor de comparação para o máximo. Este processo se repete continuamente. Esse tipo de controle é geralmente utilizado em equipamentos como ar-condicionados, cafeteiras e eletrodomésticos em geral, visto que é um controle simples, barato de se implementar e muito efetivo para alguns processos.

Na sequência evolutiva dos controladores, destaca-se o controle PID (proporcional-integral-diferencial) [10–12], composto por 3 controles lineares que já existiam, porém nunca haviam sido implementados conjuntamente. Em

1911, Elmer Sperry criou o primeiro controlador PID, capaz de automatizar o sistema de direção de navios da Marinha americana. Esse controle fazia o papel do timoneiro (um marujo responsável por controlar o leme do navio), só que era mais preciso. Dessa forma, o controle PID teve sucesso ao possibilitar melhorias de desempenho em casos onde o desempenho do controle *on-off* mostrava-se insuficiente. Enquanto o controle *on-off* apresenta apenas valores binários, o PID é capaz de responder com valores contínuos em um dado intervalo. A Figura 1.2 apresenta o diagrama de blocos de uma das possíveis configurações de um controle PID.

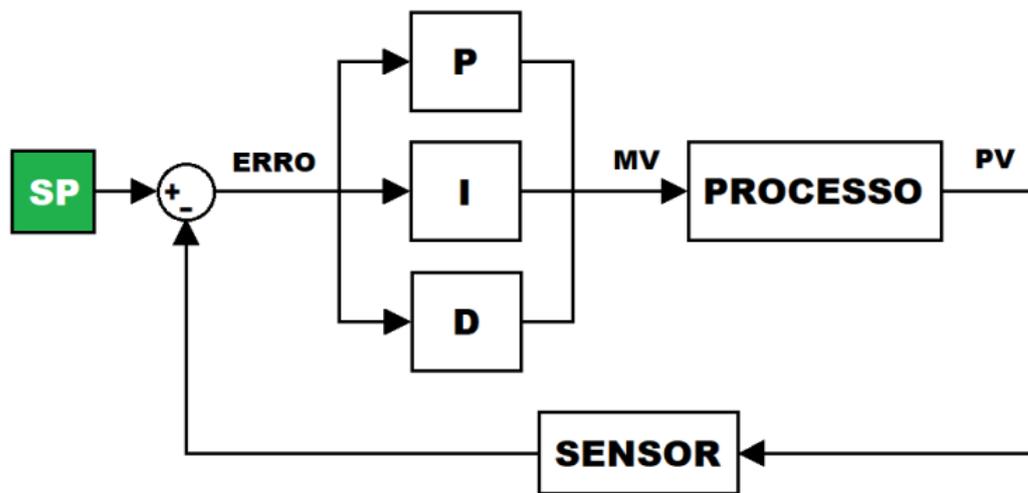


Figura 1.2: Diagrama de blocos do controle PID.

onde  $MV$  é o sinal de controle,  $PV$  é o sinal de saída,  $SP$  é o *setpoint*, o valor de referência para o sistema,  $P$  é o bloco que representa um controlador Proporcional,  $I$  é o bloco que representa um controlador Integral e  $D$  é o bloco que representa um controlador Derivativo.

O controle PID utiliza um valor de referência para fazer os cálculos dos erros e, posteriormente, gerar um sinal de controle. Devido a simplicidade e confiabilidade desse tipo de controle, ele é vastamente utilizado até hoje em aplicações civis e militares.

Após o advento do controle PID foi que começaram a surgir os primeiros controladores baseados em uma modelagem diferente, através de estados. Esse tipo de modelagem tenta trabalhar com Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLITs), salvando, de certo modo, algumas variáveis do sistema. Assim como o PID, este outro tipo de controle utiliza os erros das saídas, multiplicados por ganhos, para gerar um sinal de controle. O controle por realimentação de estados, State Feedback (SFB), como ficou conhecido, faz a conversão do erro

para sinal de controle, visando a estabilidade dos polos do sistema [13–16], utilizando uma matriz de ganhos a fim de se poder escolher a posição dos polos do sistema em malha fechada. A Figura 1.3 mostra um exemplo de um diagrama de blocos com controle por realimentação de estados.

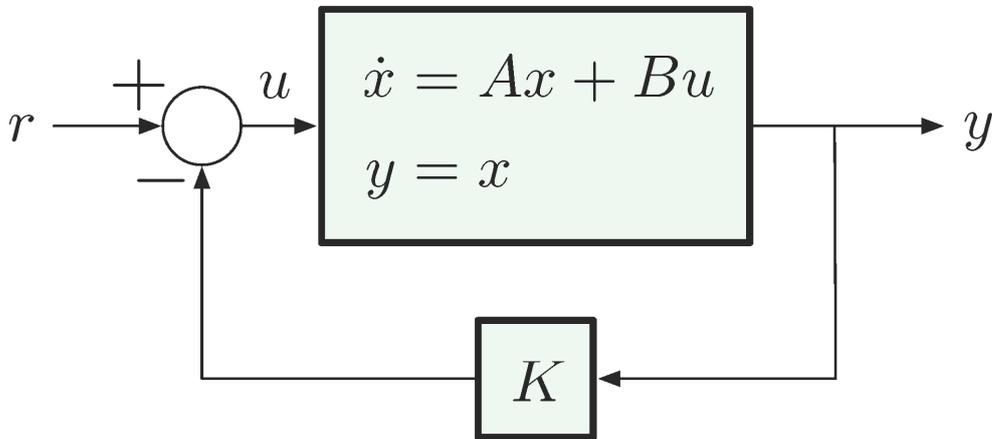


Figura 1.3: Diagrama de blocos do controle SFB.

onde  $r$  é o sinal de referência do sinal,  $u$  é o sinal de controle,  $K$  é o bloco de ganho do SFB,  $x$  é o vetor de estados,  $\dot{x}$  é a primeira derivada temporal do vetor de estados,  $y$  é a saída da planta,  $A$  e  $B$  são as matrizes que representam o comportamento dinâmico da planta.

Resumidamente, o controle por realimentação de estados é similar ao controle proporcional de um PID, transformando o erro da saída em sinal de entrada para o sistema, mas levando em consideração os locais dos polos. Apesar do controle SFB considerar a localização dos polos, ele não é capaz de fornecer, diretamente, uma forma de se conhecer determinados aspectos de interesse do sistema analisado, como o quão rápido será o sistema, quão custoso para os atuadores serão os sinais de entradas, quão eficiente será o sistema para determinada tarefa, etc. Existem diversas soluções que conseguem alocar os polos a fim de fazer com que um determinado sistema se comporte de modo estável, mas o grande questionamento, que não é possível de se responder somente observando a localização dos polos, é qual dessas soluções é a mais adequada para o problema proposto.

Com o objetivo de responder a este questionamento que a ideia do controle *Linear Quadratic Regulator* (LQR) surgiu [17–19]. Esse controle atua na escolha do ganho, que transforma erro em sinal de entrada, tentando, ao

máximo, se adequar as restrições de projeto almejadas. Basicamente, o controle LQR é um SFB, mas com uma escolha otimizada do ganho do controle.

## 1.1 Motivação

Ainda nos dias de hoje, grande parte das empresas que desenvolvem quadricópteros, ou apenas as placas controladoras – onde está todo o sistema de controle de um quadricóptero, fazem uso de técnicas de controle clássico. Até certo ponto, essas técnicas apresentam resultados robustos e funcionam bem. Entretanto, as técnicas de controle clássico foram desenvolvidas em uma época onde os microcontroladores não eram tão eficientes quanto hoje e a computação não era tão avançada. Dessa forma, apresentam limitações devido as restrições impostas pela capacidade computacional existente na época em que foram originalmente desenvolvidas. Por sua vez, com o passar do tempo, técnicas de controle moderno foram desenvolvidas, utilizando-se da maior potência computacional disponível atualmente. Estas técnicas têm possibilitado, muitas vezes, a obtenção de resultados mais robustos e mais eficientes que os obtidos por meio de controle clássico. No entanto, ainda não há uma adesão muito grande a essas técnicas de controle moderno, apesar de se mostrarem mais vantajosas para controlar quadricópteros. Esses questionamentos motivaram o desenvolvimento deste trabalho.

As pesquisas na área de inteligência computacional aplicada a quadricópteros, principalmente na área de controle, não são exclusividade dos tempos atuais e muito menos dos controles modernos. O uso de Lógica fuzzy aliado a controladores [20–23] bem como o uso de Algoritmos Genéticos associados a otimização de problemas de controle [24,25] ou para a modelagem e *tuning* de parâmetros [26,27] não é incomum na área de controle. Essas técnicas são úteis principalmente quando o espaço de busca para uma solução é muito grande ou quando lida-se com diversos parâmetros que devem ser sintonizados para que se obtenha um desempenho desejado. No caso do Algoritmos Genéticos, não há a garantia de que a solução encontrada seja a ótima, mas, ainda assim, as soluções tendem a ser melhores do que as escolhidas pelo *tuning* manual.

A comparação entre estratégias de controle para se verificar o desempenho e poder selecionar a mais adequada para uma determinada conjuntura também não é algo novo na comunidade científica [18, 28] e faz-se necessário quando quer-se desenvolver um projeto novo, usando os controladores já existentes e testados como referência para o controle desenvolvido, ou quando se deseja escolher um tipo de controle para um projeto.

## 1.2

### Objetivo

O presente trabalho objetiva contribuir para o desenvolvimento de técnicas de controle moderno aplicadas a quadricópteros, propondo a implementação de um controlador por realimentação de estados com polos dominantes e controle de posição por Lógica *Fuzzy*, bem como de um controlador LQR com ajuste de matrizes de custo por meio de algoritmos genéticos. O desempenho destas técnicas de controle moderno é comparado com o obtido por um controlador PID clássico, a fim de se verificar qual delas atinge os melhores resultados.

Dentro das comparações entre o desempenho de técnicas lineares de controle moderno em relação à um controle PID clássico, este trabalho propõe o uso de técnicas de inteligência computacional, como algoritmos genéticos, como auxílio para a sintonia de parâmetros dos controladores. Mais especificamente – diferentemente da sintonia convencional, utilizando heurísticas embasadas no conhecimento prévio do comportamento da planta a ser controlada – a utilização de GA para sintonizar um controle LQR, baseando em parâmetros de desempenho do controle, como erro quadrático acumulado e tempo de assentamento.

## 1.3

### Estrutura textual

Esse capítulo atual mostrou uma breve contextualização sobre a popularização e uso de quadricópteros. Foi apresentado, também, o objetivo e a motivação deste trabalho. Na sequência, apresenta-se a estrutura adotada ao longo desta dissertação.

O capítulo 2 mostra o processo de modelagem do quadricóptero, descrevendo, de forma clara, todos os passos executados para obtenção das equações que representam este veículo matematicamente.

O capítulo 3 foca no desenvolvimento das estratégias de controle que serão avaliadas neste trabalho. O detalhamento do processo de desenvolvimento de cada um dos controladores implementados é apresentado neste capítulo.

O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos para cada controle desenvolvido no capítulo 3. As características de desempenho de cada controlador são calculadas, a fim de se poder intercompará-los. Neste capítulo, também é feita uma breve análise e discussão dos resultados obtidos por cada controle.

O capítulo 5 encerra o trabalho, apresentando as conclusões obtidas a partir dos resultados apresentados no capítulo 4. Ademais, são sugeridos

alguns trabalhos futuros, como continuação dos estudos desenvolvidos nesta dissertação.

O apêndice A apresenta algumas das ferramentas matemáticas consideradas essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. São mostrados os conceitos utilizados a fim de se modelar de forma coerente um quadricóptero.

## 2

### Modelagem matemática de um quadricóptero

Utilizar a modelagem mais indicada para situação que se deseja operar, é parte crucial para o adequado projeto do controle do sistema. Existem duas abordagens principais de modelagens que podem ser adotadas para representar um quadricóptero, uma delas baseada nas equações de Newton- Euler e a outra desenvolvida a partir das equações de Euler-Lagrange. A primeira abordagem é direta e utiliza equações focando nas forças e torques aplicados no corpo. Por outro lado, a segunda baseia-se em equações mais complexas, empregando as energias cinética e potencial do sistema. Ressalta-se que, no presente estudo, optou-se por adotar a modelagem feita a partir das equações de Newton-Euler, por se mostrarem as mais adequadas para representar matematicamente os movimentos e comportamentos do quadricóptero, de maneira fidedigna.

#### 2.1

##### Modelagem a partir das equações de Newton-Euler

De forma genérica, as equações de forças e momentos podem ser utilizadas para descrever matematicamente a dinâmica de um veículo qualquer. Por sua vez, com o intuito de representar os efeitos que podem influenciar o comportamento do veículo, já almejando a modelagem final do quadricóptero, pode-se desenvolver as equações no referencial global. Dessa forma, apresenta-se a seguir uma forma compacta de representar as equações de forças e momentos resultantes da interação do veículo com meio, para cada dimensão.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}_L}{dt} + \omega_{var} \times \vec{p}_L \quad (2-1)$$

$$\sum \vec{\tau} = I \frac{d\omega_{var}}{dt} + \omega_{var} \times \vec{h} \quad (2-2)$$

onde  $p_L$  é o vetor de momentum ou quantidade de movimento linear,  $h$  é vetor de momentum ou quantidade de movimento angular,  $F$  é o somatório do vetor de forças sobre o veículo,  $I$  é a matriz de inércia do veículo,  $\tau$  é o somatório do vetor de torques e  $\omega_{var}$  as taxas de variações angulares.

Mais especificamente, ressalta-se que o termo  $\omega_{var}$  é definido como

$$\omega_{var} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

onde  $p$ ,  $q$  e  $r$  são as taxas angulares projetadas, respectivamente nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Observe que tanto as equações de forças quanto as de torque não apresentam uma forma tão convencional quanto esperado, devido ao referencial do veículo (local) estar se movimentando e rotacionado em relação ao referencial estático (global). Dessa forma, aparecem termos adicionais decorrentes desses movimentos, que influenciam diretamente a modelagem dinâmica. Estes aspectos foram detalhados de forma pormenorizada na seção 1.2. Em particular, destaca-se que os termos responsáveis pela correção dessas rotações dos eixos são  $\omega_{var} \times \vec{p}_L$  e  $\omega_{var} \times \vec{h}$ .

A fim de analisar mais detalhadamente o comportamento do veículo, pode-se desenvolver as equações (2-1) e (2-2). Neste intuito, note que a equação A.2 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \frac{d\vec{p}_L}{dt} + \omega_{var} \times \vec{p}_L \\ \vec{p}_L = m\vec{v} = m \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} &\implies \frac{d\vec{p}_L}{dt} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} \\ \sum \vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} &= m \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times m \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-4)$$

Observe que o termo de correção  $\omega_{var} \times \vec{v}$  gera uma pequena dificuldade adicional para solucionar as equações de força. Todavia, adotando uma formulação matricial para o problema, buscou-se definir alguma transformação que resultasse na multiplicação de uma matriz por um vetor. Como visto na seção A.2, essa transformação pode ser feita através de álgebra elementar, conforme definido por

$$\omega_{var}^{\vec{}} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + r\hat{j} - q\hat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ -q \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

$$\omega_{var}^{\vec{}} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p & q & r \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -r\hat{i} + 0\hat{j} + p\hat{k} = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

$$\omega_{var}^{\vec{}} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = q\hat{i} - p\hat{j} + 0\hat{k} = \begin{bmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

Com base nas equações (2-5) a (2-7), pode-se construir a matriz de transformação

$$\omega_{var}^{\vec{}} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

Substituindo-se a matriz explicitada na equação (2-8) na equação (2-4) obtém-se

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \left( \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right) \quad (2-9)$$

Dessa forma, pode-se escrever

$$m \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = m \left( \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right) \quad (2-10)$$

Conseqüentemente, pode-se inferir que as equações de aceleração em cada direção do espaço são dadas por

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x + qv_z - rv_y \\ a_y = \dot{v}_y + rv_x - pv_z \\ a_z = \dot{v}_z + pv_y - qv_x \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{v}_x = \frac{F_x}{m} - (qv_z - rv_y) \\ \dot{v}_y = \frac{F_y}{m} - (rv_x - pv_z) \\ \dot{v}_z = \frac{F_z}{m} - (pv_y - qv_x) \end{cases} \quad (2-11)$$

Ressalta-se que as equações obtidas para as componentes da aceleração do veículo já estão no referencial global, a partir de transformações e correções do referencial local. Uma vez tendo desenvolvido o equacionamento das ace-

lerações em  $x$ ,  $y$  e  $z$ , avança para o desenvolvimento das equações de torque, equação (2-2). Dessa forma, seguindo um procedimento análogo ao adotado para a equação (2-1), tem-se que

$$\sum \vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}_{var}}{dt} + \omega_{var} \times \vec{h} \quad (2-12)$$

$$\vec{h} = I\vec{\omega}_{var} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{yx} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{zy} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{yx} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{zy} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

$$\sum \tau = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

$$(2-16)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}I_{xx} + \dot{q}I_{yx} + \dot{r}I_{zx} \\ \dot{p}I_{xy} + \dot{q}I_{yy} + \dot{r}I_{zy} \\ \dot{p}I_{xz} + \dot{q}I_{yz} + \dot{r}I_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r(pI_{xy} + qI_{yy} + rI_{zy}) + q(pI_{xz} + qI_{yz} + rI_{zz}) \\ r(pI_{xx} + qI_{yx} + rI_{zx}) - p(pI_{xz} + qI_{yz} + rI_{zz}) \\ -q(pI_{xx} + qI_{yx} + rI_{zx}) + p(pI_{xy} + qI_{yy} + rI_{zy}) \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

onde os termos  $I_{ij}$  são as componentes da matriz de inércia. Com isso tem-se as equações detalhadas e genéricas para os torques aplicados e as forças em um veículo. É importante conhecer essas equações, entretanto o foco desse estudo não é modelar um veículo genérico e sim um quadricóptero. Dessa forma, munido das equações de força e torque aqui explicitadas, pode-se particularizá-las a fim de se modelar especificamente um quadricóptero.

## 2.2

### Modelagem dos atuadores

Até o momento modelou-se um veículo genérico focando apenas nas forças que atuam sobre ele, considerando as possíveis acelerações que podem influenciar seus movimentos. Entretanto, modelar os atuadores é outra parte extremamente importante para a modelagem completa do veículo e para implementação do controle. Os atuadores são os responsáveis por gerar as

forças desejadas para o funcionamento correto e preciso do veículo.

Nesse caso, não é tão proveitoso estudar um atuador genérico. Assim, diferentemente da seção 2.1, já faz-se uso de conhecimento do veículo estudado, bem como de sua forma de propulsão. Em quadricópteros, como o próprio nome sugere, existem quatro atuadores, ou seja, quatro motores que, em conjunto com suas respectivas hélices, geram forças de sustentação que permitem que a aeronave se mantenha no ar e se locomova.

É importante ressaltar que quadricópteros são veículos sub-atuados, pois, apesar de terem apenas 4 atuadores, possuem 6 graus de liberdade para locomoção e rotação (deslocamentos nos eixos X, Y e Z, além de rotação em  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , gerando respectivamente os movimentos denominados de *Roll*, *Pitch* e *Yaw*). Conseqüentemente, alguns efeitos indesejáveis são produzidos, como o acoplamento de movimentos. Por exemplo, um movimento no eixo Z pode gerar também um movimento de *Yaw* atrelado. Entretanto, como essa seção almeja apenas a modelagem dos atuadores, focando em como eles geram as forças posteriormente empregadas para controlar o quadricóptero, problemas decorrentes do acoplamento de movimentos ainda não serão tratados aqui.

Observando o comportamento dessas aeronaves, não é difícil inferir as forças e torques gerados por seus atuadores, que serão utilizados para controlar o quadricóptero. Em particular, o vetor de entradas (ou *inputs*) do sistema é dado por

$$U = \begin{bmatrix} \sum F \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

onde  $U_1 = \sum F$  representa o somatório de forças geradas pelos atuadores no eixo Z, promovendo deslocamentos no eixo Z;  $U_2 = \tau_x$  representa o torque resultante gerado em relação ao eixo X, promovendo movimentos de *pitch* que geram deslocamentos no eixo X;  $U_3 = \tau_y$  representa o torque resultante gerado em relação ao eixo Y promovendo movimentos de *roll* que geram deslocamentos no eixo Y; e  $U_4 = \tau_z$  representa o torque resultante gerado em relação ao eixo Z, promovendo movimentos de *yaw* que geram rotações em relação ao eixo Z.

A força resultante e o torque em cada eixo, gerados pelos quatro atuadores do quadricóptero, podem ser descritos em função da velocidade angular de cada atuador. Assim, definindo como  $F_i$  a força gerada pelo  $i$ -ésimo motor, tem-se que o somatório de forças é expresso por

$$U_1 = \sum F_{i=1}^4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = (k_f \omega_1^2 + k_f \omega_2^2 + k_f \omega_3^2 + k_f \omega_4^2); \quad (2-19)$$

$$U_1 = k_f(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2); \quad (2-20)$$

onde  $k_f$  é o coeficiente de força aerodinâmica e  $\omega$  é a velocidade angular do eixo do motor.

Por sua vez, pode-se definir  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  e  $\tau_z$  como

$$U_2 = \tau_x = k_f \times L(-\omega_2^2 + \omega_4^2); \quad (2-21)$$

$$U_3 = \tau_y = k_f \times L(\omega_1^2 + \omega_3^2); \quad (2-22)$$

$$U_4 = \tau_z = k_m \times L(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2); \quad (2-23)$$

onde  $k_f$  é o coeficiente de força aerodinâmica,  $k_m$  é o coeficiente de momento aerodinâmico,  $\omega$  é a velocidade angular do eixo do motor e  $L$  é o comprimento do braço entre o centro da aeronave até o centro do atuador. As forças, o braço e  $\omega$  podem ser observados, para clarificar, na Figura 2.1, na qual as cores indicam o sentido de rotação das hélices – azul é o sentido horário e laranja o sentido anti-horário

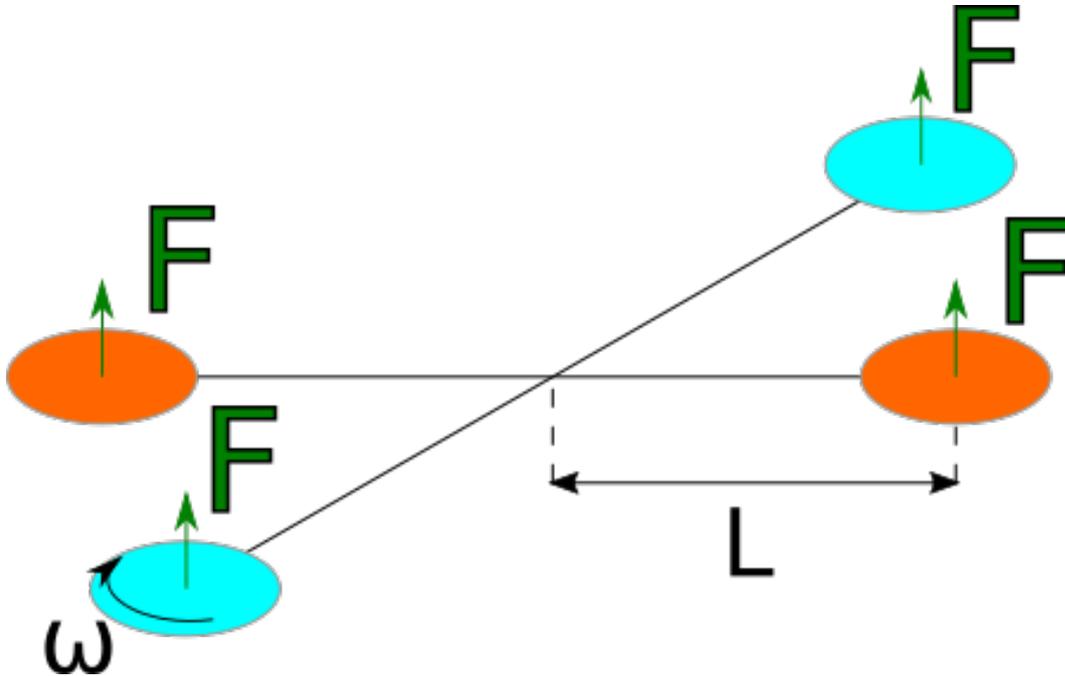


Figura 2.1: Esquema simplificado de um drone apresentando as forças  $F$ , o braço  $L$  e a velocidade angular  $\omega$

Analisando o vetor de *inputs*  $U$ , nota-se que as entradas do sistema não

são diretamente associadas a cada atuador individualmente, mas sim a uma combinação linear das forças e torques de cada atuador. Dessa maneira, pode-se criar uma transformação capaz de converter o sinal de controle diretamente em rotação e *vice-versa*. Esse aspecto será aprofundado em seções posteriores, onde projeta-se os controles do sistema.

## 2.3

### Particularização do modelo

Com o desenvolvimento da modelagem genérica, a partir das equações de Newton-Euler, e munido da modelagem dinâmica dos atuadores, pode-se construir um modelo para o quadricóptero. Pretende-se nessa seção desenvolver as equações de forças e torques, particularizando o modelo desenvolvido, aplicando simplificações e restrições de modo a se obter as equações de movimento para o tipo de aeronave específica aqui estudada. Dessa forma, no final dessa seção obtêm-se as equações associadas as acelerações lineares e angulares do quadricóptero.

No processo de particularização do modelo encontrado poder-se-ia tratar o quadricóptero de maneira genérica sem assumir, por exemplo, simetria. Porém, esse estudo não se dedica a analisar possíveis efeitos decorrentes de quadricópteros não convencionais. Assim, para particularizar as equações dinâmicas, pode-se assumir

- ▷ O quadricóptero é simétrico nos planos XY, YZ e XZ;
- ▷ O quadricóptero não faz com elevadas velocidades ou aceleração e com inclinações grandes – ângulos maiores que  $15^\circ$ ;

### 2.3.1

#### Torques aplicados em um quadricóptero

Com base na equação de torques aplicados, (equação (2-17)), pode-se obter as acelerações dos ângulos ( $\ddot{\phi}$ ,  $\ddot{\theta}$  e  $\ddot{\psi}$ ). Observando a equação (2-17), que define os torques sobre o veículo, e sabendo que o quadricóptero tem simetria nos planos XY, YZ e XZ, pode-se simplificar a matriz de inércia da aeronave  $I$ , de acordo com

$$I_{xy} = I_{yx} = 0 \quad (2-24)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = 0 \quad (2-25)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = 0 \quad (2-26)$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

Como a Matriz de Inércia, após a simplificação, torna-se diagonal, a equação (2-17) é simplificada, pois seus termos cruzados serão nulos. Conseqüentemente, tem-se que a equação (2-17) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}I_{xx} \\ \dot{q}I_{yy} \\ \dot{r}I_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -rqI_{yy} + rqI_{zz} \\ rpI_{xx} - rpI_{zz} \\ -pqI_{xx} + pqI_{yy} \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

Dessa forma, devido a se assumir simetria, simplifica-se consideravelmente tanto o trabalho de modelagem do veículo quanto a obtenção das acelerações  $\ddot{\phi}$ ,  $\ddot{\theta}$  e  $\ddot{\psi}$ . Por sua vez, pode-se reescrever a equação (2-28) de modo a se obter as componentes da taxa de variação angular do quadricóptero, de acordo com

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_x}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_y}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_z}{I_{zz}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} rq \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}} \\ rp \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}} \\ pq \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

No entanto, deseja-se obter-se as acelerações dos ângulos de Euler ( $\ddot{\phi}$ ,  $\ddot{\theta}$  e  $\ddot{\psi}$ ), pois essas estão diretamente relacionadas aos ângulos propriamente ditos e, conseqüentemente, possibilitam estimar a posição e estado da aeronave. Neste intuito, usando as relações conhecidas entre as taxas de variação angular e os ângulos de Euler, tem-se que

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s(\theta) \\ 0 & c(\phi) & s(\phi)c(\theta) \\ 0 & -s(\phi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - s(\theta)\dot{\psi} \\ c(\phi)\dot{\theta} + s(\phi)c(\theta)\dot{\psi} \\ -s(\phi)\dot{\theta} + c(\phi)c(\theta)\dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} - (c(\theta)\dot{\psi} + s(\theta)\ddot{\psi}) \\ -s(\phi)\dot{\theta} + c(\phi)\ddot{\theta} + ((c(\phi)c(\theta) - s(\phi)s(\theta))\dot{\psi} + s(\phi)c(\theta)\ddot{\psi}) \\ -c(\phi)\dot{\theta} - s(\phi)\ddot{\theta} + ((-s(\phi)c(\theta) - c(\phi)s(\theta))\dot{\psi} + c(\phi)c(\theta)\ddot{\psi}) \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

Com base nas equações (2-31) e (2-32), e na definição de  $\dot{p}$  apresentada na equação 2-29, pode-se determinar  $\ddot{\theta}$  de acordo com

$$\dot{p} = rq \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}} \quad (2-33)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} - (c(\theta)\dot{\psi} + s(\theta)\ddot{\psi}) = \\ (-s(\phi)\dot{\theta} + c(\phi)c(\theta)\dot{\psi})(c(\phi)\dot{\theta} + s(\phi)c(\theta)\dot{\psi}) \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}} \end{aligned} \quad (2-34)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} - c(\theta)\dot{\psi} - s(\theta)\ddot{\psi} = (-s(\phi)c(\phi)\dot{\theta}^2 - s^2(\phi)c(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}) \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}} \\ + (c^2(\phi)c(\theta)\dot{\psi}\dot{\theta} + c(\phi)s(\phi)c^2(\theta)\dot{\psi}^2) \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}} \end{aligned} \quad (2-35)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = (-s(\phi)c(\phi)\dot{\theta}^2 - s^2(\phi)c(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}) \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}} \\ + (c^2(\phi)c(\theta)\dot{\psi}\dot{\theta} + c(\phi)s(\phi)c^2(\theta)\dot{\psi}^2) \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}} + (c(\theta)\dot{\psi} + s(\theta)\ddot{\psi}) \end{aligned} \quad (2-36)$$

onde  $c(\alpha) = \cos(\alpha)$  e  $s(\alpha) = \sin(\alpha)$ .

Por sua vez, pode-se realizar um procedimento similar a fim de se determinar também tanto  $\ddot{\theta}$  quanto  $\ddot{\psi}$ . Neste intuito, com auxílio do MATLAB<sup>®</sup>, obteve-se as seguintes equações

$$\ddot{\theta} = \frac{\frac{M_y}{I_{yy}} + \dot{\psi}(c(\phi)c(\theta) + s(\phi)s(\theta))}{c(\phi)} + \frac{\dot{\theta}s(\phi) - \ddot{\psi}c(\theta)s(\phi) + \frac{(I_{xx}-I_{zz})(\dot{\phi}-\dot{\psi}s(\theta))(\dot{\theta}s(\phi)-\dot{\psi}c(\theta)c(\theta))}{I_{yy}}}{c(\phi)} \quad (2-37)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\frac{M_z}{I_{zz}} + \dot{\psi}(c(\phi)s(\theta) + c(\theta)s(\phi))}{c(\phi)c(\theta)} + \frac{\dot{\theta}c(\phi) + \ddot{\theta}s(\phi) + \frac{(I_{xx}-I_{yy})(\dot{\phi}-\dot{\psi}s(\theta))(\dot{\theta}c(\phi)+\dot{\psi}c(\theta)s(\phi))}{I_{zz}}}{c(\phi)c(\theta)} \quad (2-38)$$

Ademais, considerando que o quadricóptero pode executar apenas manobras que envolvam pequenos ângulos, inferiores a  $\pm 15^\circ$ , pode-se simplificar ainda mais as equações (2-31) e (2-32) anteriormente obtidas, que podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & -\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} - \dot{\psi} - \theta\ddot{\psi} \\ -\phi\dot{\theta} + \ddot{\theta} + (1 - \phi\theta)\dot{\psi} + \phi\ddot{\psi} \\ -\dot{\theta} - \phi\ddot{\theta} + ((-\phi - \theta)\dot{\psi} + \ddot{\psi}) \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

Adicionalmente, tem-se que  $15^\circ$  correspondem a aproximadamente 0,2618 rad e admite-se que  $1 \gg 0,2618$ . Assim, ainda em função da admissão de pequenos ângulos, pode-se simplificar ainda mais as equações (2-39) e (2-40), que passam a ser respectivamente reescritas como

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} - \dot{\psi} \\ \ddot{\theta} + \dot{\psi} \\ -\dot{\theta} + \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

Por fim, considerando pequenas velocidades e pequenas variações nos

ângulos, o que é plausível, estas equações são reduzidas para

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

Ressalta-se ainda que o resultado apresentado na equação (2-44) também poderia ser alternativamente obtido derivando-se a equação (2-39).

Considerando as aproximações aqui explicitadas e conhecendo-se a equação (2-29), pode-se então obter as acelerações dos ângulos de Euler por meio de

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_x}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_y}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_z}{I_{zz}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\psi}\dot{\theta} \frac{(I_{yy}-I_{zz})}{I_{xx}} \\ \dot{\psi}\dot{\phi} \frac{(I_{zz}-I_{xx})}{I_{yy}} \\ \dot{\phi}\dot{\theta} \frac{(I_{xx}+I_{yy})}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

Note que, apesar das simplificações, as acelerações continuam acopladas a outros movimentos. Por exemplo, observa-se que um deslocamento no eixo X também produz efeitos nos eixos Y e Z. Entretanto, esta interdependência já era esperada, pois, como dito no início dessa seção, o quadricóptero é subatuado.

### 2.3.2

#### Forças aplicadas em um quadricóptero

Pode-se, ainda a título de curiosidade, desenvolver as equações de forças de outra maneira. Um pouco mais simples, mais ainda bem funcional. Observando e utilizando geometria, consegue-se definir uma transformação diretamente na força aplicada no veículo.

A rotação a ser feita nas forças aplicadas para se passar do referencial local para o global é dada por uma matriz de rotação pelos ângulos de Euler definidos na seção A.1.

Observando e utilizando conceitos de geometria, consegue-se definir uma transformação diretamente sobre a força aplicada no veículo. Mais especificamente, pode-se efetuar uma rotação nas forças aplicadas ao quadricóptero, para se passar do referencial local para o global. Esta matriz de rotação é

definida em função dos ângulos de Euler, descritos na seção A.1, de acordo com

$$R = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & s(\phi)s(\theta)c(\psi) - c(\phi)s(\psi) & c(\phi)s(\theta)c(\psi) + s(\phi)s(\psi) \\ c(\theta)s(\psi) & s(\phi)s(\theta)s(\psi) - c(\phi)c(\psi) & c(\phi)s(\theta)s(\psi) + s(\phi)c(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi)c(\theta) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

onde  $c(\alpha)$  representa  $\cos(\alpha)$  e  $s(\alpha)$  representa  $\sin(\alpha)$ .

Dessa forma, no referencial global tem-se que

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}_L}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{v} \quad (2-47)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

Por sua vez, aplicando a matriz de rotação as forças aplicadas no quadricóptero, tem-se que

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = R \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_1(\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)) \\ -U_1(\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)) \\ -U_1(\cos(\phi)\cos(\theta)) \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

onde  $U_1$  é o termo anteriormente definido na equação (2-20).

Conseqüentemente, substituindo a equação (2-50) na equação (2-49) obtêm-se

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-U_1}{m}(\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)) \\ \frac{-U_1}{m}(\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)) \\ g - \frac{U_1}{m}(\cos(\phi)\cos(\theta)) \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

Dessa forma, obtêm-se de forma simples as componentes da aceleração do quadricóptero.

### 2.3.3

#### Modelo de um quadricóptero

Com base nos desenvolvimentos apresentados ao longo dessa seção, pode-se resumir os resultados mais importantes, que serão utilizados em seções posteriores, da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-U_1}{m} (\cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi)) \\ \frac{-U_1}{m} (\cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\psi)) \\ g - \frac{U_1}{m} (\cos(\phi) \cos(\theta)) \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_x}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_y}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_z}{I_{zz}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\psi} \dot{\theta} \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\ \dot{\psi} \dot{\phi} \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \frac{(I_{xx} + I_{yy})}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2-53)$$

Ao longo dessa seção as equações de Newton-Euler foram particularizadas tendo em vista que o objetivo desse trabalho foca em estudos com um veículo quadricóptero. Dessa forma, foram obtidas as equações (2-52) e (2-53), que representam suficientemente bem um quadricóptero simétrico e com movimentos suaves. Conseqüentemente, levando em consideração as restrições impostas por estas simplificações, pode-se utilizar tais equações no desenvolvimento do projeto de controle. Com base nas equações obtidas, ressalta-se que, mesmo com as particularizações e simplificações introduzidas ao modelo genérico, o quadricóptero ainda não se comporta como um sistema linear.

A seguir encontram-se tabelado os valores dos parâmetros utilizados nesse trabalho. Como referência foram utilizados os valores do quadricóptero apresentado em [29]

Tabela 2.1: Parâmetros que serão utilizados nesse trabalho

Parâmetro	Valor	Unidade	Definição
$\phi$	–	rad	ângulo de <i>roll</i>
$\theta$	–	rad	ângulo de <i>pitch</i>
$\psi$	–	rad	ângulo de <i>yaw</i>
$\omega_r$	–	$\frac{rad}{s}$	velocidade angular das hélices
$U_i$	–	$N$	Entrada de controle
$J_r$	–	$kg.m^2$	Momento de inércia das hélices
$I_{xx}$	0.128	$kg.m^2$	Momento de inércia do quadricóptero em torno de X
$I_{yy}$	0.128	$kg.m^2$	Momento de inércia do quadricóptero em torno de Y
$I_{zz}$	0.256	$kg.m^2$	Momento de inércia do quadricóptero em torno de Z
$L$	0.21	$m$	Distância do centro de massa até os rotores
$m$	1.3	$kg$	Massa do quadricóptero
$g$	9.8	$\frac{m}{s^2}$	Aceleração da gravidade
$k_f$	$1.08 \times 10^{-6}$	$N.s^2$	Coefficiente de força aerodinâmica
$k_m$	$1.08 \times 10^{-8}$	$N.m.s^2$	Coefficiente de momento aerodinâmico

## 3

### Estratégias de controle

As seções anteriores apresentaram ferramentas matemáticas importantes e a modelagem do veículo aéreo objeto deste estudo, um quadricóptero, através da representação matemática de seu comportamento real (capítulo 2). Neste capítulo dá-se início ao desenvolvimento das diferentes estratégias de controle implementadas para as posições cartesianas,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , bem como os ângulos de inclinação. Inicialmente, serão apresentadas estratégias de controle clássico, vastamente utilizadas para quadricópteros comerciais, cujas características de desempenho servirão para comparação com aquelas alcançadas por estratégias de controle aprimoradas. Na sequência serão discutidas estratégias de controle moderno, começando por controles de sistemas lineares mais simples, implementadas por meio da linearização do comportamento da aeronave, passando por controles cada vez mais complexos.

#### 3.1

##### Controle Clássico

Nesta seção, pretende-se apresentar o controle clássico, uma classe de controle que não inclui o conceito de memória no sistema. Apesar desta abordagem de controle ser mais antiga que as técnicas discutidas na seção 3.2, em muitos casos ela possibilita atingir desempenhos satisfatórios, por meio da implementação de algoritmos de controle de menor complexidade. Além disso, o controlador *PID*, um controlador clássico, será utilizado como referência da comparação de desempenho dos métodos de controle.

O grande representante deste tipo de controle são os controladores *PID* (proporcional-integral-diferencial), cujo funcionamento depende, de certa forma, apenas dos erros atuais, desconsiderando os “estado” anteriores do sistema, que, ao contrário, são considerados pelas técnicas de controle moderno vistas na seção 3.2. Para analisar este controle e dar seguimento a esta seção, será utilizada a função de transferência do sistema. Assim, o sistema será visto e projetado, no domínio da frequência. Dessa maneira, introduz-se o conceito desse tipo de análise, com o intuito de facilitar e ratificar determinados pontos importantes para o entendimento e projeto desse tipo de controle. Neste intuito, a Figura 3.1 mostra a representação de um sistema genérico no domínio

da frequência, por meio de seu diagrama de blocos.

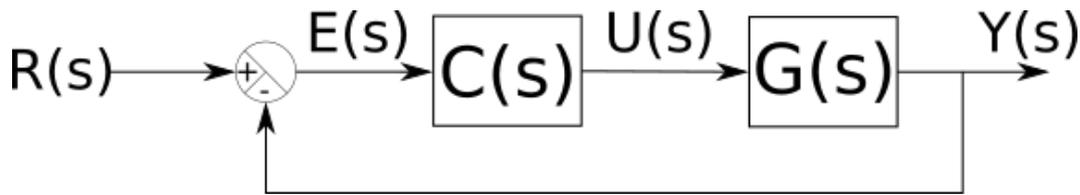


Figura 3.1: Diagrama de blocos de um sistema genérico.

Aplicando o controle sobre um sistema realimentado, como o apresentado na Figura 3.1, pode-se ver que a função de transferência do sistema pode ser obtida da seguinte forma

$$Y(s) = E(s) \cdot C(s) \cdot G(s) \quad (3-1)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (3-2)$$

onde  $E(s)$  é o sinal de erro no domínio da frequência,  $C(s)$  é a função de transferência do controlador do sistema,  $G(s)$  é a planta do sistema, em malha aberta, a ser controlado,  $Y(s)$  é a saída do sistema no domínio da frequência e  $R(s)$  é o sinal de referência no domínio da frequência.

Por sua vez, substituindo (3-2) em (3-1) verifica-se que

$$Y(s) = (R(s) - Y(s)) \cdot C(s) \cdot G(s) \quad (3-3)$$

$$Y(s) = R(s) \cdot C(s) \cdot G(s) - Y(s) \cdot C(s) \cdot G(s) \quad (3-4)$$

$$Y(s) + Y(s) \cdot C(s) \cdot G(s) = R(s) \cdot C(s) \cdot G(s) \quad (3-5)$$

$$Y(s)(1 + C(s) \cdot G(s)) = R(s) \cdot C(s) \cdot G(s) \quad (3-6)$$

$$Y(s) = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} R(s) \quad (3-7)$$

Dessa forma é realmente fácil ver que a função de transferência de malha fechada,  $T(s)$ , do sistema é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} \quad (3-8)$$

Igualando-se o denominador de  $T(s)$  a zero, conforme explicitado na equação (3-9), obtém-se o polinômio característico do sistema, cuja solução possibilita identificar os polos do sistema em malha fechada, que nada mais são do que as raízes desse polinômio.

$$\mathcal{D}(s) = 1 + C(s) \cdot G(s) = 0 \quad (3-9)$$

Assim, pode-se inferir sobre o comportamento do sistema apenas analisando a posição de seus polos, de modo equivalente ao procedimento adotado na seção 3.2.2. Além disso, como  $G(s)$  é a função de transferência do sistema em malha aberta, nota-se que a função de transferência do controlador,  $C(s)$ , afetará os polos do sistema em malha fechada, que serão deslocados em relação a suas posições no sistema de malha aberta.

Pode-se reescrever a função de transferência dada pela equação (3-8), explicitando-se os numeradores e denominadores das funções  $C(s)$  e  $G(s)$ . Dessa maneira, obtém-se uma função de transferência que dependerá explicitamente dos parâmetros do controlador e, conseqüentemente, seus polos também dependerão.

$$T(s) = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} \quad (3-10)$$

$$T(s) = \frac{\frac{\mathcal{N}_C(s)}{\mathcal{D}_C(s)} \cdot \frac{\mathcal{N}_G(s)}{\mathcal{D}_G(s)}}{1 + \frac{\mathcal{N}_C(s)}{\mathcal{D}_C(s)} \cdot \frac{\mathcal{N}_G(s)}{\mathcal{D}_G(s)}} \quad (3-11)$$

$$T(s) = \frac{\mathcal{N}_C(s)\mathcal{N}_G(s)}{\mathcal{D}_C(s)\mathcal{D}_G(s)} \cdot \frac{\mathcal{D}_C(s)\mathcal{D}_G(s)}{\mathcal{D}_C(s)\mathcal{D}_G(s) + \mathcal{N}_C(s)\mathcal{N}_G(s)} \quad (3-12)$$

$$(3-13)$$

Conseqüentemente, pode-se escrever a função  $T(s)$  como

$$T(s) = \frac{\mathcal{N}_C(s)\mathcal{N}_G(s)}{\mathcal{D}_C(s)\mathcal{D}_G(s) + \mathcal{N}_C(s)\mathcal{N}_G(s)} \quad (3-14)$$

Com a equação (3-8), pode-se, primeiramente, definir exclusivamente o comportamento do controlador e em seguida analisar seu comportamento em conjunto com a planta do sistema em malha fechada.

### 3.1.1

#### Ações de controle

Um controle *PID* é composto pela soma de três tipos de controles independentes: um **Proporcional** ao erro, um **Integral** do erro – que basicamente acumula o erro total do sistema, atuando na variação da saída do controle – e um **Derivativo** do erro – que atua na variação do erro. Conseqüentemente, o nome *PID* indica um controle Proporcional, Derivativo e Integral do erro do sistema. Como dito anteriormente, esses controles agem de maneira independente, sendo possível analisar seu comportamento isoladamente. A seguir, apresenta-se de maneira resumida as funções de transferência desses contro-

les, cujo diagrama de blocos é apresentado na Figura 3.2. Ressalta-se que, visando facilitar o entendimento do comportamento do controle, a função de transferência de retroalimentação será considerada unitária.

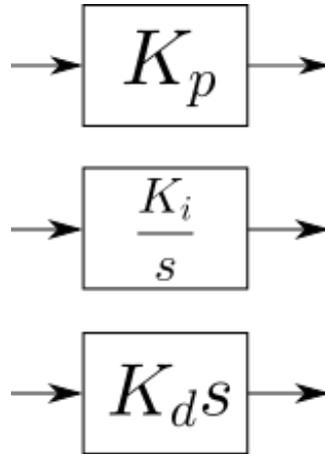


Figura 3.2: Diagrama de blocos dos controles **P**, **I** e **D**.

Para o controle **Proporcional**, ou simplesmente controle **P**, a saída do bloco de controle, mostrada na Figura 3.2, é dada por

$$u(t) = K_p \cdot e(t) \quad (3-15)$$

onde  $u(t)$  é a saída no tempo do bloco de controle,  $K_p$  é o ganho proporcional do controle e  $e(t)$  é a entrada do controle no tempo – na maioria dos casos é o erro entre a saída e a referência.

Por sua vez, observando o controle na frequência pode-se escrever

$$U(s) = K_p \cdot E(s) \quad (3-16)$$

onde  $U(s)$  é a saída na frequência do bloco de controle,  $K_p$  é o ganho proporcional do controle e  $E(s)$  é a entrada do controle na frequência.

Note que, o ganho proporcional é invariante em função da frequência. Consequentemente, projetar o ganho com o sistema no tempo ou na frequência gera o mesmo ganho, para um determinado conjunto de requisitos de projeto. Observando as equações (3-15) e (3-16), pode-se perceber que a saída é diretamente proporcional ao erro do sistema multiplicado pelo ganho proporcional. Essa informação será útil mais adiante, quando for discutida a forma de alocar os polos do sistema – através do denominador da função de transferência do sistema em malha fechada,  $T(s)$ . Alterando-se o valor do ganho  $K_p$  pode-se modificar a sensibilidade do sistema em relação ao erro, possibilitando melhorar a estabilidade e a precisão do sistema em atingir o referencial arbitrado.

Para o controle **Integral**, ou simplesmente controle **I**, a saída do bloco de controle, apresentada na Figura 3.2, pode ser definida como

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i \cdot e(t) \quad (3-17)$$

$$u(t) = K_i \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \quad (3-18)$$

onde  $u(t)$  é a saída no tempo do bloco de controle,  $K_i$  é o ganho integral do controle,  $e(t)$  é a entrada do controle no tempo e  $t_0$  é o tempo inicial do controle.

Mudando o domínio da equação 3-18 para a frequência, obtém-se

$$U(s) = \frac{K_i}{s} \cdot E(s) \quad (3-19)$$

onde  $U(s)$  é a saída na frequência do bloco de controle,  $K_i$  é o ganho integral do controle e  $E(s)$  é a entrada do controle na frequência.

Analisando as equações (3-18) e (3-19), verifica-se que, diferentemente do controle P, a saída não será apenas diretamente proporcional ao ganho integral, sendo também dependente da frequência. É importante ressaltar que o controle integral possibilita minimizar o erro em regime estacionário. Por fim, para o controle **Derivativo**, ou simplesmente **D**, a saída do bloco de controle, mostrada na Figura 3.2, apresenta, é dada por

$$u(t) = K_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (3-20)$$

onde  $u(t)$  é a saída no tempo do bloco de controle,  $K_d$  é o ganho derivativo do controle e  $e(t)$  é a entrada do controle no tempo. Por sua vez, analisando a equação (3-20) no domínio da frequência, obtém-se

$$U(s) = K_d \cdot sE(s) \quad (3-21)$$

onde  $U(s)$  é a saída na frequência do bloco de controle,  $K_d$  é o ganho derivativo do controle e  $E(s)$  é a entrada do controle na frequência.

Dessa forma, nota-se que, da mesma maneira que no controle integral, a saída não é somente proporcional ao ganho derivativo, sendo também dependente da frequência. O termo derivativo possibilita a capacidade de antecipação do erro e, conseqüentemente, o amortecimento da saída de controle. Combinando a ação dos 3 controles – sabendo que eles são independentes, a resposta total do controle PID no domínio do tempo pode ser expressa como

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (3-22)$$

Por sua vez, no domínio da frequência, tem-se que

$$U(s) = K_p \cdot E(s) + \frac{K_i}{s} \cdot E(s) + K_d \cdot sE(s) \quad (3-23)$$

$$U(s) = \left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) E(s) \quad (3-24)$$

Conseqüentemente, o controle PID completo agrega características benéficas advindas de cada um dos blocos de controle que o compõem, tais como: aumento da precisão e estabilidade, redução do erro em regime estacionário e antecipação do erro. Na sequência, com o controle PID caracterizado, pode-se passar a etapa de ajuste dos ganhos  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  – processo mais conhecido como *tuning* ou sintonia dos parâmetros do controlador. Diversos métodos podem ser empregados neste intuito, como por exemplo: método da sensibilidade limite, método da curva de reação, método de Chien-Hrones-Reswick, método heurístico de Cohen e Coon, etc. Neste trabalho, optou-se pela adoção do método de Ziegler-Nichols da sensibilidade limite [30].

Com o método de *tuning* definido, faz-se necessário a redefinição de alguns parâmetros e a introdução de outros. Em particular, com o método de Ziegler-Nichols, pode-se definir todas as variáveis ou parâmetros utilizando-se a Tabela 3.1.

Utilizando essa combinação, incorpora-se no controle as características principais desses controles citadas anteriormente. Ganha-se com esse controle o aumento da precisão e estabilidade, a redução do erro em regime estacionário e a antecipação do erro. Com o controle *PID* caracterizado, pode-se pensar em projetar – processo mais conhecido com *tuning* dos parâmetros – os ganhos de  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ . Para isso existem diversos métodos – método da sensibilidade limite, método da curva de reação, método de Chien-Hrones-Reswick, método heurístico de Cohen e Coon – mas será utilizado o método de Ziegler-Nichols da sensibilidade limite [30]. Com o método de *tuning* definido, faz-se necessário a redefinição de alguns parâmetros e a introdução de outros. Além disso, com o método de Ziegler-Nichols, pode-se definir todas as variáveis ou parâmetros através da tabela 3.1

Na Tabela 3.1, tem-se que  $K_p$  é o ganho proporcional,  $K_i$  é o ganho integral,  $K_d$  é o ganho derivativo,  $K_u$  é o ganho proporcional que gera oscilações consistentes (também conhecido como *ultimate gain*),  $T_u$  é o período das oscilações consistentes atingidas com  $K_u$  e

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (3-25)$$

$$K_d = K_p T_d \quad (3-26)$$

Tabela 3.1: Definições dos parâmetros para o método de Ziegler-Nichols.

Controle	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$K_i$	$K_d$
<b>P</b>	$0,5K_u$	–	–	–	–
<b>PI</b>	$0,45K_u$	$\frac{T_u}{1,2}$	–	$\frac{0,54K_u}{T_u}$	–
<b>PD</b>	$0,8K_u$	–	$\frac{T_u}{8}$	–	$\frac{K_u T_u}{10}$
<b>PID</b>	$0,6K_u$	$\frac{T_u}{2}$	$\frac{T_u}{8}$	$\frac{1,2K_u}{T_u}$	$\frac{3K_u T_u}{40}$

onde  $T_i$  e  $T_d$  são constantes de proporcionalidade.

Dessa forma, pode-se reescrever a equação (3-22) em função destes novos parâmetros, de acordo com

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_p T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (3-27)$$

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (3-28)$$

Consequentemente, no domínio da frequência, tem-se que

$$U(s) = K_p \cdot E(s) + \frac{K_p}{T_i s} \cdot E(s) + K_p T_d \cdot s E(s) \quad (3-29)$$

$$U(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d \cdot s \right) E(s) \quad (3-30)$$

$$U(s) = K_p \left( \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \right) E(s) \quad (3-31)$$

Cabe ressaltar que, conforme mostrado na Tabela 3.1, nem sempre é necessário efetivamente utilizar o controle *PID* completo, sendo possível implementar, por exemplo, controles *PD* ou *PI*. Neste trabalho, usa-se o controlador *PID* clássico em um arranjo paralelo, a fim de se mostrar como cada termo afeta a alocação dos polos do sistema.

Uma vez destrinchados e analisados os principais fundamentos do controle *PID*, mesmo que brevemente, pode-se avaliar como seus parâmetros afetam a planta do sistema. Para facilitar o entendimento desse comportamento, sem perda de generalidade, considera-se uma planta simples, com a seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 10)(s + 4)} \quad (3-32)$$

Conseqüentemente, observa-se que os polos estão localizados em  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -10$  e  $\lambda_3 = -4$  sendo estes as raízes da equação característica  $\Delta(s)$  de  $G(s)$ , ou seja, os valores que fazem o denominador da função de transferência ser nulo. Para este sistema, considera-se o esquema de controle apresentado na Figura 3.3, que será também posteriormente utilizado para implementar o controle do problema abordado neste trabalho.

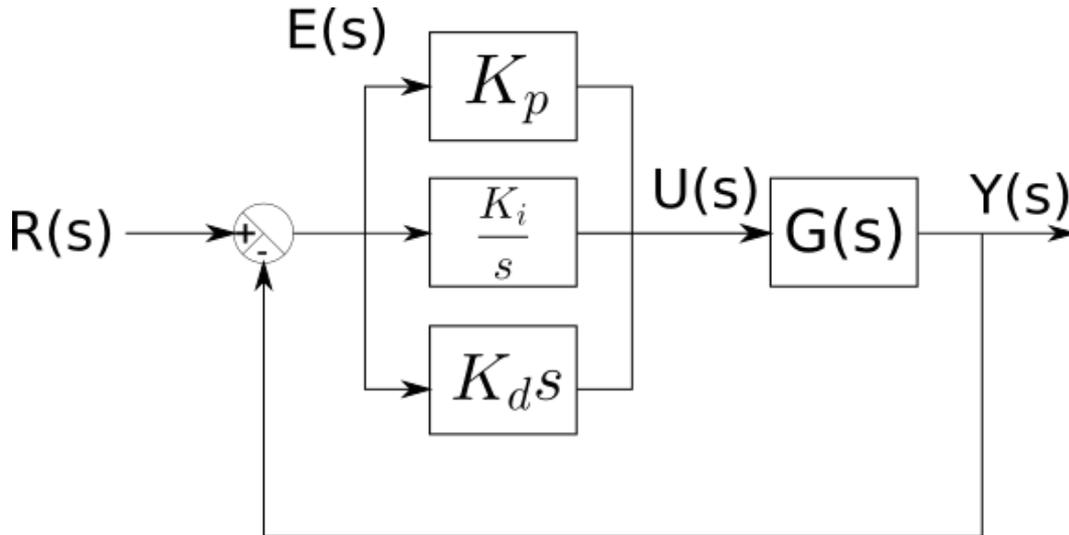


Figura 3.3: Diagrama de blocos do controle PID em paralelo.

A função de transferência do controlador é dada por

$$C(s) = K_p \left( \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \right) \quad (3-33)$$

Considerando-se que, de forma geral, a função de transferência do sistema em malha fechada é dada pela equação (3-14), pode-se afirmar que, para o sistema aqui analisado,  $T(s)$  será dada por

$$T(s) = \frac{K_p (T_d T_i s^2 + T_i s + 1) \cdot (1)}{(T_i s) \cdot (s(s + 10)(s + 4)) + K_p (T_d T_i s^2 + T_i s + 1) \cdot (1)} \quad (3-34)$$

Conseqüentemente, a equação característica do sistema em malha fechada é dada por

$$\Delta(s) = \mathcal{D}_T(s) = (T_i s) \cdot (s(s + 10)(s + 4)) + K_p (T_d T_i s^2 + T_i s + 1) \cdot (1) \quad (3-35)$$

Com auxílio do MATLAB<sup>®</sup>, a equação (3-154) pode ser expandida e reescrita como

$$\Delta(s) = T_i s^4 + 14T_i s^3 + (40T_i + K_p T_d T_i) s^2 + K_p T_i s + K_p \quad (3-36)$$

Pode-se ainda reescrever a equação (3-36) a fim de fazer com que o termo de maior grau possua um coeficiente multiplicativo unitário. Dessa forma, tem-se que

$$\Delta(s) = s^4 + 14s^3 + (40 + K_p T_d) s^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} \quad (3-37)$$

Por sua vez, o arranjo tabular de Routh [31], para a equação (3-37), é apresentado na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Arranjo tubular de Routh.

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & (40 + K_p T_d) & \frac{K_p}{T_i} \\ s^3 & 14 & K_p & 0 \\ s^2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ s^1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ s^0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{array}$$

Os coeficientes  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$ , apresentados na Tabela 3.2, são definidos como

$$b_1 = \frac{-\left(\det \begin{vmatrix} 1 & (40 + K_p T_d) \\ 14 & K_p \end{vmatrix}\right)}{14} = \frac{14 \cdot (40 + K_p T_d) - 1 \cdot K_p}{14} \quad (3-38)$$

$$b_2 = \frac{-\left(\det \begin{vmatrix} 1 & \frac{K_p}{T_i} \\ 14 & 0 \end{vmatrix}\right)}{14} = \frac{-(1 \cdot 0 - \frac{K_p}{T_i})}{K_p} = \frac{K_p}{T_i} \quad (3-39)$$

$$b_3 = 0 \quad (3-40)$$

$$c_1 = \frac{-\left(\det \begin{vmatrix} 14 & K_p \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)}{b_1} = \frac{-(14 \cdot b_2 - b_1 \cdot K_p)}{b_1} \quad (3-41)$$

$$c_2 = \frac{-\left(\det \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}\right)}{b_1} = 0 \quad (3-42)$$

$$c_3 = 0 \quad (3-43)$$

$$d_1 = \frac{-\left(\det \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right)}{c_1} = \frac{-(b_1 \cdot 0 - b_2 \cdot c_1)}{b_1} = \frac{b_2 \cdot c_1}{b_1} \quad (3-44)$$

$$d_2 = \frac{-\left(\det \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\right)}{c_1} = 0 \quad (3-45)$$

$$d_3 = 0 \quad (3-46)$$

De acordo com o critério de estabilidade de Routh [31], como visto em [32], para o sistema se tornar estável basta que a primeira coluna do arranjo (Tabela 3.2) seja positiva. Dessa forma, como o projetista tem liberdade para selecionar  $K_p$ ,  $T_d$  e  $T_i$ , é possível estabilizar o sistema ou, equivalentemente, alocar os polos no **SPE**. Com essa informação o projetista pode, agora, se concentrar em encontrar os valores de  $K_u$  – considerando  $T_d = 0$ ,  $T_i = \infty$  – achando  $K_p$  que leva o sistema a oscilar consistentemente –  $K_P$  que coloque um 0 na primeira coluna do arranjo tabular de Routh – e  $T_u$  é o período das oscilações consistentes.

### 3.1.2

#### PID de referência

Na seção 3.1.1, foi apresentado um esquema de controle *PID* em paralelo. Analisou-se como esse controle afeta a função de transferência da Planta e, conseqüentemente, como a função de transferência de malha fechada pode ser definida em função dos parâmetros de projeto do controle ( $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ ). Por sua vez, para implementação do controlador *PID* empregado neste trabalho, tomou-se como base o controlador descrito em [33]. Dessa forma, o controle proposto foi feito considerando o controle da Atitude do quadricóptero, ou seja, das rotações sobre os eixos do veículo.

O diagrama de blocos do controle é similar ao apresentado na Figura 3.3, entretanto foram implementados 6 controles independentes, um para cada tipo de movimento da aeronave: *Roll* ( $\phi$ ), *Pitch* ( $\theta$ ), *Yaw* ( $\psi$ ), altitude ( $z$ ) e posição  $x$  e  $y$ , esses dois últimos foram feitos com o auxílio de um estimador de estados. A Figura 3.4 apresenta o diagrama de blocos do controle *PID* desenvolvido nessa seção

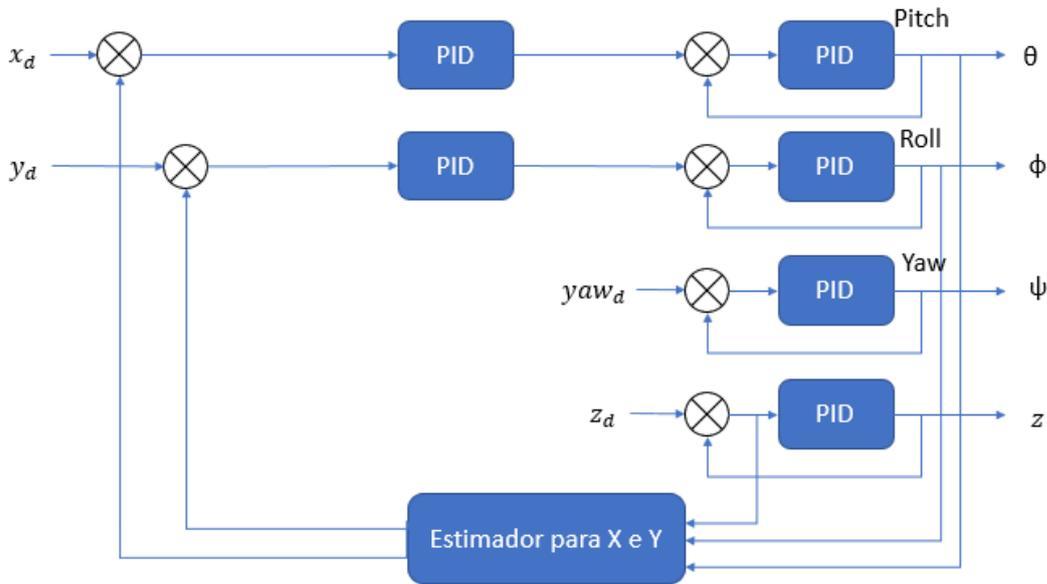


Figura 3.4: Diagrama de blocos do controle PID proposto nesta seção.

onde  $\phi$  é o ângulo de *Roll*,  $\theta$  é o ângulo de *Pitch*,  $\psi$  é o ângulo de *Yaw*,  $x$ ,  $y$  e  $z$  é a posição do quadricóptero,  $x_d$ ,  $y_d$  e  $z_d$  é a posição desejada para o quadricóptero e  $yaw_d$  é o ângulo de *Yaw* desejado para o quadricóptero.

Como o processo de desenvolvimento e projeto é similar para todas as variáveis, nesta seção trata-se apenas um dos controle e os outros serão projetados da mesma forma. Assim como feito em [33], utiliza-se as equações de  $\ddot{\phi}$ ,  $\ddot{\theta}$  e  $\ddot{\psi}$ , anteriormente definidas por meio da equação (3-104), para se encontrar a planta do sistema. Dessa forma, tem-se que

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{k_f L(-\omega_2^2(t) + \omega_4^2(t))}{I_{xx}} = \frac{k_f L}{I_{xx}} u(t) \quad (3-47)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{k_f L(\omega_1^2(t) + \omega_3^2(t))}{I_{yy}} = \frac{k_f L}{I_{yy}} u(t) \quad (3-48)$$

$$\ddot{\psi}(t) = \frac{k_m L(\omega_1^2(t) - \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t) - \omega_4^2(t))}{I_{zz}} = \frac{k_m \cdot L}{I_{zz}} u(t) \quad (3-49)$$

Passando as equações (3-50),(3-51) e (3-52) do domínio do tempo para o da frequência obtêm-se as funções de transferência das plantas que deseja-se

controlar.

$$\phi(s)s^2 = \frac{k_f L}{I_{xx}} U(s) \implies G_1(s) = \frac{\phi(s)}{U(s)} = \frac{k_f L}{I_{xx} s^2} \quad (3-50)$$

$$\theta(s)s^2 = \frac{k_f L}{I_{yy}} U(s) \implies G_2(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{k_f L}{I_{yy} s^2} \quad (3-51)$$

$$\psi(s)s^2 = \frac{k_m L}{I_{zz}} U(s) \implies G_3(s) = \frac{\psi(s)}{U(s)} = \frac{k_m L}{I_{zz} s^2} \quad (3-52)$$

No caso da dinâmica do quadricóptero, adotando um procedimento similar ao descrito em [33], pode-se obter a função de transferência das plantas. Analisando o denominador das plantas  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  e  $G_3(s)$  observa-se que eles não são polinômios completos e, conseqüentemente, não são polinômios de Hurwitz, de modo que não são estáveis. Adicionando os controladores propostos, o sistema em malha fechada, com o controle de *Atitude*, pode ser observado na 3.5. Por sua vez, utilizando a equação (3-31), juntamente com as funções de transferência das plantas, é possível obter as funções de transferência do sistema em malha fechada. Como o processo é similar para os controles, analisando apenas o controle é suficiente para explicar todo o processo. A equação (3-57) define a função de transferência de malha aberta para o sistema.

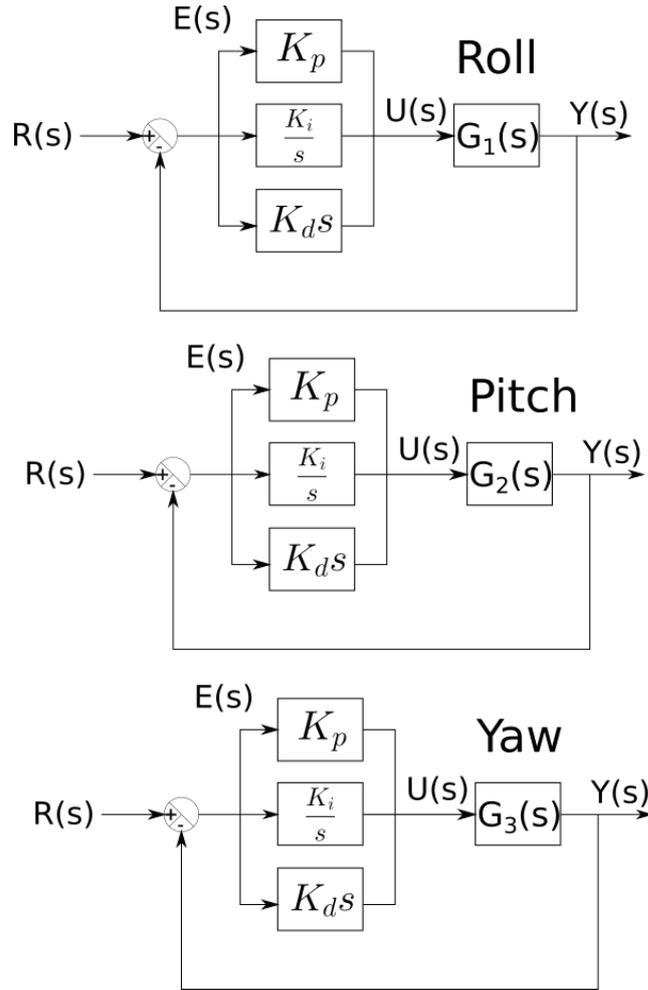


Figura 3.5: Diagrama de blocos do controle PID para a *Atitude*.

Para a planta 1, dada por  $G_1(s)$  tem-se

$$T_1(s) = \frac{C_1(s) \cdot G_1(s)}{1 + C_1(s) \cdot G_1(s)} = \frac{\mathcal{N}_{C_1}(s)\mathcal{N}_{G_1}(s)}{\mathcal{D}_{C_1}(s)\mathcal{D}_{G_1}(s) + \mathcal{N}_{C_1}(s)\mathcal{N}_{G_1}(s)} \quad (3-53)$$

$$T_1(s) = \frac{(k_f L) \cdot (K_p(T_d T_i s^2 + T_i s + 1))}{(I_{xx} s^2) \cdot (T_i s) + (k_f L) \cdot (K_p(T_d T_i s^2 + T_i s + 1))} \quad (3-54)$$

$$T_1(s) = \frac{K_p L T_d T_i k_f s^2 + K_p L T_i k_f s + K_p L k_f}{I_{xx} T_i s^3 + K_p L T_d T_i k_f s^2 + K_p L T_i k_f s + K_p L k_f} \quad (3-55)$$

$$T_1(s) = \frac{\frac{K_p L T_d k_f}{I_{xx}} s^2 + \frac{K_p L k_f}{I_{xx}} s + \frac{K_p L k_f}{I_{xx} T_i}}{s^3 + \frac{K_p L T_d k_f}{I_{xx}} s^2 + \frac{K_p L k_f}{I_{xx}} s + \frac{K_p L k_f}{I_{xx} T_i}} \quad (3-56)$$

$$T_1(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^3 + as^2 + bs + c} \quad (3-57)$$

onde  $a = \frac{K_p L T_d k_f}{I_{xx}}$ ,  $b = \frac{K_p L k_f}{I_{xx}}$  e  $c = \frac{K_p L k_f}{I_{xx} T_i}$ .

O arranjo tabular de Routh, para a planta  $T_1(s)$ , é apresentado na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Arranjo tubular de Routh para a planta  $T_1$ .

$$\begin{array}{c|cc|c} s^3 & 1 & b & 0 \\ s^2 & a & c & 0 \\ s^1 & b_1 & b_2 & 0 \\ s^0 & c_1 & c_2 & 0 \end{array}$$

Por meio da Tabela 3.3, observa-se que os valores de  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  e  $c_2$  no arranjo tabular são dados por

$$b_1 = \frac{-(c - ab)}{a} = \frac{(ab - c)}{a} = \frac{\left(\frac{K_p L T_d k_f}{I_{xx}} \frac{K_p L k_f}{I_{xx}} - \frac{K_p L k_f}{I_{xx} T_i}\right)}{\frac{K_p L T_d k_f}{I_{xx}}} \quad (3-58)$$

$$b_2 = 0 \quad (3-59)$$

$$c_1 = \frac{-(-b_1 c)}{c} = c = \frac{K_p L k_f}{I_{xx} T_i} \quad (3-60)$$

$$c_2 = 0 \quad (3-61)$$

Dessa forma, como dito no final da seção 3.1.1, para que o sistema seja estável é necessário que a primeira coluna do arranjo possua apenas valores positivos não nulos. Conseqüentemente, existem algumas restrições que devem ser atendidas durante o processo de projeto dos ganhos, conforme apresentado na sequência.

$$c_1 = \frac{K_p L k_f}{I_{xx} T_i} \implies \begin{cases} K_p > 0 \equiv T_i > 0 \\ K_p < 0 \equiv T_i < 0 \end{cases} \quad (3-62)$$

$$b_1 = b - \frac{c}{a} = \frac{K_p L k_f}{I_{xx}} - \frac{K_p L k_f}{I_{xx} T_i} \frac{I_{xx}}{K_p L T_d k_f} = \frac{T_d T_i (K_p L k_f) - I_{xx}}{T_d T_i I_{xx}} \quad (3-63)$$

$$b_1 \implies \begin{cases} T_i > 0 \implies K_p > 0 \implies T_d > \frac{I_{xx}}{T_i (K_p L k_f)} \\ T_i < 0 \implies K_p < 0 \implies T_d > \frac{I_{xx}}{T_i (K_p L k_f)} \end{cases} \quad (3-64)$$

Escolhendo  $K_p$  positivo com o valor de 25,  $K_i = 0.1 \implies T_i = 100$  basta que  $T_d$  seja, no limite, igual a

$$T_d = \frac{I_{xx}}{100(25Lk_f)} \quad (3-65)$$

Por sua vez, utilizando os parâmetros da Tabela 2.1 é possível obter

$$T_d > \frac{0.128}{100(25 \times 0.21 \times 1.08 \times 10^{-6})} = 90.2998 \quad (3-66)$$

$$T_d = 91 \quad (3-67)$$

Na sequência, o valor de  $K_d$  pode ser obtido usando a equação (3-26), resultando em

$$K_d = 2275 \quad (3-68)$$

Ressalta-se que, para auxiliar no projeto dos ganhos, pode-se fazer uso de ferramentas automatizadas de sintonia de controladores *PID*, que levam em consideração características de desempenho almeçadas pelo projetista, tais como: resposta em frequência, tempo de assentamento, resposta à transiente, entre outras. Essas ferramentas, geralmente, fazem uso da linearização da planta, para obter uma resposta aproximada do sistema a ser sintonizado. É possível encontrar tais ferramentas, por exemplo, em bibliotecas de *Python*, *C/C++* e *toolboxes* de *MATLAB*®.

## 3.2

### Controle moderno

A utilização de estratégias de controle moderno possibilita a implementação de uma memória dentro do sistema. Dessa forma, o controle consegue responder melhor, mais precisamente e rapidamente, a uma excitação. Geralmente, um sistema de controle moderno é representado por meio do chamado espaço de estados (*State-Space* ou **SS**). Para tal fim, cria-se um vetor de estados, composto por variáveis de estado que representam elementos responsáveis por armazenar energia no sistema. Este vetor determina univocamente o estado do sistema  $\vec{x}(t)$  para qualquer  $t \geq t_0$ , conhecidos  $\vec{x}(t_0)$  e o vetor de entradas  $\vec{u}(t \geq t_0)$ . Por exemplo, em um sistema elétrico, como o circuito RLC mostrado na Figura 3.6, pode-se entender como variáveis de estado as tensões nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , representadas por  $x_1$  e  $x_2$ , além da corrente no indutor  $L_1$ , representada por  $x_3$ . Por sua vez, a saída do sistema é denotada por  $\vec{y}$  (tensão sobre a impedância equivalente formada pela associação série entre  $R_2$  e  $L_1$ ), os estados por  $x_i$  e as entradas por  $u_i$ , sendo  $u_1$  uma fonte de tensão e  $u_2$  uma fonte de corrente.

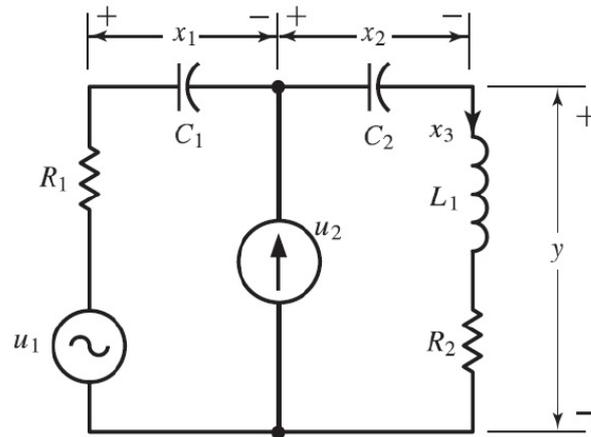


Figura 3.6: Rede RLC.

De maneira geral, um sistema invariante no tempo pode ser representado no espaço de estados por duas equações, denominadas equação de estado (3-69) e equação de saídas (3-70).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{3-69}$$

$$\mathbf{y}(t) = h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{3-70}$$

onde  $\mathbf{x}(t)$  é o vetor de estados,  $\mathbf{u}(t)$  é o vetor de entradas,  $t$  é o tempo e  $\mathbf{y}(t)$  é o vetor de saída.

Basicamente todo comportamento do sistema é representado por meio dessas equações, que são capazes de modelar efeitos de *memória* presentes no sistema. Por outro lado, quando o sistema estudado é linear essa representação pode ser simplificada. Neste caso, as funções  $f$  e  $h$  conseguem modelar de forma independente os efeitos das entradas e dos estados sobre o sistema. Assim, pode-se reescrever as equações (3-69) e (3-70) como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{3-71}$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \tag{3-72}$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são as matrizes que representam o comportamento do sistema.

Para exemplificar a compreensão dessa representação, considera-se o sistema mostrado na Figura 3.7

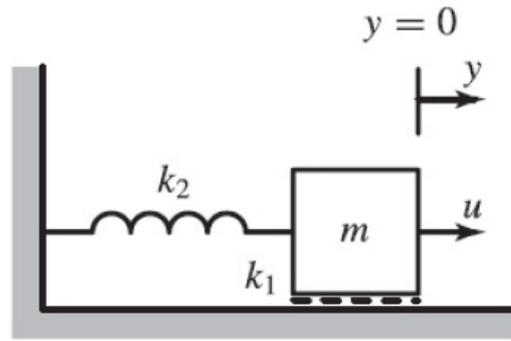


Figura 3.7: Sistema massa-mola.

Sendo  $y$  a posição do bloco,  $m$  a massa,  $u$  uma força externa aplicada no bloco,  $k_1$  a constante de atrito e  $k_2$  a constante da mola, pode-se modelar o sistema através da segunda lei de Newton. Considerando que todos os atritos são lineares e a mola é linear, tem-se

$$m\ddot{y} = u - k_1\dot{y} - k_2y \quad (3-73)$$

Observando a equação (3-73), os estados foram definidos como

$$x_1 = y \quad (3-74)$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (3-75)$$

Conseqüentemente,  $\dot{x}$  é dado por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3-76)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{m} - \frac{k_1x_2}{m} - \frac{k_2x_1}{m} \quad (3-77)$$

Dessa forma, o comportamento do sistema pode ser descrito por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_2}{m} & -\frac{k_1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \quad (3-78)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3-79)$$

ou ainda

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_2}{m} & -\frac{k_1}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \quad (3-80)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (3-81)$$

Antes de dar seguimento ao projeto das estratégias de controle, ressalta-se que para as estratégias de controle moderno implementadas no *State feedback*(seção 3.2.2) e no *LQR*(seção 3.2.3) fez-se necessária a linearização do modelo. Dessa forma, na sequência, trata-se desse problema de forma mais detalhada

### 3.2.1

#### Linearização do modelo

Existem diversas técnicas de linearização de sistemas. Alguns métodos baseiam-se na realização de uma análise superficial do comportamento do sistema, na tentativa de verificar como simplificar, mitigar ou eliminar as não linearidades existentes. Esta técnica pode funcionar e ser fácil de se verificar para sistemas mais simples. Entretanto, devido a complexidade do sistema analisado nesta dissertação, optou-se por fazer uma análise mais matemática do sistema, tentando observar o seu comportamento próximo de pontos específicos, na vizinhança dos quais o sistema se comporta de maneira suficientemente linear. Esses pontos são denominados pontos de equilíbrio do sistema, onde ele permanece caso não haja excitação externa. Neste trabalho, faz-se uso desses pontos de equilíbrio para linearizar o sistema. A linearização por meio de pontos de equilíbrio possibilita modelar o comportamento do sistema em regiões onde este exhibe comportamento quase linear. Dessa forma, considerando que o sistema só opere na vizinhança dos pontos de equilíbrio, seu comportamento se torna relativamente linear, de modo que técnicas de controle linear podem ser utilizadas. Dessa maneira, considerando o sistema genérico dado pelas equações (3-69) e (3-70), supõe-se que exista uma solução dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t) \quad (3-82)$$

Por sua vez, considerando-se que tanto a entrada quanto o estado inicial sofram leves perturbações ( $\Delta u_0$  e  $\Delta x_0$ ) em torno da solução descrita pela equação (3-82), com base na equação (3-69) tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) + \dot{\Delta \mathbf{x}}_0 = f(\mathbf{x}_0(t) + \Delta \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0(t) + \Delta \mathbf{u}_0, t) \quad (3-83)$$

Expandindo-se a equação linear de primeira ordem, pode-se reescrever a equação (3-83) como

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) + \Delta \dot{\mathbf{x}}_0 = h(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \dots \quad (3-84)$$

Na sequência, arbitrando-se

$$\mathbf{h} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]^T \quad (3-85)$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \quad (3-86)$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]^T \quad (3-87)$$

pode-se definir as matrizes  $A$  e  $B$  apresentadas na equação (3-71), como os jacobianos de  $\mathbf{h}$  em relação aos estados  $\mathbf{x}$  e as entradas  $\mathbf{u}$ .

$$A := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (3-88)$$

$$B := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{bmatrix} \quad (3-89)$$

Com base nas definições feitas nas equações (3-88) e (3-89), e desprezando os termos de ordem alta presentes na equação (3-84), obtém-se

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = A \Delta \mathbf{x}(t) + B \Delta \mathbf{u}(t) \quad (3-90)$$

Por sua vez, adotando um desenvolvimento muito similar ao aqui apresentado para a definição de  $\Delta \dot{x}(t)$ , pode-se também definir  $\Delta y(t)$  como

$$\Delta \mathbf{y}(t) = C \Delta \mathbf{x}(t) + D \Delta \mathbf{u}(t) \quad (3-91)$$

onde  $C$  e  $D$  são definidos por

$$C := \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3-92)$$

$$D := \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \quad (3-93)$$

Dessa forma, pode-se equacionar o comportamento do sistema em função de variações ou perturbações em suas entradas. O sistema estudado é invariante no tempo, conseqüentemente, quando linearizado, pode ser tratado como um sistema linear e invariante no tempo (SLIT). Por sua vez, uma propriedade importante dos SLITs é a superposição. Ou seja, se for adicionada uma constante (um degrau, por exemplo) a entrada do sistema, ele vai se comportar da mesma forma como funcionava antes, porém somando apenas a contribuição decorrente desta constante. Assim, sabendo que deseja-se operar próximo ao ponto de equilíbrio, para manter válida a linearização do sistema, observa-se que o sistema pode ser separado em duas partes: uma constante e uma que representa as variações. Conseqüentemente, pode-se escrever as entradas  $U$  e estados  $X$  como

$$U = \mathbf{u}_{eq} + \Delta \mathbf{u}(t) \quad (3-94)$$

$$X = \mathbf{x}_{eq} + \Delta \mathbf{x}(t) \quad (3-95)$$

Dessa forma, o controle do sistema pode ser feito atuando-se sobre as variáveis  $\Delta \mathbf{u}(t)$  e  $\Delta \mathbf{x}(t)$ , de modo que o sinal total de controle  $U$  seja a soma da entrada que leva ao ponto de equilíbrio  $u_{eq}$  com a entrada de controle  $\Delta \mathbf{u}(t)$ . O mesmo pode ser dito em relação ao estado  $X$ , que será a soma do estado que leva ao ponto de equilíbrio  $x_{eq}$  com o estado gerado pelo controle

$$\Delta \mathbf{x}(t)$$

. Por sua vez, as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são construídas seguindo as equações

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{u=u_{eq}, x=x_{eq}} \quad (3-96)$$

$$B = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{u=u_{eq}, x=x_{eq}} \quad (3-97)$$

$$C = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{u=u_{eq}, x=x_{eq}} \quad (3-98)$$

$$D = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{u=u_{eq}, x=x_{eq}} \quad (3-99)$$

Dessa maneira, o problema a ser resolvido passa a ser encontrar o ponto de equilíbrio do sistema. Neste intuito, basta aplicar a definição de ponto de equilíbrio, ou seja, pontos onde não há variação em nenhum estado simultaneamente. Assim, tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (3-100)$$

A solução da equação (3-100) é o ponto de equilíbrio  $(u_{eq}, x_{eq})$ . Uma vez detalhados os aspectos inerentes a linearização do sistema, pode-se avançar para a efetiva implementação das estratégias de controle

### 3.2.1.1

#### Modelo linearizado do quadricóptero

O modelo do quadricóptero desenvolvido no capítulo 2 representa com alta precisão o comportamento da aeronave estudada nesse trabalho. No entanto, fez-se necessário lineariza-lo em torno do ponto de equilíbrio, a fim de poder usar técnicas de controle linear com esse modelo.. Dessa maneira, o processo de linearização é iniciado com a definição do seguinte vetor de estados  $X$

$$X = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}]^T \quad (3-101)$$

Dessa forma o vetor  $\dot{X}$  ficaria

$$\dot{X} = [\dot{\phi} \ \ddot{\phi} \ \dot{\theta} \ \ddot{\theta} \ \dot{\psi} \ \ddot{\psi} \ \dot{x} \ \ddot{x} \ \dot{y} \ \ddot{y} \ \dot{z} \ \ddot{z}]^T \quad (3-102)$$

Por sua vez, observando-se as equações (2-52) e (2-53), substituindo os estados e expressando as entradas  $U$  e torques do sistema em função das velocidades angulares dos motores da aeronave, uma vez que estas serão as formas dos atuadores interagirem com o sistema, pode-se obter

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_f L(-\omega_2^2 + \omega_4^2)}{I_{xx}} \frac{x_2}{I_{xx}} + x_6 x_4 \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \\ \frac{k_f L(\omega_1^2 + \omega_3^2)}{I_{yy}} \frac{x_4}{I_{yy}} + x_6 x_2 \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \\ \frac{k_m L(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)}{I_{zz}} \frac{x_6}{I_{zz}} + x_4 x_2 \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \\ x_8 \\ -g \sin(x_3) - x_4 x_{12} + x_6 x_{10} \\ x_{10} \\ g \cos(x_3) \sin(x_1) - x_6 x_8 + x_2 x_{12} \\ x_{12} \\ g \cos(x_3) \cos(x_1) - x_2 x_{10} + x_4 x_8 - \frac{k_f(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)}{m} \end{bmatrix} \quad (3-103)$$

Com base nas equações aqui estabelecidas, pode-se identificar quais valores dos estados e das entradas fazem com que  $\dot{X} = \mathbf{0}$ . Em particular, um possível ponto de equilíbrio ocorre quando os estados são nulos,  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , e dessa forma tem-se

$$\mathbf{x}_{eq} = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_f L(-\omega_2^2 + \omega_4^2)}{I_{xx}} \\ 0 \\ \frac{k_f L(\omega_1^2 + \omega_3^2)}{I_{yy}} \\ 0 \\ \frac{k_m L(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)}{I_{zz}} \\ 0 \\ g - \frac{k_f(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-104)$$

Considerando que as rotações dos motores possuem módulo igual e apenas sentidos diferentes, pode-se simplificar a equação de  $\ddot{z} = g - \frac{k_f(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)}{m} = 0$  de modo a se obter

$$0 = g - \frac{k_f(\omega^2 + \omega^2 + \omega^2 + \omega^2)}{m} \quad (3-105)$$

$$g = \frac{4k_f\omega^2}{m} \quad (3-106)$$

$$\omega^2 = \frac{gm}{4k_f} \quad (3-107)$$

$$\omega_{eq} = \sqrt{\frac{gm}{4k_f}} \quad (3-108)$$

Dessa forma, verifica-se que a equação (3-108) possibilita identificar o módulo de  $\omega$  associado ao ponto de equilíbrio, que pode ser descrito por

$$\mathbf{u}_{eq} = [-\omega_{eq} \quad \omega_{eq} \quad -\omega_{eq} \quad \omega_{eq}] \quad (3-109)$$

$$\mathbf{x}_{eq} = \mathbf{0} \quad (3-110)$$

Os sinais adotados para as entradas explicitadas na equação (3-109) são função do sentido das forças geradas pelos motores, seguindo a convenção adotada nesse trabalho.

Por sua vez, as variáveis do sistema podem ser reescritas, separando a

parte constante da parte que varia com o controle, conforme descrito por

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}_{eq} + \Delta x \quad (3-111)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{y}_{eq} + \Delta y \quad (3-112)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}_{eq} + \Delta u \quad (3-113)$$

Dessa forma, a operação de controle pode atuar apenas sobre a parte variável do sistema,  $\Delta x$  e  $\Delta u$ . Assim, o sistema a ser controlado será expresso por

$$\begin{cases} \dot{\Delta x} = h(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \\ \Delta y = f(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\Delta x} = A\mathbf{X} + B\mathbf{U} \\ \Delta y = C\mathbf{X} + D\mathbf{U} \end{cases} \quad (3-114)$$

onde as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são definidas por

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{u=u_{eq}, x=x_{eq}} \quad (3-115)$$

$$B = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{u=u_{eq}, x=x_{eq}} \quad (3-116)$$

$$C = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{u=u_{eq}, x=x_{eq}} \quad (3-117)$$

$$D = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{u=u_{eq}, x=x_{eq}} \quad (3-118)$$

### 3.2.2

#### Controle por realimentação de estados com polos dominantes e controle de posição por Lógica Fuzzy

O controle por realimentação de estados, apesar de simples, é uma ferramenta extremamente poderosa. A ideia desse tipo de controle é deslocar os polos do sistema, para que este sempre opere de forma estável. O deslocamento de polos é feito por meio da definição de uma matriz de ganhos capaz de mover os polos para as posições desejadas. Adiante detalha-se o processo do controle por realimentação de estados adotado para o sistema estudado nesta dissertação, conforme representado pelo diagrama de blocos ilustrado na Figura 3.8.

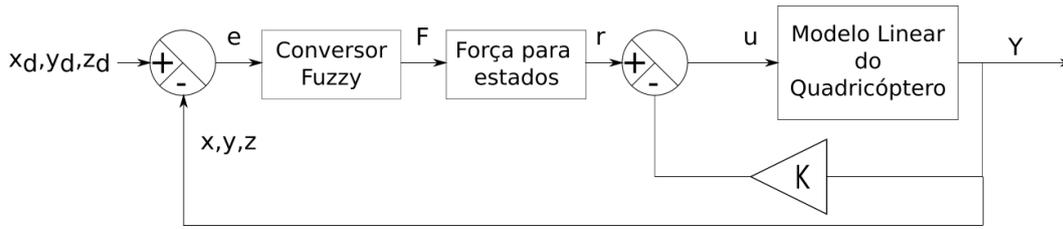


Figura 3.8: Diagrama de blocos do sistema de controle com realimentação de estados (*state feedback*) proposto nesta seção.

onde  $x_d, y_d$  e  $z_d$  é a posição de referência,  $x, y$  e  $z$  é a posição do quadricóptero,  $e$  é o sinal de erro,  $F$  são as forças geradas pelo controlador Fuzzy,  $r$  é o sinal de referência para o controlador de realimentação de estados,  $u$  é o sinal de controle para a planta,  $Y$  é o vetor de saída e  $K$  é o bloco de ganhos da realimentação de estados.

### 3.2.2.1 Realimentação de estados

Para explicar o comportamento desse controle, usa-se inicialmente um sistema mais simples do que o estudado nesse trabalho. Considere o seguinte sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{3-119}$$

$$y = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \tag{3-120}$$

onde a matriz  $D$  é nula – apenas para facilitar a discussão – e matriz  $C$  é a identidade.

Neste caso, tem-se que as saídas do sistema serão os próprios estados. Por sua vez, adota-se uma lei de controle simples, onde a entrada do sistema é uma fração do vetor de estados, conforme definido por

$$\mathbf{u}(t) = r(t) - K\mathbf{x}(t) \tag{3-121}$$

onde  $r(t)$  é a referência do sistema e  $K$  é a matriz de ganhos do sistema.

O diagrama de bloco de um sistema utilizando a realimentação de estados pode ser visto na Figura 3.9

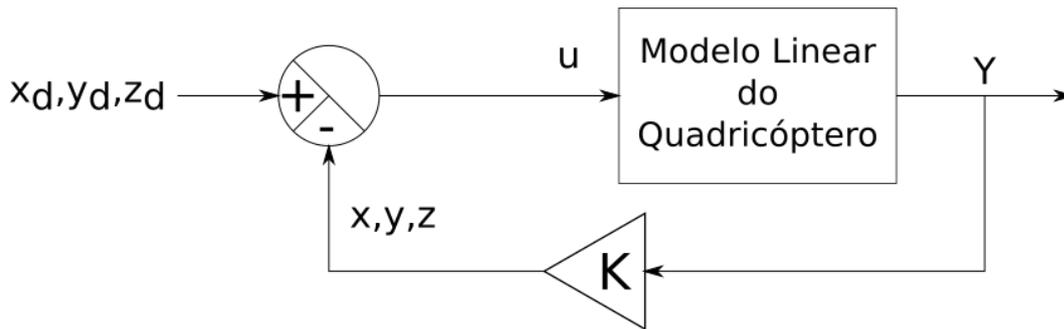


Figura 3.9: Diagrama de blocos de um sistema de controle com o *state feedback*.

onde  $x_d, y_d$  e  $z_d$  é a posição de referência,  $x, y$  e  $z$  é a posição do quadricóptero,  $e$  é o sinal de erro,  $u$  é o sinal de controle para a planta,  $Y$  é o vetor de saída e  $K$  é o bloco de ganhos da realimentação de estados.

Substituindo-se (3-121) em (3-119) e desenvolvendo a equação resultante, tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3-122)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(r(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t)) \quad (3-123)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \quad (3-124)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \quad (3-125)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{CL}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \quad (3-126)$$

Ressalta-se que, se o par  $(A, B)$  for controlável, então  $(A - BK, B)$  também será, conforme descrito em [34]. Dessa forma, admitindo que o sistema seja controlável, atuando-se sobre  $A_{CL}$  é possível deslocar seus autovalores e, conseqüentemente, escolher a posição dos polos. A fim de exemplificar como o deslocamento de autovalores funciona, utiliza-se como exemplo o seguinte sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3-127)$$

Para o sistema descrito na equação (3-127), tem-se que o polinômio característico da matriz  $A$  é dado por

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 4) \quad (3-128)$$

Conseqüentemente, nota-se que os autovalores do sistema são  $\lambda = -2$ , estável, e  $\lambda = 4$ , instável. Dessa forma, o sistema se comporta de forma instável. Conseqüentemente, pretende-se utilizar a lei de controle sugerida anteriormente (equação (3-121)) a fim de fazer com que o sistema possa operar de forma estável, mas primeiro faz-se necessário verificar se o sistema é controlável. Neste intuito, define-se

$$\mathcal{C} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-129)$$

Nota-se que o *rank* de  $\mathcal{C}$  é completo, permitindo afirmar que o sistema é controlável. Dessa forma, utiliza-se a lei de controle

$$u = r - [k_1 \quad k_2] x \quad (3-130)$$

Substituindo-se a equação (3-130) na equação (3-127), obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3-131)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 3 - k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3-132)$$

Conseqüentemente, o novo polinômio característico é dado por

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1 + k_1)(\lambda - 1) - 3(3 - k_2) = \lambda^2 + (k_1 - 2)\lambda + (3k_2 - k_1 - 8) \quad (3-133)$$

Assim, observa-se que as constantes de ganho  $k_i$  conseguem alocar os polos, ou raízes do polinômio característico, de maneira arbitrária, mostrando que a lei de controle empregada consegue auxiliar na alocação dos polos, possibilitando que o sistema opere de forma estável.

### 3.2.2.2 Polos dominantes

Na seção 3.2.2.1 foi apresentado o controle por realimentação de estados, que irá escolher as raízes do polinômio característico do sistema. Assim como no exemplo apresentado, é interessante que seja possível calcular e encontrar essas raízes, para que o projetista, ao escolher os polos, possa encontrar o valor dos ganhos que alocarão as raízes nos locais desejados. Dessa forma, a maioria das técnicas empregadas na solução desse tipo de problema, se utilizam do fato de polinômios com baixo grau possuírem expressões analíticas para suas raízes. Assim, sistemas de baixa ordem podem ser solucionados mais facilmente.

Entretanto, a obtenção de soluções analíticas para as raízes de polinômios com ordens altas, não é um processo trivial. Dessa forma, a técnica de polos dominantes muitas vezes pode ser aplicada visando simplificar a obtenção da solução desses problemas. Basicamente, essa técnica aproxima o comportamento dos sistemas de ordem mais alta por sistemas de ordem mais baixa, também capazes de modelar satisfatoriamente o comportamento do sistema, tornando mais simples a sua solução. A grande vantagem dessa técnica é que grande parte do comportamento de um sistema, como tempo de assentamento e *overshoot*, tem expressões analíticas bem definidas para sistemas de até 2ª ordem, tornando mais simples para o projetista trabalhar com esse tipo de sistema. Intuitivamente, pode-se notar que os polos de um sistema dado por equações diferenciais são soluções para

$$\mathbf{x} = e^{(A-Bk)t} \mathbf{x}(0) \quad (3-134)$$

$$\mathbf{x} = e^{A_{CL}t} \mathbf{x}(0) \quad (3-135)$$

Observando a equação (3-135), nota-se que os polos, ou autovalores, do sistema realimentado são responsáveis por determinar a velocidade com que o sistema leva para convergir para um valor constante e conseqüentemente estabilizar, com o passar do tempo. Autovalores grandes fazem com que o sistema estabilize mais rapidamente, enquanto que para autovalores pequenos ele estabilizará mais lentamente. Conseqüentemente, nota-se que os autovalores determinam o comportamento do sistema.

Conseqüentemente, em um sistema com múltiplos polos são os mais lentos que efetivamente determinem o comportamento do sistema. Por exemplo, um sistema de 6ª ordem possui 6 polos. Entretanto, usando a técnica de polos dominantes pode-se reduzir a ordem do sistema, visando aproximar seu comportamento por um sistema de 2ª ordem, apenas alocando 2 polos com módulos significativamente menores que os outros 4 polos.

Com maior rigor matemático, a redução da ordem de sistemas por meio da técnica de polos dominantes pode ser explicada considerando um SLIT de ordem  $n$  com a função de transferência em malha fechada dada por

$$F(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-136)$$

sendo

$$D(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m \quad (3-137)$$

um polinômio de Hurwitz [35], como visto em [32] e  $n = m + 2$ .

A função de transferência  $F(s)$  já foi separada visando aproximar seu

comportamento por meio de um polinômio de 2º grau, conforme evidenciado na equação (3-136). Mas, para se lograr êxito nesta aproximação, é necessário que as raízes de  $D(s)$  sejam maiores que as de  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega + n^2$ . Por convenção, para serem consideradas como muito maiores, as partes reais das raízes de  $D(s)$  devem ser maiores que, pelo menos,  $5\zeta\omega_n$ , como observado em [32] e [36]. Nestes casos, o sistema pode ser aproximado por

$$|\Re(\lambda_i)| \geq 5\zeta\omega_n, i = 1, \dots, m \implies F(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega + n^2} \quad (3-138)$$

Para demonstrar que os polos dominantes são uma boa aproximação do sistema, considere a função de transferência  $F(s)$  expressa na equação (3-139), em sua forma polinomial, e na equação (3-140), em sua forma fatorada.

$$F(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, m \leq n \quad (3-139)$$

$$F(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (3-140)$$

Admitindo que o sistema seja submetido a uma entrada do tipo degrau,  $r(t) = a \times u(t)$ , e que os polos de malha-fechada do sistema sejam reais e distintos, a resposta ao degrau será dada por

$$y(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s + p_i} \quad (3-141)$$

onde  $c_i$  é o resíduo em  $s = p_i$ .

Por sua vez, utilizando a transformada inversa de Laplace para encontrar a resposta no tempo, obtém-se

$$y(t) = a + \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t} \quad (3-142)$$

Conseqüentemente, observa-se que a localização dos polos é crucial para o comportamento e para a estabilidade do sistema. Se eles estiverem no **SPE**, semi-plano esquerdo, percebe-se que os termos exponenciais da equação (3-142) se aproximarão de zero com o tempo. Assim, a saída em regime permanente, *steady-state*, será

$$y_{ss} = y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a \quad (3-143)$$

Considere agora que todos os polos sejam reais exceto dois, que formam um par de polos complexos conjugados. Dessa forma, esse par de polos conjugados será responsável por um termo de segunda ordem que aparecerá no denominador da função de transferência. Dessa maneira, no domínio da frequência, a resposta ao degrau unitário será

$$y(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{c_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \zeta_k \omega_k) + d_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (3-144)$$

sendo  $q + 2r = n$  e considerando-se, sem perda de generalidade, que todos os polos sejam distintos.

Por sua vez, aplicando a transformada inversa de Laplace, como feito antes, pode-se obter a resposta no tempo, dada por

$$y(t) = a + \sum_{j=1}^q c_j e^{p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) \quad (3-145)$$

Caso todos os polos estejam no **SPE**, observando-se o comportamento da resposta do sistema, descrita pela equação (3-145), nota-se que, assim como antes, os termos exponenciais irão se aproximar de zero com o passar do tempo, inclusive os termos amortecidos. Dessa forma, em regime permanente ter-se-á

$$y_{ss} = y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a \quad (3-146)$$

Ademais, admitindo-se que os dois polos complexos conjugados sejam os polos dominantes, pode-se simplificar a equação (3-145) como, é exatamente a resposta do sistema de ordem mais alta somada com uns termos senoidais.

$$y(t) \approx a + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) \quad (3-147)$$

Ressalta-se que quanto maiores forem os polos reais puros em relação a parte real do par de polos complexos conjugados, melhor será a aproximação feita na equação (3-147) e consequentemente mais a resposta se assemelhará a de um sistema puramente de ordem dois.

### 3.2.2.3 Controle fuzzy de posição

Nas seções anteriores foram detalhados conceitos inerentes ao funcionamento do controle por alocação de polos, também conhecido como controle por realimentação de estados (seção 3.2.2.1). Ademais, discutiu-se sobre a aproximação de sistemas de ordem alta por sistemas de ordem mais baixa, por meio do emprego da técnica de polos dominantes (seção 3.2.2.2), bem como a aproximação do modelo real não linear de um quadricóptero por um mo-

delo linearizado (seção 3.2.1.1). Contudo, o diagrama de blocos do sistema, apresentado na Figura possui um bloco denominado “Conversor *fuzzy*” que converte o erro de posição em velocidade angular, auxiliando o sistema a criar as entradas de força para os rotores. Esse bloco foi implementado utilizando o método de Takagi-Sugeno de fuzificação e o centro de massa como método de defuzificação.

Esse bloco objetiva traduzir de maneira mais suave as forças geradas pelos rotores de maneira que não haja tantos solavancos ou movimentos bruscos. Para esse fim, ele tira proveito do funcionamento da Lógica *fuzzy*, que possui a propriedade de pertencimento de uma mesma entrada a vários grupos de classificação ou pertinência. Dessa forma, consegue-se criar forças com variações mais suaves e, possivelmente, respostas mais rápidas para a movimentação do quadricóptero, visando atingir uma determinada posição alvo de forma mais rápida e sem muita oscilação ou *overshoot*.

Para explicar o funcionamento desse bloco em específico, serão utilizadas as características do sistema do quadricóptero que descrevem sua movimentação. O controle *fuzzy* foi projetado pensando-se separadamente sobre cada eixo de movimentação. Dessa maneira, existirão três controles *fuzzy* no total: um para os movimentos no eixo X, outro para movimentos no eixo Y (que será análogo ao controle do eixo X) e um outro para o eixo Z, sendo todos independentes entre si.

Antes de iniciar o processo de criação do controle, faz-se necessário a definição de alguns parâmetros do controle *fuzzy*. A primeira definição a ser feita são as funções de pertinência para as entradas do bloco. Neste sentido, foram utilizadas 7 funções para cada eixo, todas gaussianas, descritas pela seguinte fórmula

$$g(x, a, b, c) = a \times e^{\left(-\frac{(x-b)^2}{2 \times c^2}\right)} \quad (3-148)$$

onde  $a$  é a altura máxima da curva,  $b$  é o valor central (onde a curva tem seu valor máximo) e  $c$  é o desvio padrão.

Dessa forma, foram definidas as seguintes funções de pertinência, tanto para o eixo X quanto para o eixo Y

$$g(x, 1, -150, 15) = ML_x^-(x) =$$

$$ML_y^-(x) = \begin{cases} 1 \times e^{\left(-\frac{(x - (-150))^2}{2 \times 15^2}\right)}, & x \geq -150 \\ 1, & x < -150 \end{cases} \quad (3-149)$$

$$g(x, 1, -80, 10) = L_x^-(x) = L_y^-(x) = 1 \times e^{\left(-\frac{(x - (-80))^2}{2 \times 10^2}\right)} \quad (3-150)$$

$$g(x, 1, -40, 10) = P_x^-(x) = P_y^-(x) = 1 \times e^{\left(-\frac{(x - (-40))^2}{2 \times 10^2}\right)} \quad (3-151)$$

$$g(x, 1, 0, 10) = MP_x(x) = MP_y(x) = 1 \times e^{\left(-\frac{(x - 0)^2}{2 \times 10^2}\right)} \quad (3-152)$$

$$g(x, 1, 40, 10) = P_x^+(x) = P_y^+(x) = 1 \times e^{\left(-\frac{(x - 40)^2}{2 \times 10^2}\right)} \quad (3-153)$$

$$g(x, 1, 80, 10) = L_x^+(x) = L_y^+(x) = 1 \times e^{\left(-\frac{(x - 80)^2}{2 \times 10^2}\right)} \quad (3-154)$$

$$(3-155)$$

$$g(x, 1, 150, 15) = ML_x^+(x) =$$

$$ML_y^+(x) = \begin{cases} 1 \times e^{\left(-\frac{(x - 150)^2}{2 \times 15^2}\right)}, & x \leq 150 \\ 1, & x > 150 \end{cases} \quad (3-156)$$

Por sua vez, para o eixo Z, empregou-se a seguinte definição

$$g(x, 1, -90, 15) = ML_z^-(x) = \begin{cases} 1 \times e^{-\frac{(x - (-90))^2}{2 \times 15^2}}, & x \leq -90 \\ 1, & x > -90 \end{cases} \quad (3-157)$$

$$g(x, 1, -50, 10) = L_z^-(x) = 1 \times e^{-\frac{(x - (-50))^2}{2 \times 10^2}} \quad (3-158)$$

$$g(x, 1, -20, 10) = P_z^-(x) = 1 \times e^{-\frac{(x - (-20))^2}{2 \times 10^2}} \quad (3-159)$$

$$g(x, 1, 0, 10) = MP_z(x) = 1 \times e^{-\frac{(x - 0)^2}{2 \times 10^2}} \quad (3-160)$$

$$g(x, 1, 20, 10) = P_z^+(x) = 1 \times e^{-\frac{(x - 20)^2}{2 \times 10^2}} \quad (3-161)$$

$$g(x, 1, 50, 10) = L_z^+(x) = 1 \times e^{-\frac{(x - 50)^2}{2 \times 10^2}} \quad (3-162)$$

$$g(x, 1, 90, 15) = ML_z^+(x) = \begin{cases} 1 \times e^{-\frac{(x - 90)^2}{2 \times 15^2}}, & x \leq 90 \\ 1, & x > 90 \end{cases} \quad (3-163)$$

Note que, nas funções (3-149) a (3-163),  $x$  é o erro de posição em centímetros,  $ML_i^{sinal}$ ,  $L_i^{sinal}$ ,  $P_i^{sinal}$ ,  $MP_i$  são respectivamente as funções de pertinência “Muito Longe”, “Longe”, “Perto” e “Muito Perto”, para o sinal do erro no eixo  $i$ . Ademais, os índices “+” e “-” presentes nestas funções indicam o sinal do erro e conseqüentemente se a posição atual é maior ou menor que a desejada. Os valores de desvio padrão, valor central e valor máximo foram definidos empiricamente, tendo como base o desempenho e comportamento desejado para a curva idealizada.

Outro ponto importante de salientar é que as funções de pertinência utilizadas para modelar os extremos de cada conjunto, isto é, aquelas que estão centradas em  $-150$  cm e  $150$  cm, para os eixos  $x$  e  $y$ , e em  $-90$  cm e  $90$  cm, para o eixo  $z$ , são saturadas a partir desses pontos. Limita-se no valor máximo das gaussianas, a fim de forçar que erros com o módulo maior que esses pontos extremos sempre sejam saturados no valor máximo.

As Figuras 3.10 a 3.12 apresentam a representação gráfica das funções de pertinência utilizadas para os eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente.

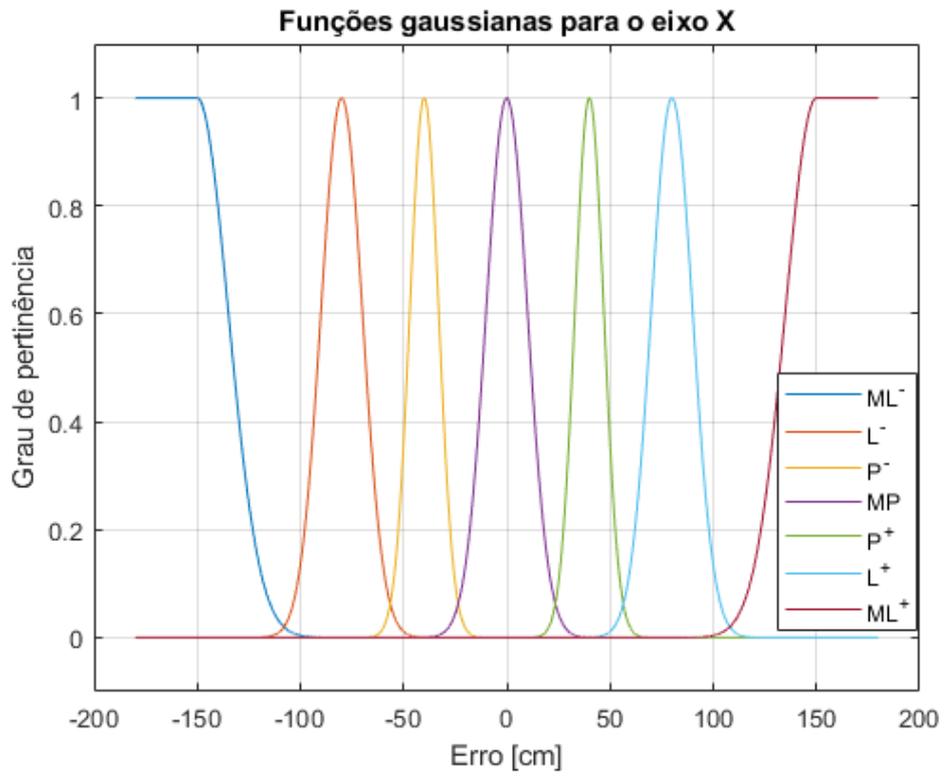


Figura 3.10: Funções de pertinência para o eixo X.

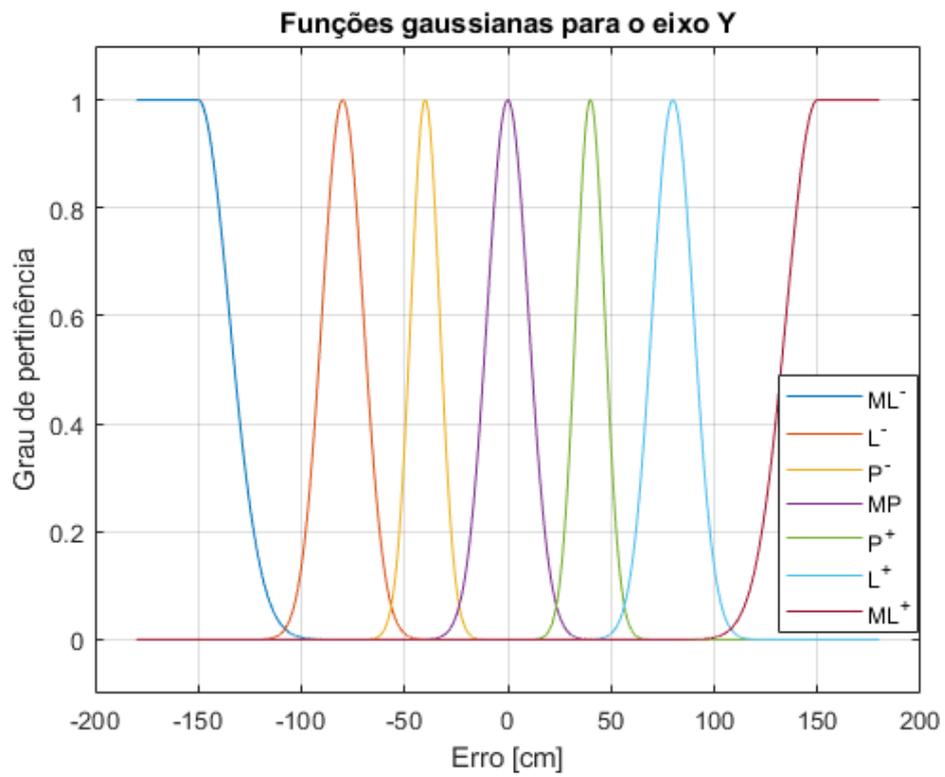


Figura 3.11: Funções de pertinência para o eixo Y.

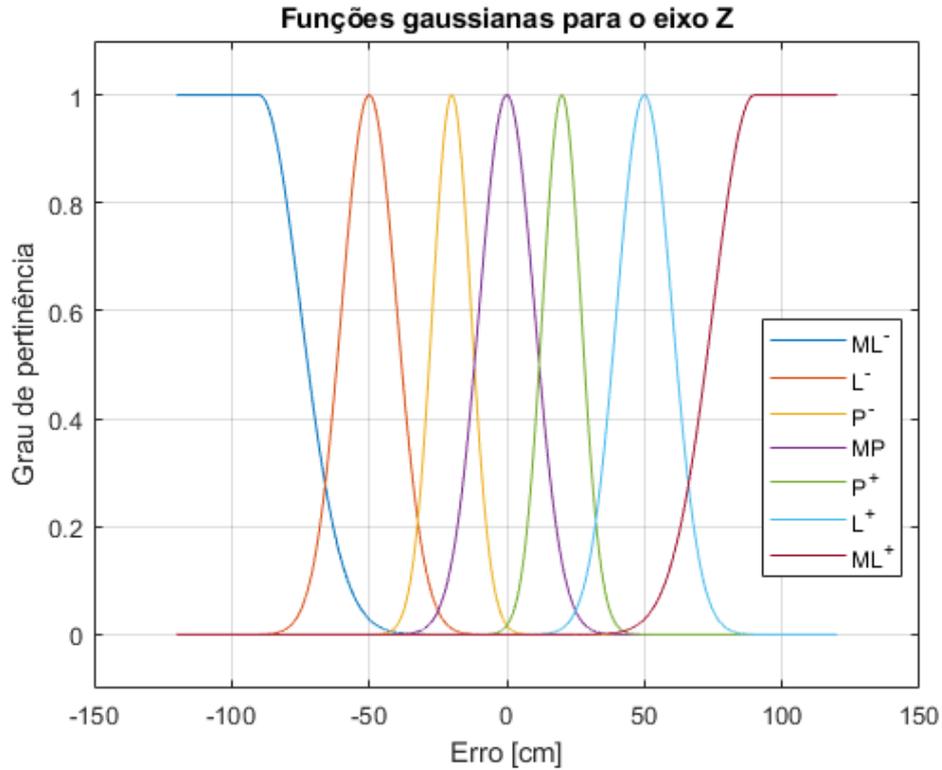


Figura 3.12: Funções de pertinência para o eixo Z.

Uma vez definidas as entradas, pode-se definir as saídas do bloco, que representam as forças a serem aplicadas a cada um dos quatro rotores da aeronave ( $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  e  $F_4$ ). Dessa forma, as saídas foram representadas por *singletons* associados as forças necessárias para se inclinar o quadricóptero em  $i$  graus. No intuito de se encontrar essas forças, pode-se usar geometria básica, a fim de decompor os movimentos e direções das forças desejados para o quadricóptero, como ilustrado na Figura 3.13.

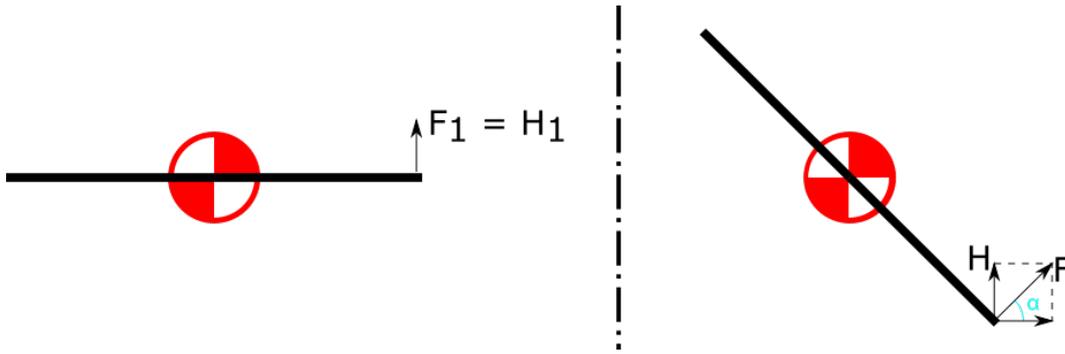


Figura 3.13: Representação do veículo alinhado, à esquerda, e o veículo inclinado, à direita. Demonstrando a decomposição de forças;

Observando-se a Figura 3.13, pode-se notar que  $\alpha = 90^\circ - D_{inc}$ , onde  $D_{inc}$  é a inclinação desejada para a aeronave. Nota-se, também que a força de *hover*  $\mathbf{H}$ , definida como a força suficiente para manter o veículo pairando no ar, pode ser expressa por meio de

$$H = F \sin(\alpha) \tag{3-164}$$

Além disso, a força total,  $F$ , feita pelo rotor é dada por

$$F = H + \Delta F \tag{3-165}$$

Combinando as equações (3-164) e (3-165), obtêm-se

$$H = (H + \Delta F) \sin(\alpha) \tag{3-166}$$

$$\frac{H}{\sin(\alpha)} - H = \Delta F \tag{3-167}$$

$$\Delta F = \frac{H - H \sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} = H \frac{1 - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} \tag{3-168}$$

Por sua vez, sabendo que  $\alpha = 90^\circ - D_{inc}$ , pode-se reescrever a equação (3-168) como

$$\Delta F(D_{inc}, H) = H \frac{1 - \sin(90^\circ - D_{inc})}{\sin(90^\circ - D_{inc})} \tag{3-169}$$

Conseqüentemente, as variações de forças  $\Delta F$  necessárias para inclinar o quadricóptero em  $D_{inc}$  igual a 5°, 10° e 15° são dadas respectivamente por

$$I_5 = \Delta F(5, H) \tag{3-170}$$

$$I_{10} = \Delta F(10, H) \tag{3-171}$$

$$I_{15} = \Delta F(15, H) \tag{3-172}$$

Outra definição importante a ser feita é a especificação da saída do controle *fuzzy*. Neste trabalho, a saída foi definida como a soma ponderada dos valores de saídas dos conjuntos *singleton*, pelas forças necessárias para realizar determinado movimento ou força. Por sua vez, os movimentos ou forças podem ser definidos a partir de tabelas. Em particular, como cada eixo tem seu próprio controle, nada mais correto do que existirem 3 tabelas, uma para cada eixo.

As Tabelas 3.4 a 3.6 apresentam as forças de saída para cada rotor do quadricóptero, para os eixos X, Y e Z, respectivamente. Ressalta-se que  $F_i, i = 1 \dots 4$  são as forças dos rotores da aeronave, enquanto que  $\mathbf{H}$  é a força de *hover*.

Tabela 3.4: Forças de saída para o eixo x para cada rotor do quadricóptero

	$ML^-$	$L^-$	$P^-$	$MP$	$P^+$	$L^+$	$ML^+$
$F_1$	$-I_{15}$	$-I_{10}$	$-I_5$	0	$I_5$	$I_{10}$	$I_{15}$
$F_2$	0	0	0	0	0	0	0
$F_3$	$I_{15}$	$I_{10}$	$I_5$	0	$-I_5$	$-I_{10}$	$-I_{15}$
$F_4$	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.5: Forças de saída para o eixo y para cada rotor do quadricóptero

	$ML^-$	$L^-$	$P^-$	$MP$	$P^+$	$L^+$	$ML^+$
$F_1$	0	0	0	0	0	0	0
$F_2$	$-I_{15}$	$-I_{10}$	$-I_5$	0	$I_5$	$I_{10}$	$I_{15}$
$F_3$	0	0	0	0	0	0	0
$F_4$	$I_{15}$	$I_{10}$	$I_5$	0	$-I_5$	$-I_{10}$	$-I_{15}$

Conforme descrito anteriormente, a saída do bloco de controle será a soma dos valores das forças dadas pelas Tabelas 3.4, 3.5 e 3.6, ponderada pelo valor das funções de pertinência associadas a um determinado erro. Assim, espera-se que o emprego dessa técnica, simples de se projetar, resulte em respostas mais suaves e rápidas do que as provenientes de métodos clássicos.

Tabela 3.6: Forças de saída para o eixo z para cada rotor do quadricóptero

	$ML^-$	$L^-$	$P^-$	$MP$	$P^+$	$L^+$	$ML^+$
$F_1$	$0.6H$	$0.8H$	$0.9H$	$1H$	$1.1H$	$1.2H$	$1.4H$
$F_2$	$-0.6H$	$-0.8H$	$-0.9H$	$-1H$	$-1.1H$	$-1.2H$	$-1.4H$
$F_3$	$0.6H$	$0.8H$	$0.9H$	$1H$	$1.1H$	$1.2H$	$1.4H$
$F_4$	$-0.6H$	$-0.8H$	$-0.9H$	$-1H$	$-1.1H$	$-1.2H$	$-1.4H$

### 3.2.3

#### Controle LQR

O próximo controle a ser estudado nesse trabalho é o *Linear Quadratic Regulator* (LQR), cujos princípios de funcionamento serão detalhados nesta seção. Anteriormente, na seção 3.2.2, apresentou-se um controle estritamente baseado em alocação de polos. A discussão lá efetuada permite notar que esse tipo de controle é poderoso e simples de se implementar. No entanto, é importante ressaltar que a alocação de polos não fornece diretamente valores ou medidas de desempenho sistema. Este controle, basicamente, altera a localização dos polos para manter o sistema estável, sem levar em consideração se o sistema se comportará de forma rápida ou se irá se tornar muito complexo, por exemplo. Além disso, observando apenas a posição dos polos não é fácil notar como a sua localização no **SPE** influencia os diversos aspectos de um sistema, exceto quando a análise tem por objetivo apenas avaliar a estabilidade.

Por sua vez, o controle LQR se insere justamente nessa lacuna, usando a alocação de polos para estabilizar o sistema, mas, também possibilitando a otimização de determinada característica desejada pelo projetista, por meio da minimização de uma matriz de custo. O funcionamento do LQR será detalhado ao longo desta seção.

#### 3.2.3.1

##### Otimização do controle: uma alocação de polos direcionada

Como dito anteriormente, empregando-se exclusivamente a técnica de alocação de polos há uma dificuldade muito grande de conseguir relacionar aspectos de *design* do sistema, almejados pelo projetista, com a localização dos polos no **SPE** e com a matriz de ganho,  $K$ , responsável pela movimentação desses polos. Dessa forma, é interessante buscar uma maneira alternativa de implementar a matriz de ganho,  $K$ , que permita ao projetista garantir que o sistema efetivamente possua as características desejadas. Neste intuito, considere, inicialmente, um sistema simples dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (3-173)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} \quad (3-174)$$

onde  $x$  é o vetor de estados  $n \times 1$ ,  $u$  é o vetor de entradas  $m \times 1$ ,  $y$  é a saída do sistema.

Por sua vez, admita que a função de custo, que se deseja minimizar, apresenta a seguinte forma

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \cdot Q \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \cdot R \cdot \mathbf{u}(t) dt \quad (3-175)$$

onde  $t_0$  é o tempo inicial,  $Q$  é a matriz de custo para o vetor de estados e  $R$  é a matriz de custo para o vetor de entradas.

Ressalta-se que, para que seja possível resolver a minimização, é necessário que  $Q$  seja uma matriz **simétrica positiva semidefinida** e que  $R$  seja uma matriz **simétrica positiva definida**. De forma intuitiva, tem-se que as matrizes  $Q$  e  $R$  são responsáveis por atribuir pesos associados à importância dada, pelo projetista, tanto aos estados quanto aos atuadores.

De forma resumida, o problema de minimização proposto consiste em minimizar  $J$ , com  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m$ , tal que  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ . Para facilitar o entendimento desse problema e ratificar a importância das matrizes de custo, considere que o sistema esteja em um estado não desejado, por exemplo,  $x(0) \neq 0$ , onde  $x(0) = 0$  seria o estado desejado. Sabendo que  $Q$  e  $R$  são positivas, e que existem termos quadráticos na integral, expressa pela equação (3-175), associados tanto a  $x(t)$  quanto a  $u(t)$ , tem-se que  $J$  tenderá ao infinito. Consequentemente, para fazer com que a função de custo seja alterada e deixe de tender ao infinito, faz-se necessário que os atuadores sejam acionados. No entanto, essa atuação pode ser feita de diversas formas, como por exemplo: alterando a velocidade da atuação, a intensidade da atuação e, até mesmo, os recursos utilizados para atuação. Dessa forma, pode-se controlar como os atuadores irão se comportar apenas alterando os valores da matriz  $R$ . Analogamente, o mesmo pode ser dito quanto aos estados,  $x(t)$ , do sistema. Com o ajuste da matriz  $Q$ , pode-se quantificar o quão custoso é se manter em um estado não desejado, podendo-se assim reduzir ou aumentar o custo para o sistema como um todo. De um ponto de vista prático e focado no projeto de  $Q$  e  $R$ , empiricamente, sabe-se que

- ▷ Se a ordem de grandeza dos valores de  $Q$  for maior que a dos valores de  $R \implies$  O sistema se comporta de modo mais agressivo, com a regulação mais rápida; enquanto que

- ▷ Se a ordem de grandeza dos valores de  $R$  for maior que a dos valores de  $Q \implies$  O sistema se comporta de modo mais conservador, com a regulação mais lenta.

Dessa forma, o projetista pode pesar e balancear o desempenho desejado para o sistema. De maneira geral, opta-se por sistemas mais agressivos, quando não há muita preocupação com consumo de combustível ou energia para os atuadores, mas sim com a velocidade em que se chega ao estado desejado. Por outro lado, opta-se por sistemas mais conservadores, quando os recursos energéticos são mais limitados, não havendo uma preocupação tão grande com a velocidade em que se chega no estado desejado.

Analisando matematicamente, supõe-se um sistema simples com 2 estados e 2 atuadores, onde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3-176)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (3-177)$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} \quad (3-178)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \quad (3-179)$$

$$(3-180)$$

onde  $x_1(t)$  é o estado 1,  $x_2(t)$  é o estado 2,  $u_1(t)$  é o atuador 1,  $u_2(t)$  é o atuador 2,  $q_{11}$  é a penalidade dada para um erro ou estado não desejado para o estado 1,  $q_{22}$  é a penalidade dada para um erro ou estado não desejado para o estado 2,  $r_{11}$  é a penalidade dada para um erro ou atuação não desejado para o atuador 1 e  $r_{22}$  é a penalidade dada para um erro ou atuação não desejado para o atuador 2.

Por sua vez, substituindo as equações (3-176), (3-177), (3-178) e (3-179) na equação (3-175), pode-se escrever

$$\mathbf{x}^T(t) \cdot Q \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \cdot R \cdot \mathbf{u}(t) = q_{11}x_1^2(t) + q_{22}x_2^2(t) + r_{11}u_1^2(t) + r_{22}u_2^2(t) \quad (3-181)$$

$$J = \int_{t_0}^{\infty} q_{11}x_1^2(t) + q_{22}x_2^2(t) + r_{11}u_1^2(t) + r_{22}u_2^2(t) dt \quad (3-182)$$

$$J = \int_{t_0}^{\infty} q_{11}x_1^2(t) + \int_{t_0}^{\infty} q_{22}x_2^2(t) + \int_{t_0}^{\infty} r_{11}u_1^2(t) + \int_{t_0}^{\infty} r_{22}u_2^2(t)dt \quad (3-183)$$

Dessa forma, observa-se mais claramente como os valores de  $Q$  e  $R$  influenciam na função de custo,  $J$ . Nota-se, também, como a ordem de grandeza dos valores dessas matrizes afetam o sistema, servindo como base para as duas implicações feitas anteriormente sobre o impacto da ordem de grandeza dos valores de  $Q$  e  $R$  sobre a resposta dos sistema.

Uma vez compreendido como o projeto de  $Q$  e  $R$  impacta na resposta do sistema, pode-se efetivamente começar o desenvolvimento da minimização da função de custo  $J$ , tentando relacionar  $Q$  e  $R$  com a alocação de polos, através de uma matriz de ganho. Para iniciar esse desenvolvimento, considera-se uma entrada de controle dada simplesmente por

$$\mathbf{u}(t) = -K \cdot (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)) = -K \cdot \mathbf{e}(t) \quad (3-184)$$

onde  $K$  é a matriz de ganho,  $\mathbf{x}(t)$  é o vetor de estados do sistema,  $\mathbf{x}_d(t)$  é o vetor de estados desejados e  $\mathbf{e}(t)$  é o erro dos estados do sistema.

O valor de  $K$  pode ser encontrado por meio de

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot S \quad (3-185)$$

onde  $R$  é a matriz de custos para os atuadores,  $B$  é a matriz que representa o comportamento dinâmico dos atuadores no sistema e  $S$  é a solução para a equação algébrica dada por

$$S \cdot A + A^T \cdot S - S \cdot B R^{-1} \cdot B^T \cdot S + C^T \cdot Q \cdot C = 0 \quad (3-186)$$

onde  $A$  é a matriz que representa o comportamento dinâmico dos estados no sistema,  $B$  a matriz que representa o comportamento dinâmico dos atuadores no sistema,  $C$  a matriz que representa a saída do sistema em relação aos estados,  $R$  a matriz de custos para os atuadores e  $Q$  a matriz de custos para os estados.

Ressalta-se que a matriz  $S$  é **positiva definida**. A equação (3-186) é conhecida como equação algébrica de Riccati. Normalmente,  $S$  não será única e, conseqüentemente, a matriz  $K$  também não será. No entanto, convencionalmente, apenas uma das possíveis soluções leva efetivamente os polos para o **SPE**, fazendo com que o sistema opere de modo estável. Dessa forma, essa será a solução  $S$  utilizada para determinação da matriz  $K$  do sistema.

A demonstração formal para a possibilidade dessa entrada de controle ser válida pode ser encontrada em [37]. Dessa forma, o sistema apresenta um comportamento geral similar aos sistemas anteriormente apresentados, na

seção 3.2.2, podendo ser representado pelo diagrama de blocos mostrado na Figura 3.14

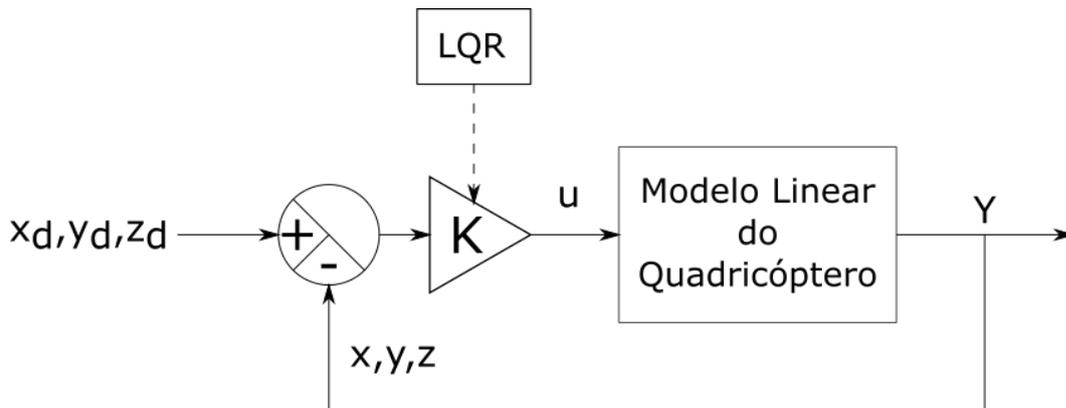


Figura 3.14: Diagrama de blocos do sistema de controle LQR.

Conseqüentemente, nota-se que, a grande diferença entre um sistema controlado por realimentação de estados (*State-Feedback*) e um controlado por LQR é a métrica a ser empregada para determinação dos valores de  $K$ , mas de modo geral ambos baseiam-se no mesmos princípios de funcionamento. Resumidamente, enumerando os passos para encontrar os valores de  $K$ , para implementação do controle LQR, tem-se

1. Obter matrizes  $A$ ,  $B$  da planta;
2. Projetar  $Q$  e  $R$ ;
3. Solucionar a equação (3-186) para encontrar as matrizes  $S$ ;
4. Calcular os valores de  $K$ , usando a equação (3-185);
5. Escolher qual matriz  $K$  que aloque os polos no **SPE**;

### 3.2.3.2

#### Escolha ótima de $Q$ e $R$

Na seção anterior, seção 3.2.3.1, foi descrito o funcionamento de um controle LQR. Comparando-se o diagrama de blocos desse controle, mostrado na Figura 3.14, com o diagrama de blocos do controle proposto na seção 3.2.2, mostrado na Figura 3.8, nota-se que ambos têm um funcionamento similar. No decorrer da seção 3.2.3.1, evidenciou-se que as matrizes de custo  $Q$  e  $R$  são responsáveis por alocar os polos e, conseqüentemente, por modificar o comportamento do sistema.

No entanto, apesar de  $Q$  e  $R$  determinarem o comportamento do sistema, elas não possuem uma solução única. Assim, uma escolha ruim para essas matrizes pode gerar um comportamento não tão bom quanto o esperado. Em sistemas menos complexos, as variáveis de estado geralmente são bem descritas e seu comportamento pode ser facilmente detalhado, analisado e observado. Por outro lado, em sistemas mais complexos, o acoplamento de efeitos de um estado em outro pode afetar a resposta, sem que seja possível observar ou detalhar facilmente esses fenômenos, dificultando o projeto dos valores de  $Q$  e  $R$ .

Dessa forma, tendo em vista que o sistema que se deseja controlar (um quadricóptero) tem diversos efeitos de acoplamento, propôs-se dois algoritmos genéticos responsáveis por encontrar valores ótimos, mesmo que não sejam de forma global, mas melhores que os valores encontrados de forma manual, para  $Q$  e  $R$ , levando em consideração o erro de posição e o tempo de assentamento.

No projeto dos GAs, a título de comparação, foram utilizadas duas configurações diferentes para a otimização das matrizes  $Q$  e  $R$ . As configurações podem ser observadas nas Tabelas 3.7 e 3.8. A diferença entre as configurações se dá apenas pela função de avaliação. Na primeira configuração a função de avaliação leva em consideração erro de posição, enquanto que na segunda configuração o tempo de assentamento (*settling time*) é levado em consideração.

Tabela 3.7: Parâmetros da primeira configuração do GA.

Função de avaliação	$\sum_{i=x,y,z} (\sum_{t=0}^{10} \text{erro}^2)_i$
Objetivo	Minimizar a função de avaliação
Padrão de <i>crossover</i>	Binário e Aleatório
Critério de parada antecipada:	Diferença entre os melhores de 50 gerações seguidas menor que $10^{-6}$
Indivíduo	Vetor de 13 elementos composto pelos elementos das diagonais de $Q$ e $R$ , 12 para a matriz $Q$ e 1 para a matriz $R$
Espaço de busca para $Q$	$x \in (0, 10^5]$
Espaço de busca para $R$	$x \in (0, 10^2]$
Tamanho da população	100 indivíduos
Número de gerações:	1300 épocas
Taxa de <i>crossover</i>	80%
Taxa de mutação	0.8%
Taxa de elitismo	10%
<i>Seed</i>	Elementos das diagonais de $Q$ e $R$ da escolha manual

Tabela 3.8: Parâmetros da segunda configuração do GA.

Função de avaliação	$\sum_{i=x,y,z} settling\ time_i$
Objetivo	Minimizar a função de avaliação
Padrão de <i>crossover</i>	Binário e Aleatório
Critério de parada antecipada:	Diferença entre os melhores de 50 gerações seguidas menor que $10^{-6}$
Indivíduo	Vetor de 13 elementos composto pelos elementos das diagonais de $Q$ e $R$ , 12 para a matriz $Q$ e 1 para a matriz $R$
Espaço de busca para $Q$	$x \in (0, 10^5]$
Espaço de busca para $R$	$x \in (0, 10^2]$
Tamanho da população	100 indivíduos
Número de gerações:	1300 épocas
Taxa de <i>crossover</i>	80%
Taxa de mutação	0.8%
Taxa de elitismo	10%
<i>Seed</i>	Elementos das diagonais de $Q$ e $R$ da escolha manual

## 4

### Resultados

Neste capítulo serão mostrados os resultados obtidos para os controles propostos juntamente com uma discussão sobre seu funcionamento, visando comparar o desempenho entre os controladores desenvolvidos e salientar pontos interessantes sobre aspectos de projeto e peculiaridades de cada um deles. Para fins de comparação todos os controles foram submetidos a degraus de mesma amplitude de entrada, aplicados as três dimensões espaciais, a fim de se poder analisar parâmetros de desempenho tais como: **erro no tempo**, **erro quadrático no tempo**, **erro quadrático acumulado** e **tempo de subida** (*rise time*) – tempo necessário para que o sinal de saída atinja 90% do valor final – e o **tempo de assentamento** (*settling time*) – tempo necessário para que a saída do sistema fique dentro da faixa de  $\pm 5\%$  do valor final, permanecendo dentro dessa faixa.

#### 4.1

##### Controle PID

Nesta seção são apresentados os resultados para o controle **PID**, usado como base de comparação com os demais controladores desenvolvidos neste trabalho. Ressalta-se que o controlador **PID** desenvolvido possibilita acesso direto aos valores dos ângulos de *roll*, *pitch* e *yaw* do quadricóptero, além de sua altitude (posição no eixo Z). Entretanto, não se tem acesso direto a sua posição em X e Y, sendo necessário o emprego de um estimador de estados ou odometria.

Dessa forma, para avaliação do **PID** serão apresentados tanto os resultados associados aos ângulos de *roll*, *pitch* e *yaw* do quadricóptero, além de sua altitude (posição no eixo Z), quanto a estimativa de sua posição em X e Y, a qual é importante para uma comparação mais direta com as características de desempenho dos demais controladores avaliados.

Os controles **PID** implementados para cada ângulo e altitude são independentes entre si, permitindo sintonizá-los independentemente. Utilizando a *toolbox* de controle do MATLAB®, foi possível fazer o ajuste dos parâmetros de maneira satisfatória. A Tabela 4.1 apresenta os ganhos proporcionais, integrais e diferenciais definidos para o controle de cada ângulo. Por sua vez,

a Tabela 4.2 apresenta os ganhos proporcionais, integrais e diferenciais para cada posição.

Tabela 4.1: Ganhos do controlador PID para os ângulos.

	$K_p$	$K_i$	$K_d$
<i>Roll</i>	58218931, 9739	59218560, 6453	13990620, 429
<i>Pitch</i>	58218931, 9739	59218560, 6453	13990620, 429
<i>Yaw</i>	2722530410, 3522	1588973666, 7748	1078493934, 9564

Tabela 4.2: Ganhos do controlador PID para as posições.

	$K_p$	$K_i$	$K_d$
<i>X</i>	-0, 029375	-0, 01519	-0, 013587
<i>Y</i>	-0, 029375	-0, 01519	-0, 013587
<i>Z</i>	-150, 8644	-176, 5671	-31, 6524

A Figura 4.1 mostra a trajetória adotada pelo quadricóptero no espaço tridimensional, para se deslocar da origem (0 cm, 0 cm, 0 cm) até o ponto desejado no espaço (40 cm, 40 cm, 40 cm), denominado ponto alvo. A origem é indicada por um marcador circular, enquanto que o marcador em forma de asterisco indica a posição final atingida pela aeronave. O marcador em forma de losango representa o ponto alvo desejado.

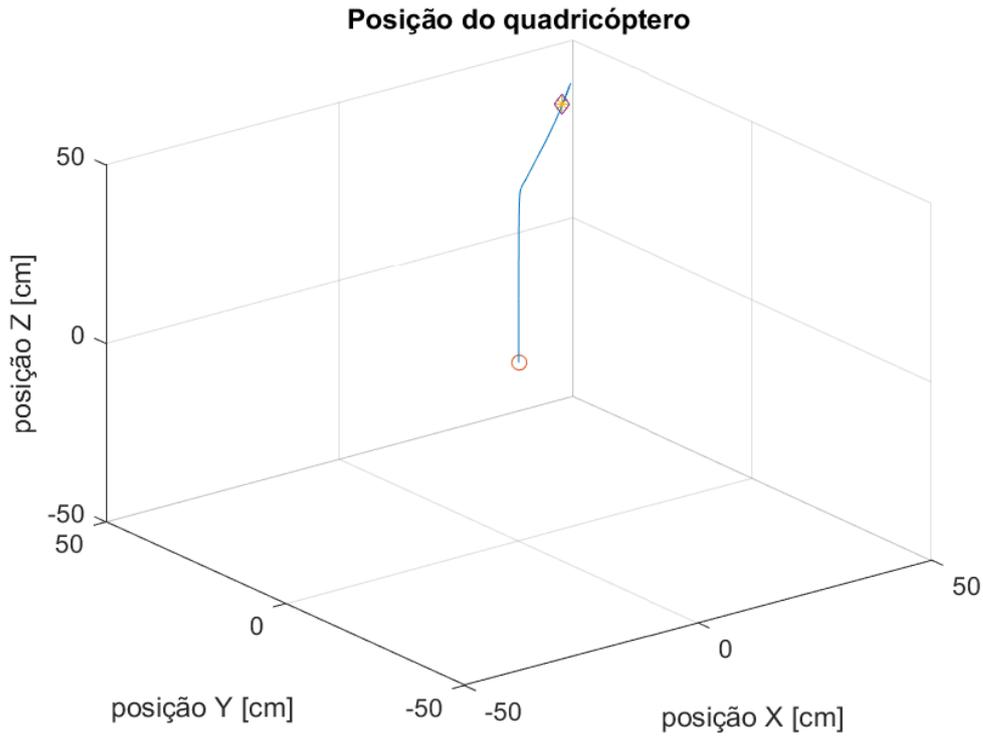


Figura 4.1: Gráfico de posição do veículo para o controle PID.

Por sua vez, de modo a se poder avaliar o movimento executado com mais detalhes, a cada instante de tempo, as Figura 4.2, 4.3 e 4.4 mostram o comportamento dos ângulos de *roll*, *pitch* e *yaw* da aeronave, respectivamente. Nestas Figuras, os pontos destacados por meio de um marcador circular amarelo indicam os respectivos tempos de subida. Por sua vez, as retas vermelhas indicam os valores desejados para cada um destes ângulos.

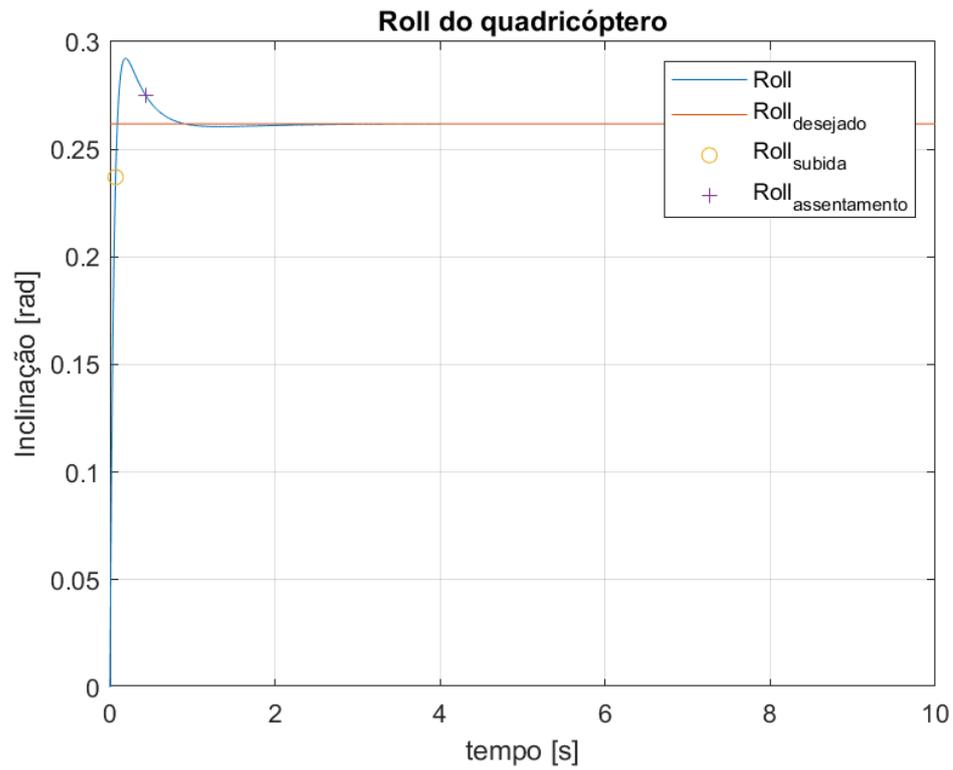


Figura 4.2: Inclinação de *roll* em função do tempo para o controle PID.

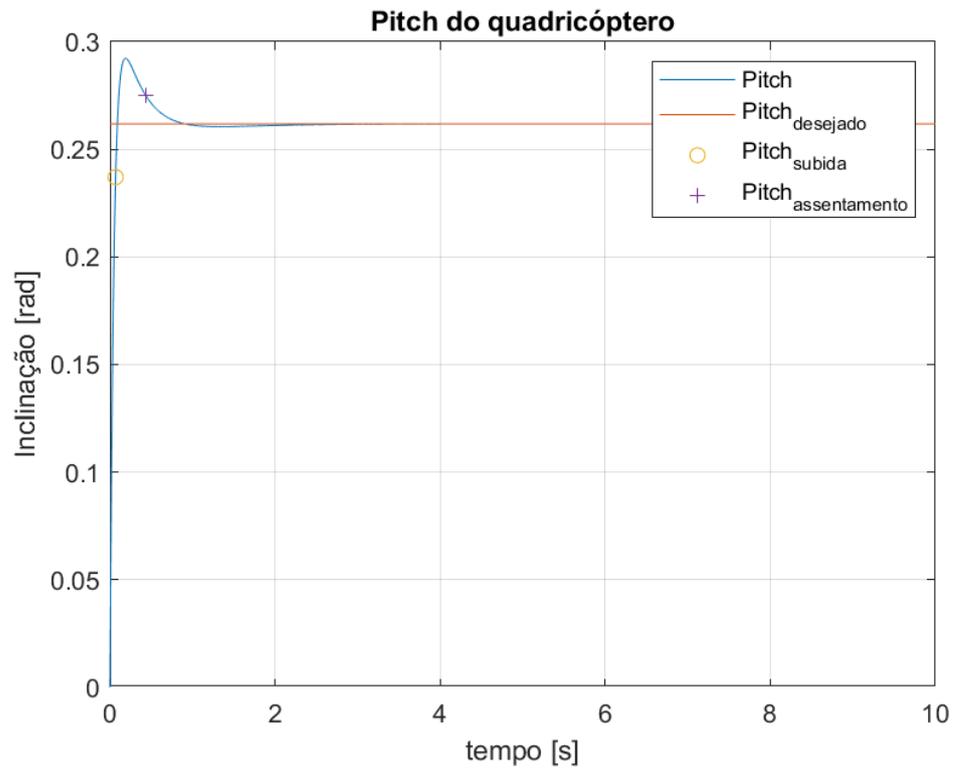


Figura 4.3: Inclinação de *pitch* em função do tempo para o controle PID.

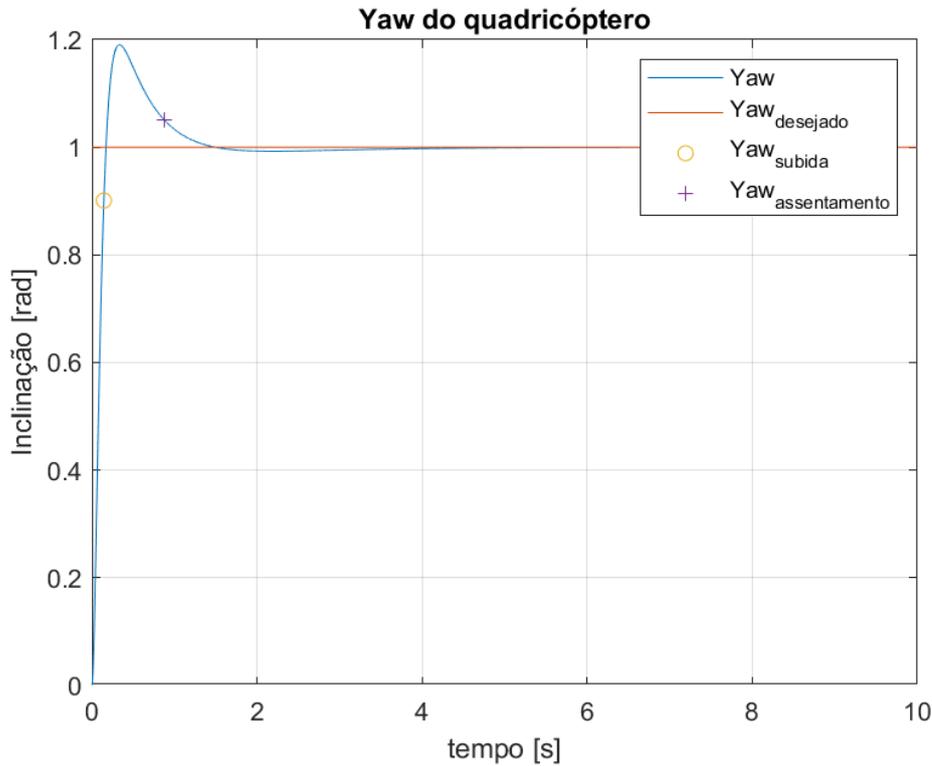


Figura 4.4: Inclinação de *yaw* em função do tempo para o controle PID.

As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 mostram a existência de *overshoots* quase idênticos nos três casos. Ressalta-se que o degrau aplicado a entrada do sistema foi ajustado de modo a garantir que o limite imposto no projeto de linearização não fosse violado. Dessa maneira, uma degrau de 0.1 rad ou 5°, aproximadamente, foi aplicado na entrada dos controles de *roll*, *pitch* e *yaw*. Os resultados obtidos indicam que o tempo de subida para o movimento de *roll* foi de 0,069 segundos, com 11,62% de *overshoot*, e o tempo de assentamento foi de 0,3851 segundos. Para o movimento de *pitch* 0,069 segundos, com 11,62% de *overshoot*, e o tempo de assentamento foi de 0,3851 segundos. Para o de *yaw* 0,1449 segundos, com 19,05% de *overshoot*, e tempo de assentamento de 0,3851 segundos.

A Figura 4.7 apresenta o comportamento da altitude da aeronave, ao longo do eixo Z. O ponto destacado por meio de um marcador circular amarelo indica o tempo de subida. As Figuras 4.5 e 4.6 apresentam as posições estimadas para os deslocamentos em X e Y respectivamente. Vale reiterar que há também 2 controles PIDs para a posições em X e Y.

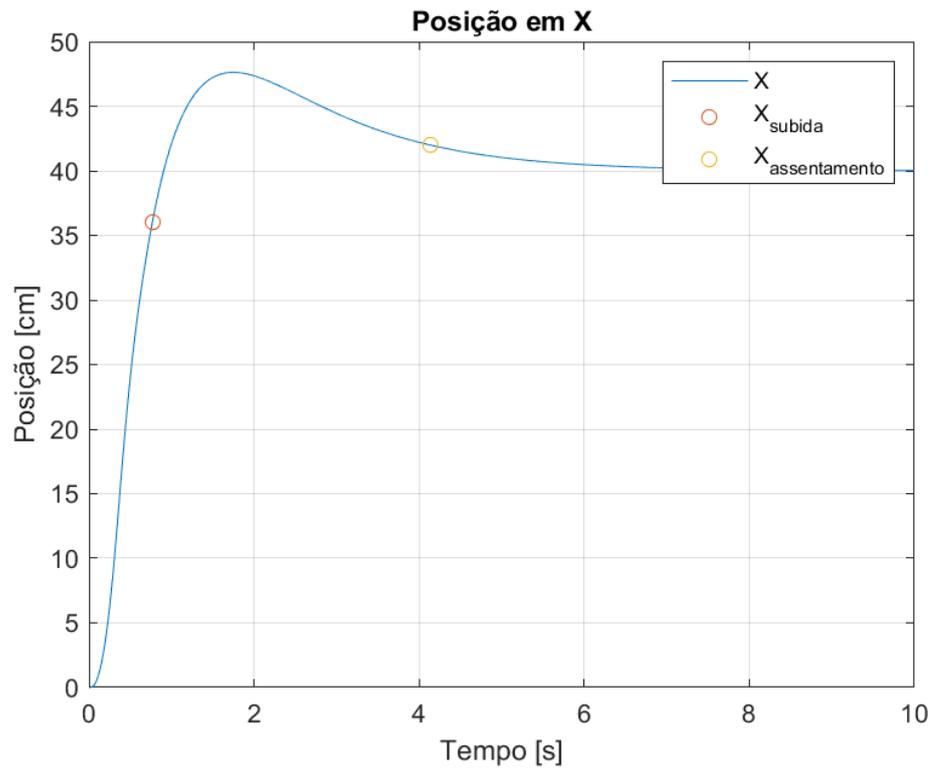


Figura 4.5: Deslocamento no eixo X em função do tempo para o controle PID.

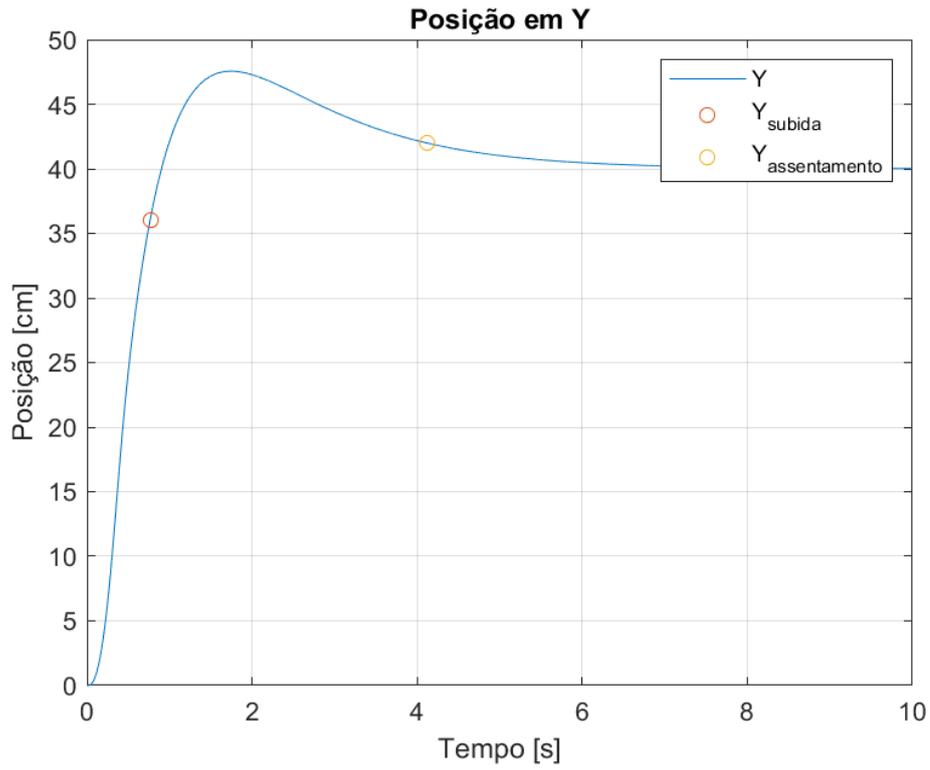


Figura 4.6: Deslocamento no eixo Y em função do tempo para o controle PID.

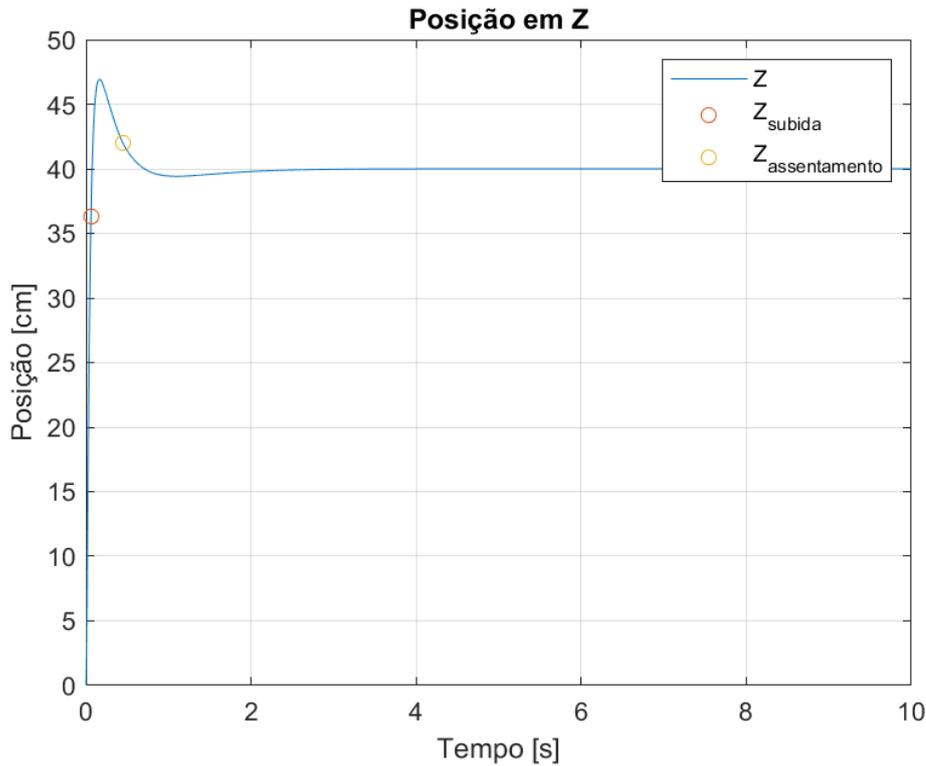


Figura 4.7: Deslocamento no eixo Z em função do tempo para o controle PID.

A Figura 4.5 mostra a reação do sistema, em relação ao eixo x, à entrada. Nota-se um *overshoot* de 19,06% com um tempo de subida de 0,7690 segundos e um tempo de assentamento de 4,1315 segundos, sendo o tempo mais demorado, para os controles no mesmo eixo. Observa-se que o controle atinge o objetivo.

Por sua vez, a Figura 4.6 apresenta a resposta do sistema no eixo Y. Esta é bem similar a apresentada pelo eixo X. Com um *overshoot* considerável de 18,90%, um tempo de subida de 0,7659 segundos e um tempo de assentamento de 4,1176 segundos. Mas apesar disso, atinge o objetivo.

A resposta ao degrau de 40 cm de amplitude, mostrada na Figura 4.7, possui *overshoot* de 17,34%. Ademais, nota-se que o sistema reage de forma rápida, com tempo de subida de 0,0619 segundos e um tempo de assentamento de 0,4482 segundos, atingindo a posição final desejada em pouco tempo.

Na sequência, para uma melhor comparação entre os resultados obtidos, as Figuras 4.9 e 4.8 apresentam os erros de inclinação (*roll*, *pitch* e *yaw*) e posição (x, y e z), em função do tempo. Por sua vez, os respectivos erros quadráticos são mostrados nas Figuras 4.11 e 4.10 de modo a se poder observar o comportamento do sistema de forma mais detalhada.

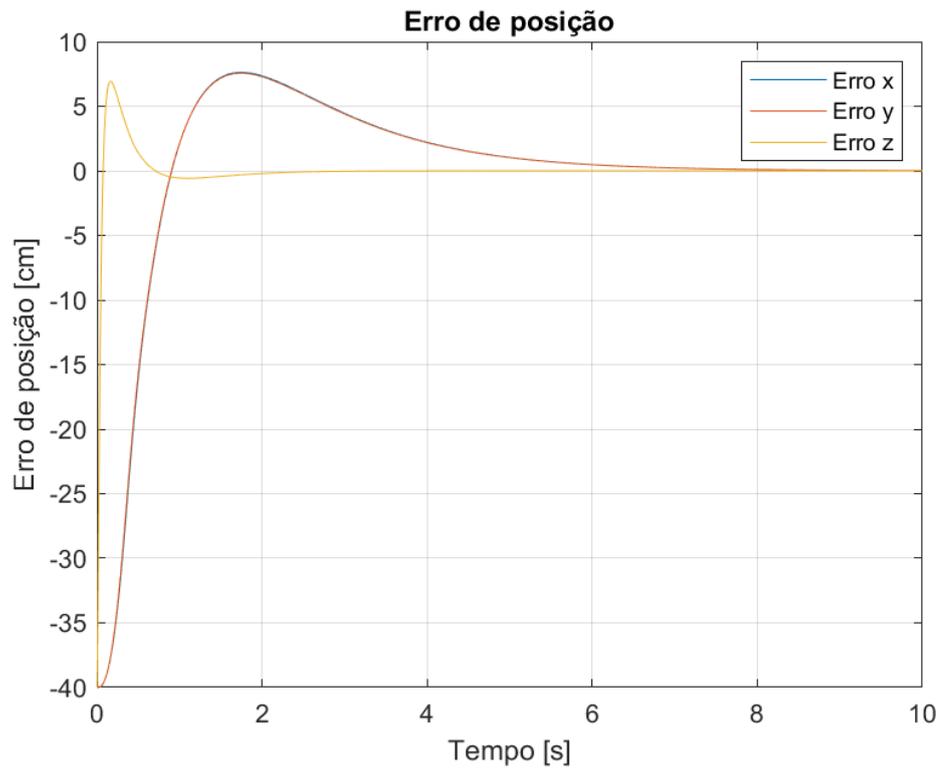


Figura 4.8: Erro de posição do veículo para o controle PID.

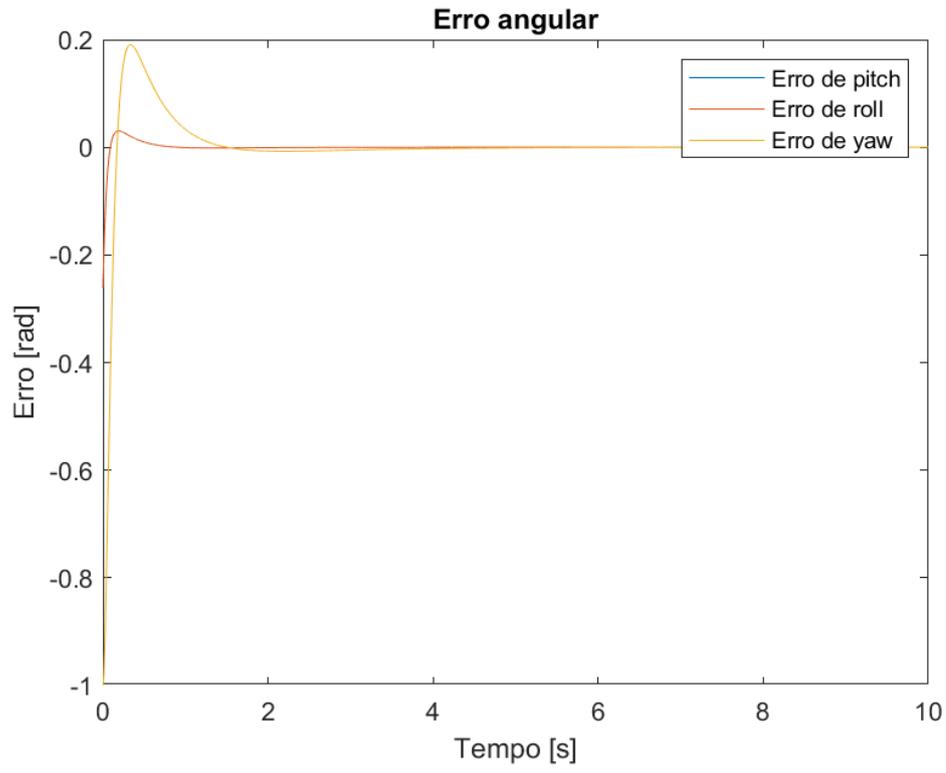


Figura 4.9: Erro de inclinação do veículo para o controle PID.

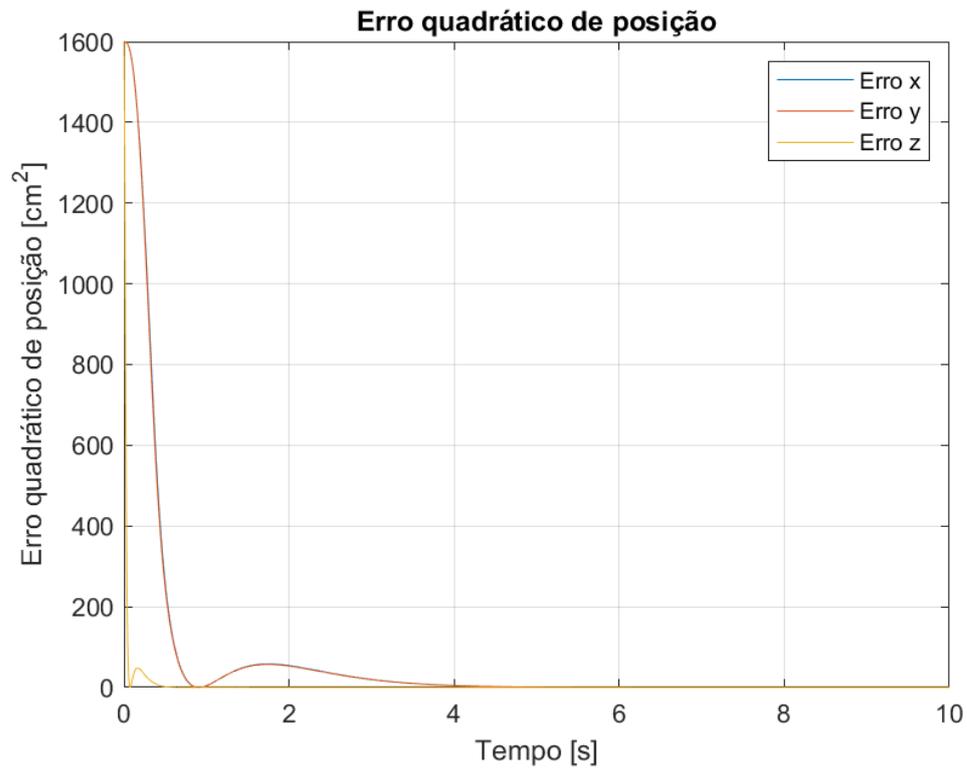


Figura 4.10: Erro quadrático de posição do veículo para o controle PID.

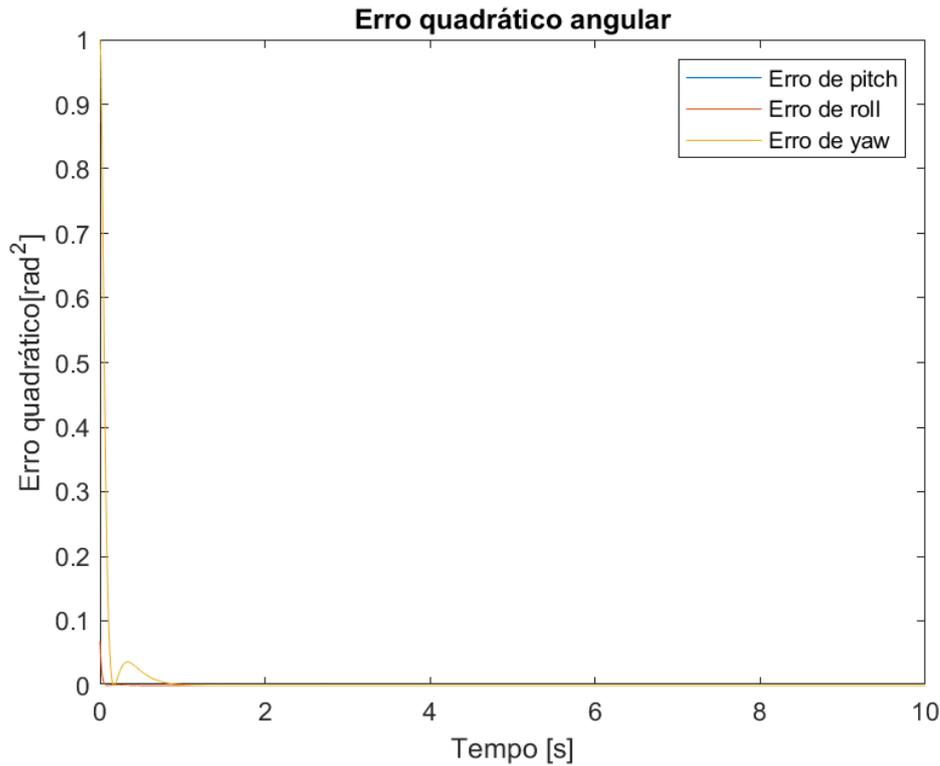


Figura 4.11: Erro quadrático de inclinação do veículo para o controle PID.

Os resultados apresentados nas Figuras 4.8 a 4.11 indicam que os controles de inclinações se comportam muito bem, apresentando erros iniciais elevados, mas os reduzindo logo em seguida ao caminhar em direção a inclinação desejada. Por outro lado, com relação aos movimentos em X e Y, nota-se que mesmo atingindo o objetivo, houve uma demora muito grande para que chegasse no regime permanente. No eixo Z, por fim, o movimento foi mais rápido que os outros dois, mas não foi rápido o suficiente para entrar em regime permanente antes dos 2 segundos. Por sua vez, para uma melhor quantificação dos resultados, as Tabelas 4.3 e 4.4 apresentam o erro médio, o erro quadrático médio e o erro em regime permanente, para as inclinações (roll, pitch e yaw) e posições (x, y e z) analisadas, respectivamente.

Tabela 4.3: Erros de inclinação do veículo, para o controle PID.

	$E_{\text{médio}} [\text{rad}][\times 10^{-3}]$	$E_{\text{médio}}^2 [\text{rad}^2][\times 10^{-3}]$	$E_{SS} [\text{rad}]$
<i>Roll</i>	-0,6009	0,3021	$9,3981 \times 10^{-7}$
<i>Pitch</i>	-0,6009	0,3021	$9,3981 \times 10^{-7}$
<i>Yaw</i>	0	0	$-4,0293 \times 10^{-5}$

Tabela 4.4: Erros de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle PID.

	$E_{\text{médio}} [\text{cm}]$	$E_{\text{médio}}^2 [\text{cm}^2]$	$E_{SS} [\text{cm}]$
<i>X</i>	-0,1118	68,9952	0,1460
<i>Y</i>	-0,1116	68,2175	0,1445
<i>Z</i>	-0,0895	8,1272	0

As Figuras 4.12 e 4.13 apresenta o erro acumulado e as Figuras 4.14 e 4.15 o erro acumulado quadrático, visando facilitar a verificação das diferenças dos erros de inclinação e posição.

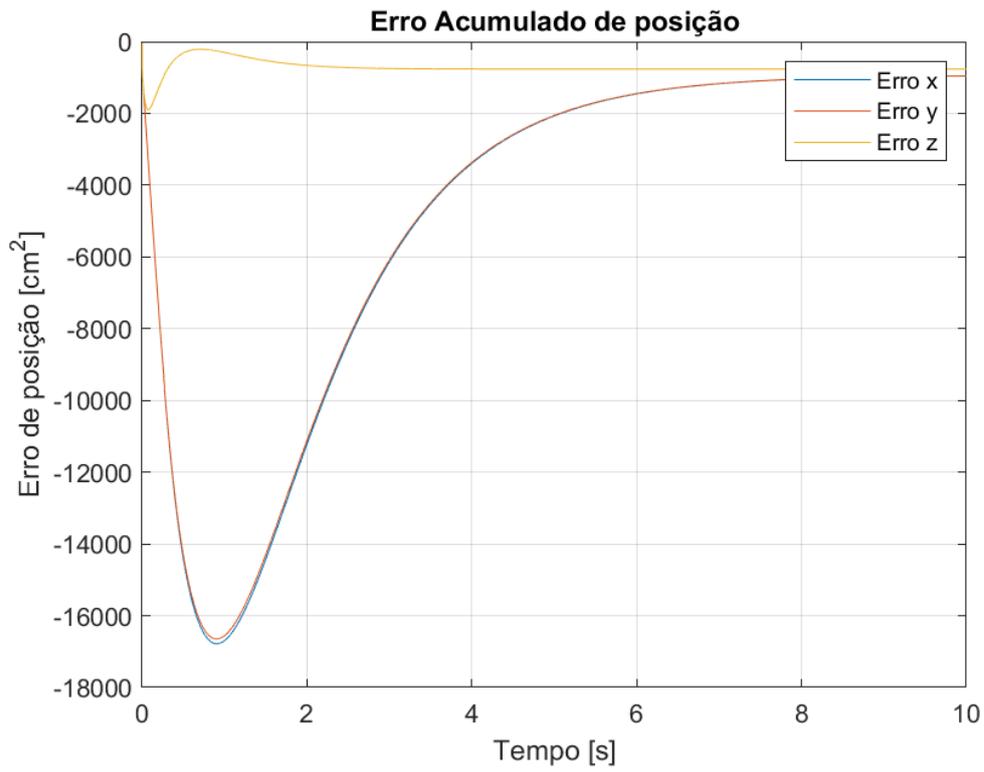


Figura 4.12: Erro acumulado de posição do veículo para o controle PID.

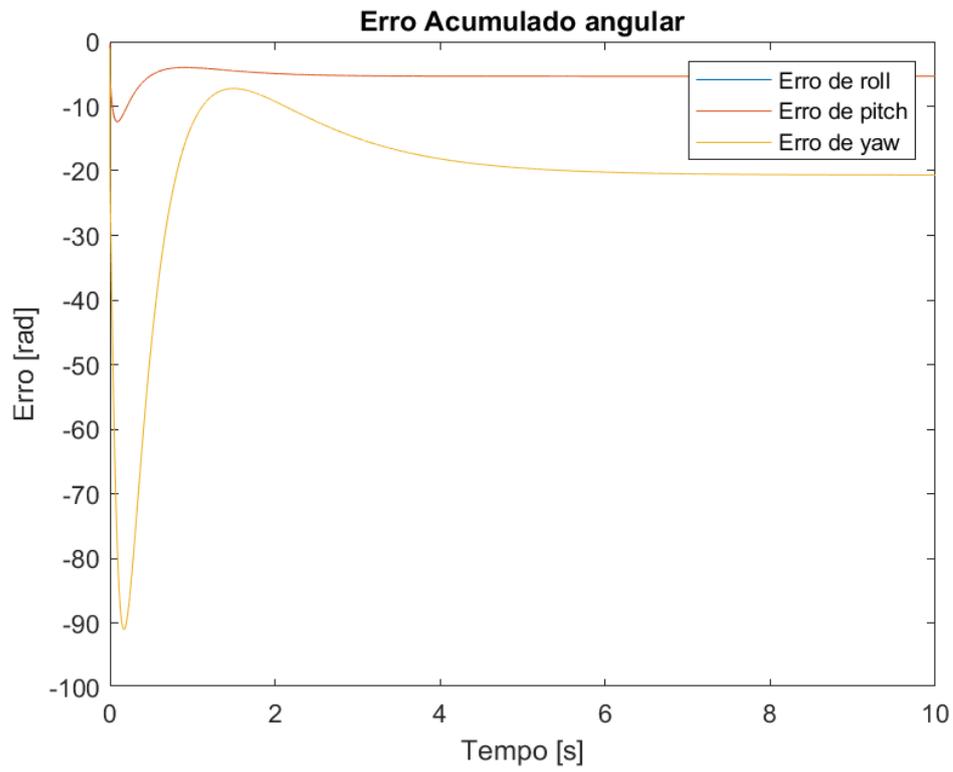


Figura 4.13: Erro acumulado de inclinação do veículo para o controle PID.

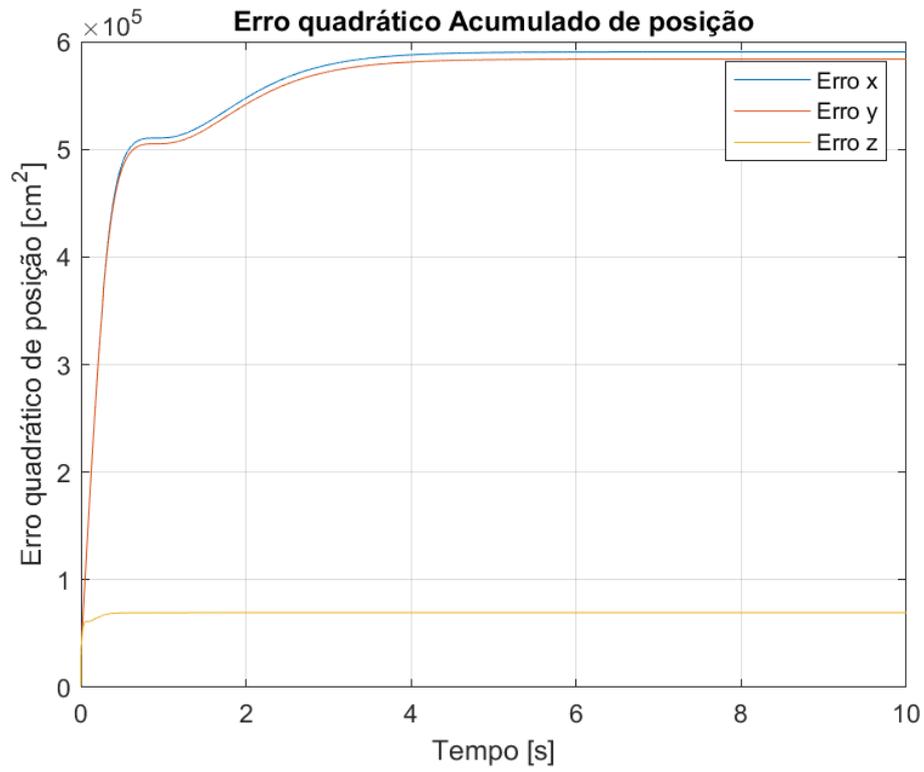


Figura 4.14: Erro quadrático acumulado de posição do veículo para o controle PID.

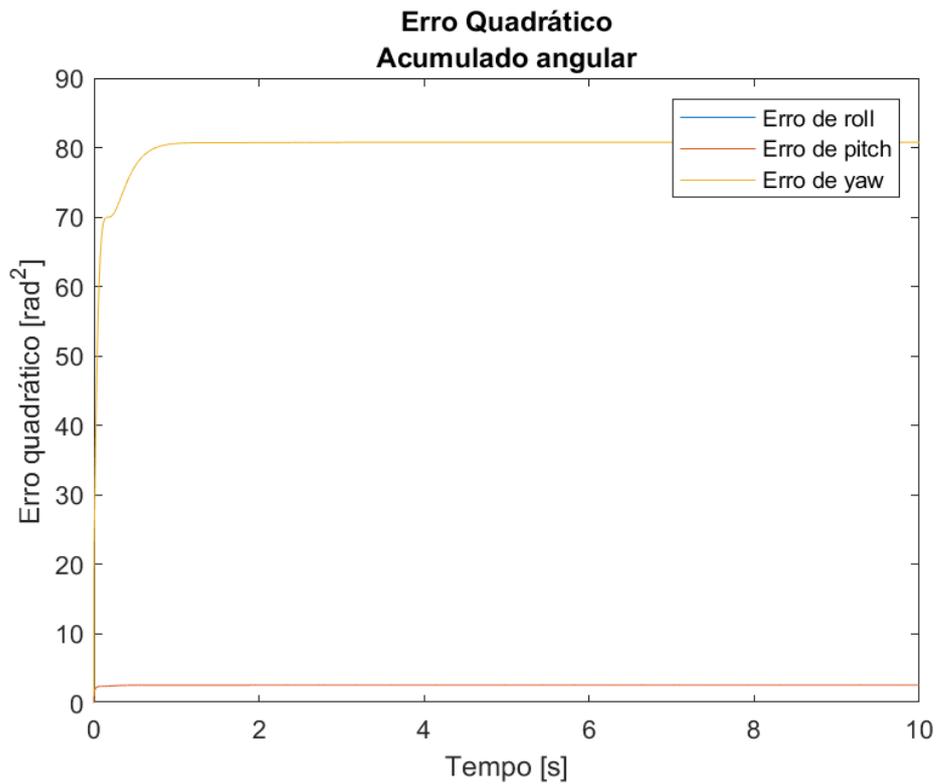


Figura 4.15: Erro quadrático acumulado de posição do veículo para o controle PID.

Os resultados apresentados nas Figuras 4.13 e 4.15 evidenciam as diferenças entre os comportamentos dos controles de *Pitch-Roll* e o de *Yaw*. De forma análoga, os resultados presentes nas Figuras 4.12 e 4.14 salientam a diferença nos controles de X-Y e Z.

Na sequência, a Tabela 4.5 apresenta um resumo dos resultados encontrados.

Tabela 4.5: Resumo dos parâmetros para o controle PID.

	<i>Tempo de subida</i> [s]	<i>Tempo de assentamento</i> [s]	<i>Overshoot</i> [%]
<i>Roll</i>	0,069	0,3851	11,62%
<i>Pitch</i>	0,069	0,3851	11,62%
<i>Yaw</i>	0,1449	0,3851	19,05%
<i>X</i>	0,7690	4,1315	19,06%
<i>Y</i>	0,7659	4,1176	18,90%
<i>Z</i>	0,0619	0,4482	17,34%

## 4.2

### Controle por realimentação de estados com polos dominantes e controle de posição por Lógica Fuzzy

Nesta seção, o controle por realimentação de estados, apresentado na seção 3.2.2, será analisado. A fim de se avaliar o comportamento desse controle, foi aplicado um degrau de 40 cm em cada dimensão.

A Figura 4.16 mostra a trajetória adotada pelo quadricóptero no espaço tridimensional, para se deslocar da origem (0 cm, 0 cm, 0 cm) até o ponto desejado no espaço (40 cm, 40 cm, 40 cm), denominado ponto alvo. A origem é indicada por um marcador circular, enquanto que o marcador em forma de asterisco preto indica a posição final atingida pela aeronave. O marcador em forma de losango representa o alvo desejado.

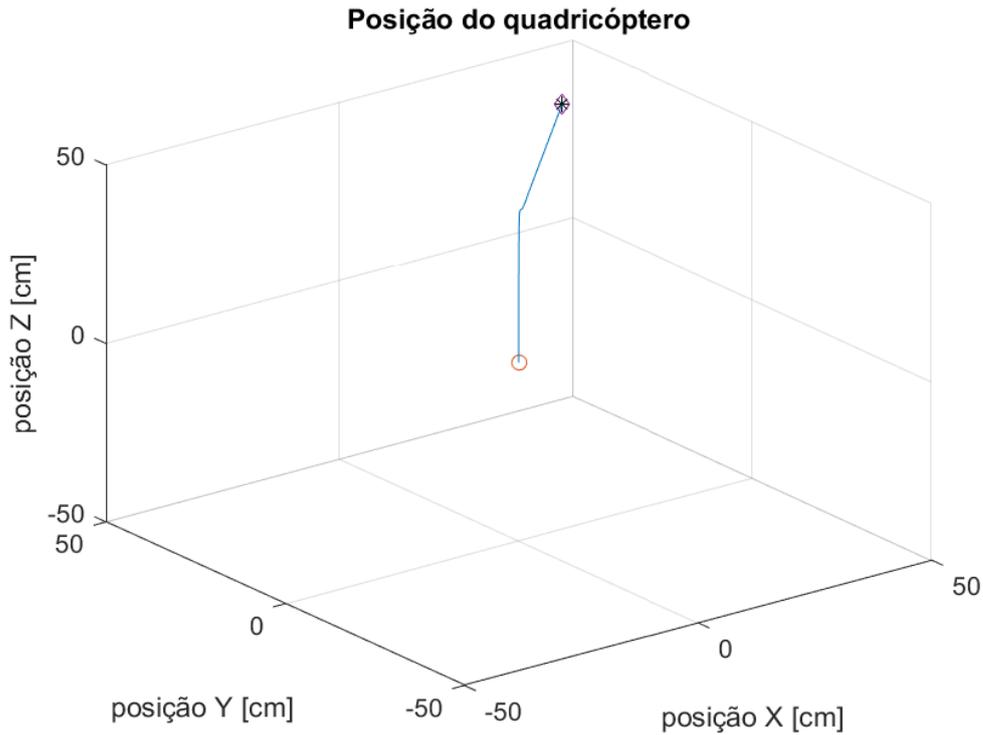


Figura 4.16: Trajetória adotada pelo veículo visando se deslocar da origem (marcador circular) até o ponto alvo (marcador em forma de losango), para o controle por realimentação de estados.

Observando-se a Figura 4.16, nota-se que o controle conseguiu fazer com que a aeronave se deslocasse satisfatoriamente para as proximidades do ponto final desejado no espaço.

Por sua vez, de modo a se poder avaliar o movimento executado com mais detalhes, a cada instante de tempo, as Figura 4.17, 4.18 e 4.19 mostram o comportamento do erro de posição em relação aos eixos, X, Y e Z, respectivamente. Nestas Figuras, os pontos destacados por meio de um marcador circular vermelho indicam os respectivos tempos de subida e de um marcador circular laranja indicam os respectivos tempos de assentamento.

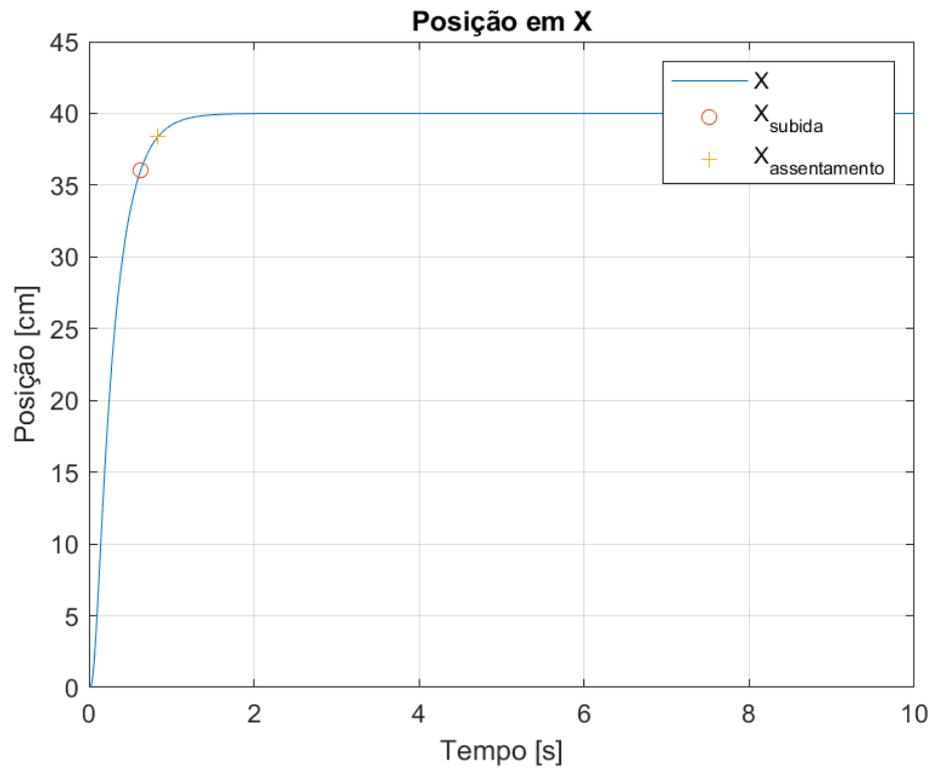


Figura 4.17: Posição em relação ao eixo X em função do tempo, para o controle por realimentação de estados.

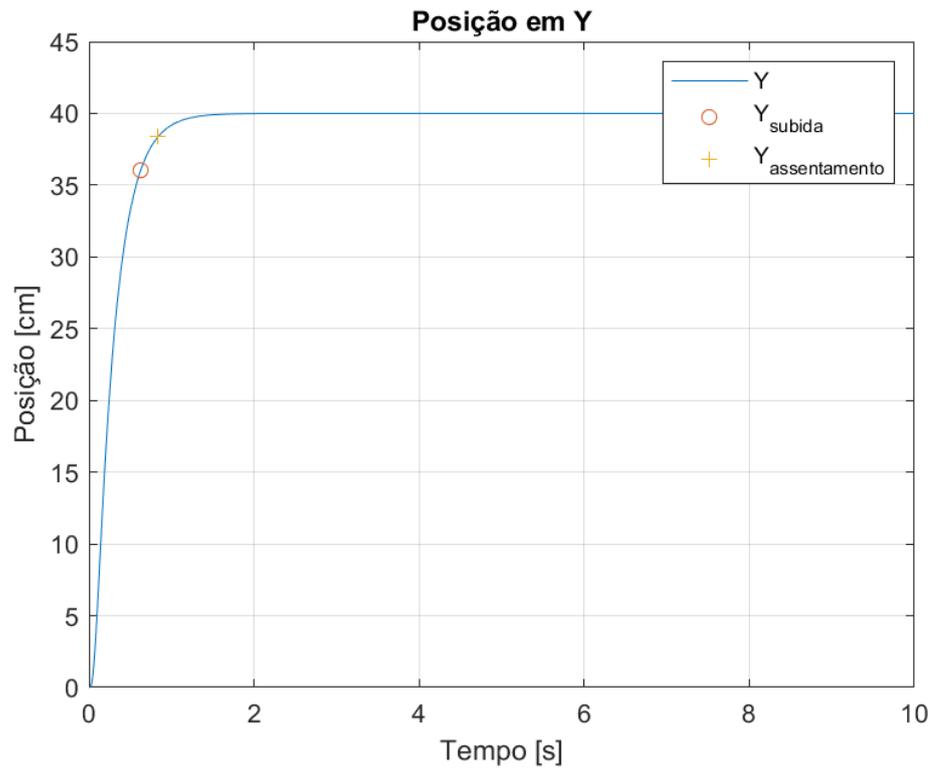


Figura 4.18: Posição em relação ao eixo Y em função do tempo, para o controle por realimentação de estados.

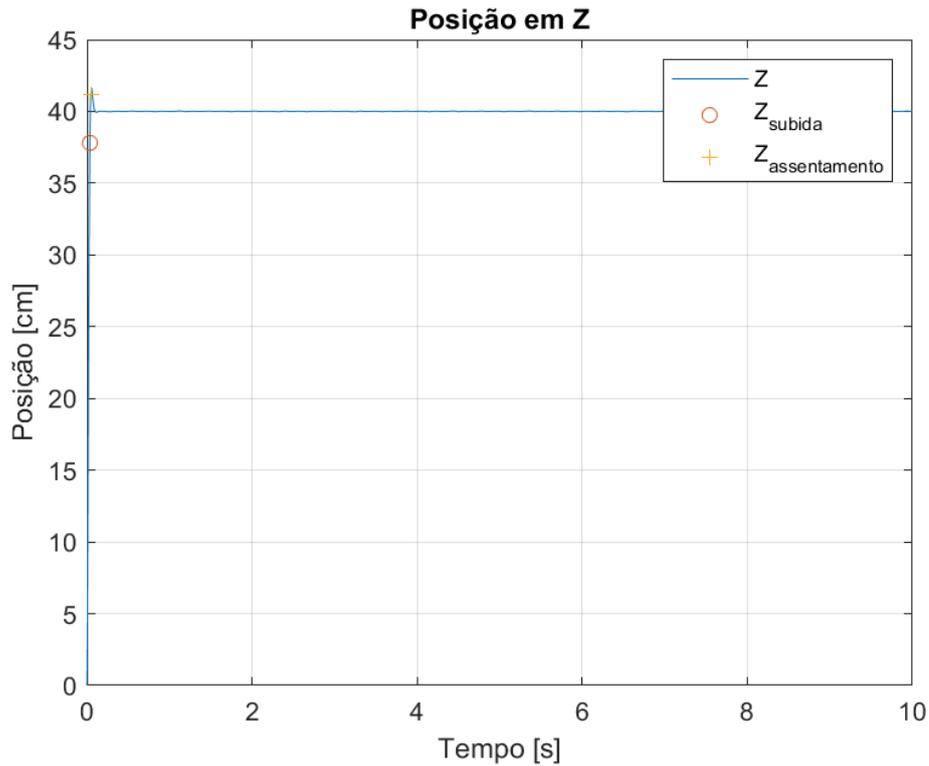


Figura 4.19: Posição em relação ao eixo Z em função do tempo, para o controle por realimentação de estados.

Por meio do gráfico apresentado na Figura 4.17, é possível notar que em menos de 2 segundos a aeronave conseguiu atingir seu objetivo. Ademais, em relação ao movimento no eixo X, tem-se que o tempo de subida foi de 0,6278 segundos enquanto o tempo de assentamento foi de 0,7841 segundos. Por sua vez, verifica-se que o comportamento do erro no eixo Y, apresentado na Figura 4.18, possui grande semelhança com aquele calculado para o eixo X, mostrado na Figura 4.17. Essa similaridade já era esperada devido a simetria existente nos eixos de deslocamento X e Y do quadricóptero. Dessa forma, assim como para o deslocamento no eixo X, nota-se que o deslocamento para o eixo Y tem o tempo de subida de 0,6278 segundos, um tempo de assentamento de 0,8382 segundos e consegue atingir o objetivo. Por outro lado, o resultado apresentado na Figura 4.19 mostra que o deslocamento no eixo Z é mais abrupto e mais responsivo dos 3 movimentos, demandando um grande acionamento dos atuadores. É possível perceber que este deslocamento é quase instantâneo, quando comparado ao movimento em relação aos outros dois eixos. Para o eixo Z, obteve-se um tempo de subida de 0,0356 segundos e um tempo de assentamento de 0,0460 segundos. Diferentemente dos movimentos

nos demais eixos, o deslocamento em  $Z$  possui um *overshoot* de 4%, que é aceitável para esse tipo de movimentação. Ademais, também se observa que o movimento consegue atingir seu objetivo.

Na sequência, para uma melhor comparação entre os resultados mostrados nas Figuras 4.17 a 4.19, a Figura 4.20 apresenta os erros de posição em  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , em função do tempo. Por sua vez, os respectivos erros quadráticos são mostrados na Figura 4.21, de modo a se poder observar o comportamento do sistema de forma mais detalhada

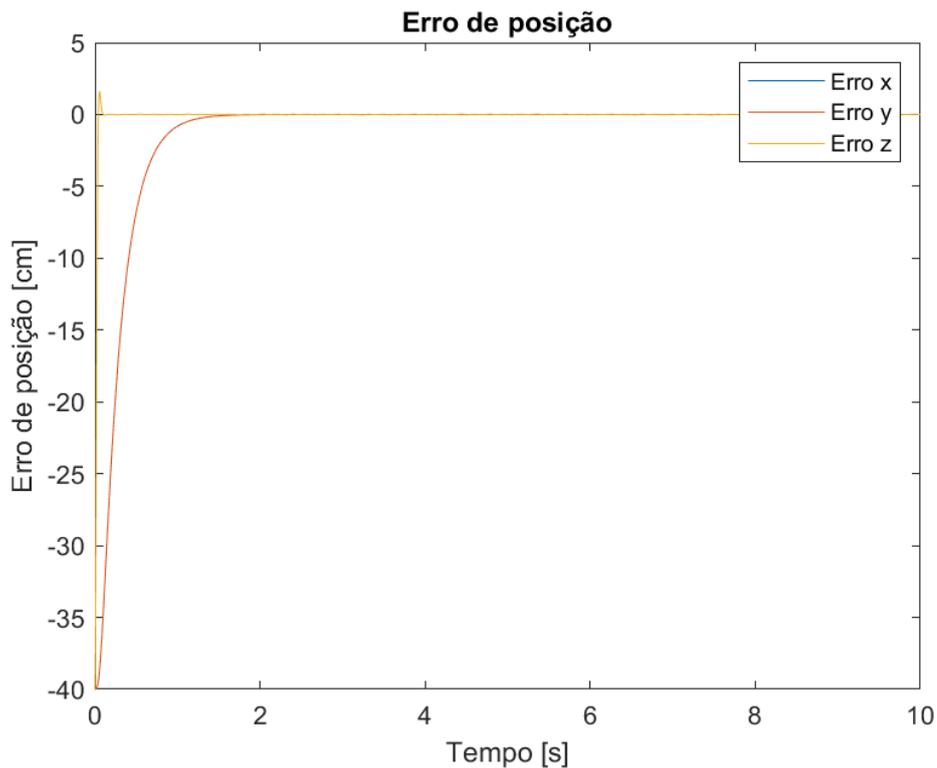


Figura 4.20: Erro de posição do veículo nos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , para o controle por realimentação de estados.

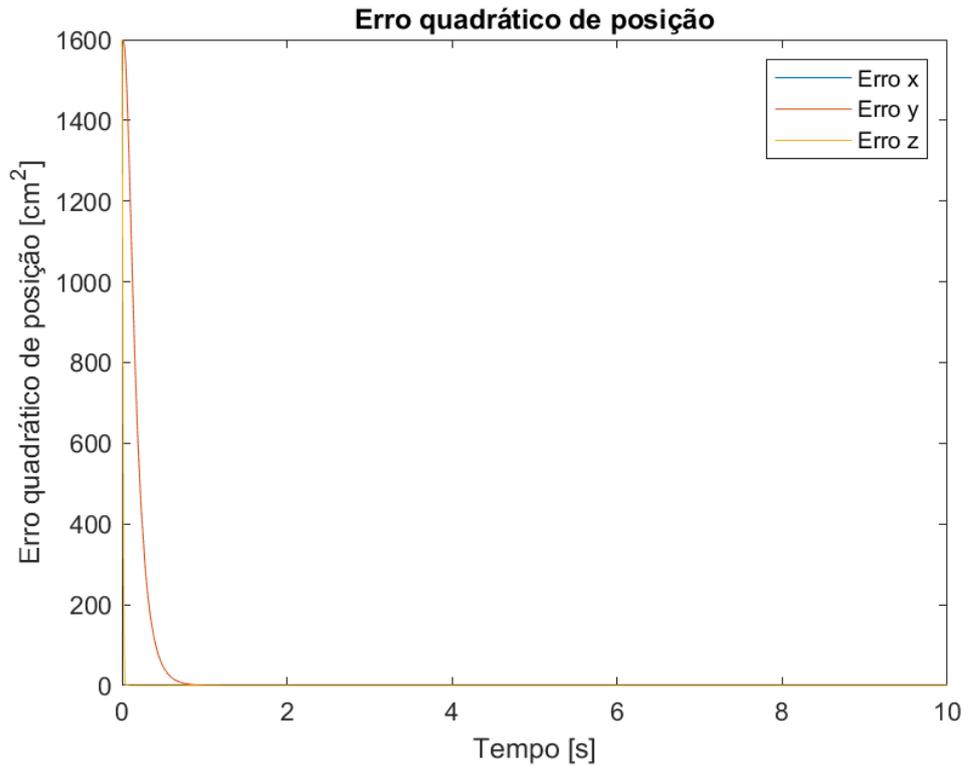


Figura 4.21: Erro quadrático de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle por realimentação de estados.

A Figura 4.20 reforça o alto grau de similaridade entre os comportamentos dos erros em relação aos eixos X e Y, além de evidenciar o comportamento consideravelmente mais rápido para do movimento no eixo Z, em relação ao apresentado para os outros dois eixos. Por sua vez, a Figura 4.21 mostra os erros quadrático de posição, possibilitando avaliar de forma mais clara o comportamento do erro do sistema. Dessa forma, facilita-se a visualização do quão rápido é o movimento no eixo Z, em relação aos outros, além de ressaltar a pequena diferença de comportamento entre os eixos X e Y. Para uma melhor quantificação dos resultados, a Tabela 4.6 apresenta o erro médio, o erro quadrático médio e o erro em regime permanente, para os 3 eixos analisados.

Tabela 4.6: Erros de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle por realimentação de estados.

	$E_{\text{médio}}$ [cm]	$E_{\text{médio}}^2$ [ $cm^2$ ]	$E_{SS}$ [cm]
X	-4,1420	146,9302	$-1,9497 \times 10^{-10}$
Y	-4,1191	145,4679	$7,3546 \times 10^{-12}$
Z	-2,1800	82,1105	$1,5488 \times 10^{-4}$

Por fim, para melhor avaliar o desempenho do controlador, a Figura 4.22 apresenta o erro acumulado e a Figura 4.23 o erro acumulado quadrático, visando facilitar a verificação das diferenças entre os eixos X e Y, bem como o comportamento abrupto de Z.

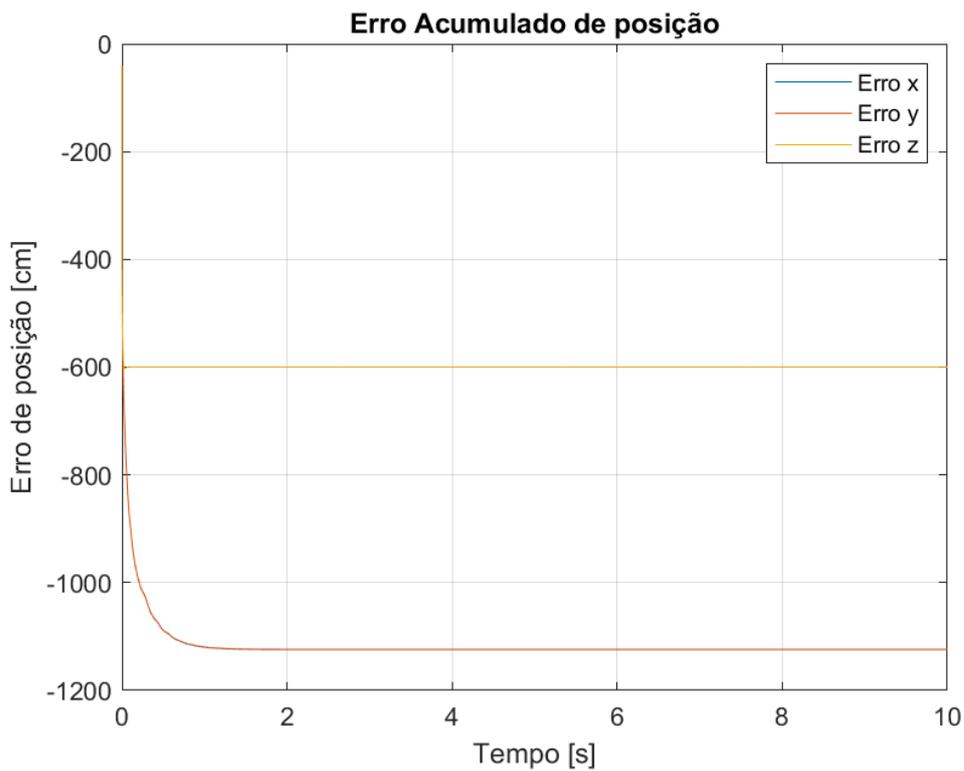


Figura 4.22: Erro acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle por realimentação de estados.

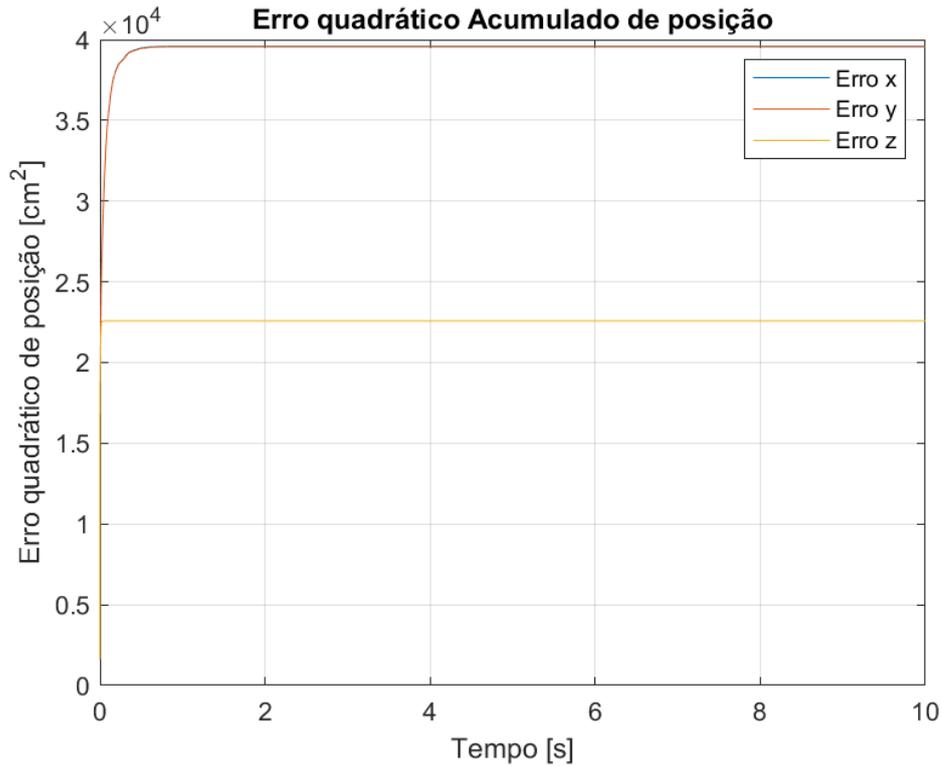


Figura 4.23: Erro quadrático acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle por realimentação de estados.

Na sequência apresenta-se a Tabela 4.7 com o resumo dos parâmetros encontrados nesta seção.

Tabela 4.7: Resumo dos parâmetros para o controle por realimentação de estados.

	<i>Tempo de subida [s]</i>	<i>Tempo de assentamento [s]</i>	<i>Overshoot [%]</i>
X	0,6278	0,7841	0%
Y	0,6278	0,8382	0%
Z	0,0356	0,0460	4%

### 4.3

#### Controle LQR

O controle LQR, apresentado na seção 3.2.3, será o próximo controle a ser avaliado. Os resultados deste controle são divididos em dois conjuntos: o

primeiro referente a implementação do controle LQR com matrizes de custo  $Q$  e  $R$  escolhidas manualmente, a partir de heurísticas associadas ao prévio conhecimento empírico de como um quadricóptero deve se comportar, enquanto o segundo conjunto é referente ao controle LQR implementado com matrizes de custo escolhidas por meio de técnicas de inteligência computacional, usando algoritmos genéticos (GA).

Dessa forma, como existem dois pares de matrizes de custos diferentes, definidas de maneiras completamente diferentes, as equações (4-1) e (4-2) mostram as matrizes de custo ajustadas manualmente, utilizadas para obtenção dos resultados mostrados na seção 4.3.1, enquanto que as equações (4-3) e (4-4) mostram as matrizes de custo obtidas por meio da otimização com GA, utilizadas para obtenção dos resultados mostrados na seção 4.3.2. Ademais, as equações (4-5) e (4-6) apresentam as matrizes utilizadas para a obtenção dos resultados mostradas na seção 4.3.3

Assim como na seção 4.2, os controles LQR foram avaliados por meio da aplicação de um degrau de 40 cm em cada direção do espaço tridimensional.

### 4.3.1

#### LQR com escolha manual das matrizes de custo

As matrizes de custo são compostas por todos os elementos sendo 1 exceto os elementos da diagonal. Os elementos de  $Q_d$  e  $R_d$ , nas equações (4-1) e (4-2), são os elementos das diagonais de  $Q$  e  $R$  respectivamente.

$$Q_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 1000 & 10 & 1000 & 10 \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

$$R_d = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

A Figura 4.24 mostra a trajetória adotada pelo quadricóptero no espaço tridimensional, para se deslocar da origem (0 cm, 0 cm, 0 cm) até o ponto desejado no espaço (40 cm, 40 cm, 40 cm), denominado ponto alvo. A origem é indicada por um marcador circular, enquanto que o marcador em forma de asterisco indica a posição final atingida pela aeronave. O marcador em forma de losango representa o ponto alvo desejado.

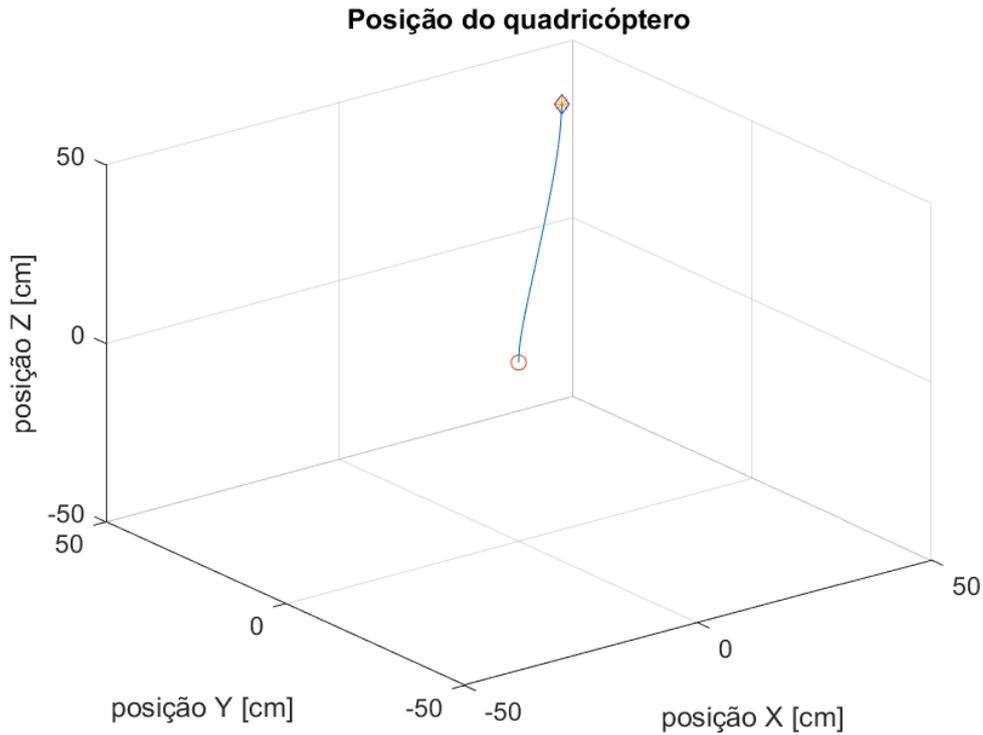


Figura 4.24: Trajetória adotada pelo veículo visando se deslocar da origem (marcador circular) até o ponto alvo (marcador em forma de losango), para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.

A Figura 4.24 apresenta a reação do sistema aos degraus aplicados na entrada. Nota-se que o quadricóptero conseguiu se deslocar quase em linha reta da origem para o ponto desejado no espaço.

Por sua vez, de modo a se poder avaliar o movimento executado com mais detalhes, a cada instante de tempo, as Figura 4.25, 4.26 e 4.27 mostram o comportamento da posição em relação aos eixos, X, Y e Z, respectivamente. Nestas Figuras, os pontos destacados por meio de um marcador circular vermelho indicam os respectivos tempos de subida e de um marcador em forma de cruz laranja indicam os respectivos tempos de assentamento.

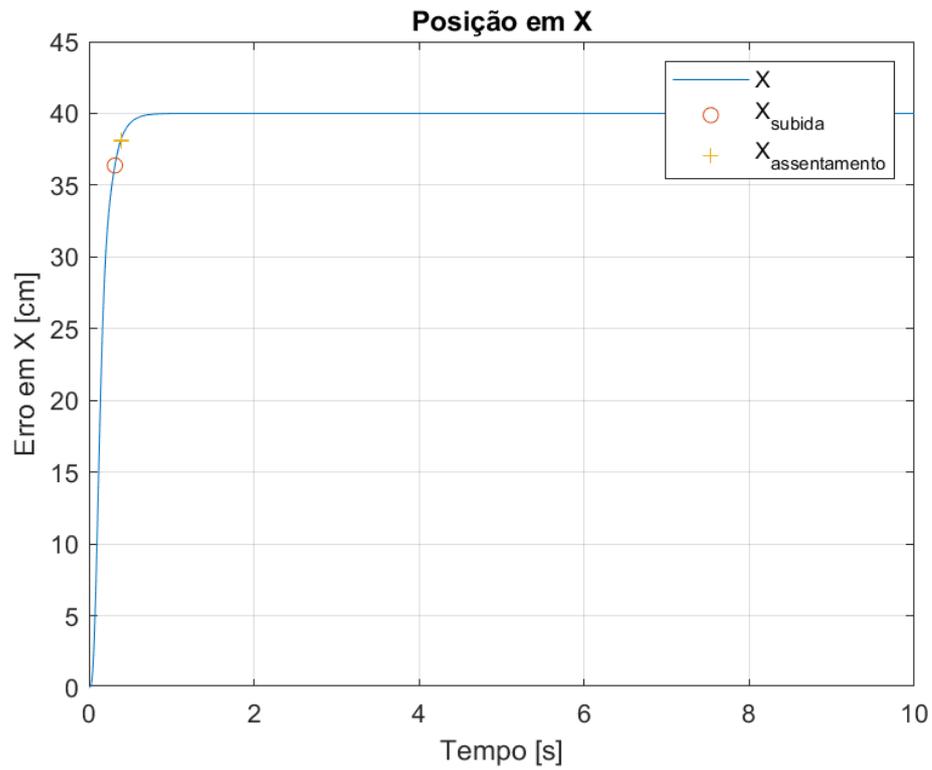


Figura 4.25: Erro de posição em relação ao eixo X em função do tempo, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.

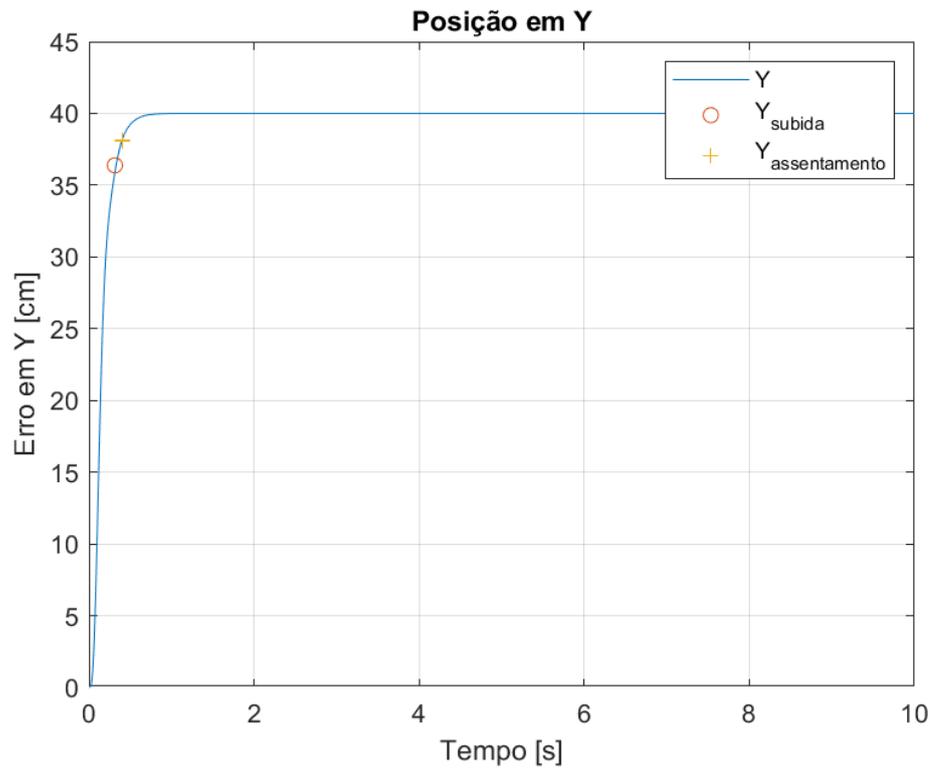


Figura 4.26: Erro de posição em relação ao eixo Y em função do tempo, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.

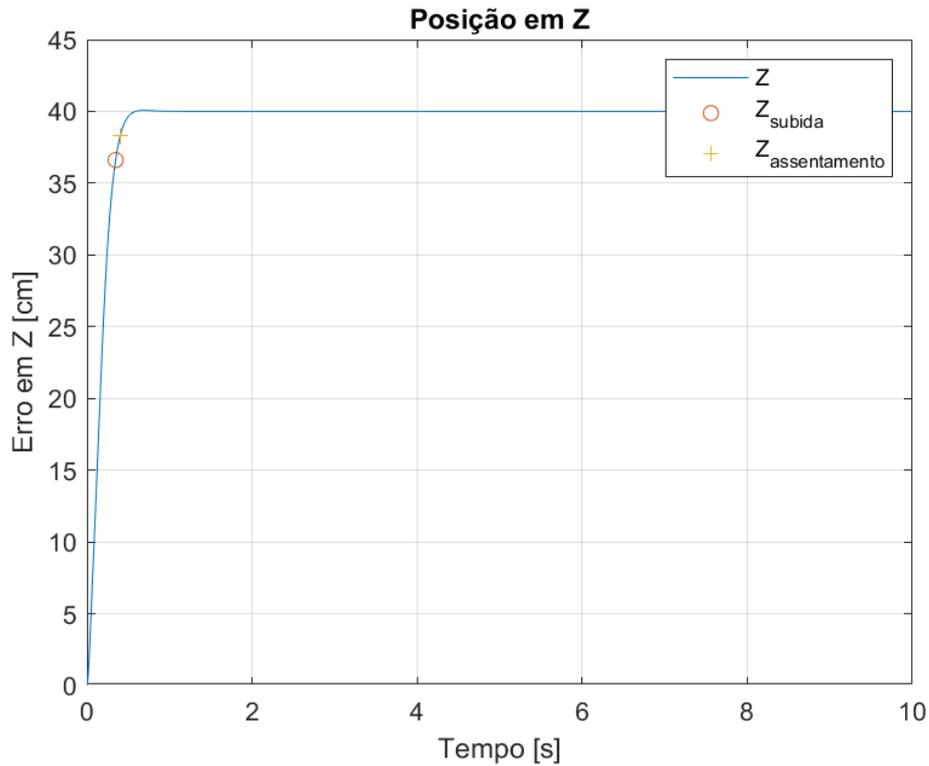


Figura 4.27: Erro de posição em relação ao deslocamento no eixo Z em função do tempo, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.

No gráfico mostrado na Figura 4.25, pode-se verificar a resposta do sistema, no eixo X, para o degrau de entrada. Observa-se que o comportamento é bem suave, sem *overshoot*, atingindo o objetivo rapidamente. O tempo de subida foi de 0,3147 segundos e o de assentamento foi de 0,3851. Esse tipo de comportamento é extremamente desejável, pois evita que os atuadores sejam muito demandados. Convencionalmente, altos valores de atuação podem comprometer a integridade do atuador.

Por sua vez, na Figura 4.26 é possível observar o erro associado ao deslocamento em Y. Mais uma vez, assim como apresentado na seção 4.2, a resposta do sistema para esse eixo é similar à apresentada para X, mostrada na Figura 4.25, tendo um tempo de subida de 0,3293 segundos, um tempo de assentamento de 0,4037 segundos, não possuindo *overshoot* e exibindo um comportamento suave. Nota-se, entretanto, que, apesar do comportamento similar ao do eixo X, há uma pequena diferença que acaba por implicar em um tempo de subida ligeiramente maior. No entanto, dependendo da aplicação essa pequena diferença pode ser considerada desprezível.

Por outro lado, ao contrário do erro em X e Y, observando-se a resposta

do erro no eixo Z, mostrada na Figura 4.27, nota-se um pequeno *overshoot* de 0,18% – o valor máximo atingido foi de 40,002 cm, sendo entretanto satisfatoriamente pequeno, de modo que pode ser desprezado. No entanto, de modo geral, a resposta do erro em Z é bem comportada, mostrando-se satisfatoriamente rápida para atingir o objetivo, com um tempo de subida de 0,3479 segundos e um tempo de assentamento de 0,4037 .

Na sequência, para uma melhor comparação entre os resultados mostrados nas Figuras 4.25 a 4.27, a Figura 4.28 apresenta os erros de posição em X, Y e Z, em função do tempo. Por sua vez, os respectivos erros quadráticos são mostrados na Figura 4.29, de modo a se poder observar o comportamento do sistema de forma mais detalhada.

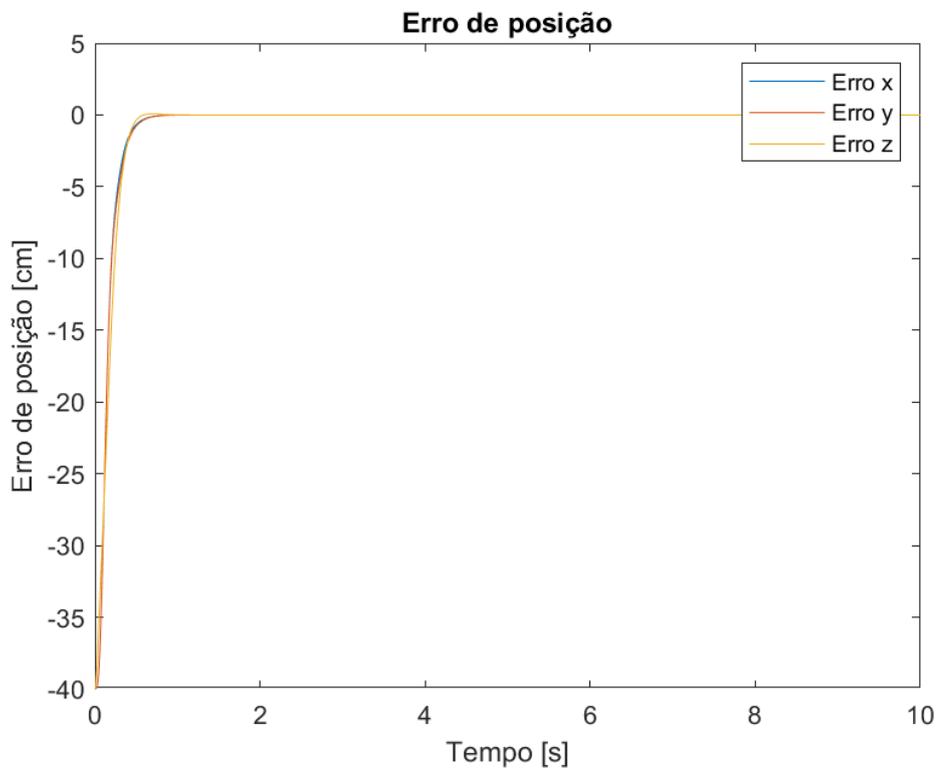


Figura 4.28: Erro de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.

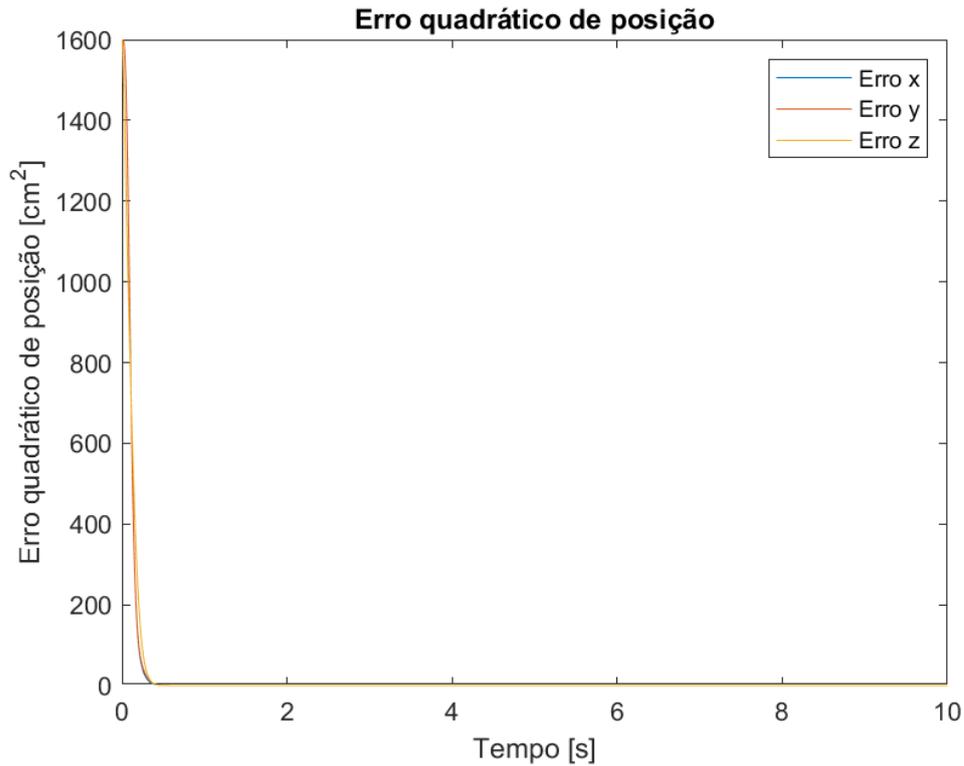


Figura 4.29: Erro quadrático de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.

Observando-se a Figura 4.28, pode-se notar o efeito de *overshoot* presente na resposta do eixo Z. Esta Figura também facilita a visualização da pequena diferença entre as respostas em cada eixo. Analisando o comportamento geral apresentado, verifica-se que as respostas são extremamente parecidas, sendo possível notar apenas pequenas diferenças, quando minuciosamente analisadas. Por sua vez, observando-se o comportamento do erro quadrático pode-se observar mais claramente o comportamento similar das 3 respostas. Para uma melhor quantificação dos resultados, a Tabela 4.8 apresenta o erro médio, o erro quadrático médio e o erro em regime permanente, para os 3 eixos analisados.

Tabela 4.8: Erros de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.

	$E_{\text{médio}}$ [cm]	$E_{\text{médio}}^2$ [cm <sup>2</sup> ]	$E_{SS}$ [cm]
X	-6,7218	245,4188	$0,9928 \times 10^{-4}$
Y	-6,7410	245,5511	$0,9928 \times 10^{-4}$
Z	-6,7575	240,6656	$0,9928 \times 10^{-4}$

A Figura 4.30 apresenta o erro acumulado e a Figura 4.31 o erro acumulado quadrático, visando facilitar a verificação das diferenças dos erros entre os eixos X, Y e Z.

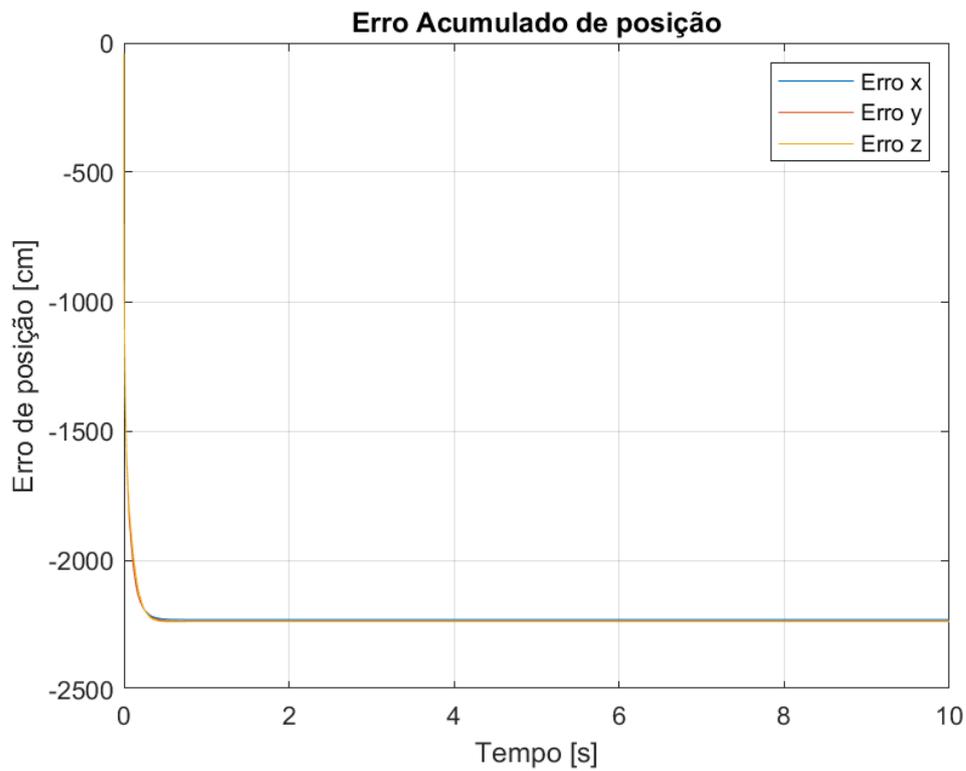


Figura 4.30: Erro acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.

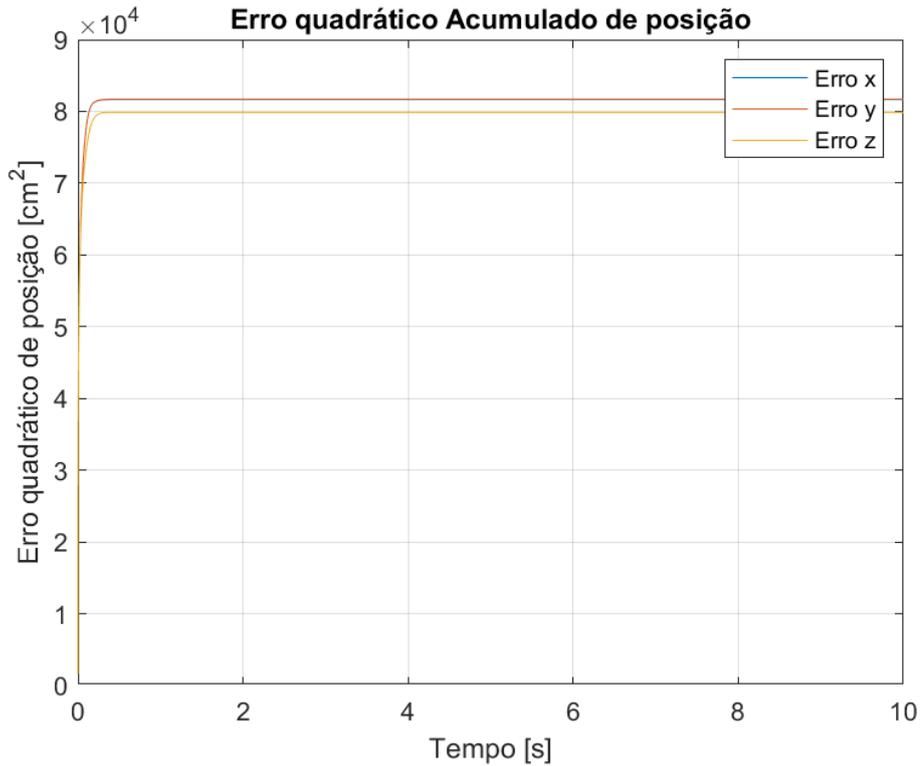


Figura 4.31: Erro quadrático acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste manual das matrizes de custo.

Observando o erro acumulado de posição, mostrado na Figura 4.30, nota-se que o controle adotado possibilita uma resposta rápida para atingir o ponto final desejado. Por sua vez, o erro quadrático acumulado, mostrado na Figura 4.31, ressalta a diferença entre a resposta dos controles para os eixos X e Y e a similaridade entre as respostas para os eixos Y e Z.

Na sequência apresenta-se a Tabela 4.9 com o resumo dos parâmetros encontrados nesta seção.

Tabela 4.9: Resumo dos parâmetros para o controle LQR com escolha manual das matrizes de custo.

	<i>Tempo de subida</i> [s]	<i>Tempo de assentamento</i> [s]	<i>Overshoot</i> [%]
X	0,3147	0,3851	0%
Y	0,3293	0,4037	0%
Z	0,3479	0,4037	0,18%

### 4.3.2

#### LQR com escolha inteligente das matrizes de custo usando GA na primeira configuração

As matrizes de custo são compostas por todos os elementos sendo 1 exceto os elementos da diagonal. Os elementos de  $Q_d$  e  $R_d$ , nas equações (4-3) e (4-4), são os elementos das diagonais de Q e R respectivamente.

$$Q_d = \begin{bmatrix} 2624,34 \\ 11,31 \\ 51,96 \\ 293,19 \\ 4719,87 \\ 7194,45 \\ 9917,41 \\ 1,03 \\ 9917,41 \\ 1,03 \\ 9917,41 \\ 1,03 \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

$$R_d = \begin{bmatrix} 128,27 \\ 128,27 \\ 128,27 \\ 128,27 \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

A Figura 4.32 apresenta os resultados obtidos para as melhores aptidões de cada geração do GA.

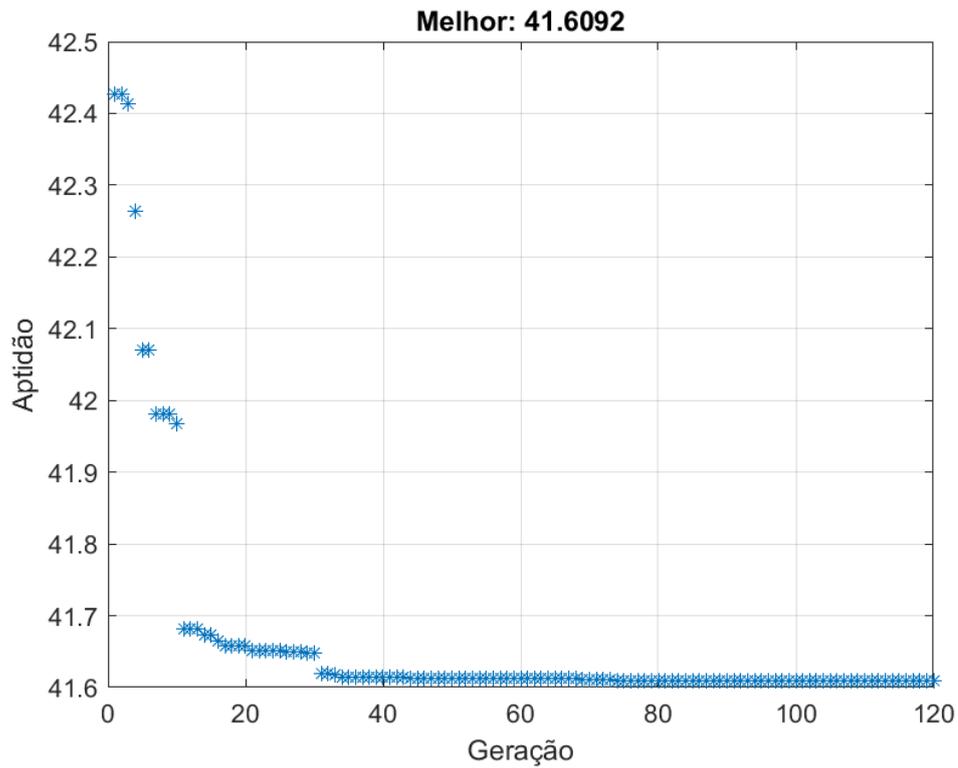


Figura 4.32: Resultados das aptidões dos melhores indivíduos de cada geração, para o GA na primeira configuração

A partir do gráfico presente na Figura 4.32, observa-se que o algoritmo convergiu por volta de 120 gerações.

Na Figura 4.33 é possível observar o comportamento da aptidão média das gerações.

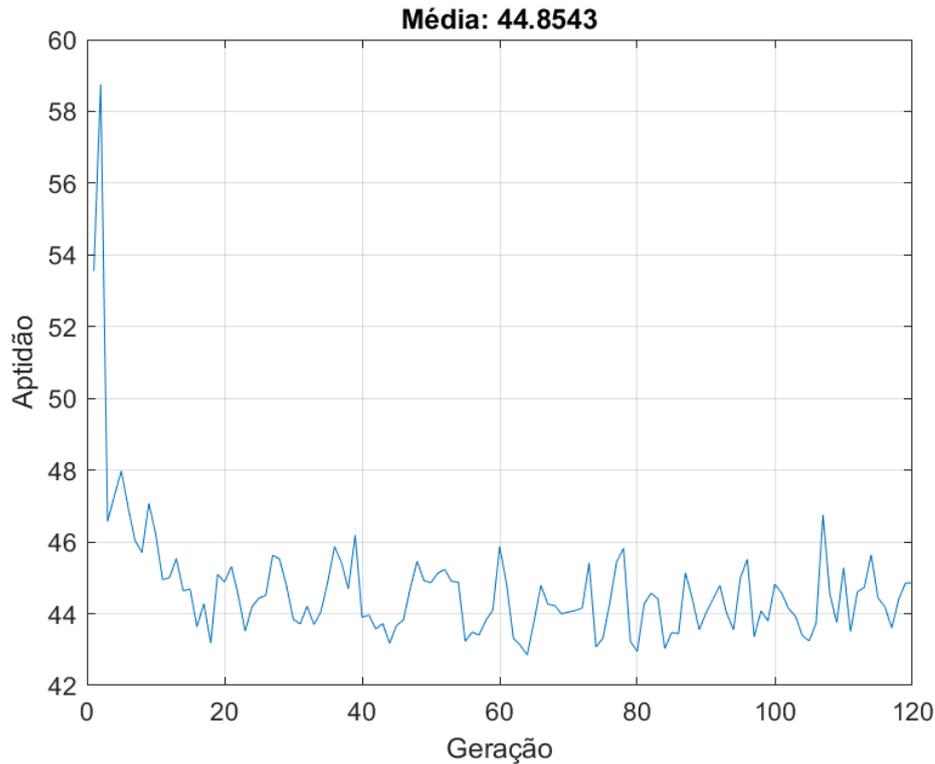


Figura 4.33: Resultados das aptidões médias de cada geração, para o GA na primeira configuração

Com as Figuras 4.32 e 4.33 foi possível ver que os valores de  $Q$  e  $R$  obtidos possuem aptidão melhor que os valores da escolha manual, mesmo com a diferença sendo pequena.

A Figura 4.34 mostra a trajetória adotada pelo quadricóptero no espaço tridimensional, para se deslocar da origem (0 cm, 0 cm, 0 cm) até o ponto desejado no espaço (40 cm, 40 cm, 40 cm), denominado ponto alvo. A origem é indicada por um marcador circular, enquanto que o marcador em forma de asterisco indica a posição final atingida pela aeronave. O marcador em forma de losango representa o ponto alvo desejado.

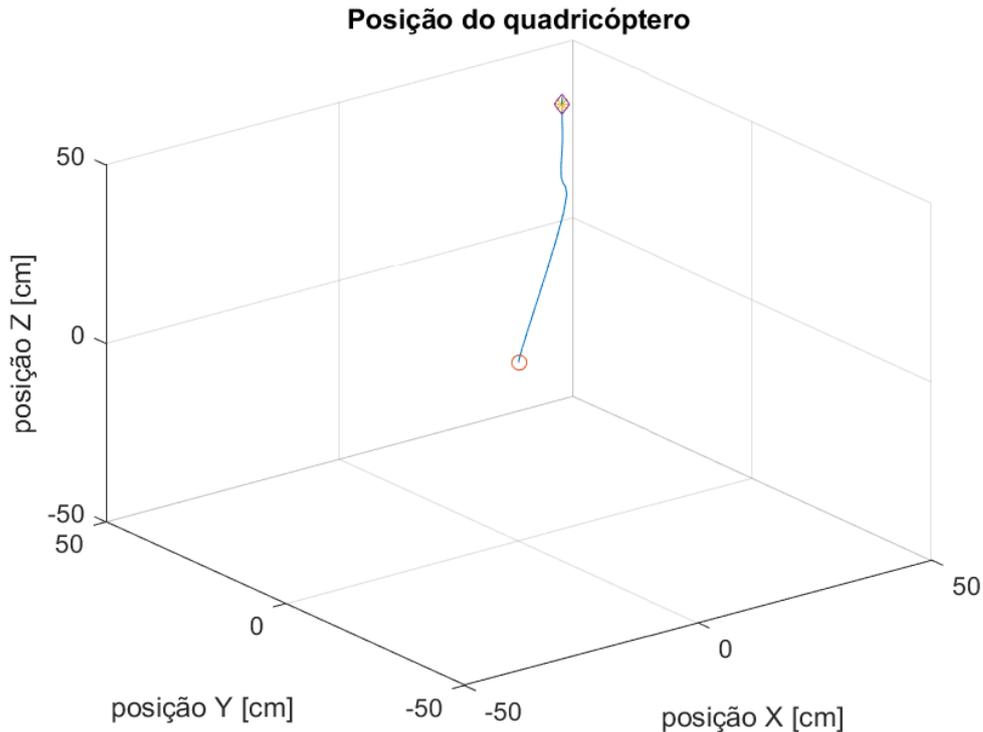


Figura 4.34: Trajetória adotada pelo veículo visando se deslocar da origem (marcador circular) até o ponto alvo (marcador em forma de losango), para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração

A Figura 4.34 apresenta a reação da planta aos degraus aplicados na entrada. Nota-se que a aeronave conseguiu sair do ponto de partida e chegar ao ponto desejado no espaço.

Por sua vez, de modo a se poder avaliar o movimento executado com mais detalhes, a cada instante de tempo, as Figura 4.35, 4.36 e 4.37 mostram o comportamento da posição em relação aos eixos X, Y e Z, respectivamente. Nestas Figuras, os pontos destacados por meio de um marcador circular vermelho indicam os respectivos tempos de subida e de um marcador em forma de cruz laranja indicam os respectivos tempos de assentamento.

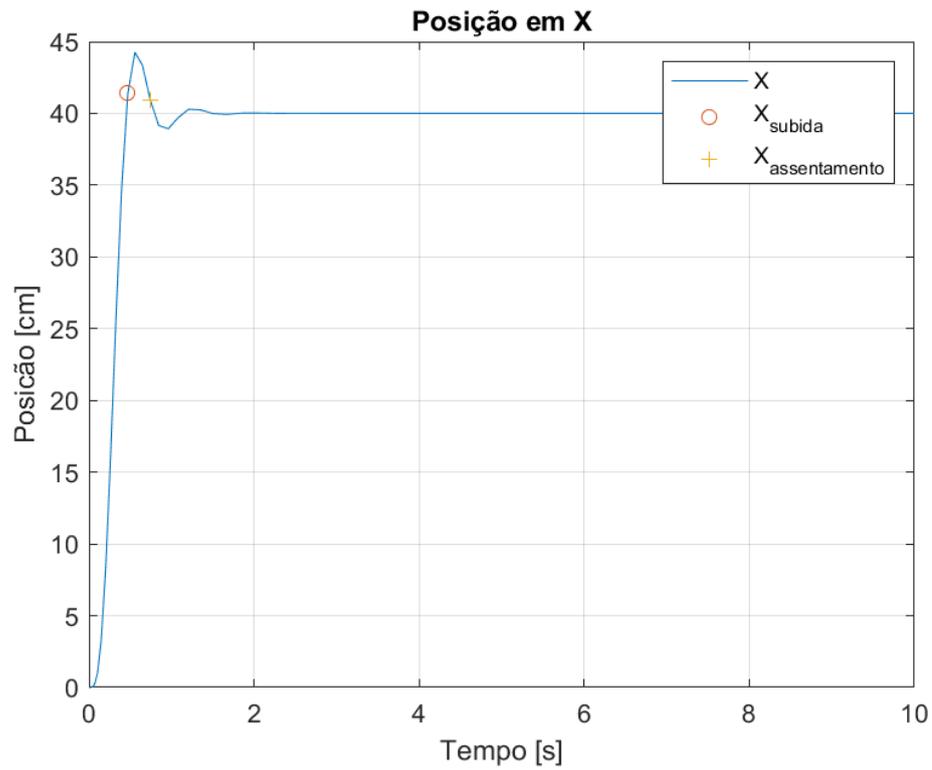


Figura 4.35: Posição em relação ao eixo X em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.

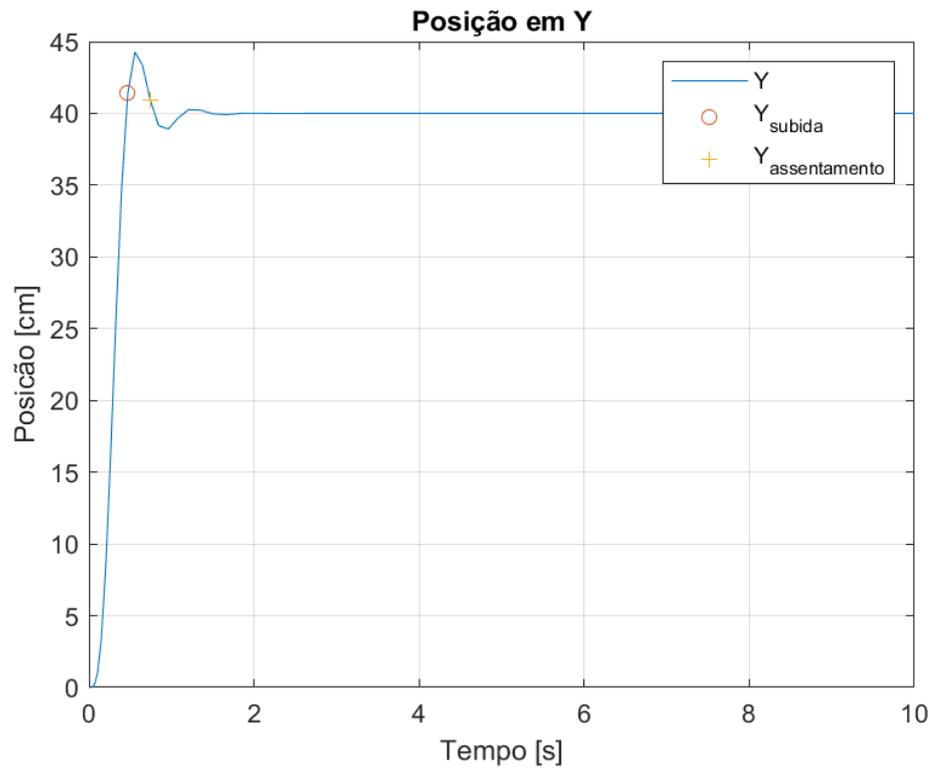


Figura 4.36: Posição em relação ao eixo Y em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.

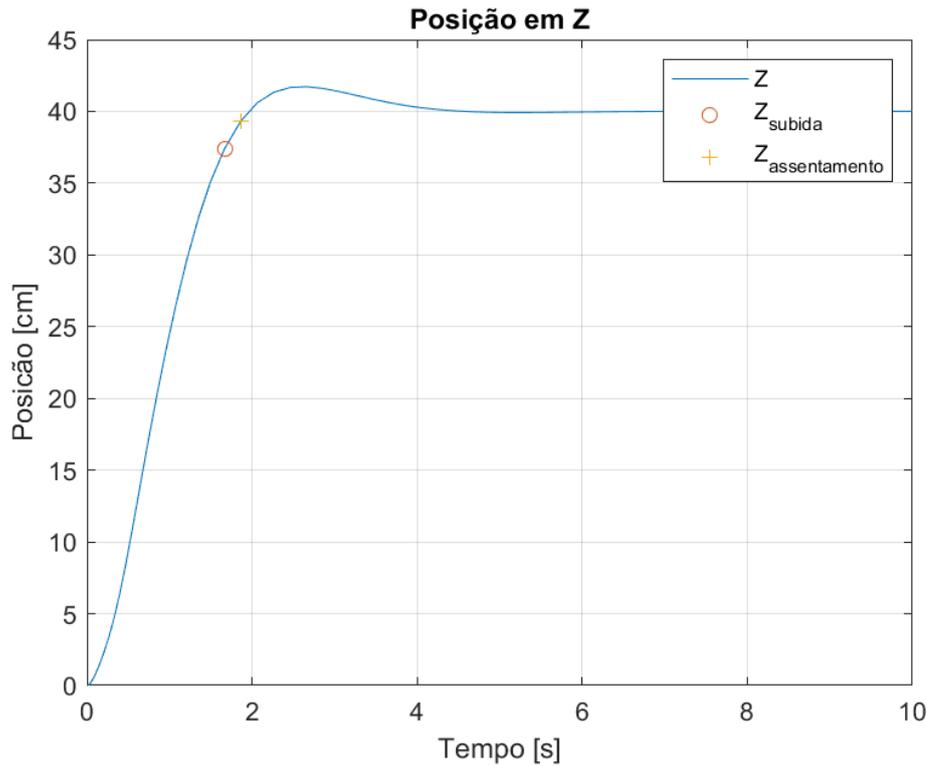


Figura 4.37: Posição em relação ao eixo Z em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.

Na Figura 4.35, pode-se verificar, isoladamente, a resposta do sistema, no eixo X, para o degrau de entrada. O comportamento mostrou-se não tão suave, mas sendo capaz de levar o quadricóptero à posição final desejada. Observa-se um *overshoot*, de 10,65%. Ademais, o tempo de subida foi de 0,4711 segundos e o de assentamento foi de 0,7433 segundos.

Por sua vez, na Figura 4.36 observa-se um comportamento bem similar ao apresentado no eixo X. Em particular, nota-se uma leve diferença no *overshoot* que pode ser desprezada, tendo em vista que seu valor foi de 10,70%. Por fim, o tempo de subida foi de 0,4711 segundos e o de assentamento foi 0,4733 segundos, similar ao obtido no eixo X.

Por outro lado, em relação aos movimentos no eixo Z obtidos por meio dos controladores anteriormente avaliados, nota-se que o apresentado na Figura 4.37 é o mais lento de todos, possuindo um tempo de subida de 1,6673 segundos e um tempo de assentamento de 1,8642 segundos. Mas, ainda assim, apresenta um *overshoot* de 4,30%.

Na sequência, para a ratificação da comparação entre os resultados mostrados nas Figuras 4.35 a 4.37, a Figura 4.38 apresenta os erros de posição

em X, Y e Z, em função do tempo. Por sua vez, os respectivos erros quadráticos são mostrados na Figura 4.39, de modo a se poder observar o comportamento do sistema de forma mais detalhada.

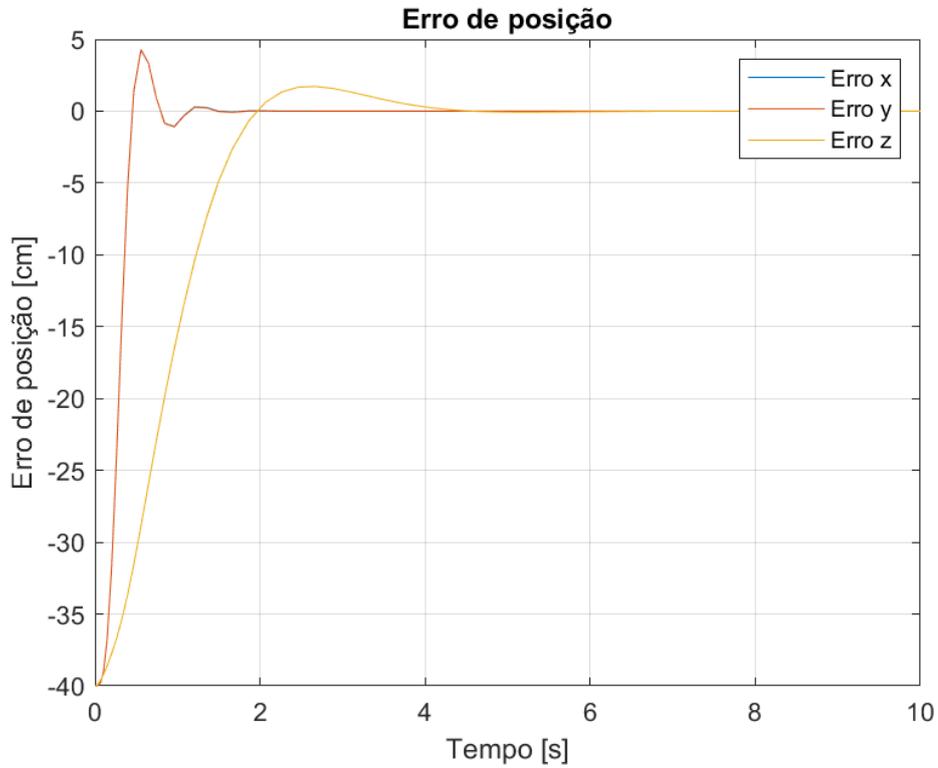


Figura 4.38: Erro de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.

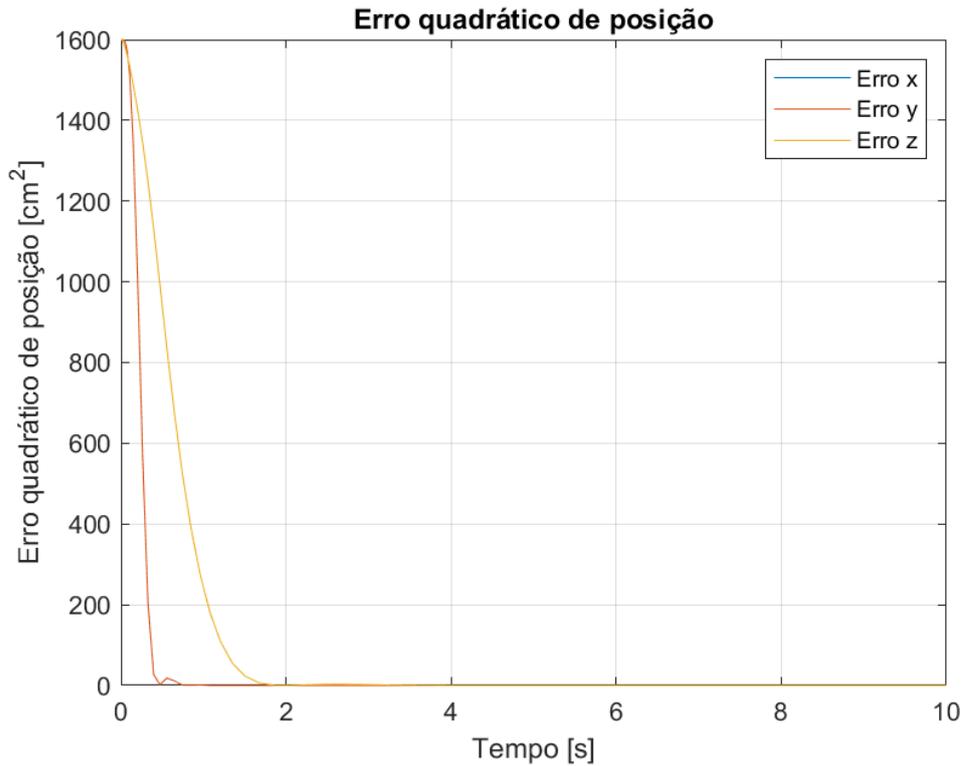


Figura 4.39: Erro quadrático de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.

Os gráficos dos erros presentes nas Figuras 4.38 e 4.39 mostram mais claramente as diferenças de comportamento entre os 3 deslocamentos. Por sua vez, para uma melhor quantificação dos resultados, a Tabela 4.10 apresenta o erro médio, o erro quadrático médio e o erro em regime permanente para os 3 eixos analisados.

Tabela 4.10: Erros de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.

	$E_{\text{médio}} [\text{cm}]$	$E_{\text{médio}}^2 [\text{cm}^2]$	$E_{SS} [\text{cm}]$
X	-9,1978	353,8255	$8,7503 \times 10^{-6}$
Y	-9,1989	353,8025	$-4,3902 \times 10^{-6}$
Z	-12,6986	458,2239	-0,037

A Figura 4.40 apresenta o erro acumulado e a Figura 4.41 o erro acumulado quadrático, visando facilitar a verificação das diferenças dos erros entre os eixos X, Y e Z.

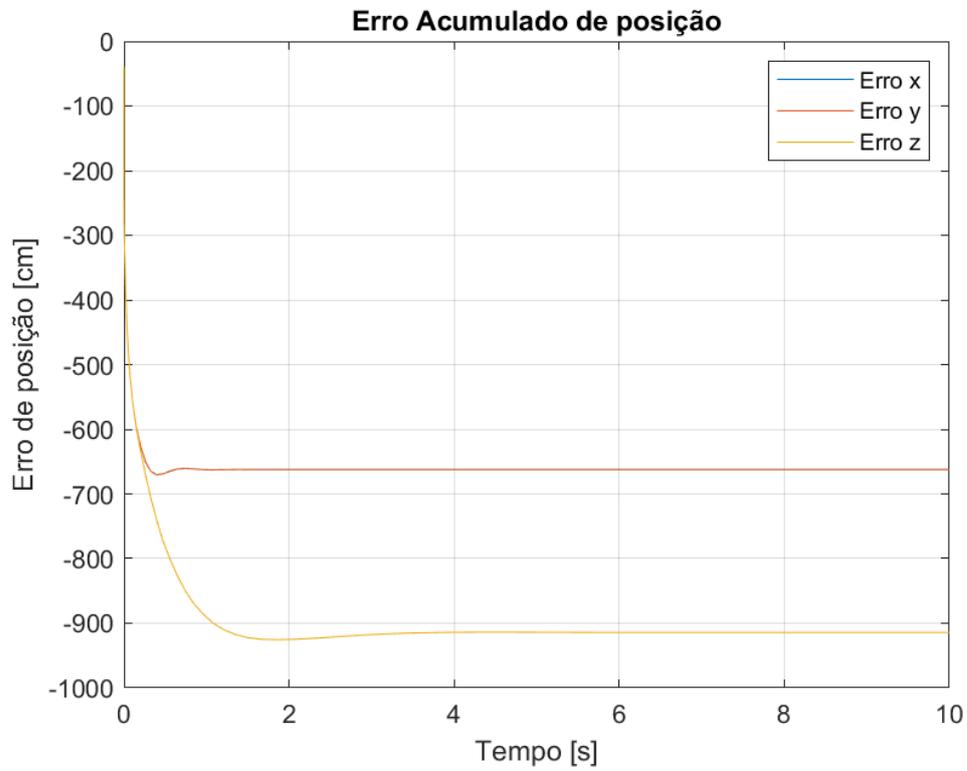


Figura 4.40: Erro acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.

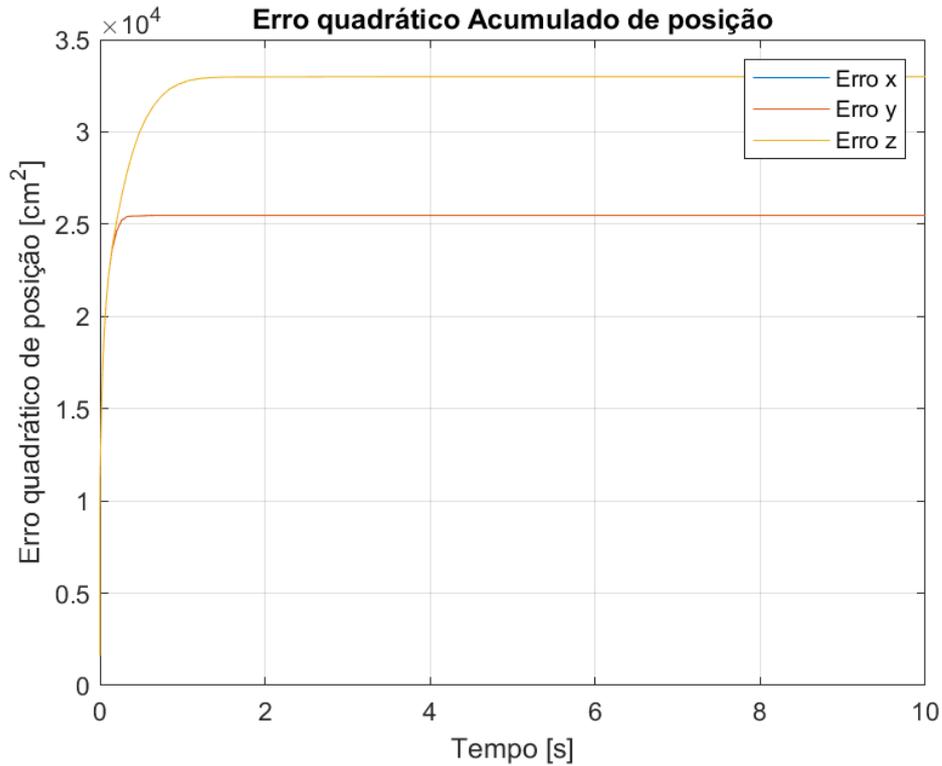


Figura 4.41: Erro quadrático acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.

Os gráficos dos erros acumulados, mostrados nas Figuras 4.40 e 4.41, evidenciam de forma mais clara o tempo despendido para que o controle pudesse efetivamente fazer com que o veículo atingisse o ponto desejado no espaço. Nota-se que o eixo Z consome um tempo maior que os demais eixos. Além disso, pode-se notar que o tempo de subida é maior que no caso da escolha manual das matrizes de custo, apresentado na seção 4.3.1. Analisando a tabela de parâmetros de configuração, Tabela 3.7, especificamente notando a função de avaliação dessa configuração do GA, pode-se ver que o tempo de subida não é o objetivo da minimização do algoritmo, assim é claro ver que apesar de demorar mais para atingir o objetivo, o erro é menor que o obtido no caso da escolha manual.

Na sequência, a Tabela 4.11 apresenta um resumo dos resultados encontrados.

Tabela 4.11: Resumo dos parâmetros para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na primeira configuração.

	<i>Tempo de subida</i> [s]	<i>Tempo de assentamento</i> [s]	<i>Overshoot</i> [%]
X	0,4711	0,7433	10,65%
Y	0,4711	0,7433	10,7%
Z	1,6673	1,8642	4,3%

### 4.3.3

#### LQR com escolha inteligente das matrizes de custo usando GA na segunda configuração

As matrizes de custo são compostas por todos os elementos sendo 1 exceto os elementos da diagonal. Os elementos de  $Q_d$  e  $R_d$ , nas equações (4-5) e (4-6), são os elementos das diagonais de Q e R respectivamente.

$$Q_d = \begin{bmatrix} 627,40 \\ 1,08 \\ 8321,00 \\ 1,06 \\ 193,03 \\ 6234,51 \\ 6185,14 \\ 266,1255 \\ 6185,14 \\ 266,1255 \\ 6185,14 \\ 266,1255 \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

$$R_d = \begin{bmatrix} 6,10 \times 10^{-5} \\ 6,10 \times 10^{-5} \\ 6,10 \times 10^{-5} \\ 6,10 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

A Figura 4.42 apresenta os resultados obtidos para as melhores aptidões de cada geração do GA.

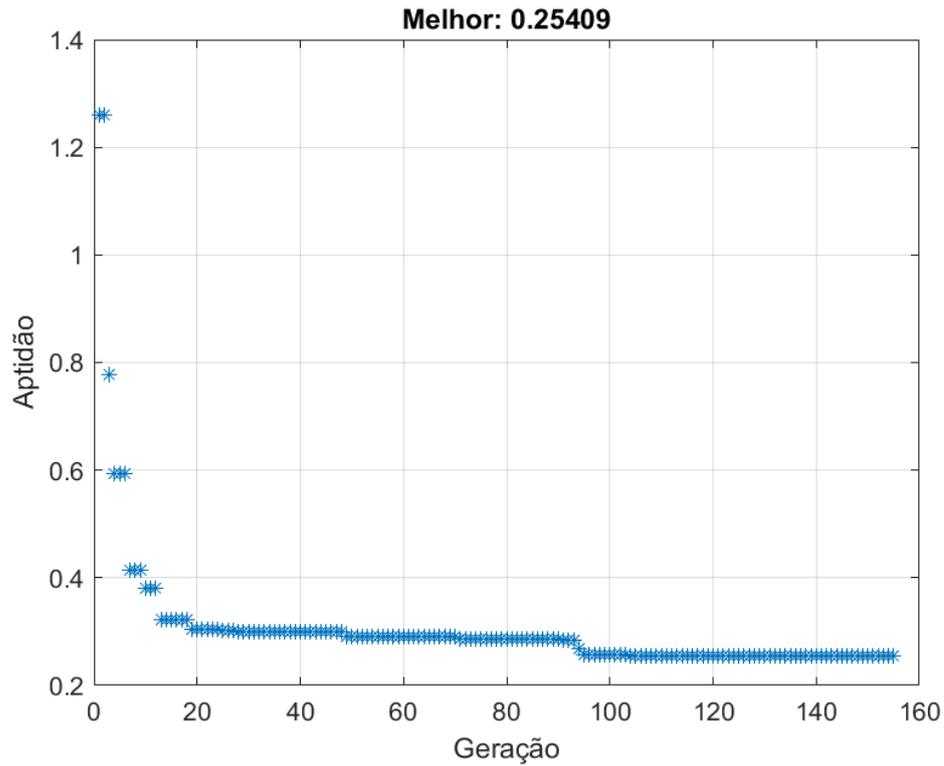


Figura 4.42: Resultados das aptidões dos melhores indivíduos de cada geração, para o GA na segunda configuração

A partir do gráfico presente na Figura 4.42, observa-se que o algoritmo convergiu por volta de 150 gerações. Sendo mais exato, foram suficientes 155 gerações para essa convergência.

Na Figura 4.43 é possível observar o comportamento da aptidão média das gerações.

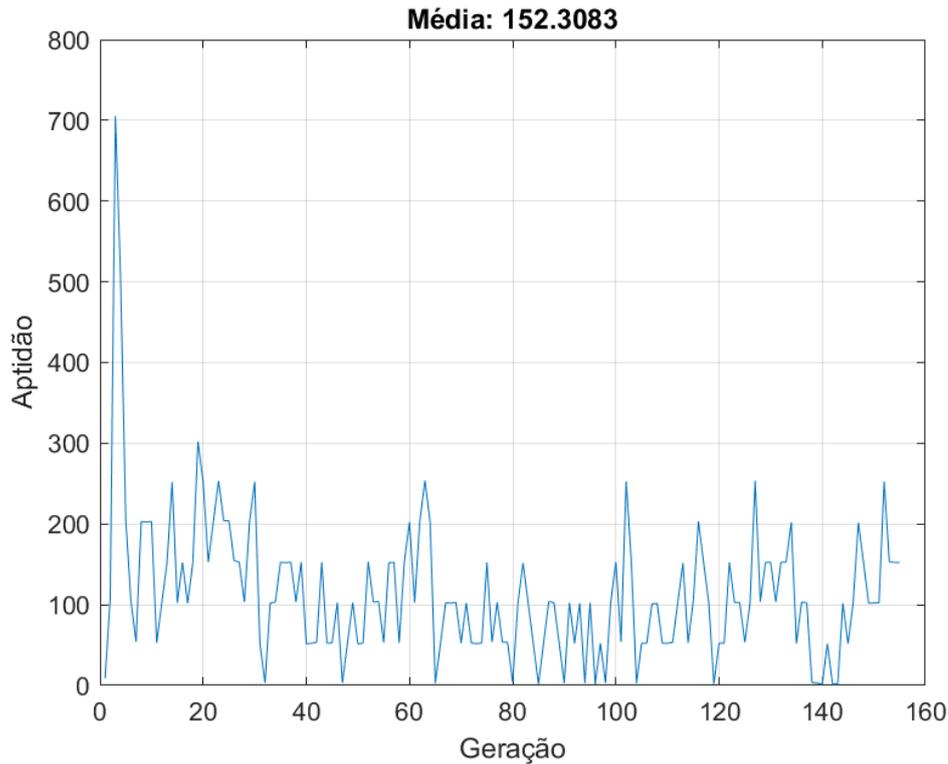


Figura 4.43: Resultados das aptidões médias de cada geração, para o GA na segunda configuração

Com as Figuras 4.42 e 4.43 foi possível ver que o controle, com os valores de  $Q$  e  $R$  obtidos através dessa configuração do GA, possui aptidão melhor que o controle com os valores através da escolha manual.

A Figura 4.44 mostra a trajetória adotada pelo quadricóptero no espaço tridimensional, para se deslocar da origem (0 cm, 0 cm, 0 cm) até o ponto desejado no espaço (40 cm, 40 cm, 40 cm), denominado ponto alvo. A origem é indicada por um marcador circular, enquanto que o marcador em forma de asterisco indica a posição final atingida pela aeronave. O marcador em forma de losango representa o ponto alvo desejado.

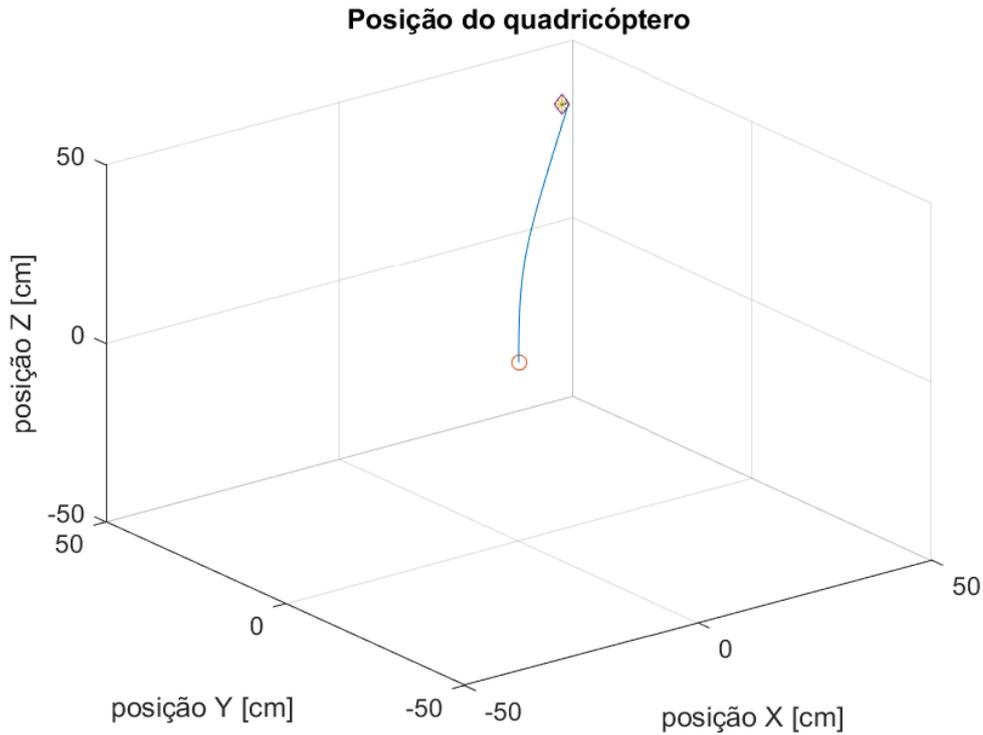


Figura 4.44: Trajetória adotada pelo veículo visando se deslocar da origem (marcador circular) até o ponto alvo (marcador em forma de losango), para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração

Por sua vez, de modo a se poder avaliar o movimento executado com mais detalhes, a cada instante de tempo, as Figuras 4.45, 4.46 e 4.47 mostram o comportamento da posição em relação aos eixos, X, Y e Z, respectivamente. Nestas Figuras, os pontos destacados por meio de um marcador circular vermelho indicam os respectivos tempos de subida e de um marcador em forma de cruz laranja indicam os respectivos tempos de assentamento.

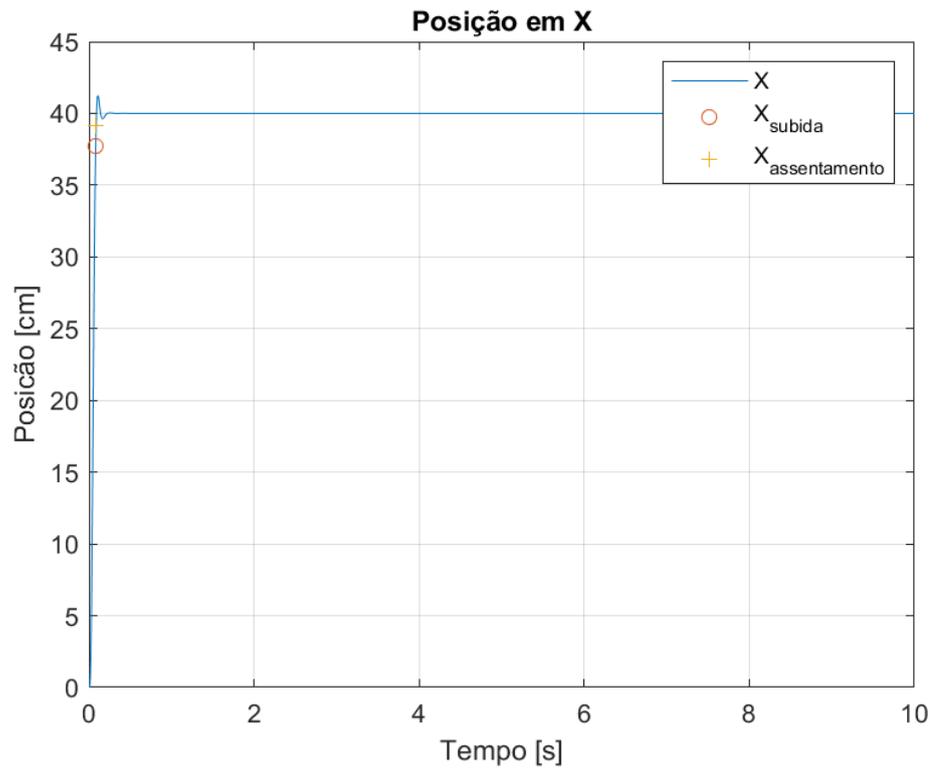


Figura 4.45: Posição em relação ao eixo X em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.

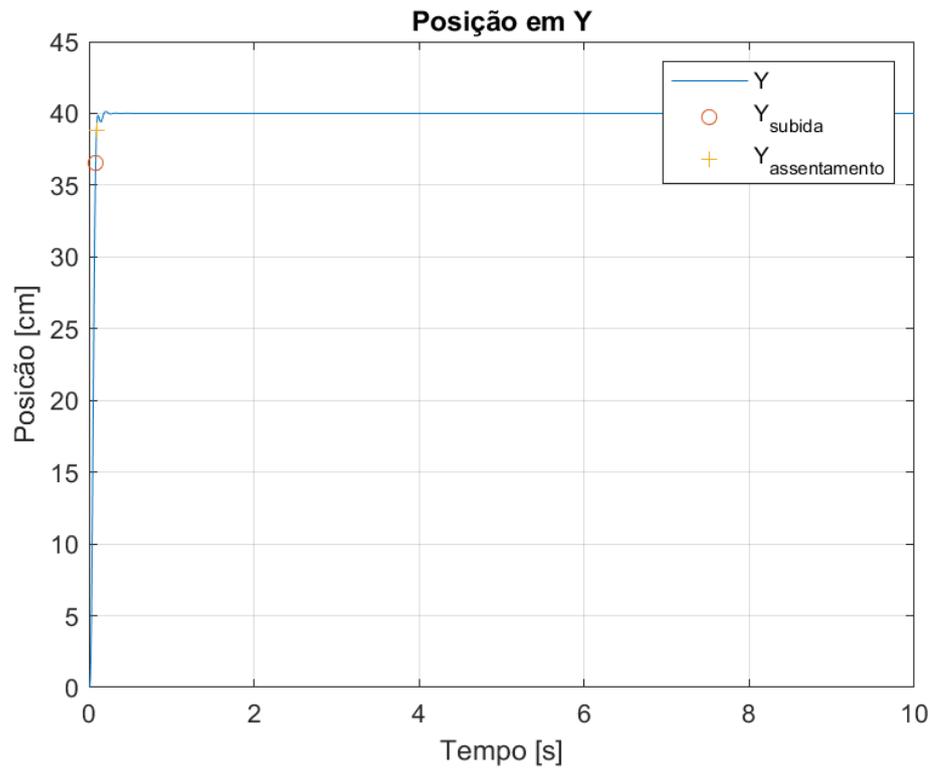


Figura 4.46: Posição em relação ao eixo Y em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.

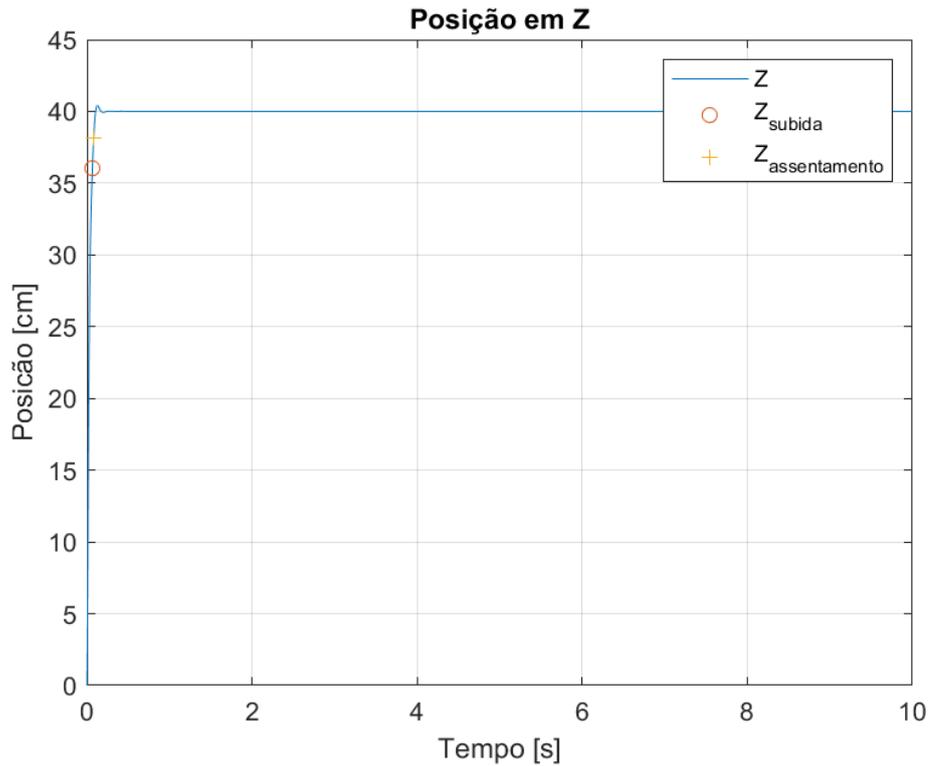


Figura 4.47: Posição em relação ao eixo Z em função do tempo, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.

No gráfico apresentado na Figura 4.45, pode-se notar mais claramente a resposta da planta para o sinal de entrada. O comportamento obtido foi suave, mas apresentando um *overshoot* de 3,11% mostrando-se bom o suficiente para atingir e permanecer no objetivo. Ademais o tempo de subida foi de 0,0821 segundos e um tempo de assentamento de 0,0871 segundos, ambos inferiores que os valores obtidos na primeira configuração do GA e da escolha manual.

A Figura 4.46, por sua vez, mostra um comportamento bem parecido ao visto no eixo X. Observa-se uma pequena diferença no *overshoot* da resposta, 0,34%. Mas também foi capaz de acertar e permanecer no objetivo. O tempo de subida foi de 0,0821 segundos e o de assentamento foi de 0,0921 segundos.

No entanto, a reação no eixo Z presente na Figura 4.47 é suave, mas apresenta um *overshoot* de 1,02%. O tempo de subida foi de 0,0671 segundos e o tempo de assentamento foi de 0,0821 segundos.

Na sequência, para ratificar comparação, mais uma vez, entre os resultados mostrados nas Figuras 4.45 a 4.47, a Figura 4.48 apresenta os erros de posição em X, Y e Z, em função do tempo. Por sua vez, os respectivos erros quadráticos são mostrados na Figura 4.49, de modo a se poder observar

o comportamento do sistema de forma mais detalhada.

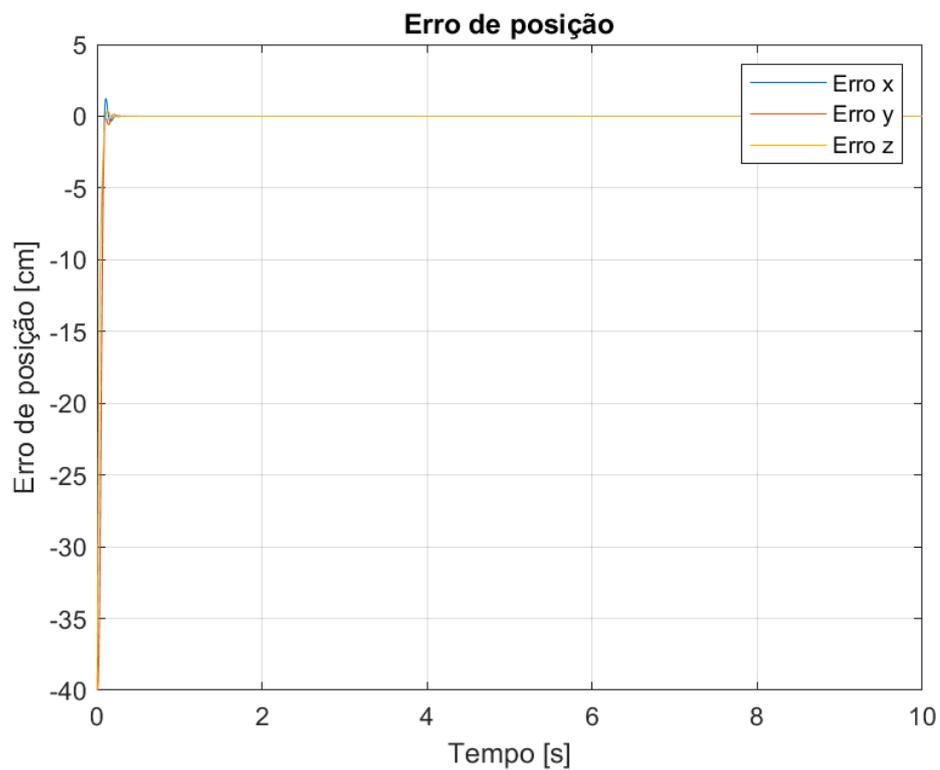


Figura 4.48: Erro de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.

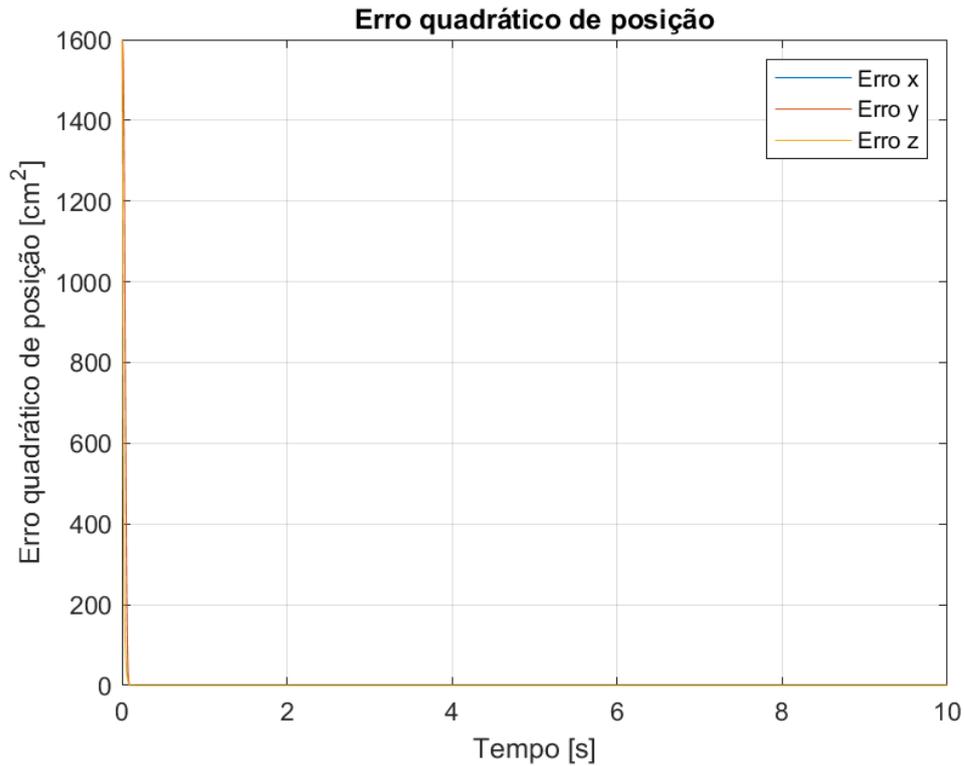


Figura 4.49: Erro quadrático de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.

Os gráficos dos erros presentes nas Figuras 4.48 e 4.49 mostram mais claramente as diferenças de comportamento entre os 3 deslocamentos. Por sua vez, para uma melhor quantificação dos resultados, a Tabela 4.12 apresenta o erro médio, o erro quadrático médio e o erro em regime permanente, para os 3 eixos analisados.

Tabela 4.12: Erros de posição do veículo nos eixos errosLQRga2, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.

	$E_{\text{médio}} [\text{cm}]$	$E_{\text{médio}}^2 [\text{cm}^2]$	$E_{SS} [\text{cm}]$
X	-14,2009	538,5984	$0.1062 \times 10^{-8}$
Y	-14,2009	541,3403	$0.1062 \times 10^{-8}$
Z	-11,9013	422,2730	$0.1062 \times 10^{-8}$

A Figura 4.50 apresenta o erro acumulado e a Figura 4.51 o erro acumulado quadrático, visando facilitar a verificação das diferenças dos erros entre os eixos X, Y e, principalmente, Z.

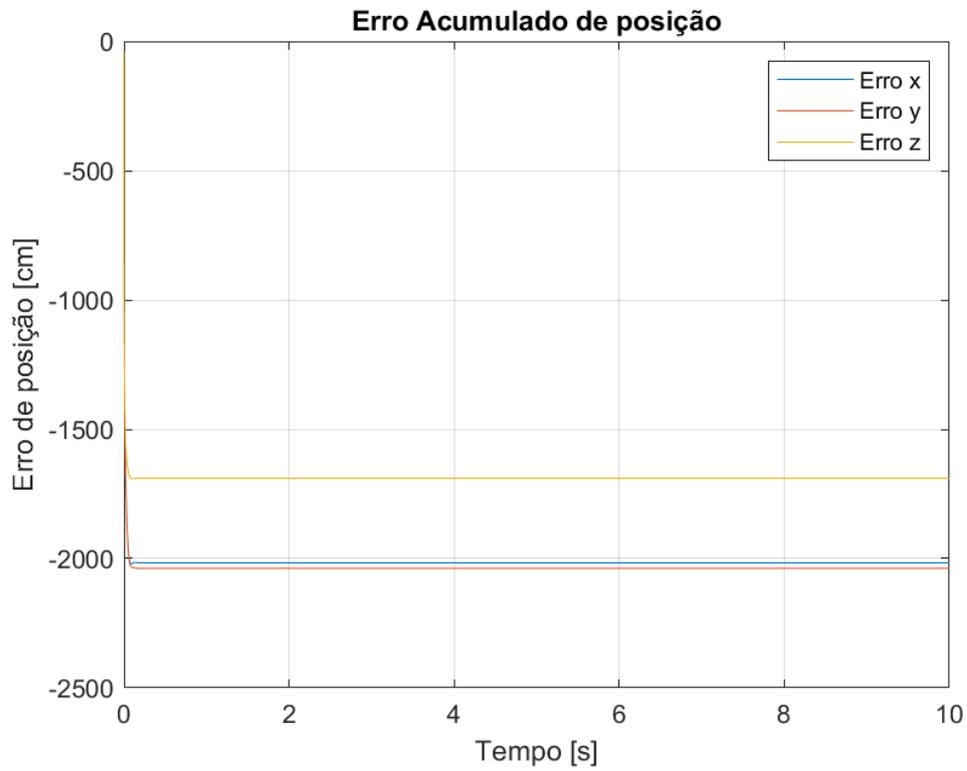


Figura 4.50: Erro acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.

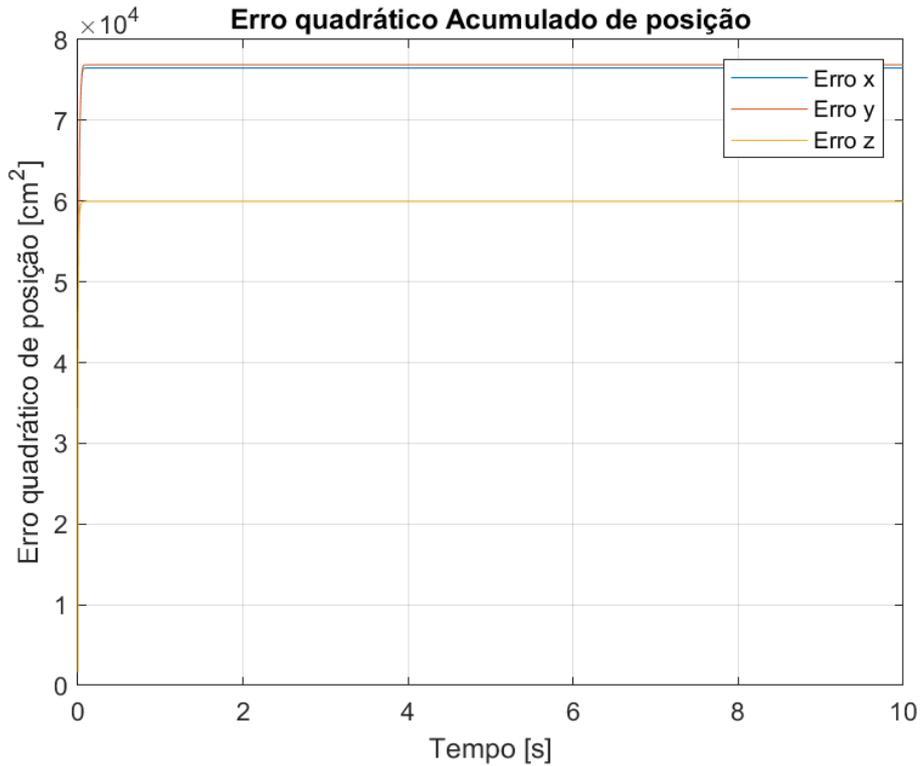


Figura 4.51: Erro quadrático acumulado de posição do veículo nos eixos X, Y e Z, para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.

Os gráficos dos erros acumulados, mostrados nas Figuras 4.50 e Figura 4.51, ressaltam mais claramente o tempo demandado para que o controle pudesse efetivamente fazer com que o veículo atingisse o ponto desejado no espaço. Nota-se que o eixo Z consome um tempo menor que a maioria das configurações testadas. Na sequência, a Tabela 4.13 apresenta um resumo dos resultados encontrados.

Tabela 4.13: Resumo dos parâmetros para o controle LQR com ajuste das matrizes de custo por GA na segunda configuração.

	<i>Tempo de subida</i> [s]	<i>Tempo de assentamento</i> [s]	<i>Overshoot</i> [%]
X	0,0821	0,0871	3,11%
Y	0,0821	0,0921	0,34%
Z	0,0671	0,0821	1,02%

## 5 Conclusões

O processo de modelagem da aeronave foi apresentado no capítulo 2, por meio do emprego das ferramentas matemáticas discutidas no apêndice A. Por sua vez, uma vez conhecido o modelo da aeronave, foram projetados ao longo do capítulo 3 diferentes tipos de controladores, baseados em técnicas de controle moderno e clássico. Na seção 3.1 é apresentado o desenvolvimento do controle PID utilizado como *baseline* para comparação com o desempenho dos demais controladores implementados. Por sua vez, na seção 3.2.2, discutiu-se o projeto de um controle por realimentação de estados com polos dominantes e controle de posição por Lógica Fuzzy. Já na seção 3.2.3 foi abordado o projeto de um controle LQR, tanto com as matrizes de custo ajustadas de forma manual quanto obtidas a partir de algoritmos de otimização baseado em algoritmos genéticos.

No capítulo 4, foram apresentados os resultados obtidos ao longo do processo de avaliação de desempenho de todos os controles analisados neste trabalho.

Para fins de comparação dos resultados obtidos, as Tabelas 5.1 e 5.2 resumizam as principais características de desempenho de cada controlador analisado.

Tabela 5.1: Comparação de desempenho entre os controladores avaliados: tempo de subida, tempo de assentamento e *overshoots*.

	Eixo	SFB-Fuzzy	LQR sem GA	LQR-GA (1)	LQR-GA (2)	PID
Tempo de subida[s]	X	0,6278	0,3147	0,4711	0,0821	0,7690
	Y	0,6278	0,3293	0,4711	0,0821	0,7659
	Z	0,0356	0,3479	1,6673	0,0671	0,0619
Tempo de assentamento [s]	X	0,7841	0,3851	0,7433	0,0871	4,1315
	Y	0,8382	0,4037	0,7433	0,0921	4,1176
	Z	0,0460	0,4037	1,8642	0,0821	0,4482
<i>Overshoot</i> [%]	X	0	0	10,65	3,11	19,06
	Y	0	0	10,7	0,34	18,90
	Z	4	0,18	4,3	1,02	17,34

Tabela 5.2: Comparação dos erros obtidos pelos controladores avaliados.

	Eixo	SFB-Fuzzy	LQR sem GA	LQR-GA (1)	LQR-GA (2)	PID
$E_{\text{médio}}$ [cm]	X	-4,1420	-6,7218	-9,1978	-14,2009	-0,1118
	Y	-4,1191	-6,7410	-9,1989	-14,2009	-0,1116
	Z	-2,1800	-6,7575	-12,6986	-11,9013	-0,0895
$E_{\text{médio}}^2$ [cm <sup>2</sup> ]	X	146,9302	245,4188	353,8255	538,5984	68,9952
	Y	145,4679	245,5511	353,8025	541,3403	68,2175
	Z	82,1105	240,6656	458,2239	422,2730	8,1272
$E_{SS}$ [cm]	X [10 <sup>-4</sup> ]	$-1,9497 \cdot 10^{-6}$	0,9928	0,0087503	0,00001062	1460
	Y [10 <sup>-4</sup> ]	$7,3546 \cdot 10^{-8}$	0,9928	-0,0043902	0,00001062	1445
	Z [10 <sup>-4</sup> ]	1,5488	0,9928	-370	0,00001062	0

Os resultados apresentados na Tabela 5.1, referentes aos eixos X e Y, mostram que o controlador LQR com GA na segunda configuração, LQR-GA(2), é o mais rápido a atingir o objetivo, tendo um tempo de assentamento 4 vezes, aproximadamente, menor que o segundo controlador mais rápido, LQR sem GA. O tempo de subida para esses eixos também é o menor de todos. Além disso, esse e o LQR sem GA são os controladores mais consistentes no quesito de deslocamento, obtendo tempos de assentamento bem próximos em relação a

todos os eixos. Por outro lado, em relação ao movimento no eixo Z, nota-se que o controle LQR-GA(2) teve o segundo melhor tempo de assentamento e terceiro menor tempo subida, sendo maior apenas que o controle SFB-Fuzzy. Note que o GA utilizado teve como objetivo a otimização do tempo de assentamento, sua função de avaliação era exatamente esse parâmetro, como pode ser observado na Tabela 3.8. O GA cumpriu sua função, tendo em vista que o tempo de assentamento da configuração do LQR com a escolha das matrizes Q e R manual, que não havia nenhum tipo de otimização, foi 4 vezes maior do que a configuração proposta através da escolha do GA. Para os *overshoots*, no eixo X e Y, o LQR-GA(2) tem o terceiro menor *overshoot*. No eixo Z, por outro lado, o controle fica com o segundo menor *overshoot*

Ainda na Tabela 5.1, nota-se que o LQR sem GA, nos eixo X e Y, foi o segundo controle mais rápido a alcançar o objetivo, apresentando um tempo de subida de 0,3147 segundos e 0,3293 segundos. Já para o eixo Z, ele fica com o quarto menor tempo de subida, 0,3479 segundos. Olhando para o tempo de assentamento, o controle tem os segundos menores tempos de assentamento para os eixos X e Y, 0,3851 segundos e 0,4037 segundos respectivamente. No eixo Z, com 0,4037 segundos, fica com o terceiro menor tempo de subida. Para os *overshoots*, o controle tem os menores valores de *overshoot*, 0% para X e Y e 0,18% para Z.

Focando no controlador LQR com GA na primeira configuração, LQR-GA(1), os tempos de subida de 0,4711 segundos e 0,4711 segundos para os eixos X e Y, foram os terceiros menores tempos. No eixo Z, o tempo de subida de 1,6673 segundos fica com o pior tempo entre os 5 controladores. Observando o tempo de assentamento, os eixos X e Y ficam com os terceiros melhores tempos e o eixo Z fica com o quarto menor tempo. O controle apresenta os quartos menores *overshoots* entre os controles testados.

Observando o controlador por realimentação de estados com polos dominantes e controle de posição por Lógica Fuzzy, SFB-Fuzzy, o tempo de subida de 0,6278 segundos em ambos os eixos, X e Y, ficam com os quartos menores tempos e para o eixo Z, o tempo de 0,0356 segundos, é o menor tempo de subida. O tempo de assentamento para os eixos X e Y são os quartos menores e para o eixo Z é o menor. Os *overshoots* para os eixos X e Y são os menores, juntamente com o LQR sem GA, e para o eixo Z, o terceiro menor.

Mais uma vez observando a Tabela 5.1, verifica-se que o controle de referência, PID, possui os maiores tempos de subida para os eixos X e Y, 0,7690 segundos e 0,7659 segundos, e segundo menor tempo de subida para o eixo Z. O tempo de assentamento para o eixo X e Y, 4,1315 segundos e 4,1176 segundos, são os maiores tempos. O eixo Z tem quarto menor tempo

assentamento. Os *overshoots* são os maiores para todos os eixos.

O resultados presentes na Tabela 5.2 apontam o controlador PID como o controlador com o menor erro médio nos 3 eixos,  $-0,1118$  cm,  $-0,1116$  cm e  $-0,0895$  cm para X, Y e Z respectivamente. Os erros médios quadráticos também são os menores obtidos entre os controladores comparados,  $68,9952$  cm<sup>2</sup>,  $68,2175$  cm<sup>2</sup> e  $8,1272$  cm<sup>2</sup>. Com exceção do eixo Z, o erro em regime dos eixos X e Y foram os maiores encontrados. O eixo Z apresentou o menor erro em regime.

O controlador SFB-Fuzzy apresenta os segundos menores erros médios nos 3 eixos,  $-4,1420$  cm,  $-4,1191$  cm e  $-2,1800$  cm para os eixos X, Y e Z. Os erros quadráticos médios são, também, os segundos menores,  $146,9302$  cm<sup>2</sup>,  $145,4679$  cm<sup>2</sup> e  $82,1105$  cm<sup>2</sup> para os eixos X, Y e Z. Os erros em regime permanente são os menores para X e Y, mas para Z é o segundo maior.

Analisando o controlador LQR sem GA, os erros em médios são os terceiro menores para X, Y e Z,  $-6,7218$  cm,  $-6,7410$  cm e  $-6,7575$  cm respectivamente. Os erros quadráticos médios,  $245,4188$  cm<sup>2</sup>,  $245,5511$  cm<sup>2</sup> e  $240,6656$  cm<sup>2</sup>, são os terceiros menores erros para os eixos X, Y e Z. Por fim o erro em regime permanente dos eixos são os quartos menores para os eixos X e Y e terceiro menor para o eixo Z. Vale notar que esse controlador é um dos mais consistentes.

O controle LQR-GA(1) apresenta os quartos menores erros médio para os eixos,  $-9,1978$  cm,  $-9,1989$  cm e  $-12,6986$  cm respectivamente. Os erros quadráticos médios de  $353,8255$  cm<sup>2</sup>,  $353,8025$  cm<sup>2</sup> e  $458,2239$  cm<sup>2</sup>, para X, Y e Z, são os quartos menores. Para o erro em regime, os eixos X e Y têm os terceiros menores erros. O eixo Z tem o quarto menor erro em regime permanente.

Por fim, o LQR-GA(2) apresenta os piores erros médios,  $-14,2009$  cm,  $-14,2009$  cm e  $-11,9013$  cm. Os erros quadráticos médios também são os piores encontrados,  $538,5984$  cm<sup>2</sup>,  $541,3403$  cm<sup>2</sup> e  $422,2730$  cm<sup>2</sup>. Por sua vez, os erros em regime permanente foram os terceiros menores para X e Y, segundo menor para Z.

Analisando os resultados obtidos, conclui-se que o controle PID, apesar de ser mais simples de se projetar e de possuir diversas ferramentas já projetadas para auxílio ao procedimento de *tuning* de parâmetros, como visto em [38–40], peca em desempenho, quando aplicado isoladamente ao quadricóptero. O desempenho apresentado não foi o pior obtido, em relação a todas as características de desempenho avaliadas, porém, em muitos casos, este controlador mostrou-se incapaz de atingir os patamares de desempenho obtidos por técnicas de controle moderno.

Por sua vez, os resultados obtidos pelos controles modernos avaliados indicaram um desempenho melhor em relação ao controle clássico PID desenvolvido. Não obstante, ressalta-se que a complexidade de projeto aumenta em relação ao PID, sendo mais difícil de se encontrar ferramentas que auxiliem a sintonia dos parâmetros. Além disso, os resultados também ressaltam a importância de se projetar adequadamente a função de avaliação do GA, de modo a se garantir que esta seja efetivamente capaz de representar bem o que se deseja otimizar. No caso discutido na seção 3.2.3.2, observou-se que otimização das matrizes Q e R utilizando GA para minimizar o tempo assentamento gerou resultados bem expressivos. O tempo de assentamento proveniente dessa configuração foi até 4 vezes menor do que a configuração original sem minimização do LQR. Esse resultado pode ser visto na Tabela 5.1. Por sua vez, a configuração do GA utilizando o erro quadrático acumulado como o objetivo da minimização não conseguiu exercer sua função. O erro quadrático acumulado dessa configuração foi superior ao encontrado na configuração original do LQR. Esse fato se deve a possíveis mínimos locais na função de avaliação dessa configuração. Esses mínimos locais dificultam, para o GA, encontrar o mínimo global. Dessa forma, os resultados obtidos nessa configuração não são os melhores possíveis no quesito de erro quadrático acumulado.

Conforme indicado na Tabela 5.1 e 5.2, dentre todos os controladores avaliados, pode-se perceber que o controlador LQR-GA(2) apresentou os melhores resultados em relação aos parâmetros de desempenho: tempo de subida, tempo de assentamento; bons desempenhos em *overshoot* e erro em regime permanente, sendo bem consistente em relação a movimentação em todos os eixos. Por sua vez, o controle PID obteve o melhor erro médio e um desempenho razoável para deslocamentos no eixo Z, além de exibir tempos de subida e assentamento adequados para deslocamentos neste eixo. Por sua vez, o controle SFB-Fuzzy apresentou um excelente desempenho nos deslocamentos no eixo Z, possuindo o melhor tempo de subida e excelentes tempos de assentamento e erro médio quadrático. O controle LQR sem GA foi bem nos quesitos de *overshoot* e tempo de assentamento e subida, além de obter erros em regime bem baixos. O controle LQR-GA(1) apresentou bons tempos de subida e assentamento e erro em regime permanente muito bom.

Dessa forma, conclui-se que, dentre os controladores avaliados, recomenda-se a adoção do controlador LQR sem GA, caso o objetivo seja uma movimentação consistente nos eixos. O LQR-GA(1) seria mais recomendado se fosse desejado um assentamento rápido nos eixos. Por outro lado, caso deseje-se que o quadricóptero possa alterar sua altitude de forma brusca e bem rápida, o SFB-Fuzzy é o mais recomendado. Ademais, o PID é o mais

recomendado caso se deseje um controle de fácil sintonia de parâmetros e com diversas técnicas de *tuning* disponíveis, sendo capaz de atingir um desempenho razoável. Se fosse desejado um controle que trabalhasse no regime permanente na maior parte do tempo o LQR-GA(2) seria o mais recomendado.

## 5.1

### Trabalhos futuros

Uma sequência Lógica para o seguimento deste trabalho seria a aplicação das técnicas projetadas em um simulador mais completo para o comportamento do quadricóptero e para as condições reais nas quais o mesmo se sujeita. A utilização do Gazebo [41–43] ou do Simscape<sup>®</sup> [44–46] para a modelagem e simulação de um ambiente tridimensional mais realista pode ser uma escolha mais adequada. Após essas novas simulações, a implementação dos controles em um quadricóptero real pode ser o processo lógico de ser seguido para se obter uma comparação mais apurada e detalhada do comportamento das estratégias desenvolvidas.

Adicionalmente, visando otimizar ainda mais as características de desempenho aqui obtidas, pode-se propor estratégias de controle mais complexas, baseadas no modelo não linearizado do quadricóptero, bem como um controle robusto ou por modos deslizantes ou a linearização de realimentação (*feedback linearization*). O intuito de desenvolver essas estratégias é conseguir avaliar o custo-benefício que consegue ser obtido com o aumento da complexidade do projeto e a redução das aproximações do modelo do quadricóptero.

## Referências bibliográficas

- [1] Ferran Giones and Alexander Brem. From toys to tools: The co-evolution of technological and entrepreneurial developments in the drone industry. ***Business Horizons***, 60(6):875 – 884, 2017.
- [2] M. Hassanalian, D. Rice, and A. Abdelkefi. Evolution of space drones for planetary exploration: A review. ***Progress in Aerospace Sciences***, 97:61 – 105, 2018.
- [3] A. K. Saha, J. Saha, R. Ray, S. Sircar, S. Dutta, S. P. Chattopadhyay, and H. N. Saha. lot-based drone for improvement of crop quality in agricultural field. In ***2018 IEEE 8th Annual Computing and Communication Workshop and Conference (CCWC)***, pages 612–615, 2018.
- [4] Francesco Marinello, Andrea Pezzuolo, Alessandro Chiumenti, and Luigi Sartori. Technical analysis of unmanned aerial vehicles (drones) for agricultural applications. ***Engineering fo Rural Development***, pages 870–875, 2018.
- [5] Patricia K. Freeman and Robert S. Freeland. Agricultural uavs in the u.s.: potential, policy, and hype. ***Remote Sensing Applications: Society and Environment***, 2:35 – 43, 2015.
- [6] H. S. Abdullahi, F. Mahieddine, and R. E. Sheriff. Technology impact on agricultural productivity: A review of precision agriculture using unmanned aerial vehicles. In Prashant Pillai, Yim Fun Hu, Ifiok Otung, and Giovanni Giambene, editors, ***International Conference on Wireless and Satellite Systems***, pages 388–400, Cham, 2015. Springer International Publishing.
- [7] T. L. Grigorie, A. V. Popov, R. M. Botez, M. Mamou, and Y Mébarki. On-off and proportional–integral controller for a morphing wing. part 1: Actuation mechanism and control design. ***Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering***, 226(2):131–145, 2012.
- [8] F.J. Fernández, M.C. Castro, M.A. Rodrigo, and P. Cañizares. Reduction of aeration costs by tuning a multi-set point on/off controller: A case study. ***Control Engineering Practice***, 19(10):1231 – 1237, 2011.

- [9] Sina F. Ardabili, Asghar Mahmoudi, Tarahom M. Gundoshmian, and Ali Roshanianfard. Modeling and comparison of fuzzy and on/off controller in a mushroom growing hall. *Measurement*, 90:127 – 134, 2016.
- [10] Kiam H. Ang, G. Chong, and Yun Li. Pid control system analysis, design, and technology. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(4):559–576, July 2005.
- [11] K.J. Åström and T. Hägglund. The future of pid control. *Control Engineering Practice*, 9(11):1163 – 1175, 2001. PID Control.
- [12] K.J. Åström, C.C. Hang, P. Persson, and W.K. Ho. Towards intelligent pid control. *Automatica*, 28(1):1 – 9, 1992.
- [13] Dong Yue, Qing-Long Han, and Chen Peng. State feedback controller design of networked control systems. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications*, volume 1, pages 242–247 Vol.1, 2004.
- [14] B. Tang, G. Liu, and W. Gui. Improvement of state feedback controller design for networked control systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 55(5):464–468, 2008.
- [15] Alin Albu-Schäffer and Gerd Hirzinger. A globally stable state feedback controller for flexible joint robots. *Advanced Robotics*, 15(8):799–814, 2001.
- [16] Alin Albu-Schäffer and Gerd Hirzinger. State feedback controller for flexible joint robots: a globally stable approach implemented on dlr’s light-weight robots. In *Proceedings. 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2000) (Cat. No.00CH37113)*, volume 2, pages 1087–1093 vol.2, 2000.
- [17] Y. M. Sam, M. R. H. A. Ghani, and N. Ahmad. Lqr controller for active car suspension. In *2000 TENCON Proceedings. Intelligent Systems and Technologies for the New Millennium (Cat. No.00CH37119)*, volume 1, pages 441–444 vol.1, 2000.
- [18] L. M. Argentim, W. C. Rezende, P. E. Santos, and R. A. Aguiar. Pid, lqr and lqr-pid on a quadcopter platform. In *2013 International Conference on Informatics, Electronics and Vision (ICIEV)*, pages 1–6, 2013.
- [19] Faraz Ahmad, Pushpendra Kumar, Anamika Bhandari, and Pravin P. Patil. Simulation of the quadcopter dynamics with lqr based control. *Materials*

- Today: Proceedings**, 24:326 – 332, 2020. International Conference on Advances in Materials and Manufacturing Applications, IConAMMA 2018, 16th -18th August, 2018, India.
- [20] R. L. S. M. Vilela and E. C. Silva. Stability and altitude control of a quadrotor using fuzzy logic. In **11th International Micro Air Vehicle Competition and Conference**, pages 1–7, 2019.
- [21] S. Tzafestas and N. P. Papanikolopoulos. Incremental fuzzy expert pid control. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, 37(5):365–371, 1990.
- [22] Mahmud Iwan Solihin, Wahyudi, and Ari Legowo. Fuzzy-tuned pid anti-swing control of automatic gantry crane. **Journal of Vibration and Control**, 16(1):127–145, 2010.
- [23] T. Brehm and K. S. Rattan. Hybrid fuzzy logic pid controller. In **Proceedings of the IEEE 1993 National Aerospace and Electronics Conference-NAECON 1993**, pages 807–813 vol.2, 1993.
- [24] Huu Khoa Tran and Thanh Nam Nguyen. Flight motion controller design using genetic algorithm for a quadcopter. **Measurement and Control**, 51(3-4):59–64, 2018.
- [25] Zbigniew Michaelwicz, Cezary Z. Janikow, and Jacek B. Krawczyk. A modified genetic algorithm for optimal control problem. In **29th CDC**, volume 29, 1990.
- [26] Ahmed Alkamachi and Ergun Erçelebi. Modelling and genetic algorithm based-pid control of h-shaped racing quadcopter. **Arabian Journal for Science and Engineering**, 42:2777–2786, 2017.
- [27] M. İcen, A. Ateş, and C. Yeroğlu. Optimization of lqr weight matrix to control three degree of freedom quadcopter. In **2017 International Artificial Intelligence and Data Processing Symposium (IDAP)**, pages 1–6, 2017.
- [28] C. Massé, O. Gougeon, D. Nguyen, and D. Saussié. Modeling and control of a quadcopter flying in a wind field: A comparison between lqr and structured  $\mathcal{H}_\infty$  control techniques. In **2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)**, pages 1408–1417, 2018.
- [29] Ahmed Aboelenen, Abdallah Hammad, Ashraf Hafez, and Hala Mansour. Quadcopter trajectory tracking control using state-feedback control with integral action. **International Journal of Computer Applications**, 168:1–7, 06 2017.

- [30] J.G. Ziegler and N.B. Nichols. Optimum setting for automatic controllers. *Transactions of ASME*, pages 759–768, 06 1993.
- [31] Edward J. Routh. *A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion*. Macmillan and co., 1st edition, 1877.
- [32] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall Inc., 3rd edition, 1997.
- [33] V. Praveen and Anju Pillai. Modeling and simulation of quadcopter using pid controller. *International Journal of Control Theory and Applications*, 9:7151–7158, 01 2016.
- [34] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press Inc., 3rd edition, 1999.
- [35] Adolf Hurwitz. Über die bedingungen, unter welchen eine gleichung nur wurzeln mit negativen reellen teilen besitzt. *Mathem. Ann.*, 46:273–284, 01 1970.
- [36] Gene F. Franklin, J. David Powell, and Michael L. Workman. *Digital Control of Dynamics Systems*. Addison Wesley Longman Inc., 3rd edition, 1997.
- [37] Richard M. Murray. **Optimization-Based Control**. Technical report, California Institute of Technology, 2009.
- [38] Hyeong-Pyo Hong, Suk-Joon Park, Sang-Joon Han, Kyeong-Young Cho, Young-Chul Lim, Jong-Kun Park, and Tae-Gon Kim. A design of auto-tuning pid controller using fuzzy logic. In *Proceedings of the 1992 International Conference on Industrial Electronics, Control, Instrumentation, and Automation*, pages 971–976 vol.2, 1992.
- [39] Deepak Gautam and Cheolkeun Ha. Control of a quadrotor using a smart self-tuning fuzzy pid controller. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 10:1, 11 2013.
- [40] Ehsan Abbasi, Mohammad Mahjoob, and Reza Y. Abdolmalaki. Controlling of quadrotor uav using a fuzzy system for tuning the pid gains in hovering mode. In *International Workshops in Electrical-Electronics Engineering, ACE-2013At: Koc University, Turkey*, 09 2013.
- [41] Fadri Furrer, Michael Burri, and Roland Achtelik, Markusand Siegwart. *RotorS: A Modular Gazebo MAV Simulator Framework*, volume 1, pages 595–625. Springer International Publishing, Cham, 2016.

- [42] Johannes Meyer, Alexander Sendobry, Stefan Kohlbrecher, Uwe Klingauf, and Oskar von Stryk. Comprehensive simulation of quadrotor uavs using ros and gazebo. In Itsuki Noda, Noriaki Ando, Davide Brugali, and James J. Kuffner, editors, ***Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots***, pages 400–411, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg.
- [43] N. Koenig and A. Howard. Design and use paradigms for gazebo, an open-source multi-robot simulator. In ***2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)***, volume 3, pages 2149–2154, 2004.
- [44] Yasmina Benmoussa, Anass Mansouri, and Ali Ahaitouf. Quadrotor flight simulator modeling. In Mostafa Ezziyani, editor, ***Advanced Intelligent Systems for Sustainable Development (AI2SD'2018)***, pages 665–674, Cham, 2019. Springer International Publishing.
- [45] B. Shang, C. Wu, Y. Zhang, and Y. Chen. Fractional order flight control of quadrotor uas: A simscape benchmark environment and a case study. In ***2018 IEEE CSAA Guidance, Navigation and Control Conference (CGNCC)***, pages 1–5, 2018.
- [46] José Baca, Nohelia Jimenez, Kyle Winfield, Simone Tay, Brianna Tijerina, Hans Baierlipp, Jonathan Cortez, and Hector Moreno. Design and simulation analysis of a modular aerial system. In Alexánder Martínez, Héctor A. Moreno, Isela G. Carrera, Alexandre Campos, and José Baca, editors, ***Advances in Automation and Robotics Research***, pages 112–118, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [47] Gabriel Hoffmann, Steven Waslander, and Claire Tomlin. Quadrotor helicopter trajectory tracking control. ***Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference***, 08 2008.
- [48] Francesco Sabatino. **Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation**. Dissertação de mestrado, KTH Royal Institute of Technology Department of Electrical Engineering, Stockholm, 2015.
- [49] Peter Corke. ***Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms In MATLAB***. Springer Publishing Company, Incorporated, 2nd edition, 2017.
- [50] Pengcheng Wang, Zhihong Man, Zhenwei Cao, Jinchuan Zheng, and Yong Zhao. Dynamics modelling and linear control of quadcopter. In ***2016 International Conference on Advanced Mechatronic Systems (ICAMechS)***, pages 498–503, 11 2016.

- [51] Bruno Siciliano and Oussama Khatib. **Springer Handbook of Robotics**. Springer, 2nd edition, 2017.
- [52] Antonio Barrientos, Pedro Gutierrez, and Julian Colorado. Advanced uav trajectory generation: Planning and guidance. In Thanh Mung Lam, editor, **Aerial Vehicles**, chapter 4. IntechOpen, Rijeka, 2009.
- [53] Daniel W. Mellinger. **Trajectory Generation and Control for Quadrotors**. Tese de doutorado, University of Pennsylvania, Pennsylvania, 2012.
- [54] Reza Jazar. **Advanced Vehicle Dynamics**. Springer, 01 2019.
- [55] Paulo Flores. **Euler Angles, Bryant Angles and Euler Parameters**, volume 168, chapter 4, pages 15–22. Springer, Cham, 03 2015.
- [56] Ding Li. Fuzzy pid controller to control the attitude of quadrotor uav. **Gyancity Journal of Engineering and Technology**, 6:1–11, 1 2020.
- [57] Anneleen Rutten, Jim Casaer, Marjolein F. A. Vogels, Elisabeth A. Addink, Jeroen Vanden Borre, and Herwig Leirs. Assessing agricultural damage by wild boar using drones. **Wildlife Society Bulletin**, 42(4):568–576, 2018.
- [58] John McDonald. Teaching quaternions is not complex. **Computer Graphics Forum**, 29(8):2447–2455, 2010.
- [59] Moti Ben-Ari. **A Tutorial on Euler Angles and Quaternions**, volume 1. Department of Science Teaching, Weizmann Institute of Science, 2017.
- [60] Maidul Islam, Mohamed Okasha, and Moumen Mohammad Idres. Trajectory tracking in quadrotor platform by using PD controller and LQR control approach. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, 260:012026, nov 2017.
- [61] Quan Quan, Xun-Hua Dai, and Shuai Wang. **Multicopter Design and Control Practice: A Series Experiments based on MATLAB and Pixhawk**. Springer Singapore, 1st edition, 2020.
- [62] Quan Quan. **Introduction to Multicopter Design and Control**. Springer Singapore, 1st edition, 2017.

## A

### Conceitos e Ferramentas

Neste capítulo são apresentados algumas dos conceitos físicos e ferramentas matemáticas mais importantes utilizados no desenvolvimento desse trabalho, tanto para modelagem quanto para projeto de controle do quadricóptero.

#### A.1

##### Matriz de rotação e Ângulos de Euler

Para modelagem de uma aeronave multirrotor é necessário, primeiramente, compreender o funcionamento básico de algumas transformações e ferramentas de cálculo e álgebra linear. Neste intuito, será aqui apresentada a primeira ferramenta importante utilizada no processo de modelagem de um quadricóptero. A Figura A.1 representa uma mudança na orientação de um dado referencial de um estado A para B, ou simplesmente a mudança de um grupo eixos cartesianos ortogonais e mutuamente exclusivos.

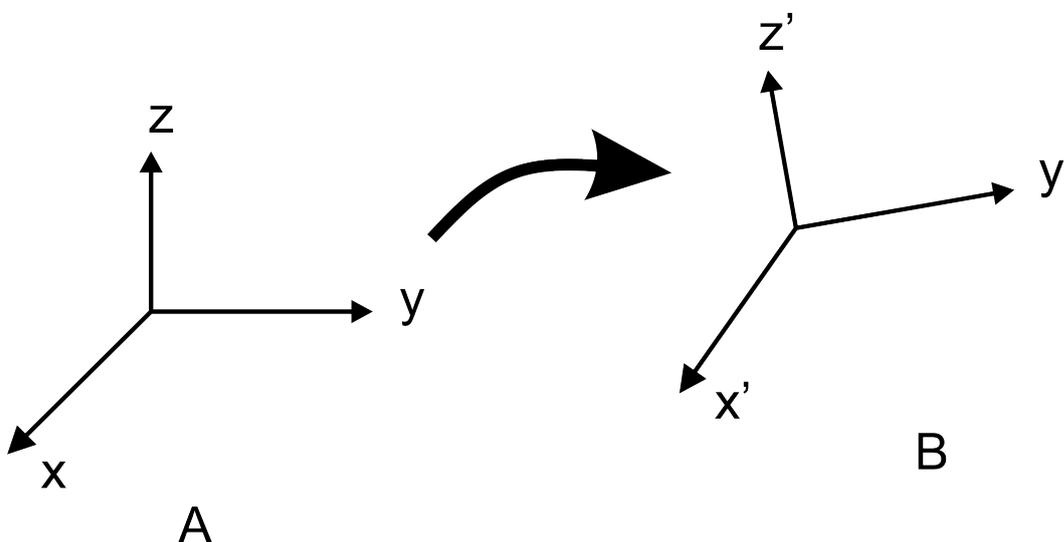


Figura A.1: Representação da transformação do referencial **A** para o referencial **B**.

Note que, observando-se os estados **A** e **B** do referencial verifica-se que eles estão rotacionados, um em relação ao outro. Dessa forma, seria

interessante e intuitivo que os vetores canônicos desses eixos, ou referencias, fossem expressos de uma forma simples como uma combinação linear entre eles. Consequentemente, poder-se-ia escrever os vetores canônicos de  $\mathbf{B}$  em função dos vetores primitivos de  $\mathbf{A}$  da seguinte forma

$$b_1 = r_{11}a_1 + r_{12}a_2 + r_{13}a_3; \quad (\text{A-1})$$

$$b_2 = r_{21}a_1 + r_{22}a_2 + r_{23}a_3; \quad (\text{A-2})$$

$$b_3 = r_{31}a_1 + r_{32}a_2 + r_{33}a_3. \quad (\text{A-3})$$

onde  $b_i$  são as componentes x, y e z no referencial  $\mathbf{B}$ ,  $a_i$  são as componentes x,y e z no referencial  $\mathbf{A}$  e  $r_{ij}$  são as componentes da combinação linear entre as componentes de  $a_i$ ;

Analisando a equações (A-1),(A-2) e (A-3) percebe-se que é possível escrevê-las sob a forma matricial, conforme expresso por

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}; \quad (\text{A-4})$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{R} \times \mathbf{a}; \quad (\text{A-5})$$

Em aplicações envolvendo o controle de quadricópteros é comum que se tenha que trabalhar com dois sistemas de coordenadas principais, denominados **referencial global** e **referencial local**.

Geralmente, as coordenadas de localização do drone são dadas por um sistema *G.P.S.* (*Global Positioning System*), que utiliza o **referencial global**, devido a ser muito mais intuitivo localizar e controlar um quadricóptero usando pontos espaciais no mesmo referencial do operador. Dessa forma, os sinais de controle para o quadricóptero que dependam de alguma coordenada espacial necessitam de uma conversão entre estes referenciais, considerando por exemplo que o controle da aeronave seja baseado no referencial local e que o sistema receba informações baseadas no referencial global.

Tendo em vista as discussões aqui introduzidas, para facilitar e padronizar a notação utilizada ao longo desse trabalho, adota-se uma convenção bastante comum na área de desenvolvimento de quadricópteros, a letra  $\mathbf{W}$  sempre será usada para referenciar o referencial global (aquele que não se move com o quadricóptero) enquanto que a letra  $\mathbf{D}$  será empregada para o referencial local (aquele que está atrelado ao quadricóptero), como pode ser visualizado na Figura A.2 .

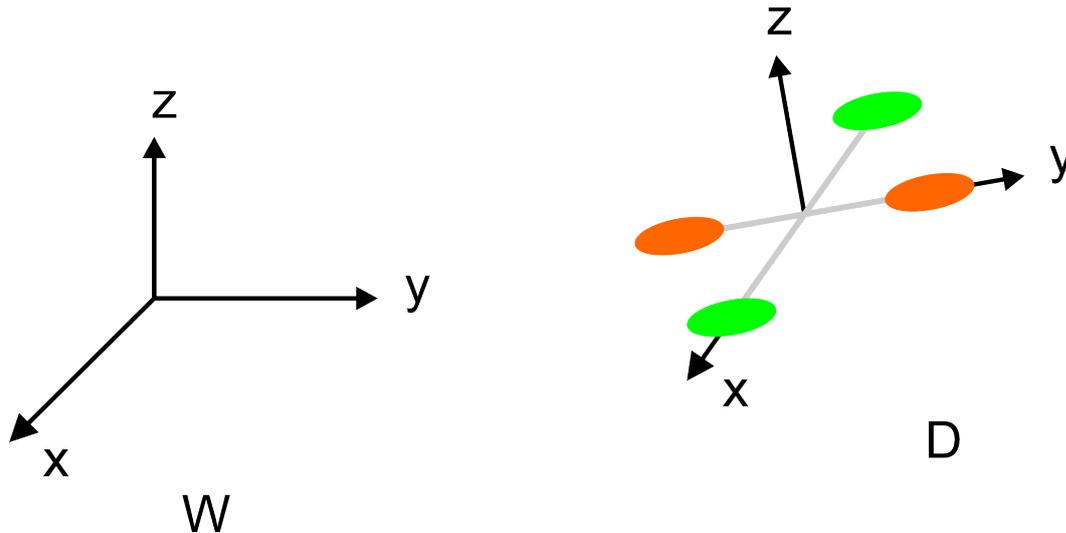


Figura A.2: Representação dos referenciais adotados ao longo deste trabalho. O referencial à esquerda,  $\mathbf{W}$ , é o global e à direita,  $\mathbf{D}$ , o local.

Conseqüentemente, evidencia-se a relevância da construção de uma matriz que seja capaz de converter pontos espaciais de um referencial para o outro, sendo essencial para a modelagem e controle. Assim como foi intuitivo visualizar essa matriz, também é extremamente simples encontrar os elementos de  $\mathbf{R}$ , expressos em (A-4) e (A-5).

Existem diversas maneiras para se obter a matriz de rotação  $\mathbf{R}$ , todas, se feitas da maneira correta, levam ao mesmo resultado. Entretanto, antes de apresentar os cálculos para obtenção dos elementos da matriz de rotação, é importante apresentar o conceito de ângulos de Euler [55] que é bastante usado em robótica e aeronáutica para obtenção dessas matrizes. Leonard Euler [54] mostrou, utilizando a orientação de corpos rígidos, que é possível transicionar de um referencial para o outro aplicando três rotações consecutivas.

De maneira mais simples, utiliza-se um referencial fixo e outro que irá rotacionar. Nesse segundo, aplicam-se três rotações em relação a alguns dos eixos, de modo a se chegar no novo referencial almejado. Denominam-se ângulos de Euler a sequência de ângulos utilizados para rotacionar os eixos a fim de se atingir o objetivo. Dessa forma, a matriz de rotação  $\mathbf{R}$ , vista nas equações (A-4) e (A-5), pode ser construída como

$${}^{\mathbf{W}}R_{\mathbf{D}} = {}^{\mathbf{W}}R_{\mathbf{A}} \times {}^{\mathbf{A}}R_{\mathbf{B}} \times {}^{\mathbf{B}}R_{\mathbf{D}}; \quad (\text{A-6})$$

onde o índice sobrescrito  $\mathbf{W}$  representa o referencial de origem e o índice subscrito  $\mathbf{R}$  o de destino.  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são referenciais intermediários criados com o intuito de facilitar a construção da matriz de rotação  ${}^{\mathbf{W}}R_{\mathbf{D}}$ .

O grande benefício dessa ferramenta é permitir que uma transformação mais complexa possa ser destrinchada e construída a partir de três transformações mais simples e independentes, facilitando consideravelmente o trabalho de modelagem.

Dessa forma, pode-se propor algumas sequências de rotação, em alguns eixos, que transformem os eixos do referencial global para o referencial local do quadricóptero e, conseqüentemente, os respectivos pontos no espaço. Uma possível solução consiste em primeiramente fazer uma rotação em torno do eixo  $z$ , depois em torno do eixo  $x$  e por último em torno do eixo  $y$ . Essa sequência consegue transformar pontos no referencial  $\mathbf{W}$  para pontos no referencial  $\mathbf{D}$ . Assim, pode-se construir  ${}^{\mathbf{W}}R_{\mathbf{D}}$  da seguinte forma

$${}^{\mathbf{W}}R_{\mathbf{D}} = Rot(z, \psi) \times Rot(x, \phi) \times Rot(y, \theta); \quad (\text{A-7})$$

onde o operador  $Rot(a, \alpha)$  significa uma rotação  $\alpha$  em graus ou radianos, em torno do eixo  $a$ . Existe ainda uma notação mais compacta, comumente utilizada para representar essas rotações

$${}^{\mathbf{W}}R_{\mathbf{D}} = R_z(\psi) \times R_x(\phi) \times R_y(\theta); \quad (\text{A-8})$$

onde  $R_a(\alpha)$  representa uma rotação de  $\alpha$  graus no eixo  $a$ .

A Figura A.3 mostra duas das convenções de sistemas de coordenadas mais comumente empregadas por engenheiros de controle, desenvolvedores e projetistas de sistemas para quadricópteros. Observe ainda que também se apresenta na imagem à esquerda o sistema de coordenadas da aeronave (referencial local), que será utilizado ao longo desta dissertação.

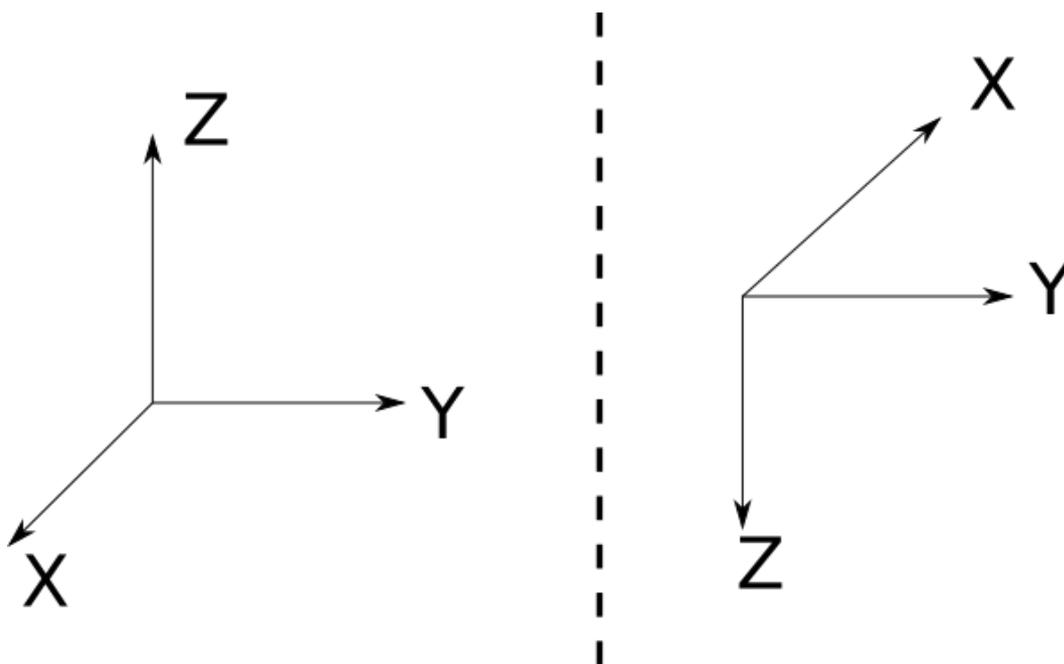


Figura A.3: Dois dos referenciais mais utilizados por grande parte dos trabalhos em aeronáutica. A esquerda está a convenção adotada ao longo do presente trabalho.

Dessa forma, conforme explicitado na Figura 1.4,  $\text{Rot}(z,\psi)$  representa o movimento de *yaw*,  $\text{Rot}(x,\phi)$  representa o *roll* e  $\text{Rot}(y,\theta)$  representa o *pitch*, sendo estes os movimentos comumente executados por uma aeronave.

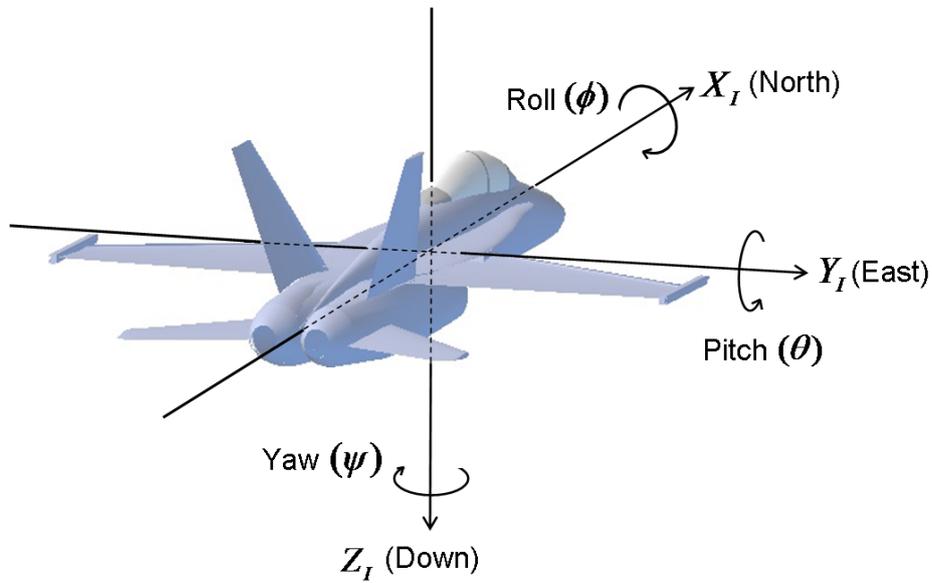


Figura A.4: Representação dos movimentos de *Roll*, *Pitch* e *Yaw*.

Dessa forma, sabendo que as rotações que serão utilizadas,  $\text{Rot}(x,\phi)$ ,  $\text{Rot}(y,\theta)$  e  $\text{Rot}(z,\psi)$ , são independentes, percebe-se que a matriz  ${}^W R_D$  pode ser obtida fazendo cada uma delas separadamente. Neste intuito, apresentam-se tais rotações no sentido anti-horário por meio das Figuras A.5, A.6 e A.7.

Em particular,  $\text{Rot}(x,\phi)$ , que representa o movimento de *roll*, indicado na Figura A.5, pode ser matematicamente descrita como

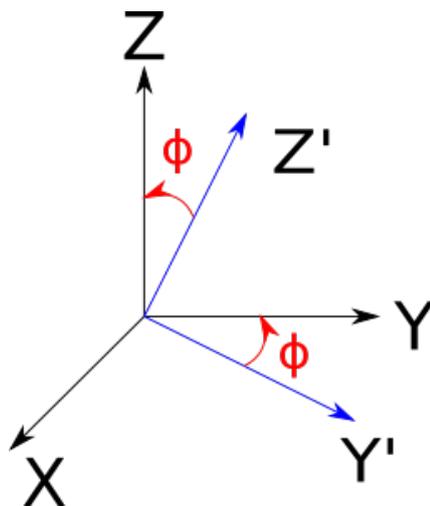


Figura A.5: Representação do eixo original com um rotação de  $\phi$  graus.

$$\mathbf{x}' = 1\mathbf{x} + 0\mathbf{y} + 0\mathbf{z}; \quad (\text{A-9})$$

$$\mathbf{y}' = 0\mathbf{x} + c(\phi)\mathbf{y} - s(\phi)\mathbf{z}; \quad (\text{A-10})$$

$$\mathbf{z}' = 0\mathbf{x} + s(\phi)\mathbf{y} + c(\phi)\mathbf{z}. \quad (\text{A-11})$$

onde  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y}'$  e  $\mathbf{z}'$  são os vetores canônicos do eixo rotacionado,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  são os vetores antes da rotação e  $s(\alpha)$  e  $c(\alpha)$  são o seno e cosseno do ângulo  $\alpha$ .

Em seguida, as equações (A-9), (A-10) e (A-11) são reescritas em sua forma matricial que, além de mais compacta, facilita a visualização da matriz de rotação  $\text{Rot}(x, \phi)$ . Observe que as equações (A-9), (A-10) e (A-11) são uma particularização das equações (A-1), (A-2) e (A-3), descritas no início dessa seção. Matricialmente o sistema de equações composto por (A-9), (A-10) e (A-11) é descrito por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & s(\phi) & c(\phi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{A-12})$$

onde  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  são os novos eixos rotacionados de  $\phi$  graus em relação ao eixo  $x$ .

Conseqüentemente, verifica-se que a matriz de rotação  $\text{Rot}(x, \phi)$  é dada por

$$\text{Rot}(x, \psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & s(\phi) & c(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{A-13})$$

Aplicando-se um procedimento análogo ao anteriormente descrito para obtenção de  $\text{Rot}(x, \phi)$  também pode-se encontrar  $\text{Rot}(y, \theta)$ , que representa o movimento de *pitch*, conforme indicado na Figura A.6.

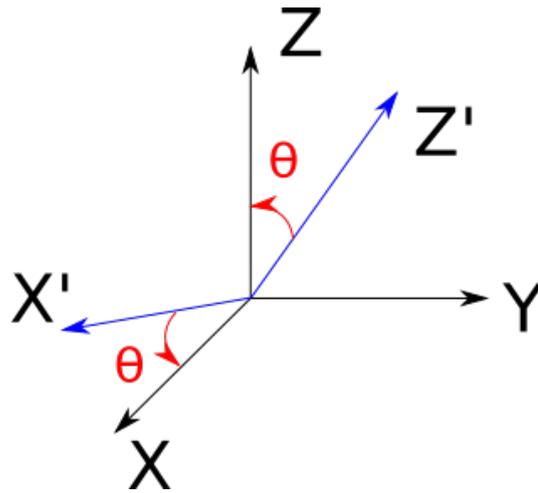


Figura A.6: Representação de uma rotação de  $\theta$  graus em torno do eixo  $y$  original.

Com base na Figura A.6, verifica-se que

$$\mathbf{x}' = c(\theta)\mathbf{x} + 0\mathbf{y} - s(\theta)\mathbf{z}; \quad (\text{A-14})$$

$$\mathbf{y}' = 0\mathbf{x} + 1\mathbf{y} + 0\mathbf{z}; \quad (\text{A-15})$$

$$\mathbf{z}' = -s(\theta)\mathbf{x} + 0\mathbf{y} + c(\theta)\mathbf{z}. \quad (\text{A-16})$$

onde  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y}'$  e  $\mathbf{z}'$  são os vetores canônicos do eixo rotacionado,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  são os vetores antes da rotação e  $s(\alpha)$  e  $c(\alpha)$  são o seno e cosseno do ângulo  $\alpha$ .

Matricialmente o sistema de equações composto por (A-14), (A-15) e (A-16) é descrito por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{A-17})$$

onde  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  são os novos eixos rotacionados de  $\theta$  graus em relação ao eixo  $y$ .

Consequentemente, verifica-se que a matriz de rotação  $\text{Rot}(z,\psi)$  é dada por

$$\text{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{A-18})$$

Por sua vez, com uma sequência de passos análoga também pode-se encontrar  $\text{Rot}(z,\psi)$ , que representa o movimento de  $yaw$ , conforme indicado na Figura A.7.

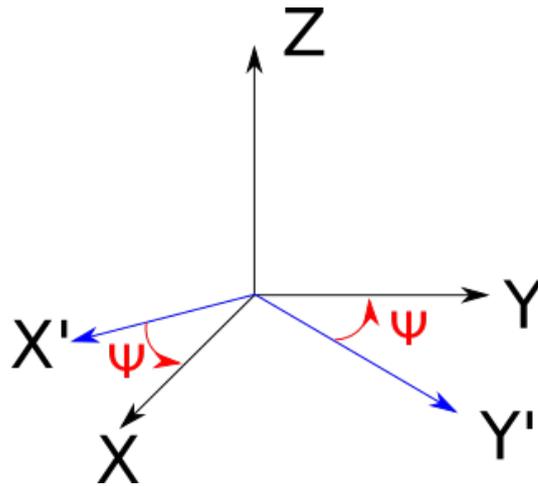


Figura A.7: Representação de uma rotação de  $\psi$  graus em torno do eixo z original.

Com base na Figura A.7, verifica-se que

$$\mathbf{x}' = c(\psi)\mathbf{x} - s(\psi)\mathbf{y} + 0\mathbf{z}; \quad (\text{A-19})$$

$$\mathbf{y}' = s(\psi)\mathbf{x} + c(\psi)\mathbf{y} + 0\mathbf{z}; \quad (\text{A-20})$$

$$\mathbf{z}' = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{y} + 1\mathbf{z}. \quad (\text{A-21})$$

Matricialmente o sistema de equações composto por (A-19), (A-20) e (A-21) é descrito por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\psi) & -s(\psi) & 0 \\ s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{A-22})$$

onde  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  são os novos eixos rotacionados de  $\psi$  graus em relação ao eixo z.

Consequentemente, verifica-se que a matriz de rotação  $\text{Rot}(z, \psi)$  é dada por

$$\text{Rot}(z, \psi) = \begin{bmatrix} c(\psi) & -s(\psi) & 0 \\ s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-23})$$

Com o procedimento aqui descrito, consegue-se obter as três matrizes necessárias para compor a transformação de  $\mathbf{W}$  para os eixos de  $\mathbf{D}$ . Assim, pode-se construir a matriz de rotação  ${}^{\mathbf{W}}R_{\mathbf{D}}$ , substituindo as equações (A-13), (A-18) e (A-23) em (A-7), resultando em

$${}^W R_D = \begin{bmatrix} c(\psi) & -s(\psi) & 0 \\ s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & s(\phi) & c(\phi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{A-24})$$

Por sua vez, efetuando o produto matricial, pode-se reescrever a equação (A-24) como

$${}^W R_D = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) + s(\phi)s(\psi)s(\theta) & c(\phi)s(\psi) & c(\theta)s(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\theta) \\ c(\psi)s(\phi)s(\theta) - c(\theta)s(\psi) & c(\phi)c(\psi) & s(\psi)s(\theta) + c(\psi)c(\theta)s(\phi) \\ c(\phi)s(\theta) & -s(\phi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{A-25})$$

A equação (A-25) apresenta a forma final da matriz de rotação, uma das ferramentas mais usadas e mais importantes tanto para a modelagem quanto para o controle de quadricópteros. Conforme previamente explicitado pelas equações (A-12), (A-17) e (A-22), para transformar um ponto no referencial global ( $\mathbf{W}$ ) para o local ( $\mathbf{D}$ ) basta multiplicar este ponto pela matriz de rotação. Conseqüentemente, de forma geral, tem-se que

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) + s(\phi)s(\psi)s(\theta) & c(\phi)s(\psi) & c(\theta)s(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\theta) \\ c(\psi)s(\phi)s(\theta) - c(\theta)s(\psi) & c(\phi)c(\psi) & s(\psi)s(\theta) + c(\psi)c(\theta)s(\phi) \\ c(\phi)s(\theta) & -s(\phi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \end{bmatrix} \quad (\text{A-26})$$

No entanto, ressalta-se que o teorema dos ângulos de Euler não funciona sempre para todos os casos, apresentando certas limitações. A escolha da ordem específica das rotações é feita para evitar problemas no mapeamento da matriz de rotação. Em particular, o teorema dos ângulos de Euler permite obter a matriz de rotação de  $\mathbf{W}$  para  $\mathbf{D}$ , e conseqüentemente seria interessante que fosse possível passar de  $\mathbf{D}$  para  $\mathbf{W}$  usando a inversa dessa matriz de rotação. Este processo possibilitaria por exemplo determinar o ângulo de inclinação da aeronave em um dado ponto do espaço no referencial global, a partir do conhecimento desse ponto no referencial do quadricóptero (referencial local), algo muito útil para o acompanhamento e controle de trajetórias. Essa ideia é válida para quase todos os pontos do espaço e para quase todos os ângulos de rotação. Entretanto, como pode ser observado na equação (A-25), a matriz de rotação do referencial global ( $\mathbf{W}$ ) para o local ( $\mathbf{D}$ ) possui senos e cossenos, o que pode retornar múltiplas soluções ao se calcular o problema inverso, dificultando o caso de se precisar o ângulo de inclinação da aeronave. Para ilustrar esse problema, apresenta-se a matriz de rotação  $R_{zyz}$ , obtida por uma rotação em torno do eixo  $z$ , seguida de uma rotação em torno do eixo  $y$  e depois em torno do eixo  $z$  novamente, correspondendo aos ângulos  $ZYZ$  de Euler, a

qual é dada por

$$R_{zyz} = \begin{bmatrix} c(\phi)c(\theta)c(\psi) - s(\phi)s(\psi) & -c(\phi)c(\theta)s(\psi) - s(\phi)c(\psi) & c(\phi)s(\theta) \\ s(\phi)c(\theta)c(\psi) + c(\phi)s(\psi) & -s(\phi)c(\theta)s(\psi) + c(\phi)c(\psi) & s(\phi)s(\theta) \\ -s(\theta)c(\psi) & s(\theta)s(\psi) & c(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{A-27})$$

Observando o termo  $c(\theta)$  pode-se assumir algumas condições, nas quais há a possibilidade de algum dos problemas expostos anteriormente surgirem. Além disso, observando os termos  $s(\theta)s(\psi)$ ,  $-s(\theta)c(\psi)$ ,  $s(\phi)s(\theta)$  e  $c(\phi)s(\theta)$  pode-se afirmar que se  $\theta$  for definido, ou seja, tenha seu valor conhecido, pode-se obter tanto  $\phi$  quanto  $\psi$ . A seguir observa-se as condições previamente citadas

$$c(\theta) = 1; \quad (\text{A-28})$$

$$c(\theta) = -1; \quad (\text{A-29})$$

$$\|c(\theta)\| < 1; \quad (\text{A-30})$$

Na primeira equação, (A-28), para  $\theta = 0$  os termos citados anteriormente serão nulos e a matriz de rotação será função dos ângulos  $\phi$  e  $\psi$ , não sendo possível determinar de forma única os valores desses ângulos.

$$R_{zyz} = \begin{bmatrix} c(\phi)c(\psi) - s(\phi)s(\psi) & -c(\phi)s(\psi) - s(\phi)c(\psi) & 0 \\ s(\phi)c(\psi) + c(\phi)s(\psi) & -s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-31})$$

A segunda equação, (A-29), é similar à primeira, para  $\theta = \Pi$  os termos citados anteriormente também serão nulos, apresentando a inversão de sinal em alguns termos.

$$R_{zyz} = \begin{bmatrix} -c(\phi)c(\psi) - s(\phi)s(\psi) & c(\phi)s(\psi) - s(\phi)c(\psi) & 0 \\ -s(\phi)c(\psi) + c(\phi)s(\psi) & s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-32})$$

Na terceira equação, (A-30), é possível calcular  $\theta = \arccos(\cos(\theta))$ . No entanto, só se pode garantir o módulo de  $\theta$ . Dessa forma, pode-se definir  $\psi$  e  $\phi$ , contudo tem-se duas equações, dois conjuntos de ângulos, que levarão para a mesma resposta. Dessa maneira, fazer a relação inversa entre esses pontos não é possível, pois a função não será bi-unívoca.

A fim de solucionar este problema, cujo mapeamento de maneira biunívoca dos pontos não é possível, poder-se-ia usar outras matrizes de rotação, para tratar especificamente o caso explicitado, aumentando a complexidade

do problema de modelagem. Assim, é possível notar que, apesar de ser um ferramenta simples e poderosa, o teorema dos ângulos de Euler não é eficaz em todos os casos, devendo ser aplicado com cuidado para que consiga se adequar a situação que se deseja trabalhar, evitando os problemas citados anteriormente.

Essa é uma excelente ferramenta, principalmente para a modelagem de quadricópteros, como visto na seção 2.3.2. No entanto, essa ferramenta apresenta limitações, como discutido acima. Em particular, a ocorrência desses pontos que geram erros nas transformações são extremamente difíceis de lidar, principalmente na modelagem da dinâmica do quadricóptero. Situações como essas podem ser evitadas limitando as rotações do veículo através do seu controle. Existem também algumas formas de contornar esse problema matematicamente, como por exemplo o uso de quatérnios [58, 59], que entretanto não serão tratados aqui, uma vez que não foram empregados no modelo adotado.

## A.2

### Correção de aceleração para referenciais não inerciais

Apresenta-se nesta seção um outro aspecto de fundamental importância, proveniente exatamente do fato de se trabalhar em um conjunto de eixos móveis, uma vez que as gradezas associadas ao movimento do quadricóptero serão representadas em um referencial móvel no espaço. Dessa forma, esta seção trata do termo de correção que deve ser incorporado às equações de movimento quando esse tipo de modelagem é adotada.

Visando introduzir a conceituação deste efeito, inicialmente analisa-se um caso mais simples, em apenas duas dimensões, e em seguida apresenta-se um caso mais complexo em três dimensões, que é o caso da modelagem do comportamento de um quadricóptero. Por sua vez, no final dessa seção define-se as equações de Newton-Euler, utilizadas para modelagem do quadricóptero na seção 2.1, levando em consideração as correções que serão aqui discutidas.

A Figura A.8 mostra o deslocamento de um corpo no espaço bidimensional. Além do deslocamento do corpo, nota-se também a variação da grandeza  $V$ , que representa a velocidade do corpo.

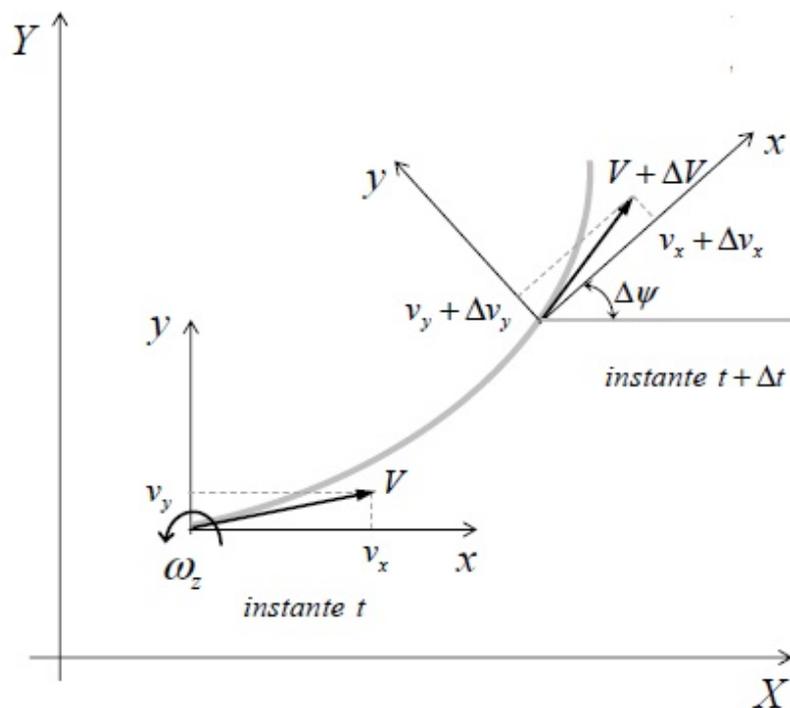


Figura A.8: Deslocamento de um corpo no espaço bidimensional.

Na Figura A.8, a grandeza  $V$  representa a velocidade do corpo por meio de um vetor expresso no referencial local (móvel). Por sua vez, nota-se que no instante  $t + \Delta t$  a velocidade tem um incremento  $\Delta V$ , resultando em uma velocidade total  $V + \Delta V$ , que pode ser decomposta em duas componentes: uma em  $x$ , denotada por  $v_x + \Delta v_x$ , e outra em  $y$ , denotada por  $v_y + \Delta v_y$ , ambas no referencial local.

Dessa forma, observando a representação detalhada apresentada na Figura A.9, pode-se escrever as variações da velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, por meio dos seguintes vetores de diferença

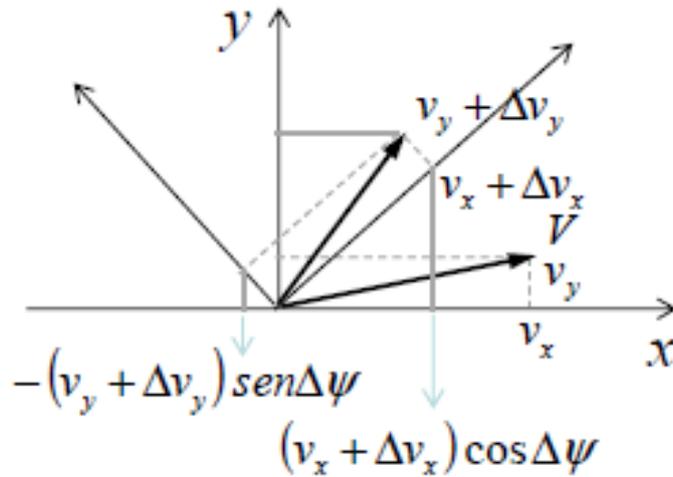


Figura A.9: Decomposição dos vetores de deslocamento de um corpo no espaço bidimensional.

$$dv_x = (v_x + \Delta v_x) \cos(\Delta\psi) - v_x - (v_y + \Delta v_y) \sin(\Delta\psi) \quad (\text{A-33})$$

$$dv_y = (v_x + \Delta v_x) \sin(\Delta\psi) - v_y + (v_y + \Delta v_y) \cos(\Delta\psi) \quad (\text{A-34})$$

Admitindo que a inclinação dos eixos  $\Delta\psi$  seja infinitesimal, tem-se que

$$\Delta\psi \rightarrow 0 \implies \begin{cases} \sin(\Delta\psi) \rightarrow \Delta\psi \\ \cos(\Delta\psi) \rightarrow 1 \end{cases} \quad (\text{A-35})$$

Ressalta-se que para pequenos deslocamentos angulares  $\Delta\psi$ , a equação (A-35) continua sendo uma boa aproximação, de modo que, nestas situações, as equações (A-33) e (A-34) podem ser reescritas como

$$dv_x \approx (v_x + \Delta v_x) - v_x - (v_y + \Delta v_y) \Delta\psi \quad (\text{A-36})$$

$$dv_y \approx (v_x + \Delta v_x) \Delta\psi - v_y + (v_y + \Delta v_y) \quad (\text{A-37})$$

Por sua vez, desenvolvendo as equações (A-36) e (A-37), obtêm-se

$$dv_x \approx v_x + \Delta v_x - v_x - v_y \Delta \psi - \Delta v_y \Delta \psi \quad (\text{A-38})$$

$$dv_y \approx v_x \Delta \psi + \Delta v_x \Delta \psi - v_y + v_y + \Delta v_y \quad (\text{A-39})$$

e conseqüentemente

$$dv_x \approx \Delta v_x - v_y \Delta \psi - \Delta v_y \Delta \psi \quad (\text{A-40})$$

$$dv_y \approx v_x \Delta \psi + \Delta v_x \Delta \psi + \Delta v_y \quad (\text{A-41})$$

Observe que as componentes associadas a variação da velocidade,  $\Delta v_x$  e  $\Delta v_y$ , são também consideradas muito pequenas. Dessa forma, os termos relacionados ao produto  $\Delta v_y \Delta \psi$  e  $\Delta v_x \Delta \psi$  tendem a ser muito menores do que os demais, possibilitando simplificar as equações (A-40) e (A-41), de modo a se definir  $dv_x$  e  $dv_y$  como

$$dv_x = \Delta v_x - v_y \Delta \psi \quad (\text{A-42})$$

$$dv_y = v_x \Delta \psi + \Delta v_y \quad (\text{A-43})$$

Com as variações das componentes da velocidade definidas, pode-se tentar obter como estas se comportam em função do tempo. Dessa forma, com base nas equações (A-42) e (A-43), pode-se escrever

$$\frac{dv_x}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} - v_y \frac{\Delta \psi}{\Delta t} \quad (\text{A-44})$$

$$\frac{dv_y}{\Delta t} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} + v_x \frac{\Delta \psi}{\Delta t} \quad (\text{A-45})$$

Conseqüentemente, considerando-se  $\Delta t \rightarrow 0$ , tem-se que

$$a_x = \dot{v}_x - v_y \omega_z \quad (\text{A-46})$$

$$a_y = \dot{v}_y + v_x \omega_z \quad (\text{A-47})$$

onde  $a_i$  é a aceleração na direção  $i$ ,  $\dot{v}_i$  é a taxa de variação da velocidade na direção  $i$  e  $\omega_i$  é a taxa de variação do ângulo de rotação, projetada na direção  $i$ .

Dessa forma, evidencia-se que a aceleração não é apenas dada pela variação da velocidade, visto que nas definições de  $a_x$  e  $a_y$  existe também um

termo proveniente da rotação do referencial. Assim, esse termo de correção deve ser levado em consideração para uma estimativa adequada da aceleração. Neste intuito, na sequência será apresentada uma análise algébrica mais detalhada, visto que tais correções serão aplicadas a desenvolvimentos realizados em seções posteriores.

Os vetores de velocidade e aceleração, anteriormente apresentados nesta seção, podem ser definidos de maneira alternativa em termos dos vetores nas direções unitárias, conforme descrito por

$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y \quad (\text{A-48})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x \vec{u}_x + v_x \dot{\vec{u}}_x + \dot{v}_y \vec{u}_y + v_y \dot{\vec{u}}_y \quad (\text{A-49})$$

Por sua vez, observando a Figura A.10 pode-se definir tanto as variações de  $\vec{u}_x$  quanto de  $\vec{u}_y$ , representadas respectivamente por  $\Delta\vec{u}_x$  e  $\Delta\vec{u}_y$ , utilizando as mesmas considerações de  $\Delta\psi$  muito pequeno adotadas nos desenvolvimentos anteriores.

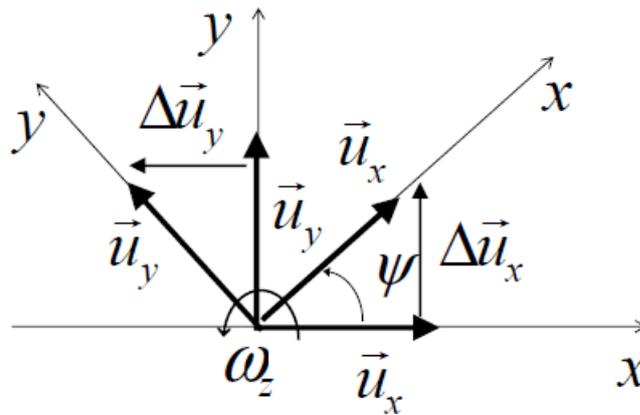


Figura A.10: Decomposição dos vetores unitários para um referencial móvel.

Assim, tem-se que

$$\Delta\vec{u}_x = \Delta\psi \vec{u}_y \quad (\text{A-50})$$

$$\Delta\vec{u}_y = -\Delta\psi \vec{u}_x \quad (\text{A-51})$$

Em seguida, pode-se também descrever como  $\Delta\vec{u}_x$  e  $\Delta\vec{u}_y$  variam em função do tempo, conforme dado por

$$\frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{\Delta \psi \vec{u}_y}{\Delta t} \quad (\text{A-52})$$

$$\frac{\Delta \vec{u}_y}{\Delta t} = -\frac{\Delta \psi \vec{u}_x}{\Delta t} \quad (\text{A-53})$$

Por sua vez, considerando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtêm-se

$$\dot{\vec{u}}_x = \omega_z \vec{u}_y \quad (\text{A-54})$$

$$\dot{\vec{u}}_y = -\omega_z \vec{u}_x \quad (\text{A-55})$$

As equações (A-54) e (A-55) podem ser substituídas na equação (A-49) de modo a se obter

$$\vec{a} = \dot{v}_x \vec{u}_x + v_x \omega_z \vec{u}_y + \dot{v}_y \vec{u}_y - v_y \omega_z \vec{u}_x \quad (\text{A-56})$$

Reagrupando os termos da equação (A-56) pode-se escrever

$$a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y = (\dot{v}_x - v_y \omega_z) \vec{u}_x + (\dot{v}_y + v_x \omega_z) \vec{u}_y \quad (\text{A-57})$$

Assim, de forma equivalente as equações (A-46) e (A-47), conforme esperado, verifica-se que as componentes do vetor aceleração são efetivamente dadas por

$$a_x = \dot{v}_x - v_y \omega_z \quad (\text{A-58})$$

$$a_y = \dot{v}_y + v_x \omega_z \quad (\text{A-59})$$

Visando simplificar o equacionamento dos desenvolvimentos tanto em modelagem quanto em controle que serão apresentados em seções posteriores, é interessante descrever matricialmente tanto as definições dos vetores  $u \vec{u}_x$  e  $\dot{\vec{u}}_x$ , apresentadas nas equações (A-54) e (A-55), quanto as das acelerações, explicitadas nas equações (A-46) e (A-47). Dessa forma, buscou-se construir a matriz a partir dos vetores unitários. Definindo como  $\vec{\omega}$  o vetor das taxas de variação dos ângulos, projetadas nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , pode-se começar a construir a matriz usando o vetor  $\vec{u}_x$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A-60})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_x = 0\hat{i} + 0\hat{k} + \omega_z\hat{j} - 0\hat{k} - 0\hat{i} - 0\hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_z \\ 0 \end{bmatrix} = \omega_z\vec{u}_y \quad (\text{A-61})$$

$$\dot{\vec{u}}_x = \vec{\omega} \times \vec{u}_x \quad (\text{A-62})$$

De forma análoga, na sequência, dá-se procedimento a obtenção da matriz usando  $\vec{u}_y$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A-63})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_y = 0\hat{i} + 0\hat{k} + 0\hat{j} - 0\hat{k} - \omega_z\hat{i} - 0\hat{j} = \begin{bmatrix} -\omega_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\omega_z\vec{u}_y \quad (\text{A-64})$$

$$\dot{\vec{u}}_y = \vec{\omega} \times \vec{u}_y \quad (\text{A-65})$$

Dessa forma, verifica-se que o passo-a-passo acima explicitado possibilita a obtenção da representação matricial do problema para duas dimensões, considerando os termos de correção. No entanto, os estudos desta dissertação são feitos em três dimensões. Consequentemente, deve-se encontrar os termos de correção para esse caso. Neste intuito, visando generalizar a análise feita anteriormente, são definidos os vetores de velocidade e aceleração no espaço tridimensional.

$$\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z \quad (\text{A-66})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x\vec{u}_x + v_x\dot{\vec{u}}_x + \dot{v}_y\vec{u}_y + v_y\dot{\vec{u}}_y + \dot{v}_z\vec{u}_z + v_z\dot{\vec{u}}_z \quad (\text{A-67})$$

Por sua vez, o vetor  $\dot{\vec{u}}_x$  é dado por

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_x = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A-68})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_x = 0\hat{i} + 0\hat{k} + \omega_z\hat{j} - \omega_y\hat{k} - 0\hat{i} - 0\hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_z \\ -\omega_y \end{bmatrix} \quad (\text{A-69})$$

$$\dot{\vec{u}}_x = \vec{\omega} \times \vec{u}_x = \omega_z\vec{u}_y - \omega_y\vec{u}_z \quad (\text{A-70})$$

Em seguida, defini-se o vetor  $\dot{\vec{u}}_y$  como

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_y = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A-71})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_y = 0\hat{i} + \omega_x\hat{k} + \hat{j} - 0\hat{k} - \omega_z\hat{i} - 0\hat{j} = \begin{bmatrix} -\omega_z \\ 0 \\ \omega_x \end{bmatrix} \quad (\text{A-72})$$

$$\dot{\vec{u}}_y = \vec{\omega} \times \vec{u}_y = -\omega_z\vec{u}_x + \omega_x\vec{u}_z \quad (\text{A-73})$$

Por fim, o vetor  $\dot{\vec{u}}_z$  é dado por

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_z = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A-74})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_z = \omega_y\hat{i} + 0\hat{k} + 0\hat{j} - 0\hat{k} - 0\hat{i} - \omega_x\hat{j} = \begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-75})$$

$$\dot{\vec{u}}_z = \vec{\omega} \times \vec{u}_z = \omega_y\vec{u}_x - \omega_x\vec{u}_y \quad (\text{A-76})$$

Com base nos resultados explicitados pode-se efetivamente construir a matriz

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_x = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_z \\ -\omega_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-77})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_y = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_z \\ 0 \\ \omega_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-78})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_z = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y \\ -\omega_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-79})$$

Ademais, substituindo as equações (A-70), (A-73) e (A-76) na equação (A-67), obtém-se

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{v}_x \vec{u}_x + v_x(\omega_z \vec{u}_y - \omega_y \vec{u}_z) + \dot{v}_y \vec{u}_y + v_y(-\omega_z \vec{u}_x + \omega_x \vec{u}_z) + \dot{v}_z \vec{u}_z \\ + v_z(\omega_y \vec{u}_x - \omega_x \vec{u}_y) \end{aligned} \quad (\text{A-80})$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = (\dot{v}_x + v_z \omega_y - v_y \omega_z) \vec{u}_x + (\dot{v}_y + v_x \omega_z - v_z \omega_x) \vec{u}_y \\ + (\dot{v}_z + v_y \omega_x - v_x \omega_y) \vec{u}_z \end{aligned} \quad (\text{A-81})$$

Dessa forma, pode-se escrever as equações que representam as componentes da aceleração como

$$a_x = \dot{v}_x + v_z \omega_y - v_y \omega_z \quad (\text{A-82})$$

$$a_y = \dot{v}_y + v_x \omega_z - v_z \omega_x \quad (\text{A-83})$$

$$a_z = \dot{v}_z + v_y \omega_x - v_x \omega_y \quad (\text{A-84})$$

Por sua vez, estas equações podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_z\omega_y - v_y\omega_z \\ v_x\omega_z - v_z\omega_x \\ v_y\omega_x - v_x\omega_y \end{bmatrix} \quad (\text{A-85})$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (\text{A-86})$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (\text{A-87})$$

Ressalta-se que o desenvolvimento apresentado nessa seção para a grandeza aceleração, em três dimensões, também é válido para outras grandezas. Consequentemente, com base nos desenvolvimentos anteriormente explicitados, pode-se definir as equações de Newton-Euler, levando em consideração as correções para referenciais móveis, visto que as mesmas serão essenciais para desenvolvimentos apresentados em seções posteriores.

### A.2.1

#### Correção da derivada vetor quantidade de movimento linear para equação de Newton em referencial móvel

Tomando como base os desenvolvimentos explicitados ao longo deste capítulo, pode-se inferir de maneira mais rápida e objetiva a correção da derivada do vetor quantidade de movimento linear  $p$  e, conseqüentemente, da equação de Newton em referencial móvel.

O vetor quantidade de movimento linear é expresso como

$$\vec{p} = p_x \vec{u}_x + p_y \vec{u}_y + p_z \vec{u}_z \quad (\text{A-88})$$

Por sua vez, o vetor  $\dot{\vec{v}}$  é dado por

$$\dot{\vec{v}} = \dot{v}_x \vec{u}_x + v_x \dot{\vec{u}}_x + \dot{v}_y \vec{u}_y + v_y \dot{\vec{u}}_y + \dot{v}_z \vec{u}_z + v_z \dot{\vec{u}}_z \quad (\text{A-89})$$

$$\dot{\vec{v}} = \begin{bmatrix} v_z\omega_y - v_y\omega_z \\ v_x\omega_z - v_z\omega_x \\ v_y\omega_x - v_x\omega_y \end{bmatrix} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (\text{A-90})$$

Dessa forma, pode-se inferir que

$$\dot{\vec{p}} = \dot{p}_x \vec{u}_x + p_x \dot{\vec{u}}_x + \dot{p}_y \vec{u}_y + p_y \dot{\vec{u}}_y + \dot{p}_z \vec{u}_z + p_z \dot{\vec{u}}_z \quad (\text{A-91})$$

$$\dot{\vec{v}} = \begin{bmatrix} p_z \omega_y - p_y \omega_z \\ p_x \omega_z - p_z \omega_x \\ p_y \omega_x - p_x \omega_y \end{bmatrix} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{p} \quad (\text{A-92})$$

Conseqüentemente

$$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow \dot{\vec{p}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} + \vec{\omega} \times m\vec{v} = m(\dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (\text{A-93})$$

onde  $m$  representa a massa do objeto.

Assim, verifica-se que a força  $F$  calculada pela equação de Newton será dada por

$$\sum \vec{F} = \frac{d(\vec{p})}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{p} = m(\dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (\text{A-94})$$

$$\sum \vec{F} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (\text{A-95})$$

### A.2.2

#### Correção da derivada vetor quantidade de movimento angular para equação de Euler em referencial móvel

De forma análoga ao procedimento executado na seção anterior, também pode-se inferir a correção da derivada do vetor quantidade de movimento angular  $h$  e, conseqüentemente, da equação de Euler em referencial móvel. O vetor quantidade de movimento angular é expresso como

$$\vec{h} = h_x \vec{u}_x + h_y \vec{u}_y + h_z \vec{u}_z \quad (\text{A-96})$$

Dessa forma, pode-se inferir que

$$\dot{\vec{h}} = \dot{h}_x \vec{u}_x + h_x \dot{\vec{u}}_x + \dot{h}_y \vec{u}_y + h_y \dot{\vec{u}}_y + \dot{h}_z \vec{u}_z + h_z \dot{\vec{u}}_z \quad (\text{A-97})$$

$$\dot{\vec{v}} = \begin{bmatrix} h_z \omega_y - h_y \omega_z \\ h_x \omega_z - h_z \omega_x \\ h_y \omega_x - h_x \omega_y \end{bmatrix} = \frac{d\vec{h}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{h} \quad (\text{A-98})$$

$$(\text{A-99})$$

Conseqüentemente

$$\vec{h} = I\vec{\omega} \rightarrow \dot{\vec{h}} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} + \vec{\omega} \times I\vec{\omega} = I\frac{d(\vec{\omega})}{dt} + \vec{\omega} \times I\vec{\omega} \quad (\text{A-100})$$

onde  $I$  representa o momento de inércia do objeto.

Assim, verifica-se que o torque  $\tau$  calculado pela equação de Euler será dado por

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d(\vec{h})}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{h} = J\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J\vec{\omega} \quad (\text{A-101})$$

$$\sum \vec{\tau} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times J \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (\text{A-102})$$